حل تشریحی آزمون سراسری خارج از کشور ۹۸ رشته ریاضی

۱۰۱) گزینه ۴

تعداد اعضای ورزشکار $= |A| = 15$

تعداد اعضای فوتبال $= |F| = 12 \Rightarrow |A\cup F| = |A| + |F| - |A\cap F|$

هر دو $= |A\cap F| = 7 \qquad = 15 + 12 - 7 = 20$

$\Rightarrow |A'\cap F'| = 42 - 20 = 22$

---

۱۰۲) گزینه ۳

$$A = \sqrt[5]{\sqrt{3^5}} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[10]{3^5} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{(4\times 3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}} \times 3^1} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

---

۱۰۳) گزینه ۳

همواره منفی $\Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 4(m-3)^2 + 4(1-m) < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \\ a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow \underset{(1)}{\underline{m > 1}} \end{cases}$

$(m-2)(m-5) < 0$

$\underset{(2)}{\underline{2 < m < 5}}$

$(1) \cap (2) \quad \boxed{2 < m < 5}$

---

۱۰۴) گزینه ۴

$$f(x+2) - 9 = (x+2)^2 - (x+2) - 2 - 9 = x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) < 0$$

$$\Rightarrow \underline{-2 < x < 5}$$

---

۱۰۵) گزینه ۱

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{2\times 5} + \frac{8-5}{5\times 8} + \frac{11-8}{8\times 11} + \cdots + \frac{20-17}{17\times 20}\right)$$

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{11}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{17}} - \frac{1}{20}\right)$$

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{20}\right) = \frac{3}{20} = 0/15$$

---

۱۰۶) گزینه ۲

$\xrightarrow{x < -2} \quad 1 - 2x - x - 2 = 3 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ غ ق ق

$\xrightarrow{-2 \le x < \frac{1}{2}} \quad 1 - 2x + x + 2 = 3 \Rightarrow \underline{x = 0}$ ق ق $\longrightarrow$ مجموع $= \frac{2}{3}$

$\xrightarrow{x \ge \frac{1}{2}} \quad 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow \underline{x = \frac{2}{3}}$ ق ق

۱۰۷) گزینه ۴

$g^{-1}=\{(4,3),(3,4),(6,5),(1,3)\} \Rightarrow g^{-1}\circ f=\{(1,4),(4,5)\}$

$\Rightarrow (g^{-1}\circ f)-f=\{(1,3),(4,-1)\} \longrightarrow$ برد $=\{-1,3\}$

۱۰۸) گزینه ۳

$M\Big|^{1}_{1}\in f \to f(1)=1 \Rightarrow 3^{A+B}=1=3^{0} \to A+B=0$

$N\Big|^{3}_{9}\in f \Rightarrow f(3)=9 \Rightarrow 3^{3A+B}=9=3^{2} \Rightarrow 3A+B=2$

$\Rightarrow 2A=2 \to A=1,\ B=-1$

$\Rightarrow f(x)=3^{x-1} \to f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3}$

۱۰۹) گزینه ۲

$A=\tan(4\pi-\frac{\pi}{6}).\sin(4\pi-\frac{\pi}{3})+\cos(4\pi-\frac{4\pi}{3})=\tan(-\frac{\pi}{6}).\sin(-\frac{\pi}{3})+\cos\frac{4\pi}{3}$

$=(-\frac{\sqrt{3}}{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-\frac{1}{2})=0$

۱۱۰) گزینه ۲

$\lim_{x\to1^+}\frac{\sin^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-\cos^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}1-\cos\pi x=1-(-1)=2$

۱۱۱) گزینه ۳

f در R پیوسته $\Rightarrow$ f در ۱ و ۱- پیوسته باشد

$f(x)=\begin{cases} x[x]; & -1\le x<1 \\ ax+b; & x\ge1 \text{ یا } x\le-1 \end{cases}$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=0 \quad \lim_{x\to1^+}f(x)=a+b \to a+b=0 \quad (1)$

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-a+b \quad \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}-x=1 \Rightarrow b-a=1 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow 2b=1 \to b=\frac{1}{2},\ a=-\frac{1}{2}$

۱۱۲) گزینه ۱

$f(x)=\tan\pi x-\cot\pi x=-2\cot2\pi x \longrightarrow T=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

۱۱۳) گزینه ۴

$1-2\sin^2x\cos^2x=\frac{1}{2} \to \sin^2x\cos^2x=\frac{1}{4} \to \frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}$

$\to \sin^2 2x=1 \to \sin2x=1 \to 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \to x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\sin2x=-1 \to 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \to x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

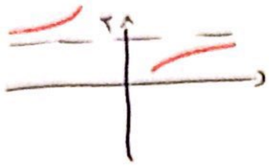
اجتماع $\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=4\pi$

۱۱۴) گزینه‌ی ۱

$\lim_{x\to\infty} y = 2 \rightarrow y=2$ مجانب افقی

$\lim_{x\to+\infty}(y-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x-2}{x^2+2x} = 0 \ (0^-)$



$\lim_{x\to-\infty}(y-2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x-2}{x^2+2x} = 0 \ (0^+)$

۱۱۵) گزینه‌ی ۴

$y=3x-5 \xrightarrow{x=2} y=1 \rightarrow (2,1)\in g \rightarrow g(2)=1$

$m_d = 3 \rightarrow g'(2)=3 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \rightarrow f'(1)=\frac{4}{3}$

$(f\circ g)'(2) = g'(2)\cdot f'(g(2)) = 3f'(1) = 3\left(\frac{4}{3}\right) = 4$

۱۱۶) گزینه‌ی ۳

$D_f: R-\{0\} \qquad f(x) = \frac{|x|\cdot|x^2-2|}{x}$

$x=\pm\sqrt{2}$ ریشه‌ی ساده داخل رادیکال و نقطه‌ی گوشه‌دار (زاویه‌دار) و مشتق‌ناپذیر f

ولی در صفر چون تابع تعریف نشده این نقطه، نقطه‌ی مشتق‌ناپذیر محسوب نمی‌شود.

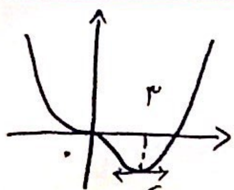
۱۱۷) گزینه‌ی ۲

آهنگ متوسط تغییر در $[0,4]$ $= \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{3+\frac{1}{5}-2}{4} = \frac{3}{10}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $\frac{3}{2}$ $= f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}\Big|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50}$

$\frac{17}{50} - \frac{3}{10} = \frac{2}{50} = 0/04$

۱۱۸) گزینه‌ی ۴



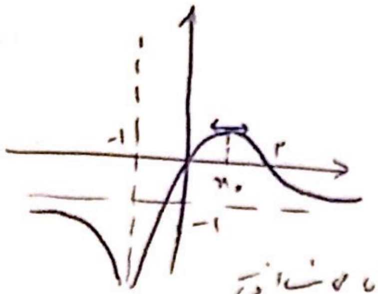
$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$

عطف افقی $x=0 \Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=0 \rightarrow b=0,\ f''(0)=0$

$f(-2)=16+32=48$

طول اکسترمم نسبی $x=3 \rightarrow f'(3)=0 \rightarrow 4x^3+3ax^2\big|_{x=3} = 0 \Rightarrow 108+27a=0 \Rightarrow a=-4$

گزینه ۳ (۱۴۹



$$f'(x) = \frac{(2-2x)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4} = \frac{2(1-x^2-2x+x^2)}{(x+1)^4} = 0$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ طول max نسبی $\rightarrow$ max نسبی $\Big| \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$

فاصله ی بین آن $= \frac{1}{3} - (-1) = \frac{4}{3}$

گزینه ۴ (۱۵۰.

$D_f : [-3, 3] - \{1\}$ $\rightarrow K - 2 \geq -3 \rightarrow K \geq -1$

$3K + 2 \leq 3 \rightarrow K \leq \frac{1}{3} \Rightarrow [-1, \frac{1}{3})$

$K \neq -\frac{1}{3}$

دانش آموزان قدیم

گزینه ۴ /۱۵۰.

$$f'(x) = 2\tan(\sin^{-1}x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (1 + \tan^2(\sin^{-1}x))$$

$$f'(\tfrac{1}{2}) = 2\tan(\tfrac{\pi}{6}) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times (1 + \tan^2(\tfrac{\pi}{6})) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times (1 + \tfrac{1}{3}) = \frac{4}{3}(\frac{4}{3}) = \frac{16}{9}$$

گزینه ۱ (۱۵۱

$$\bar{f} = \frac{\int_0^4 (x + x\sqrt{x})\,dx}{4-0} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big]_0^4}{4} = \frac{8 + \frac{64}{5}}{4} = \frac{26}{5} = 5.2$$

گزینه ۳ (۱۵۲

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{1}{8}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{3\sqrt{2}}{16}$$