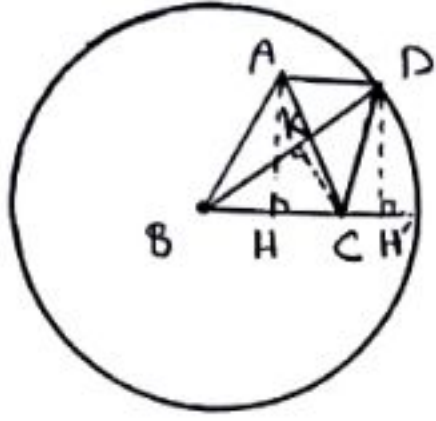


پانچ سوالات ہندسہ و گنتہ کنکور سراسری خارج از کشور ریاضی ۹۸ (نظام جدید)

تہیہ و تنظیم: فرزانه خالکباش - امیر حسین البکوب

۱۲۰ - گزینه "۳"



مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین ارتفاع AH، میانہ تقصیر ضلع BC

نیز هست و داریم:

$$\triangle AHB: AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

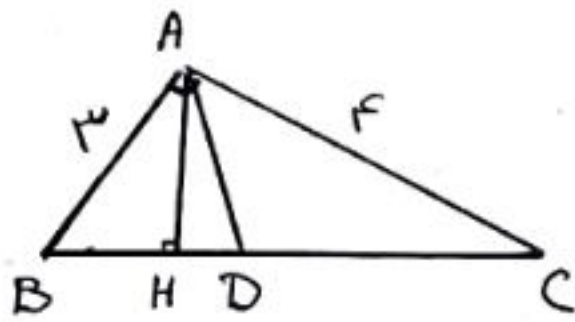
اگر پای ارتفاع وارد از نقطه C بر پاره خط BD را k و پای ارتفاع وارد از نقطه D بر امتداد پاره خط BC را H' بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} CK \times BD \\ S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} DH' \times BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times 25 = 15 \times 16 \Rightarrow CK = \frac{240}{25} = 9,6$$

دقت کنید کہ AH و DH' فاصله دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.

۱۲۱ - گزینه "۳"



$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

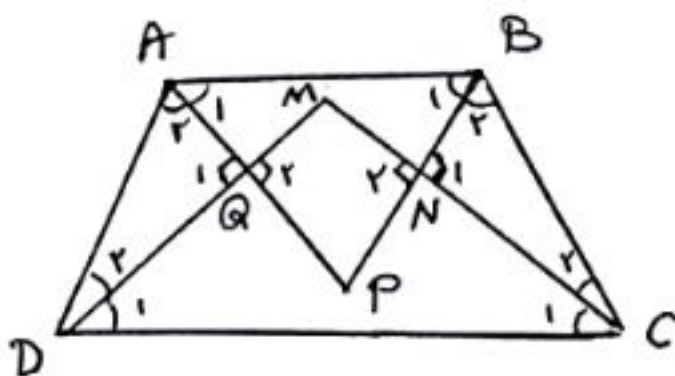
از طرفی طبق قضیه نیسارهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{4+3}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$

۱۲۲ - گزینه "۲"



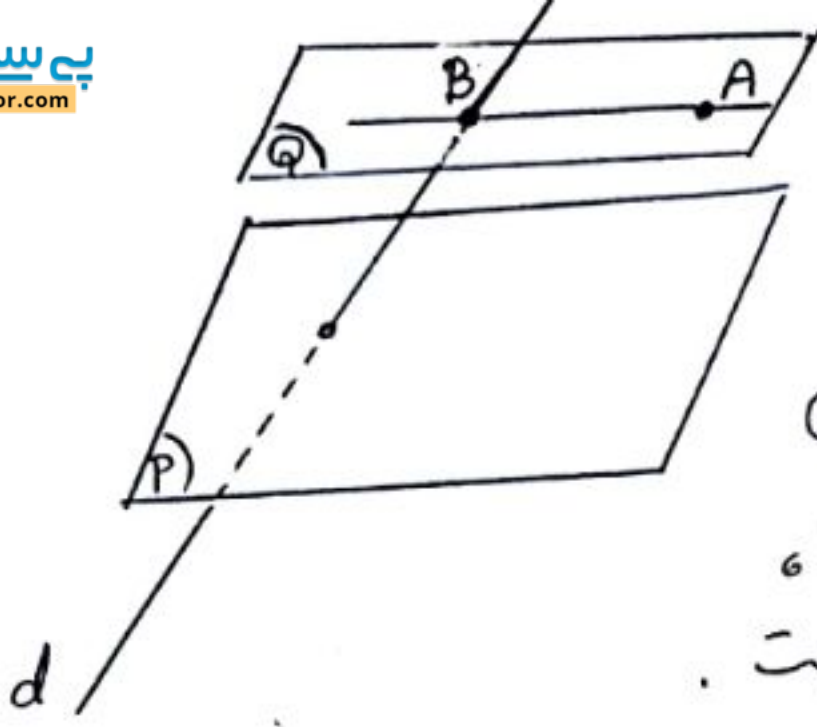
$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\triangle AQD} \hat{Q}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{Q}_2 = 90^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 90^\circ$$

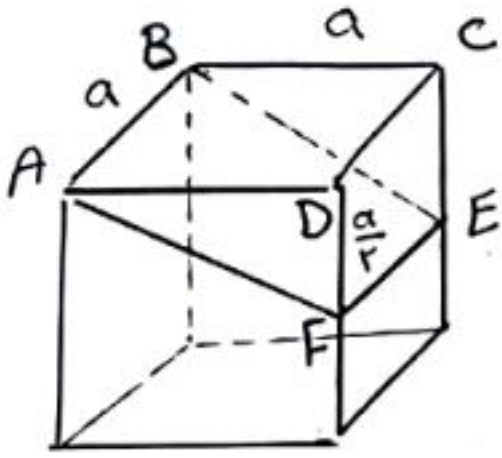
$$\xrightarrow{\triangle BNC} \hat{N}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{N}_2 = 90^\circ$$

بنابراین مجموع زوایای مقابل در چهارضلعی MNPQ برابر ۱۸۰ است، پس این چهارضلعی مماسی است.



۱۲۴ - گزینه "۴"

فرض کنید خط d و صفحه P متقاطع باشند. از نقطه A ،
صفحه Q را موازی با صفحه P رسم می کنیم. خط d و صفحه Q
را در نقطه B قطع می کند. حال خط گذرنده از نقاط A و B ،
توازی است که خط d را قطع کرده و با صفحه P موازی است.



۱۲۵ - گزینه "۱"

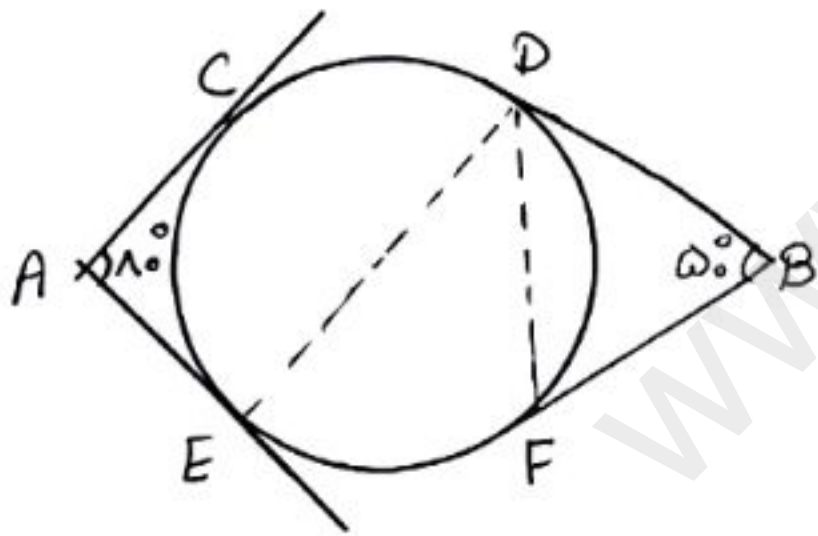
$$\triangle ADF: AF^2 = AD^2 + DF^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

سطح مقطع این برش، مستطیل $ABEF$ است. داریم:

$$S_{ABEF} = AB \times AF = a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2}a^2$$

$$\Rightarrow S_{ABEF} = \frac{\sqrt{5}}{2} S_{ABCD}$$



۱۲۵ - گزینه "۳"

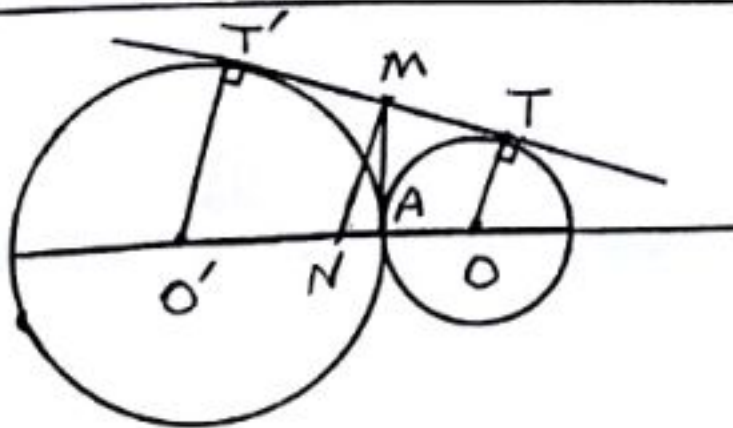
وتر CD برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{CD} = 40^\circ$ می باشد.

فرض $\widehat{CE} = x$ ، $\widehat{DE} = y$ و $\widehat{EF} = z$ داریم:

$$\widehat{B} = \frac{(40^\circ + x + z) - y}{2} = 50^\circ \Rightarrow x + z - y = 40^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{(40^\circ + y + z) - x}{2} = 18^\circ \Rightarrow y + z - x = 10^\circ$$

از جمع دو رابطه فوق داریم: $2z = 140^\circ \Rightarrow z = 70^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = \frac{z}{2} = 35^\circ$



۱۲۶ - گزینه "۱"

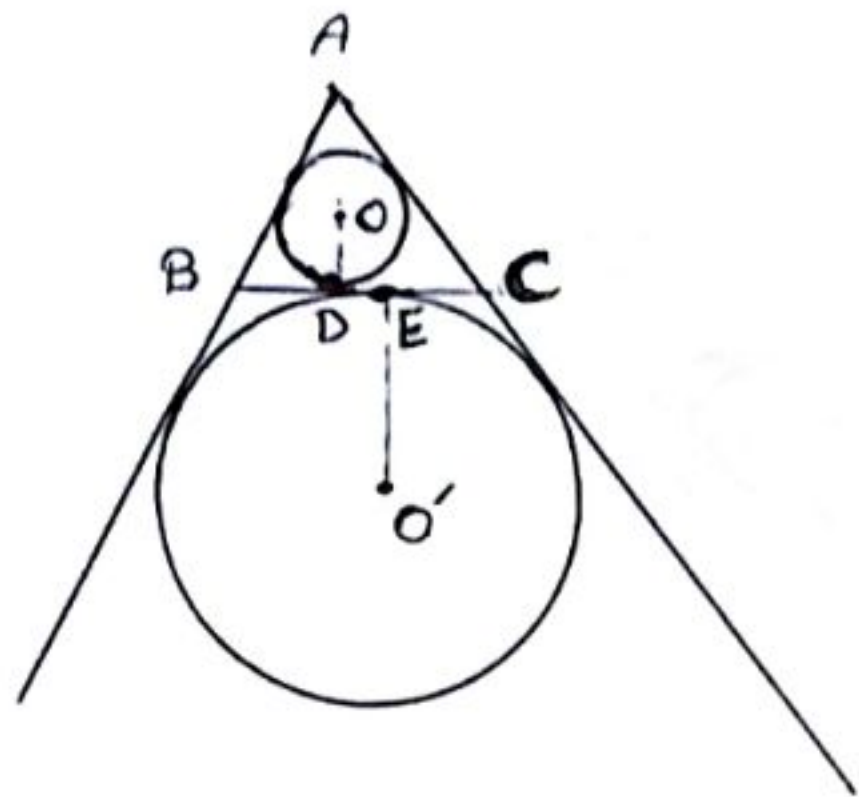
فرض کنید نقطه N وسط OO' و نقطه M وسط TT' باشد.

در ذوزنقه $OO'TT'$ داریم:

$$MN = \frac{OT + O'T'}{2} = \frac{R + R'}{2}$$

یعنی نقطه وسط مماس مشترک دو دایره روی دایره ای به قطر OO' است.

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{4 \times 9} = 12 \Rightarrow MA = MT = MT' = \frac{TT'}{2} = 6$$



فرض کنید دایره های محاط داخلی و محاط خارجی نظر رأس A
به ترتیب در نقاط E و D بر ضلع BC مماس باشند.

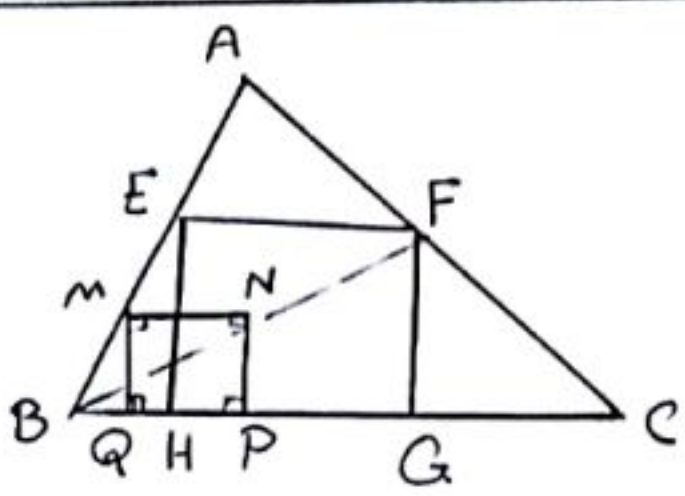
در این صورت داریم:

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{5 + 7 + 8}{2} = 10$$

تصویر نقاط O و O' (مراکز دو دایره) بر ضلع BC،

همان نقاط D و E هستند. داریم:

$$DE = BD - BE = (P - c) - (P - b) \\ = b - c = 7 - 5 = 2$$



مربع MNPQ را داخل مثلث ABC به گونه ای می سازیم که

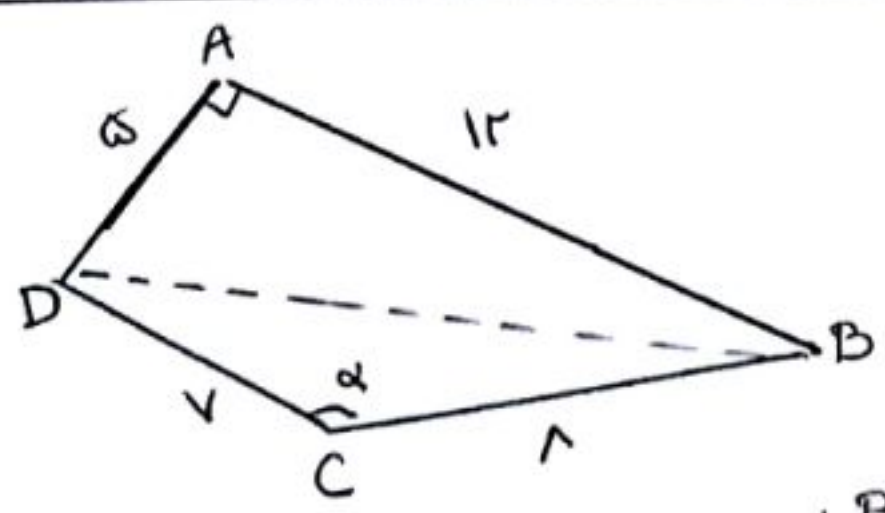
یکی از اضلاع آن روی ضلع BC واقع باشد. از رأس B

به نقطه N وصل کرده و امتداد می دهیم تا ضلع AC را در

نقطه F قطع کند و سپس از F خط موازی با BC رسم می کنیم تا

ضلع AB را در نقطه E قطع نماید. از نقاط E و F، دو عمود EH و FG را بر ضلع BC رسم می کنیم

چهار ضلعی EFGH مربع است و مجانب مربع MNPQ در بیانش به مرکز B می باشد.



$$\triangle ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow BD = 13$$

لجبق قضیه کینوس کا در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 169 = 64 + 25 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 112 \cos \alpha = -54 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ y & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+4y-1 & -2x+4 \\ 7+y & -3 \end{bmatrix}$$

۱۳۰ - گزینه "۲"

برای این که ماتریس قطری باشد، لازم است درایه ها خارج قطر اصلی آن همگی برابر صفر باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \\ 7+y=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

۱۳۱ - گزینه "۱"

۱۳۲ - گزینه "۴" طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان 3×3 داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 10 + 72) - (0 + 60 - 3) = 25$$

۱۳۳ - گزینه "۴"

فرض کنید معادله دایره مورد نظر به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. برای یافتن معادله وتر مشترک

دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می دهیم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 - 17 \Rightarrow ax + by = -c - 17$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $2x - y = 3$ منطبق است، پس داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{-c-17}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 3b - 17 \end{cases}$$

نقطه $(-1, 4)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادله دایره صدق می کند:

$$x^2 + y^2 + (-2b)x + by + 3b - 17 = 0 \xrightarrow{(-1, 4)} 36 + 1 - 12b - b + 3b - 17 = 0$$

$$\Rightarrow 10b = 20 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ c = -11 \end{cases}$$

$$\text{شعاع دایره: } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 4 + 44}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$

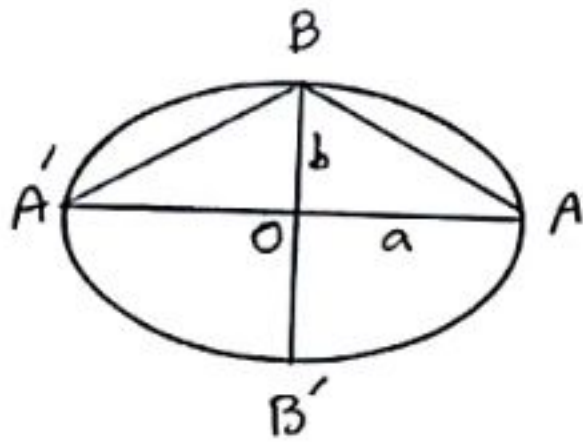
$$2x^2 - 4x + 3y = 4 \Rightarrow 2(x^2 - 2x + 1) - 2 = -3y + 4$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 = -3y + 6 \Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{3}{2}(y-2)$$

سہمی قائم است و روبہ پایین باز می شود و $S(1, 2)$ رأس سہمی است . داریم :

$$fa = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{8}$$

$$F(1, 2 - \frac{3}{8}) = (1, \frac{13}{8})$$



$$e = \sqrt{\frac{r}{3}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{r}{3}} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{r}{3} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{r}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - (\frac{b}{a})^2 = \frac{r}{3} \Rightarrow (\frac{b}{a})^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

$$\tan(\hat{ABO}) = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{ABO} = 60^\circ \Rightarrow \hat{ABA'} = 120^\circ$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

حجم متوازی السطوح برابر است با قدر مطلق دترمینان ماتریسی کہ در اینها آں مؤلفہا کے بردار

\vec{a} ، \vec{b} و $\vec{a} \times \vec{b}$ ہتند و بنا بر این داریم :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix} = (0 + 9 + 24) - (0 - 12 - 144) = 189 \Rightarrow V = 189$$

تعداد زیر مجموعہ های مجموعه A، برابر $2^9 = 512$ است، پس $|A| = 9$ بورہ و در نتیجہ داریم :

$$|(BUA')'| = |A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = 9 - 3 = 6$$

یعنی تعداد زیر مجموعہ های این مجموعه برابر $2^6 = 64$ است .

اگر احتمال شرکت امیر و بہروز در مسابقہ علمی را بہ ترتیب با A و B نمایش دہیم، آنگاہ داریم:

$$P(A) = 0,4 \text{ و } P(B) = 0,3$$

$$P(A|B) = 0,5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,15}{1 - 0,3} = \frac{0,25}{0,7} = \frac{5}{14}$$

۱۳۹ - گزینہ "ب"
با توجہ بہ آنکہ رنگ مرہ اول خارج شدہ از جعبہ را مسأحدہ نکرده ایم، مانند آن است کہ این مرہ

از جعبہ خارج شدہ است و در نتیجہ احتمال خارج شدن مرہ سفید از جعبہ، برابر $\frac{6}{10} = 0,6$ می باشد.

$$\bar{x} = \frac{6 \times 10 + 9 \times 12 + 10 \times 14 + 12 \times 15 + 8 \times 16 + 5 \times 18}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5} = \frac{706}{50} = 14,12$$

تعداد دارہ ہا برابر ۵ است. چون تعداد دارہ ہا زوج است، پس میانہ دارہ ہا برابر میانین دو دارہ وسط یعنی دارہ ہا بیست و پنجم و بیست و ششم است کہ با توجہ بہ فراوانی

$$Q_2 = \frac{14 + 15}{2} = 14,5 \quad \text{دارہ ہا داریم:}$$

$$Q_2 - \bar{x} = 14,5 - 14,12 = 0,38$$

اگر دارہ ہا را بہ صورت صعودی مرتب کنیم، داریم:

۳۲، ۳۷، ۳۹، ۴۲، ۴۶، ۵۰، ۵۴، ۵۶، ۵۷، ۵۹

میانہ دارہ ہا برابر است با $Q_2 = \frac{42 + 46}{2} = 44$ و چارک ہا اول و سوم بہ ترتیب $Q_1 = 39$ و $Q_3 = 56$ ہستند.

$$\bar{x} = \frac{42 + 46 + 50 + 54}{4} = 48 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-6)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 6^2}{4} = \frac{40}{4} = 10 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{5}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{24} \approx 0,09$$

$$[(427, 429), 154] = [(3 \times 11 \times 19, 3 \times 11 \times 33), 154]$$

$$= [33, 154] = [3 \times 11, 2 \times 7 \times 11] = 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha | 5n + 4 \xrightarrow{x=11} \alpha | 55n + 44 \\ \alpha | 11n + 3 \xrightarrow{x=5} \alpha | 55n + 15 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{فاضل}} \alpha | 29 \xrightarrow{\alpha \neq 1} \alpha = 29$$

$$29 | 5n + 4 \Rightarrow 5n + 4 \equiv 0 \pmod{29} \Rightarrow 5n \equiv -4 \equiv 25 \pmod{29} \Rightarrow n \equiv 5 \pmod{29}$$

$$\Rightarrow n = 29k + 5 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین اعداد دورقمی n عبارت اند از: ۳۴, ۶۳, ۹۲

$$9x + 13y = 725 \Rightarrow 13y \equiv 725 \pmod{9} \Rightarrow 4y \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow y \equiv -1 \pmod{9}$$

$$\xrightarrow{\div 4} y \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow y = 9k - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(۴, ۹) = ۱

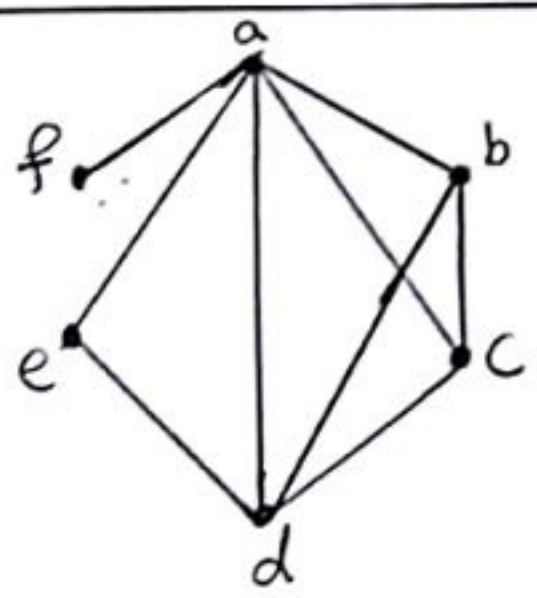
$$9x + 13(9k - 1) = 725 \Rightarrow 9x = -117k + 738 \Rightarrow x = -13k + 82$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow -13k + 82 > 0 \Rightarrow k < \frac{82}{13} \\ y > 0 \Rightarrow 9k - 1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \leq k \leq 6$$

یعنی این معادله سیاه دارای ۶ دسته جواب طبیعی است.

$$\begin{array}{l} 3 \epsilon_1 \quad \epsilon_1 \\ 5 \equiv 125 \equiv 2 \end{array} \xrightarrow{\text{بہ توان ۳}} \begin{array}{l} 9 \epsilon_1 \\ 5 \equiv 8 \end{array} \xrightarrow{x=5} \begin{array}{l} 10 \epsilon_1 \quad \epsilon_1 \\ 5 \equiv 40 \equiv 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{بہ توان ۲}} \begin{array}{l} 20 \epsilon_1 \quad \epsilon_1 \\ 5 \equiv 1 \end{array}$$



دورهای به طول ۳ در این گراف عبارت اند از:
abca, acda, abda, adea, bcdb

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \Rightarrow j_1 + 2 + j_2 + 2 + j_3 + 2 + j_4 + 2 = 15$$

$$\Rightarrow j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 7 \rightarrow \text{تعداد جوابات} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

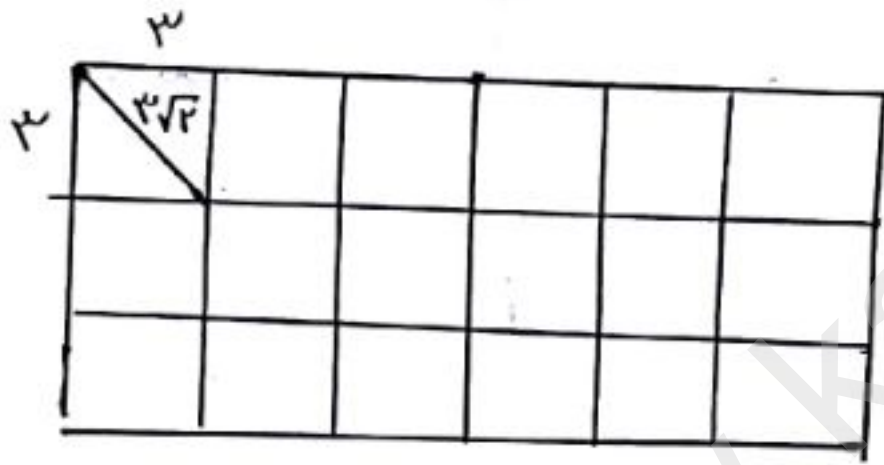
فرض کنید S مجموعه اعداد سه رقمی و A_1 و A_2 زیر مجموعه های S باشند که به ترتیب فاقد ۵ و ۲ هستند. داریم:

$$|S| = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

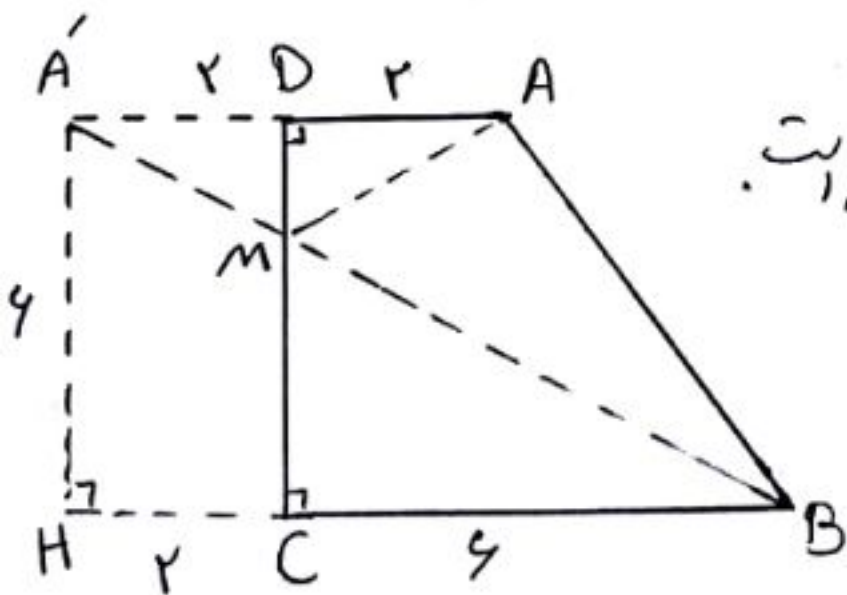
$$|A_1| = |A_2| = 8 \times 9 \times 9 = 648$$

$$|A_1 \cap A_2| = 7 \times 8 \times 8 = 448$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 900 - (648 + 648 - 448) = 52$$



مطابق شکل اگر مستطیل را به ۱۸ مربع به طول ضلع ۳ تقسیم کنیم، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری اگر ۱۹ نقطه داخل مستطیل انتخاب کنیم، حداقل دو نقطه از میان آنها داخل یک مربع قرار گرفته و در نتیجه فاصله آنها از طول قطر مربع یعنی $3\sqrt{2}$ کمتر است.



مطابق شکل کمترین مقدار $MA + MB$ ، برابر طول پاره خط $A'B'$ است.

در مثل قائم الزاویه $A'HB'$ داریم:

$$A'B'^2 = A'H^2 + BH^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow A'B' = 10$$

$$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r) \equiv \sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$$

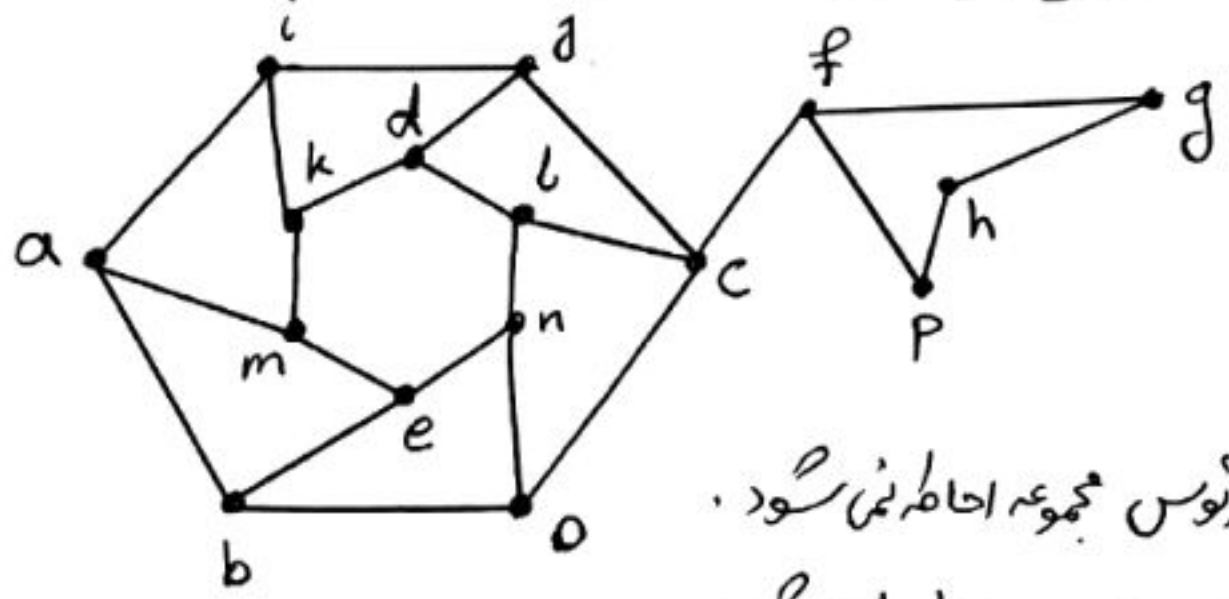
$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

گزاره سوری گزینه "۱" درست است ، زیرا معادله $x^2 - 2x + 2 = 0$ به دلیل منفی بودن

دلتا معادله فاقد جواب است و در نتیجه به دلیل مثبت بودن علامت ضرب x^2 ، عبارت

$x^2 - 2x + 2$ همواره مثبت است یا به عبارت دیگر به ازای تمامی اعداد حقیقی داریم : $x^2 + 2 > 2x$

مجموعه $\{a, b, c, d, h\}$ یک مجموعه احاطه گر منبسط برای این گراف است . برای سایر گزینه ها داریم :



گزینه "۱" : رأس h توسط هیچ کدام از رئوس مجموعه احاطه نمی شود .
گزینه "۲" : رأس p توسط هیچ کدام از رئوس مجموعه احاطه نمی شود .

تعداد رئوس ها که برنامه ریزی برای حل این سوال ، برابر تعداد مربع ها که لاین مرتبه ۳ است

فرض کنید سطر اول مربع لاین 3×3 به صورت $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ باشد (a, b, c جایگشتی

از اعداد ۱، ۲ و ۳ است) . با توجه به شکل زیر ، x برابر b یا c است .

a	b	c
x		

با توجه به این که اعداد سطرها یا ستونها نمی توانند یکسان باشند ،

مربع لاین فقط به یکی از دو صورت زیر برمی خورد :

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
b	c	a

با در نظر گرفتن جایگشت ها که سطر اول ، تعداد مربع ها که لاین 3×3 برابر است با :

$$3! \times 2 = 12$$