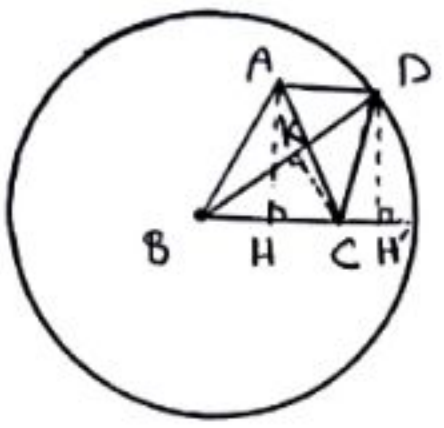
پاسخ سؤالات هندسه و گسسته کنکور سراسری خارج از کشور ریاضی ۹۸ (نظام جدید)

تهیه و تنظیم : فرزانه خاکپاش - امیرحسین ابومحبوب

۱۲۰- گزینهٔ «۳»



مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع AH، میانهٔ نظیر ضلع BC نیز هست و داریم:

$$\overset{\triangle}{AHB}: AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

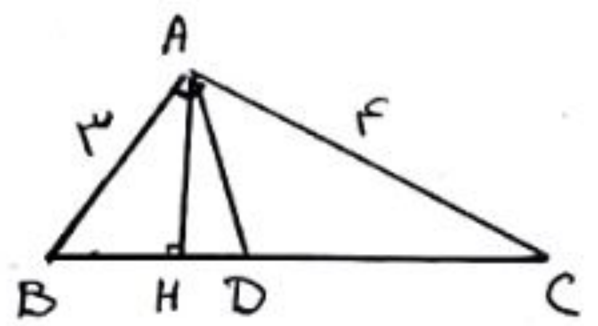
اگر پای ارتفاع وارد از نقطهٔ C بر پاره‌خط BD را K و پای ارتفاع وارد از نقطهٔ D بر امتداد پاره‌خط BC را H' بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{aligned} S_{\overset{\triangle}{BCD}} &= \frac{1}{2} CK \times BD \\ S_{\overset{\triangle}{BCD}} &= \frac{1}{2} DH' \times BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times 25 = 15 \times 16 \Rightarrow CK = \frac{240}{25} = 9.6$$

دقت کنید که DH' و AH فاصلهٔ دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.

۱۲۱- گزینهٔ «۳»



$$\overset{\triangle}{ABC}: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

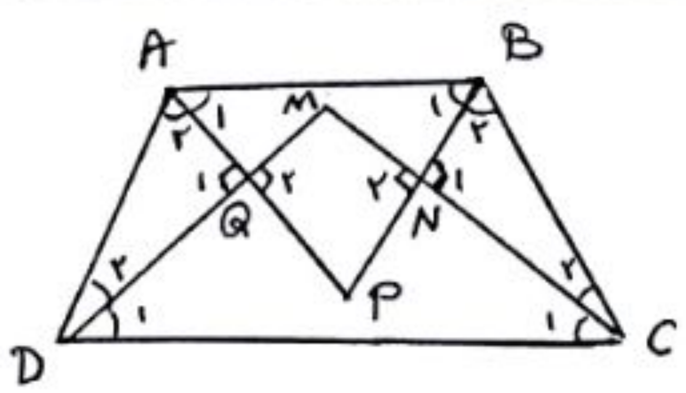
از طرفی طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{4+3}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75-63}{35} = \frac{12}{35}$$

۱۲۲- گزینهٔ «۲»



$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ$$

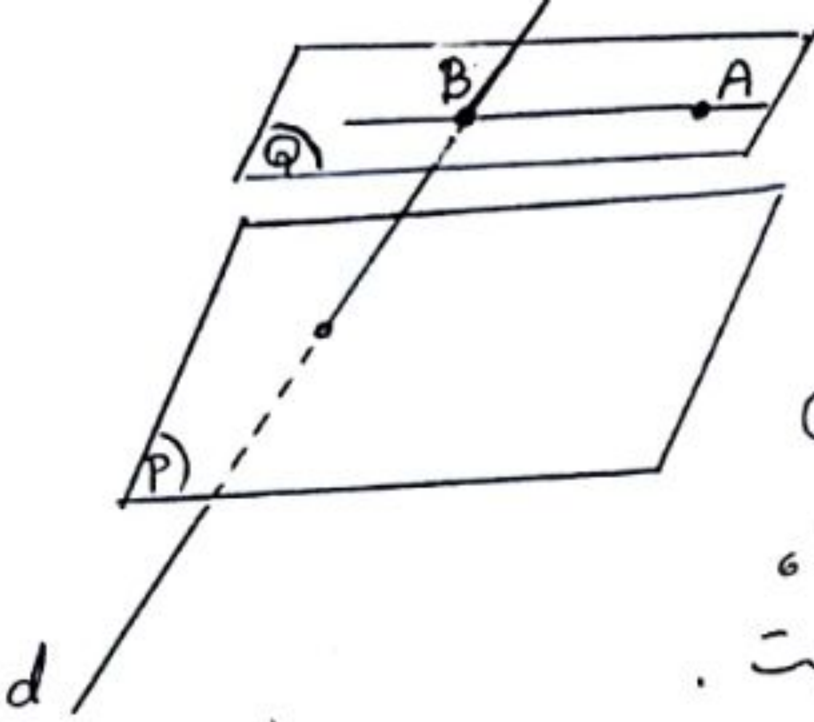
$$\xrightarrow{\overset{\triangle}{AQD}} \hat{Q}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{Q}_2 = 90^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\overset{\triangle}{BNC}} \hat{N}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{N}_2 = 90^\circ$$

بنابراین مجموع زوایای متقابل در چهارضلعی MNPQ برابر 180° است، پس این چهارضلعی محاطی است.

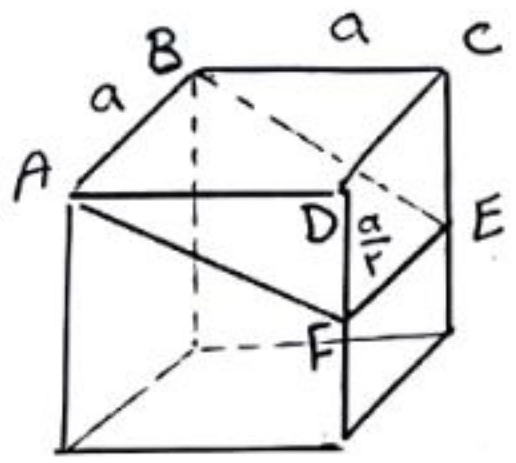
۱۲۳ - گزینهٔ «۴»



فرض کنید خط d و صفحهٔ P متقاطع باشند. از نقطهٔ A، صفحهٔ Q را موازی با صفحهٔ P رسم می‌کنیم. خط d، صفحهٔ Q را در نقطهٔ B قطع می‌کند. حال خط گذرنده از نقاط A و B، تنها خطی است که خط d را قطع کرده و با صفحهٔ P موازی است.

---

۱۲۴ - گزینهٔ «۱»



$$\hat{ADF}: AF^2 = AD^2 + DF^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

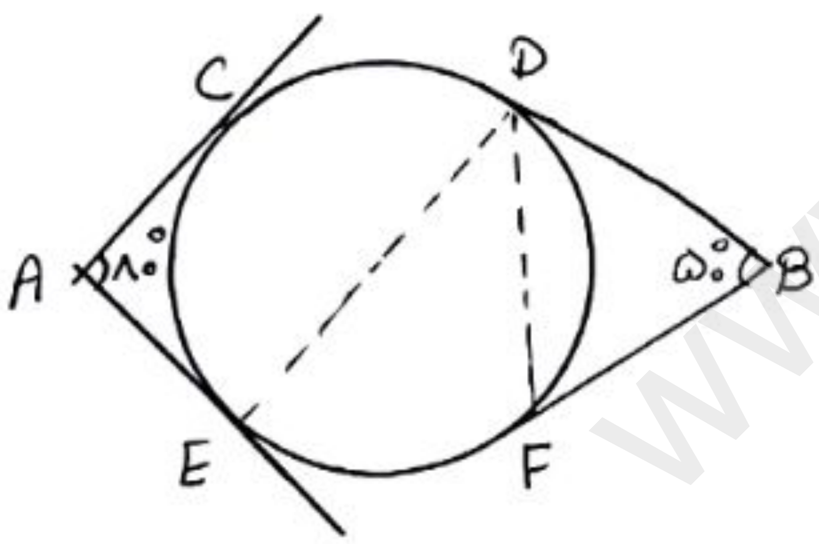
سطح مقطع این برش، مستطیل ABEF است. داریم:

$$S_{ABEF} = AB \times AF = a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2}a^2$$

$$\Rightarrow S_{ABEF} = \frac{\sqrt{5}}{2} S_{ABCD}$$

---

۱۲۵ - گزینهٔ «۳»



وتر CD برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{CD} = 60^\circ$ می‌باشد.

با فرض $\widehat{CE} = x$، $\widehat{DE} = y$ و $\widehat{EF} = z$ داریم:

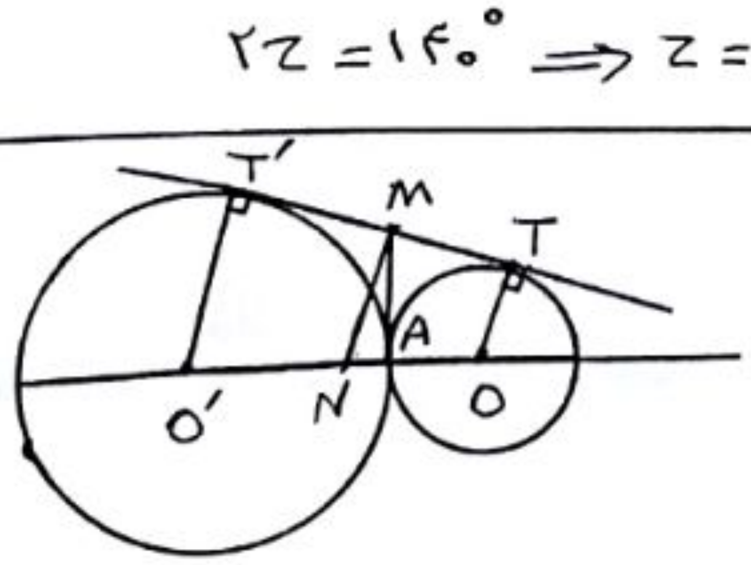
$$\hat{B} = \frac{(60^\circ + x + z) - y}{2} = 50^\circ \Rightarrow x + z - y = 40^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{(60^\circ + y + z) - x}{2} = 80^\circ \Rightarrow y + z - x = 100^\circ$$

از جمع دو رابطهٔ فوق داریم: $2z = 140^\circ \Rightarrow z = 70^\circ \Rightarrow E\hat{D}F = \frac{z}{2} = 35^\circ$

---

۱۲۶ - گزینهٔ «۱»



فرض کنید نقطهٔ N وسط OO' و نقطهٔ M وسط TT' باشد.

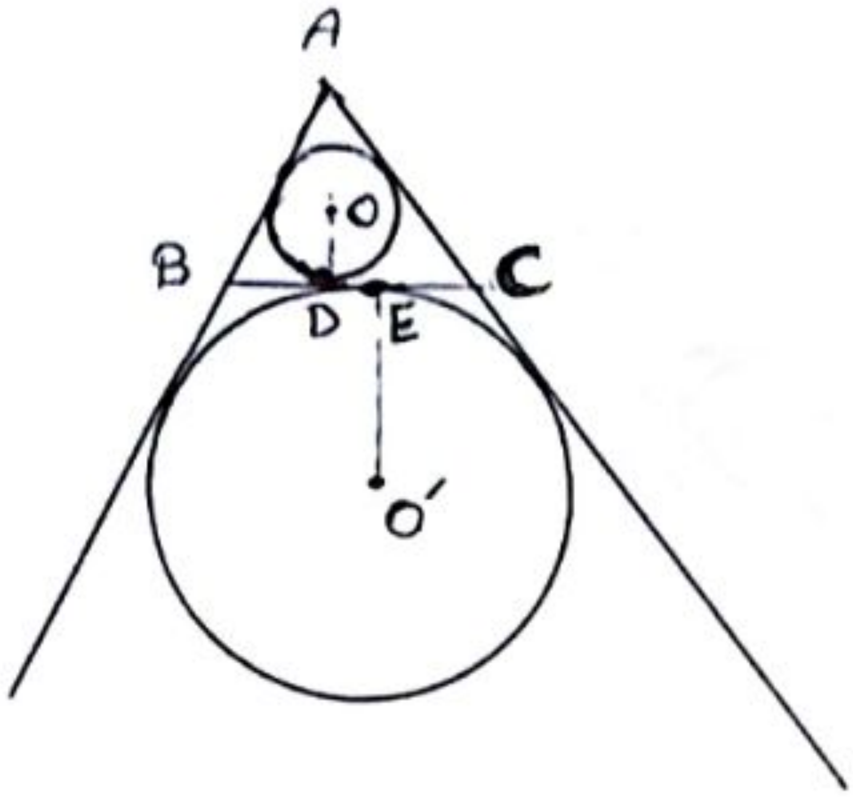
در ذوزنقهٔ $OO'T'T$ داریم:

$$MN = \frac{OT + O'T'}{2} = \frac{R + R'}{2}$$

یعنی نقطهٔ وسط مماس مشترک دو دایره روی دایره‌ای به قطر OO' است.

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{4 \times 9} = 12 \Rightarrow MA = MT = MT' = \frac{TT'}{2} = 6$$

۱۲۷ - گزینهٔ «۳»



فرض کنید دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر رأس A به ترتیب در نقاط D و E بر ضلع BC مماس باشند.

در این صورت داریم:

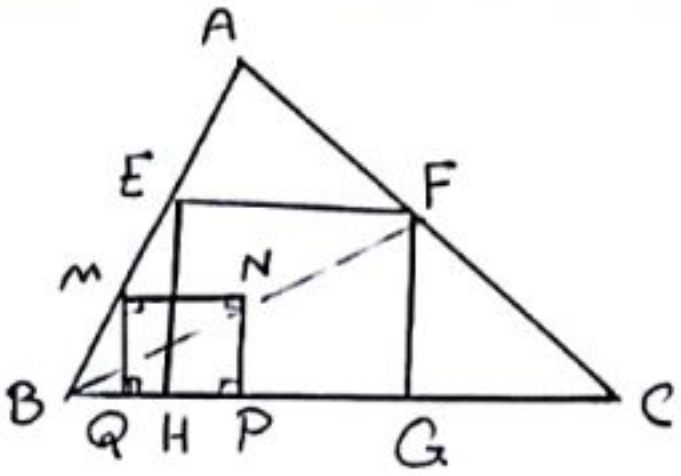
$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{5 + 7 + 8}{2} = 10$$

تصویر نقاط O و O' (مراکز دو دایره) بر ضلع BC، همان نقاط D و E هستند. داریم:

$$DE = BD - BE = (P - c) - (P - b)$$
$$= b - c = 7 - 5 = 2$$

---

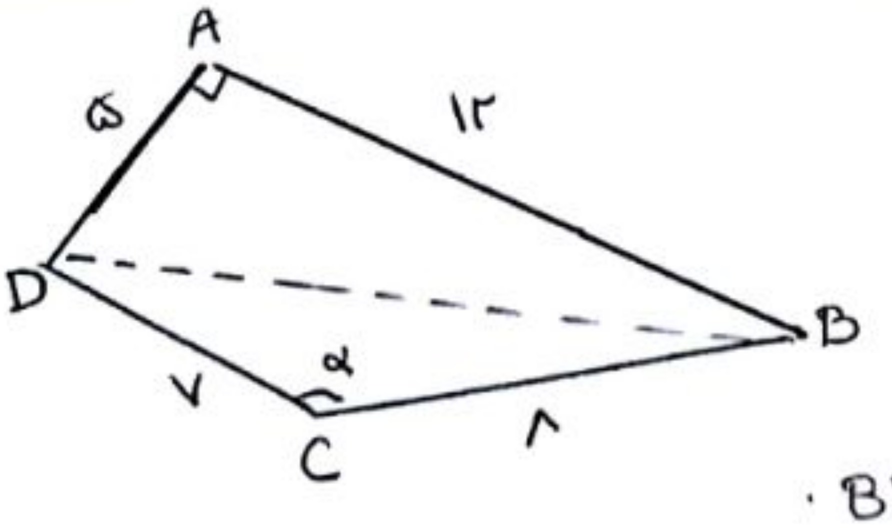
۱۲۸ - گزینهٔ «۲»



مربع MNPQ را داخل مثلث ABC به گونه‌ای می‌سازیم که یکی از اضلاع آن روی ضلع BC واقع باشد. از رأس B به نقطهٔ N وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در نقطهٔ F قطع کند و سپس از F خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ E قطع نماید. از نقاط E و F، دو عمود EH و FG را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. چهارضلعی EFGH مربع است و مجانس مربع MNPQ در تجانس به مرکز B می‌باشد.

---

۱۲۹ - گزینهٔ «۳»



$$\overset{\triangle}{ABD}: BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow BD = 13$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC \times CD \times \cos\alpha$$
$$\Rightarrow 169 = 64 + 49 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos\alpha$$
$$\Rightarrow 112\cos\alpha = -56 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۰ - گزینهٔ «۲»

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+4y-1 & -2x+4 \\ 7+y & -3 \end{bmatrix}$$

برای این که ماتریس قطری باشد ، لازم است درایه های خارج قطر اصلی آن همگی برابر صفر باشند ، بنابراین داریم :

$$\begin{cases} -2x+4=0 \Rightarrow x=2 \\ 7+y=0 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

---

۱۳۱ - گزینهٔ «۱»

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

---

۱۳۲ - گزینهٔ «۴»

طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ۳×۳ داریم :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (0+10+72)-(0+60-3)=25$$

---

۱۳۳ - گزینهٔ «۴»

فرض کنید معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد . برای یافتن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره ، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می دهیم :

$$x^2+y^2+ax+by+c=x^2+y^2-17 \Rightarrow ax+by=-c-17$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $2x-y=3$ منطبق است ، پس داریم :

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{-c-17}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ c=3b-17 \end{cases}$$

نقطهٔ $(6,-1)$ روی دایره است ، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می کند :

$$x^2+y^2+(-2b)x+by+3b-17=0 \xrightarrow{(6,-1)} 36+1-12b-b+3b-17=0$$

$$\Rightarrow 10b=20 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ c=-11 \end{cases}$$

شعاع دایره : $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\dfrac{\sqrt{16+4+44}}{2}=\dfrac{\sqrt{64}}{2}=4$

۱۳۴- گزینهٔ «۲»

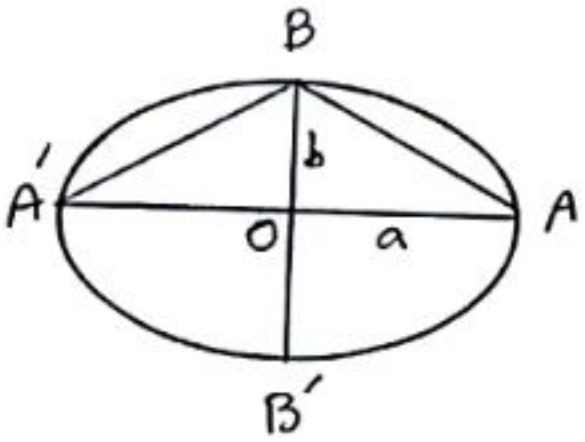
$$2x^2-4x+3y=4 \Rightarrow 2(x^2-2x+1)-2=-3y+4$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2=-3y+6 \Rightarrow (x-1)^2=-\frac{3}{2}(y-2)$$

سهمی قائم است و رو به پایین باز می‌شود و $S(1,2)$ رأس سهمی است. داریم:

$$4a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{8}$$

کانون سهمی: $F(1, 2-\frac{3}{8})=(1,\frac{13}{8})$



۱۳۵- گزینهٔ «۳»

$$e=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b}=\sqrt{3}$$

$$\tan(A\hat{B}O)=\frac{OA}{OB}=\frac{a}{b}=\sqrt{3} \Rightarrow A\hat{B}O=60^\circ \Rightarrow A\hat{B}A'=120^\circ$$

۱۳۶- گزینهٔ «۴»

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3\vec{i}-6\vec{j}-12\vec{k}$$

حجم متوازی السطوح برابر است با قدرمطلق دترمینان ماتریسی که درایه‌های آن، مؤلفه‌های سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix}=(0+9+24)-(0-12-144)=189 \Rightarrow V=189$$

۱۳۷- گزینهٔ «۴»

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A، برابر $2^9=512$ است، پس $|A|=9$ بوده و در نتیجه داریم:

$$|(B\cup A')'|=|A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|=9-3=6$$

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $2^6=64$ است.

۱۳۸ - گزینهٔ «۱»

اگر احتمال شرکت امیر و بهروز در مسابقهٔ علمی را به ترتیب با A و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A)=0{,}6 \quad \text{و} \quad P(B)=0{,}3$$

$$P(A|B)=0{,}5 \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0{,}5 \Rightarrow P(A\cap B)=0{,}5\times 0{,}3=0{,}15$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0{,}6-0{,}15}{1-0{,}3}=\frac{0{,}45}{0{,}7}=\frac{9}{14}$$

---

۱۳۹ - گزینهٔ «۲»

با توجه به آنکه رنگ مهرهٔ اول خارج شده از جعبه را مشاهده نکرده‌ایم، مانند آن است که این مهره از جعبه خارج نشده است و در نتیجه احتمال خارج شدن مهرهٔ سفید از جعبه، برابر $0{,}6=\frac{6}{10}$ می‌باشد.

---

۱۴۰ - گزینهٔ «۴»

$$\bar{x}=\frac{6\times 10+9\times 12+10\times 14+12\times 15+8\times 16+5\times 18}{6+9+10+12+8+5}=\frac{706}{50}=14{,}12$$

تعداد داده‌ها برابر ۵۰ است. چون تعداد داده‌ها زوج است، پس میانهٔ داده‌ها برابر میانگین دو دادهٔ وسط یعنی داده‌های بیست‌وپنجم و بیست‌وششم است که با توجه به فراوانی داده‌ها داریم:

$$Q_2=\frac{14+15}{2}=14{,}5$$

$$Q_2-\bar{x}=14{,}5-14{,}12=0{,}38$$

---

۱۴۱ - گزینهٔ «۲»

اگر داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کنیم، داریم:

$$32,\ 37,\ 39,\ 42,\ 46,\ 50,\ 54,\ 56,\ 57,\ 59$$

میانهٔ داده‌ها برابر است با $Q_2=\frac{46+50}{2}=48$ و چارک‌های اول و سوم به ترتیب $Q_1=39$ و $Q_3=56$ هستند. در نتیجه داده‌های داخل جعبه عبارت‌اند از: ۴۲، ۴۶، ۵۰ و ۵۴

$$\bar{x}=\frac{42+46+50+54}{4}=48 \Rightarrow \sigma^2=\frac{(-6)^2+(-2)^2+2^2+6^2}{4}=\frac{80}{4}=20 \Rightarrow \sigma=2\sqrt{5}$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{5}}{24}\simeq 0{,}09$$

۱۴۲ـ گزینهٔ «۱»

$$[(۶۲۷, ۴۲۹), ۱۵۴] = [(۳\times۱۱\times۱۹ , ۳\times۱۱\times۳۳), ۱۵۴]$$

$$= [۳۳, ۱۵۴] = [۳\times۱۱ , ۲\times۷\times۱۱] = ۲\times۳\times۷\times۱۱ = ۴۶۲$$

۱۴۳ـ گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \mid ۵n+۴ \xrightarrow{\times ۱۱} \alpha \mid ۵۵n+۴۴ \\ \alpha \mid ۱۱n+۳ \xrightarrow{\times ۵} \alpha \mid ۵۵n+۱۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \alpha \mid ۲۹ \overset{\alpha\neq ۱}{\Longrightarrow} \alpha = ۲۹$$

$$۲۹ \mid ۵n+۴ \Rightarrow ۵n+۴ \overset{۲۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵n \overset{۲۹}{\equiv} -۴ \overset{۲۹}{\equiv} ۲۵ \Rightarrow n \overset{۲۹}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow n = ۲۹k + ۵ \quad (k\in \mathbb{Z})$$

بنابراین اعداد دو رقمی n عبارت اند از: ۳۴, ۶۳, ۹۲

۱۴۴ـ گزینهٔ «۴»

$$۹x + ۱۳y = ۷۲۵ \Rightarrow ۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷۲۵ \Rightarrow ۴y \overset{۹}{\equiv} ۵ \overset{۹}{\equiv} -۴$$

$$\xrightarrow[(۴,۹)=۱]{\div ۴} y \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow y = ۹k-۱ \quad (k\in \mathbb{Z})$$

$$۹x + ۱۳(۹k-۱) = ۷۲۵ \Rightarrow ۹x = -۱۱۷k + ۷۳۸ \Rightarrow x = -۱۳k + ۸۲$$

$$\left.\begin{array}{l} x>۰ \Rightarrow -۱۳k+۸۲>۰ \Rightarrow k<\frac{۸۲}{۱۳} \\ y>۰ \Rightarrow ۹k-۱>۰ \Rightarrow k>\frac{۱}{۹} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ \leqslant k \leqslant ۶$$

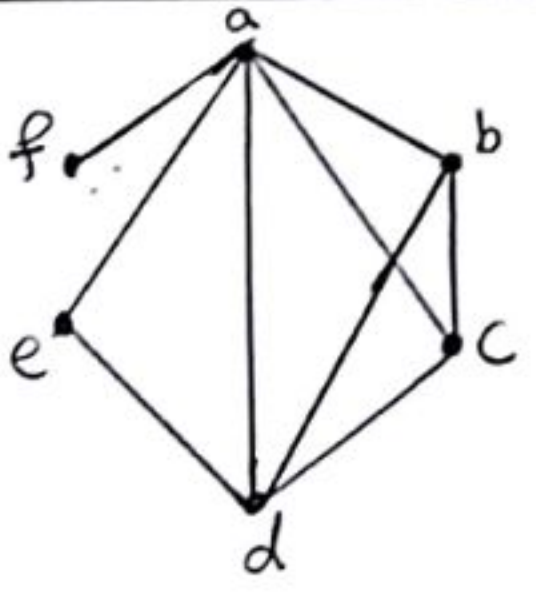
یعنی این معادلهٔ سیاله دارای ۶ دسته جواب طبیعی است.

۱۴۵ـ گزینهٔ «۱»

$$۵^{۳} \overset{۴۱}{\equiv} ۱۲۵ \overset{۴۱}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{به توان } ۳} ۵^{۹} \overset{۴۱}{\equiv} ۸ \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۱۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۴۰ \overset{۴۱}{\equiv} -۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } ۲} ۵^{۲۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۱$$

۱۴۶ـ گزینهٔ «۳»



دورهای به طول ۳ در این گراف عبارت اند از:

abca, acda, abda, adea, bcdb

۱۴۷ - گزینهٔ «۲»

$$x_1+x_2+x_3+x_4=15 \Rightarrow y_1+2+y_2+2+y_3+2+y_4+2=15$$

$$\Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4=7 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} = \binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120$$

---

۱۴۸ - گزینهٔ «۱»

فرض کنید S مجموعهٔ اعداد سه رقمی و A_1 و A_2 زیرمجموعه‌هایی از S باشند که به ترتیب فاقد ۵ و ۲ هستند. داریم:

$$|S|=9\times10\times10=900$$

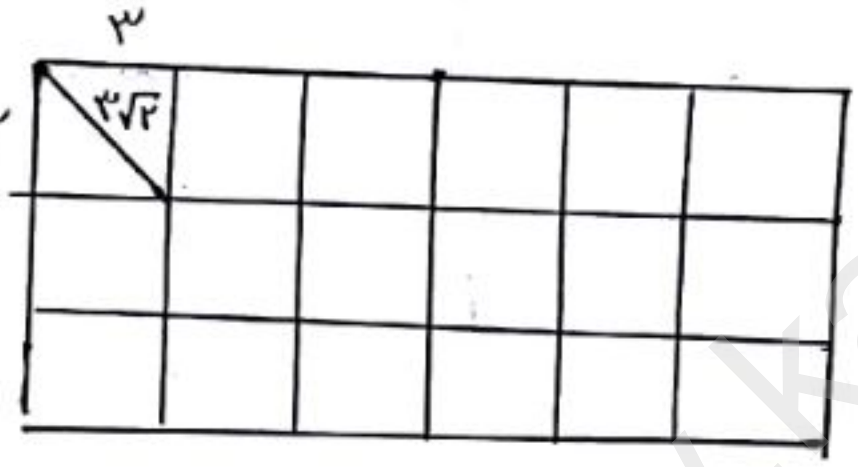
$$|A_1|=|A_2|=8\times9\times9=648$$

$$|A_1\cap A_2|=7\times8\times8=448$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=|S|-|A_1\cup A_2|=900-(648+648-448)=52$$

---

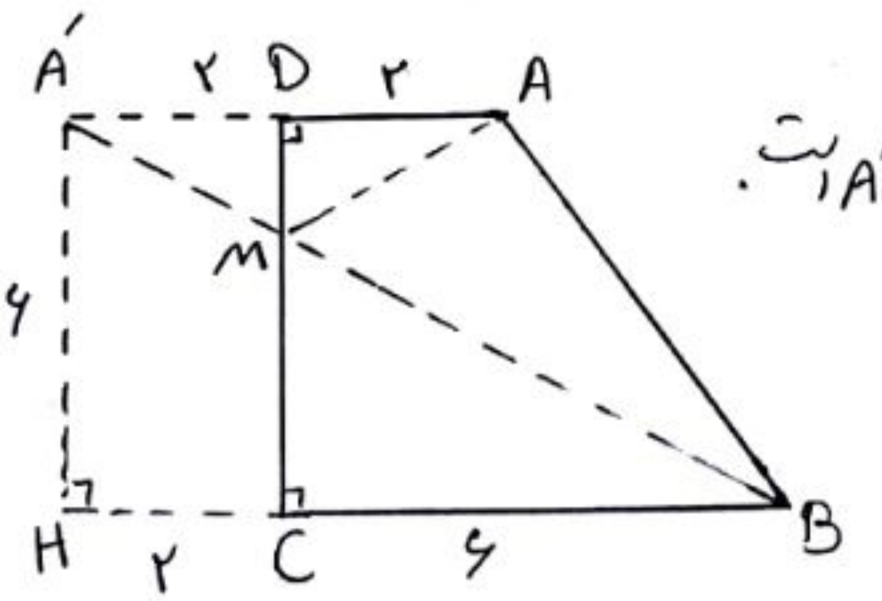
۱۴۹ - گزینهٔ «۳»



مطابق شکل اگر مستطیل را به ۱۸ مربع به طول ضلع ۳ تقسیم کنیم، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری اگر ۱۹ نقطه داخل مستطیل انتخاب کنیم، حداقل دو نقطه از میان آنها داخل یک مربع قرار گرفته و در نتیجه فاصلهٔ آنها از طول قطر مربع یعنی $3\sqrt{2}$ کمتر است.

---

۱۵۱ - گزینهٔ «۱»



مطابق شکل کمترین مقدار $MA+MB$، برابر طول پاره‌خط $A'B$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'HB$ داریم:

$$A'B^2=A'H^2+BH^2=6^2+8^2=100 \Rightarrow A'B=10$$

---

۱۵۲ - گزینهٔ «۲»

$$(\sim p\vee\sim q)\Rightarrow(p\wedge r)\equiv\sim(p\wedge q)\Rightarrow(p\wedge r)$$

$$\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\equiv p\wedge(q\vee r)$$

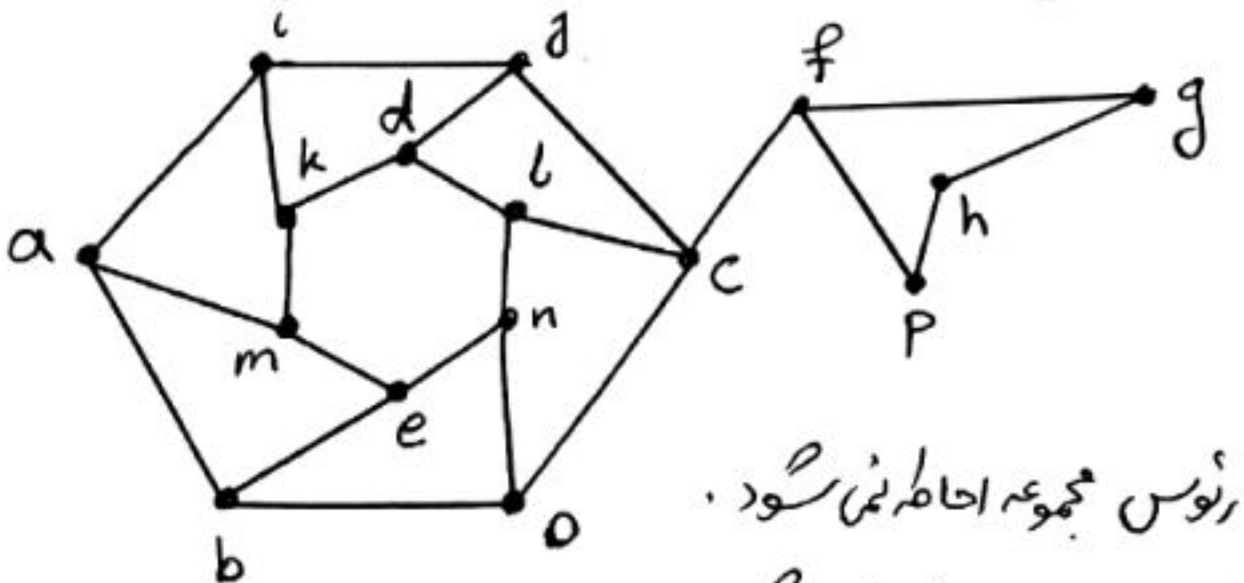
۱۵۳ - گزینهٔ «۱»

گزارهٔ سوری گزینهٔ «۱» درست است، زیرا معادلهٔ $x^2-2x+2=0$ به دلیل منفی بودن دلتای معادله فاقد جواب است و در نتیجه به دلیل مثبت بودن علامت ضریب x^2، عبارت x^2-2x+2 همواره مثبت است یا به عبارت دیگر به ازای تمامی اعداد حقیقی داریم: $x^2+2 < 2x$

---

۱۵۴ - گزینهٔ «۳»

مجموعهٔ $\{a,b,c,d,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای این گراف است. برای سایر گزینه‌ها داریم:



گزینهٔ «۱»: رأس n توسط هیچ کدام از رئوس مجموعه احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ «۲» و «۴»: رأس P توسط هیچ کدام از رئوس مجموعه احاطه نمی‌شود.

---

۱۵۵ - گزینهٔ «۳»

تعداد روش‌های برنامه‌ریزی برای حل این سؤال، برابر تعداد مربع‌های لاتین مرتبهٔ ۳ است.

فرض کنید سطر اول مربع لاتین 3×3 به صورت $\boxed{a \mid b \mid c}$ باشد (a، b و c جایگشتی از اعداد ۱، ۲ و ۳ است). با توجه به شکل زیر، x برابر b یا c است.

a	b	c
x		

با توجه به این که اعداد سطرها یا ستون‌ها نمی‌توانند یکسان باشند، مربع لاتین فقط به یکی از دو صورت زیر پر می‌شود:

a	b	c
c	a	b
b	c	a

a	b	c
b	c	a
c	a	b

با در نظر گرفتن جایگشت‌های سطر اول، تعداد مربع‌های لاتین 3×3 برابر است با:

$$3! \times 2 = 12$$