حل تشریحی آزمون سراسری خارج از کشور ۹۸ رشته ریاضی

۱۰۱) گزینه ۴

تعداد اعضای ادبی $= |A| = 15$

" اعضای فوتبال $= |F| = 12 \Rightarrow |A \cup F| = |A| + |F| - |A \cap F|$

" هردو $= |A \cap F| = 7 \qquad = 15 + 12 - 7 = 20$

$\Rightarrow |A' \cap F'| = 42 - 20 = \boxed{22}$

۱۰۲) گزینه ۳

$$A = \sqrt[5]{\sqrt{3^5}} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[10]{3^5} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{(4 \times 3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}} \times 3^1} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

۱۰۳) گزینه ۲

همواره منفی $\Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 4(m-2)^2 + 4(1-m) < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \\ a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow \underset{(1)}{\underline{m > 1}} \end{cases}$

$(m-2)(m-5) < 0$

$\underset{(2)}{\underline{2 < m < 5}}$

$(1) \cap (2) \quad \boxed{2 < m < 5}$

۱۰۴) گزینه ۴

$$f(x+2) - 9 = (x+2)^2 - (x+2) - 2 - 9 = x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-2 < x < 5}$$

۱۰۵) گزینه ۱

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \cdots + \frac{20-17}{17 \times 20}\right)$$

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{11}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{17}} - \frac{1}{20}\right)$$

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{20}\right) = \frac{3}{20} = 0/15$$

۱۰۶) گزینه ۲

$x < -2 \rightarrow 1 - 2x - x - 2 = 3 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ غ ق ق

$-2 \le x \le \frac{1}{2} \rightarrow 1 - 2x + x + 2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ ق ق $\longrightarrow$ مجموع $= \frac{2}{3}$

$x \ge \frac{1}{2} \rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \boxed{\frac{2}{3}}$ ق ق

۱۰۷) گزینه ۴

$g^{-1}=\{(4,3),(2,4),(6,5),(1,3)\} \Rightarrow g^{-1}\circ f=\{(1,4),(4,5)\}$

$\Rightarrow (g^{-1}\circ f)-f=\{(1,2),(4,-1)\} \rightarrow$ برد $=\{-1,2\}$

۱۰۸) گزینه ۴

$M|^1_1 \in f \rightarrow f(1)=1 \rightarrow 3^{A+B}=1=3^0 \rightarrow \underline{A+B=0}$

$N|^3_9 \in f \rightarrow f(3)=9 \rightarrow 3^{3A+B}=9=3^2 \rightarrow \underline{3A+B=2}$ $\Rightarrow 2A=2 \rightarrow \underline{A=1}$, $\underline{B=-1}$

$\Rightarrow f(x)=3^{x-1} \rightarrow f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3}$

۱۰۹) گزینه ۲

$A=\tan(4\pi-\frac{\pi}{4})\cdot\sin(4\pi-\frac{\pi}{4})+\cos(4\pi-\frac{2\pi}{3})=\tan(-\frac{\pi}{4})\cdot\sin(-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{2\pi}{3}$

$=(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})+(-\frac{1}{2})=0$

۱۱۰) گزینه ۲

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sin^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1-\cos^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim\limits_{x\to 1^+}1-\cos\pi x=1-(-1)=2$

۱۱۱) گزینه ۳

f در همه جا پیوسته $\Rightarrow$ f باید در ۱ و ۱- پیوسته باشد

$f(x)=\begin{cases} x[x] ; & -1<x<1 \\ ax+b ; & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=a+b \rightarrow \underline{a+b=0}$ (1)

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=-a+b \quad \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}-x=1 \Rightarrow \underline{b-a=1}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow 2b=1 \rightarrow b=\frac{1}{2}, \; a=-\frac{1}{2}$

۱۱۲) گزینه ۱

$f(x)=\tan\pi x-\cot\pi x=-2\cot 2\pi x \rightarrow T=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

۱۱۳) گزینه ۴

$1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}$

$\rightarrow \sin^2 2x=1 \rightarrow \sin 2x=1 \rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\rightarrow \sin 2x=-1 \rightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

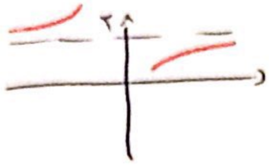
اجتماع $\rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4} = x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=4\pi$

۱۱۴) گزینه ۱

$$\lim_{x\to\infty} y = 2 \rightarrow \underset{\text{مجانب افقی}}{y=2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x-2}{x^2+2x} = 0\ (0^-)$$



$$\lim_{x\to-\infty}(y-2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x-2}{x^2+2x} = 0\ (0^+)$$

۱۱۵) گزینه ۴

$$y=3x-5 \xrightarrow{x=2} y=1 \rightarrow (2,1)\in g \rightarrow g(2)=1$$

$$m_d = 3 \rightarrow g'(2)=3 \qquad \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \rightarrow f'(1)=\frac{4}{3}$$

$$(f\circ g)'(2) = g'(2)\cdot f'(g(2)) = 3 f'(1) = 3\left(\frac{4}{3}\right) = 4$$

۱۱۶) گزینه ۲

$$D_f: R-\{0\} \qquad f(x) = \frac{|x|\cdot|x^2-2|}{x}$$

$x=\pm\sqrt{2}$ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق و نقطه گوشه‌دار (زاویه‌دار) و مشتق‌ناپذیر f

و در $x=0$ چون تابع تعریف نشده، این نقطه، نقطه مشتق‌ناپذیر محسوب نمی‌شود

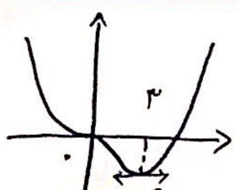
۱۱۷) گزینه ۲

آهنگ تغییر متوسط در $[0,4]$ $= \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{3+\frac{1}{5}-2}{4} = \frac{3}{10}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $\frac{3}{2}$ $= f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}\Big|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50}$

$$\frac{17}{50} - \frac{3}{10} = \frac{2}{50} = 0/04$$

۱۱۸) گزینه ۴



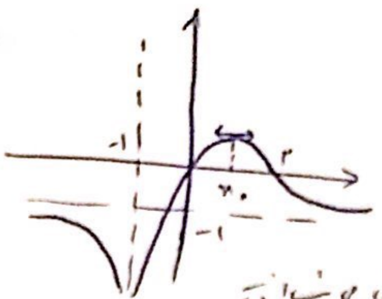
$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

عطف افقی $x=0 \Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=0 \rightarrow b=0,\ f''(0)=0$

$$f(-2) = 16+32 = 48$$

طول اکسترمم نسبی $x=3 \rightarrow f'(3)=0 \rightarrow 4x^3+3ax^2\big|_{x=3} = 0 \Rightarrow 108+27a=0 \Rightarrow a=-4$

۱۱۹) گزینه ۳



$$f'(x) = \frac{(2-2x)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4} = \frac{2(1-x^2-2x+x^2)}{(x+1)^3} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$ طول max نسبی $\rightarrow$ عرض max نسبی $\Big| \frac{1}{2}$

[illegible] $= \frac{1}{2}-(-1) = \boxed{\frac{3}{2}}$

---

۱۲۰) گزینه ۴

$D_f : [-4,4]-\{1\}$

$\rightarrow k-3 \geq -4 \rightarrow k \geq -1$

$2k+3 \leq 4 \rightarrow k \leq \frac{1}{2} \Rightarrow [-1, \frac{1}{2})$

$k \neq \frac{1}{2}$