۱ به ازای کدام مقدار m، هریک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - x - 2 = 0$ است؟

۱) ۹
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۵

۲ اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه های معادلهٔ $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$ است؟

۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$
۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$
۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۳ اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2 + kx - 1 = 0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

۴ در معادلهٔ $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. $m$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۵ به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$، همواره بالای محور xها است؟

۱) $a < 1$
۲) $a < -2$
۳) $a > 3$
۴) $-2 < a < 1$

۶ به ازای کدام مقادیر $m$، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$، برای هر مقدار دلخواه $x$ مثبت است؟

۱) $m < -2$
۲) $m > 2/5$
۳) $1 < m < 2$
۴) $1 < m < 2/5$

۷ اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه های معادلهٔ $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ چقدر است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

**۸** به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$، نمودار تابع $f(x) = (a-۳)x^{۲} + ax - ۱$ از ناحیهٔ اول محورهای مختصات <u>نمی گذرد</u>؟

۱) $a \le ۲$ ۲) $۰ < a \le ۲$

۳) $۲ < a < ۳$ ۴) $۰ < a < ۳$

**۹** اگر $g(x) = ۲x - ۳$ و $(fog)(x) = ۴(x^{۲} - ۴x + ۵)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^{۲} - ۴x + ۳$ ۲) $x^{۲} - ۴x + ۵$

۳) $x^{۲} - ۲x + ۵$ ۴) $x^{۲} - ۲x + ۳$

**۱۰** اگر $f(x) = ۲x + ۳$ و $g(f(x)) = ۸x^{۲} + ۲۲x + ۲۰$ باشند، ضابطهٔ تابع $fog$ کدام است؟

۱) $۲x^{۲} - ۷x + ۳$ ۲) $۲x^{۲} - ۳x + ۷$

۳) $۴x^{۲} - ۲x + ۱۳$ ۴) $۴x^{۲} - ۴x + ۱۱$

**۱۱** اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

ورودی $\longrightarrow ۲x - ۲ \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \longrightarrow$ خروجی

۱) $\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۳ ۴) ۴

**۱۲** اگر $g(x) = ۲x - ۱$ و $(fog)(x) = \frac{x}{x-۳}$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۴

**۱۳** اگر $g(x) = f(۳x - ۴)$ و $f^{-۱}(x) = x + \sqrt{x}$ آنگاه حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

**۱۴** در تابع با ضابطهٔ $x^{۲} \neq ۱$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}$ و $f(۰) = ۰$، ضابطهٔ تابع وارون آن برابر کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$

۳) $x.f(x)$ ۴) $-x.f(x)$

۱۵ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

۱) $\tan x$
۲) $\cot x$
۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$
۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

۱۶ نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $-x+6\,;\,x<-4$
۲) $-x+5\,;\,x>2$
۳) $-\frac{1}{2}x+1;\ -4<x<3$
۴) $-\frac{1}{2}x+1;\ -4<x<10$

۱۷ تابع $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنهٔ $(-1,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $f$ و $f^{-1}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) غیر متقاطع

۱۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=A(2)^{Bx}$ و خط به معادلهٔ $4y=5x$، در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-1}(10)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۱۹ تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $fog$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۴ و $\frac{1}{9}$
۲) ۹ و $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$ و ۴
۴) ۹ و ۴

۲۰ تابع $f(x)=\log_3^{(ax+b)}$ فقط برای مقادیر $x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$ با معنی است. اگر $f(4)=2$ باشد، آن گاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

۱) $-2$
۲) $-1$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

۲۱ اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ و $g(x)=\log(x^2-15x)$ باشند، دامنهٔ تابع $fog$ کدام است؟

۱) $(0,5]\cup[20,25)$
۲) $[-5,0)\cup(15,20]$
۳) $(15,20]$
۴) $[-5,0)$

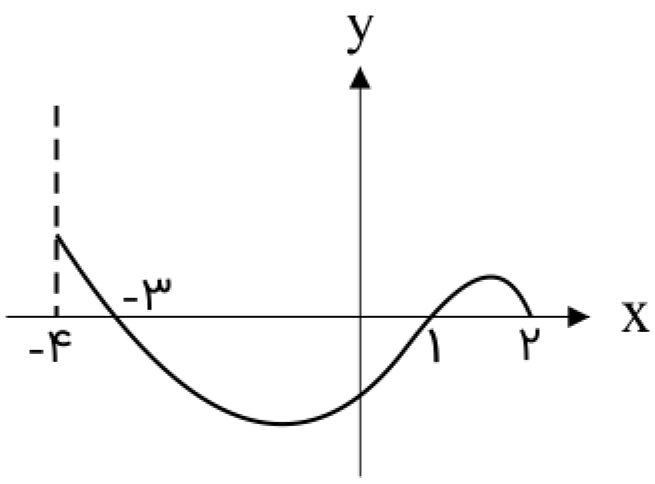
۲۲ اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x - x^2}$ باشند، دامنهٔ تابع $gof$ کدام است؟

۱) $[0, 1]$
۲) $[-1, 1]$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۲۳ اگر $f(x) = x - [x]$ آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام است؟

۱) $[-1, 0]$
۲) $[0, 1]$
۳) $\{-1, 0\}$
۴) $\{0, 1\}$

۲۴ شکل روبرو، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟




۱) $[0, 2]$
۲) $[-3, 2]$
۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$
۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

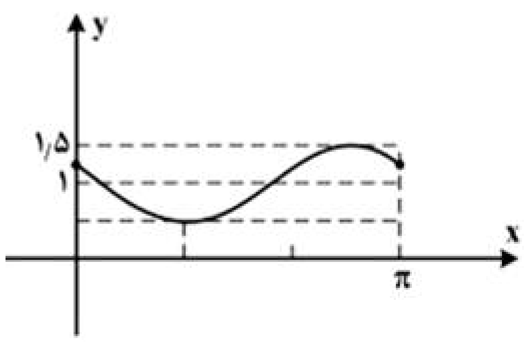
۲۵ در مثلث $ABC$ با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویه‌های $B = 60^\circ$ و $C = 45^\circ$، اندازهٔ ضلع $AC$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $2\sqrt{3}$
۴) $3\sqrt{2}$

۲۶ مساحت مثلثی به اضلاع ۱۲، ۹ و۷ واحد، کدام است؟

۱) $15\sqrt{2}$
۲) $14\sqrt{3}$
۳) $12\sqrt{5}$
۴) $14\sqrt{5}$

۲۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟




۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

۲۸ حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$، کدام است؟

۱) $-\frac{16}{9}$ ۲) $-\frac{9}{16}$

۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{16}{9}$

۲۹ اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چقدر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۸

۳) ۲/۴ ۴) ۲/۵

۳۰ حاصل عبارت $2 + \frac{1}{\cos 20^\circ}$ برابر کدام است؟

۱) $2\sin 40^\circ$ ۲) $4\cos 40^\circ$

۳) $2\cos 40^\circ$ ۴) $4\sin 40^\circ$

۳۱ ساده‌شدهٔ عبارت $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin 20^\circ$ ۲) $\cos 20^\circ$

۳) $2\sin 20^\circ$ ۴) $2\cos 20^\circ$

۳۲ معادلهٔ مثلثاتی $\sin^3 x - \sin x + 2\sin^2 x = 1$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۳۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x)$، کدام است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۳۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۳۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\cos ۵x \cos ۳x - \sin ۳x \sin x}{\cos ۲x} = ۱$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$
۲) $\frac{k\pi}{۲}$
۳) $\frac{۲k\pi}{۵}$
۴) $\frac{۲k\pi}{۳}$

۳۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x} = \cot x$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۵}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$
۳) $\frac{۳k\pi}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۵}(۲k+۱)\pi$

۳۷ مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲\sin^۲ x - \cos x - ۱ = ۰$ در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۸\pi}{۳}$
۲) $\frac{۱۰\pi}{۳}$
۳) $۳\pi$
۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

۳۸ اگر $f(x) = \sin^{-۱}(۲x-۱)$ و $g(x) = \frac{x^۲}{۱+x^۲}$، آنگاه دامنهٔ تابع $fog$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $[۰,۱]$
۳) $[-۱,۱]$
۴) $[۰,+\infty)$

۳۹ حاصل $\cos(۳\sin^{-۱}\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۳}{۲۷}$
۲) $-\frac{۱۹}{۲۷}$
۳) $-\frac{۵}{۹}$
۴) $-\frac{۴}{۹}$

۴۰ حاصل عبارت $\sin(\cos^{-۱}(\frac{۳}{۵}) + \cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵}))$ برابر کدام است؟

۱) ۱-
۲) $-\frac{۷}{۲۵}$
۳) ۱
۴) $\frac{۷}{۲۵}$

۴۱ از تساوی $\log_x^{(x-۶)} = ۲ - \log_x^{(۳x+۸)}$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

**۴۲** اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(1-\frac{1}{A})$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۳-    ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$    ۴) $\frac{3}{2}$

**۴۳** از دو معادلهٔ $4^x + 2^x = 72$ و $log(x+1) + log(2y + x^2) = 2$، مقدار $y$ کدام است؟

۱) ۶    ۲) ۷

۳) ۸    ۴) ۹

**۴۴** ضریب جملهٔ مستقل از $x$ در بسط $(x^2 + \frac{2}{x})^6$ کدام است؟

۱) ۲۳۰    ۲) ۲۳۴

۳) ۲۳۸    ۴) ۲۴۰

**۴۵** اگر مجموع ضرایب بسط $(3x^2 - 5)^{n+1}$ برابر ۶۴ باشد، مجموع ضرایب $(x + 2x^3)^{2n-7}$ کدام است؟

۱) ۹    ۲) ۲۷

۳) ۸۱    ۴) ۲۴۳

**۴۶** نمودار تابع $y = 4 - |x|$ در بازهٔ $(a\,,\,b)$ بالاتر از خط به معادلهٔ $2y + x = 5$ قرار دارد، بزرگ ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۳    ۲) ۴

۳) ۵    ۴) ۶

**۴۷** اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ بازهٔ $(a,b)$ باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$    ۲) ۳

۳) $\frac{7}{2}$    ۴) ۴

**۴۸** نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازهٔ $(a,b)$ پایین تر از خط به معادلهٔ $y = 2$ است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۴    ۲) ۶

۳) ۸    ۴) $\infty$

۴۹ دو کارگر باهم کاشی‌کاری یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می‌کننـد. اگر هریک به‌تنهایی کار را انجام دهند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را انجام می‌دهد. مجموع روزهایی که دو کارگر کار را به‌تنهایی تمام می‌کنند، چند روز است؟

۱) ۱۸
۲) ۴۵
۳) ۸۰
۴) ۷۵

۵۰ اگر $x=۱$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{۲x+a}=\sqrt{x}+۲$ باشد، ریشهٔ دیگر آن کدام است؟

۱) ۹
۲) ۷
۳) ۵
۴) ۳

۵۱ حاصل عبارت $\dfrac{t^{۸}-t^{۷}+t^{۶}-\dots-t+۱}{t^{۶}-t^{۳}+۱}$، به ازای $t=\dfrac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵۲ بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عـدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل، تشـکیل یک دنبالهٔ هندسـی دهند. مجموع این پنج عدد مثبت کدام است؟

۱) ۴۸۲
۲) ۴۸۴
۳) ۴۸۶
۴) ۴۸۸

۵۳ تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسـی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشـد، قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۵۴ مجموع جملات سوم و سیزدهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۲۴ است. مجموع پانزده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۱۵۰
۲) ۱۶۰
۳) ۱۸۰
۴) ۲۱۰

۵۵ در دنباله‌های حسابی $۲,۹,۱۶,۲۳,\dots$ و $۱۲,۱۷,۲۲,۲۷,\dots$ چند عدد سه‌رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰، موجود است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۵۶ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم، دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۱) $۲ + \sqrt{۳}$
۲) $۵ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۵ + ۴\sqrt{۳}$
۴) $۷ + ۴\sqrt{۳}$

۵۷ به ازای یک مقدار x، اعداد $x, ۸ - x$ و $x + ۱۲$، به ترتیب سه جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی نزولی‌اند. حدّ مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۱
۳) ۲۴
۴) ۲۷

۵۸ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}} \times \sqrt[۴]{۵۴} \times \sqrt[۶]{۱۲}$، کدام است؟

۱) $۶\sqrt[۶]{۲}$
۲) $۳\sqrt[۶]{۳۲}$
۳) $۲\sqrt[۳]{۹}$
۴) ۶

۵۹ اگر $\alpha = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} - ۴}$ و $\beta = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} + ۴}$ باشند حاصل عبارت $(\alpha^۲ + \beta^۲ - \alpha\beta)(\alpha^۲ + \beta^۲ + \alpha\beta)$، کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۷\sqrt{۲}$

۶۰ دنبالهٔ اعداد $۱/۴۵, ۱/۴۵۴۵, ۱/۴۵۴۵۴۵, \ldots$ به عدد ثابت و گویای A بسیار نزدیک می‌شود. عدد $\frac{۱}{A}$ دارای چند رقم اعشاری است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ○○●○ | ۱۱ | ○○●○ | ۲۱ | ○●○○ | ۳۱ | ○○○● | ۴۱ | ○○●○ | ۵۱ | ○○●○ |
| ۲ | ○○●○ | ۱۲ | ○●○○ | ۲۲ | ○●○○ | ۳۲ | ○○○● | ۴۲ | ○○○● | ۵۲ | ○●○○ |
| ۳ | ○●○○ | ۱۳ | ○○○● | ۲۳ | ○○●○ | ۳۳ | ○○●○ | ۴۳ | ○○●○ | ۵۳ | ○○●○ |
| ۴ | ○●○○ | ۱۴ | ●○○○ | ۲۴ | ○○○● | ۳۴ | ○○○● | ۴۴ | ○○○● | ۵۴ | ○○●○ |
| ۵ | ○●○○ | ۱۵ | ○○○● | ۲۵ | ○○○● | ۳۵ | ●○○○ | ۴۵ | ○●○○ | ۵۵ | ○●○○ |
| ۶ | ○●○○ | ۱۶ | ○○○● | ۲۶ | ○○○● | ۳۶ | ○○○● | ۴۶ | ○●○○ | ۵۶ | ○○○● |
| ۷ | ○○●○ | ۱۷ | ○○○● | ۲۷ | ○○●○ | ۳۷ | ●○○○ | ۴۷ | ○○●○ | ۵۷ | ○○○● |
| ۸ | ●○○○ | ۱۸ | ○○●○ | ۲۸ | ●○○○ | ۳۸ | ●○○○ | ۴۸ | ○●○○ | ۵۸ | ○○○● |
| ۹ | ○○●○ | ۱۹ | ○●○○ | ۲۹ | ○○●○ | ۳۹ | ●○○○ | ۴۹ | ○○○● | ۵۹ | ○○○● |
| ۱۰ | ○○●○ | ۲۰ | ●○○○ | ۳۰ | ○●○○ | ۴۰ | ○●○○ | ۵۰ | ●○○○ | ۶۰ | ●○○○ |

۱ **گزینه ۳**

اگر $\alpha$ و $\beta$ را ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ در نظر بگیریم، داریم:

$$۲x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۱}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱ \end{cases}$$

بنابراین $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۸x^۲ - mx - ۸ = ۰$ می‌شود:

$$۸x^۲ - mx - ۸ = ۰ \Rightarrow S' = \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha+\beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$= (\frac{۱}{۲})^۳ - ۳(-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{۸}$$

$$S' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{۸} \Rightarrow \frac{۱۳}{۸} = \frac{m}{۸} \Rightarrow m = ۱۳$$

۲ **گزینه ۳**

ابتـدا از روی معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$، حاصل $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم. سـپس حاصـل $\frac{۱}{\alpha} + ۱ + \frac{۱}{\beta} + ۱$ و $(\frac{۱}{\alpha} + ۱)(\frac{۱}{\beta} + ۱)$ را محاسبه می کنیم. اگر $S$ و $P$ مقادیر حاصل جمع و حاصل ضـرب ریشه های یک معادلهٔ درجه دو باشند، آن معادلهٔ درجه دو به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ نوشته می شود.

$$۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲} \\ \alpha\beta = -\frac{۴}{۲} = -۲ \end{cases}$$

$S$ و $P$ را برای معادلهٔ جدید به دست می آوریم:

$$S = \frac{۱}{\alpha} + ۱ + \frac{۱}{\beta} + ۱ = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + ۲ = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{-۲} + ۲ = -\frac{۳}{۴} + ۲ = \frac{۵}{۴}$$

$$P = (\frac{۱}{\alpha} + ۱)(\frac{۱}{\beta} + ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} + \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} + ۱ = -\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۴} + ۱ = -\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی آید:

$$x^۲ - \frac{۵}{۴}x - \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$$

۳ گزینه ۲

اگر فرض کنیم $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \alpha^2\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $8x^2 + kx - 1 = 0$ باشند آنگاه کافی است $x_1 + x_2$ را به دست آوریم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \\ p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$8x^2 + kx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \frac{-k}{8} \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = -\frac{k}{8} \Rightarrow (\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{k}{8} \Rightarrow k = 6$$

۴ گزینه ۲

یک ریشه را $\alpha$ و ریشهٔ دیگر را $\frac{\alpha}{2} + 5$ در نظر می گیریم. با استفاده از رابطهٔ مجموع ریشه ها مقدار $\alpha$ و با استفاده از رابطهٔ حاصل ضرب ریشه ها، $m$ را تعیین می کنیم.

$$x^2 - 8x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (\frac{\alpha}{2}+5) \text{ ریشه های}} \alpha + \frac{\alpha}{2} + 5 = -(-\frac{8}{1}) = 8 \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} + 5 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

مقدار $m$ را محاسبه می کنیم:

$$\alpha(\frac{\alpha}{2} + 5) = \frac{m}{1} = m \Rightarrow 2(1 + 5) = m \Rightarrow m = 2 \times 6 = 12$$

۵ گزینه ۲

نکته: برای اینکه نمودار تابع درجه‌دو همواره بالای محور xها قرار گیرد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\Delta < 0$

۲) ضریب $x^2$ بیشتر از صفر باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 + 4a(1 - a) < 0 \Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a + 2)(a - 3) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a < -2$$

۶ **گزینه ۲**

عبارت درجه دو $y=ax^۲+bx+c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه $x$ مثبت است که دو شرط $a>۰$ و $\Delta<۰$ همزمان برقرار باشد. مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن ها اشتراک می گیریم:

$$۱)\ a>۰\Rightarrow m-۱>۰\Rightarrow m>۱\quad (I)$$

$$f(x)=(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱$$

$$۲)\ \Delta<۰\Rightarrow ۶^۲-۴(m-۱)(۲m+۱)<۰\Rightarrow ۳۶-۴(m-۱)(۲m+۱)<۰\ \overset{\div ۴}{\Rightarrow}\ ۹$$
$$-(m-۱)(۲m+۱)<۰$$
$$\Rightarrow ۹-۲m^۲+m+۱<۰\Rightarrow -۲m^۲+m+۱۰<۰\Rightarrow ۲m^۲-m-۱۰>۰$$
$$\Rightarrow (۲m-۵)(m+۲)>۰$$
$$\Rightarrow m>\frac{۵}{۲}\ \text{یا}\ m<-۲\quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب $(I)$ و $(II)$ اشتراک می گیریم:

$$(I)\ \bigcap\ (II): m>\frac{۵}{۲}\Rightarrow m>۲/۵$$

۷ **گزینه ۳**

اول عبارت $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ را ساده می کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$حاصل ضرب ریشه های معادله است و به‌راحتی محاسبه می شود. برای به دست آوردن $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\Rightarrow A^۲=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}\Rightarrow A=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$۴x^۲-۱۲x+۱=۰\ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha\ \text{و}\ \beta\ \text{ریشه های}}\ \begin{cases}\alpha+\beta=-(-\frac{۱۲}{۴})=۳\\ \alpha\beta=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{۳+۱}=\sqrt{۴}=۲$$

پس حاصل $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

۸ **گزینه ۱**

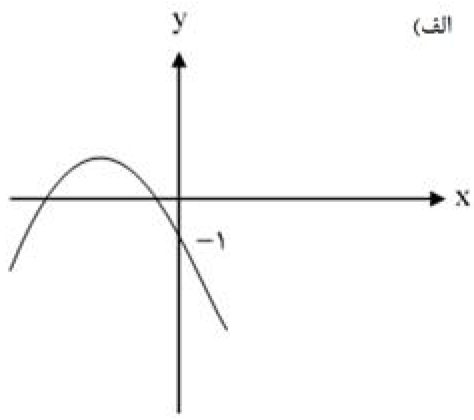
اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y=ax^۲+bx+c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند این است که ضریب $x^۲$ یا همان $a$ منفی باشد.

که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

روش اول:

تابع صورت سؤال را می توان در دو حالت زیر فرض کرد:



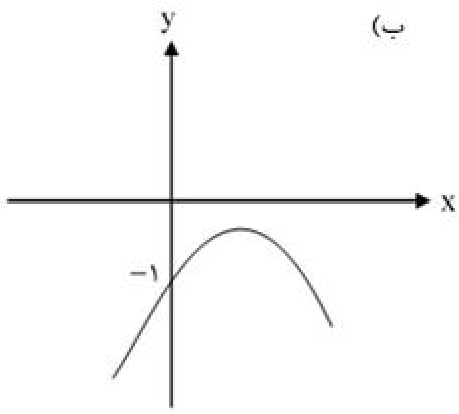

$f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1 \Rightarrow$ عرض از مبدأ $= -1$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > 0 \quad , \quad S < 0 \quad , \quad \Delta > 0$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq 0$ باشد.

برای حالت (الف) داریم:




$\Delta > 0 \to a^2 + 4(a-3) > 0 \to a^2 + 4a - 12 > 0 \to a > 2$ یا $a < -6 \quad (I)$

$$S < 0 \to -\frac{a}{a-3} < 0 \xrightarrow{a-3<0} -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \to \frac{-1}{a-3} > 0 \quad (III)$$

(با توجه به اینکه $a - 3 < 0$، همواره برقرار است.)

$$(I) \bigcap (II) \bigcap (III) \Rightarrow a < -6$$

برای حالت (ب):

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4(a-3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$$

چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی گذرد داریم:

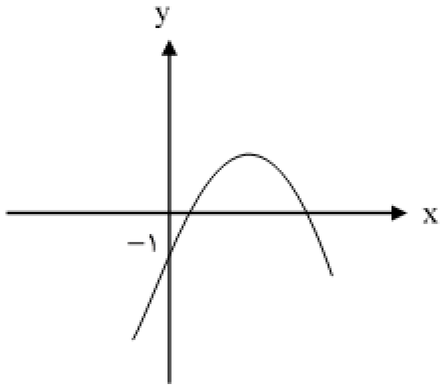
$$(-\infty \, , \, -6) \bigcup [-6 \, , 2] = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

روش دوم:

با توجه به اینکه $a < 3$ است حالتی را در نظر می گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به‌دست‌آمده را از $a < 3$ کم می کنیم.

چون عرض از مبدأ $-1$ است و $a < 3$؛ پس تابع ماکزیمم دارد.

و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد.




۱) باید دو ریشه داشته باشد $\Rightarrow \Delta > 0$

۲) جمع ریشه ها $> 0$

۳) ضرب ریشه ها $> 0$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 > 0$$

$\Rightarrow (a-2)(a+6) > 0 \Rightarrow a > 2$ یا $a < -6 \quad (I)$

جمع ریشه ها $> 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 \quad (II)$

ضرب ریشه ها $> 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a < 3 \quad (III)$

$$(I) \bigcap (II) \bigcap (III) \Rightarrow 2 < a < 3$$

به ازای بازهٔ به دست آمده برای $a$ تابع حتماً از ناحیه اول عبور می کند. پس با کم کردن این بازه از $a < ۳$ خواسته سؤال محقق می شود.

$$(-\infty, -۳) - (۲, ۳) = (-\infty, ۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

درنتیجه به ازای بازهٔ فوق برای $a$ نمودار تابع از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی گذرد.

**۹** گزینه ۳

دو ضابطهٔ $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(x)$ از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض می کنیم $g(x)$ برابر $t$ باشد. در این صورت $x$ را بر حسب $t$ به دست آورده و در نهایت $f(t)$ را مشخص می کنیم. حالا تابع $f(x)$ به صورت مستقل به دست آمده است.

$$g(x) = ۲x - ۳ = t \Rightarrow ۲x = t + ۳ \Rightarrow x = \frac{t+۳}{۲}$$

$$f(g(x)) = ۴(x^۲ - ۴x + ۵) \Rightarrow f(t) = ۴(\frac{(t+۳)^۲}{۴} - ۲(t+۳) + ۵) \Rightarrow$$

$$f(t) = (t+۳)^۲ - ۸(t+۳) + ۲۰ = t^۲ + ۶t + ۹ - ۸t - ۲۴ + ۲۰ \Rightarrow$$

$$f(t) = t^۲ - ۲t + ۵ \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۲x + ۵$$

**۱۰** گزینه ۳

در صورت مسئله ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع $fog$ کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر $x$، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x) = ۲x + ۳ \;,\; g(f(x)) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰ \Rightarrow g(۲x+۳) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$$

$$۲x + ۳ = t \Rightarrow ۲x = t - ۳ \Rightarrow x = \frac{t-۳}{۲}$$

$$g(t) = ۸(\frac{t-۳}{۲})^۲ + ۲۲(\frac{t-۳}{۲}) + ۲۰ \Rightarrow g(t) = ۸(\frac{t^۲ - ۶t + ۹}{۴}) + ۱۱(t-۳) + ۲۰$$

$$\Rightarrow g(t) = ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۸ + ۱۱t - ۳۳ + ۲۰ = ۲t^۲ - t + ۵ \Rightarrow g(x) = ۲x^۲ - x + ۵$$

حالا ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می کنیم:

$$f(x) = ۲x + ۳ \;,\; g(x) = ۲x^۲ - x + ۵ \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = ۲(۲x^۲ - x + ۵) + ۳ \Rightarrow$$

$$f(g(x)) = ۴x^۲ - ۲x + ۱۰ + ۳ = ۴x^۲ - ۲x + ۱۳$$

**۱۱** گزینه ۳

**گام اول**

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \rightarrow ۲x-۲ \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \rightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را $x$ در نظر می گیریم. وارد دستگاهی می شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_{x} \rightarrow \underbrace{۲x-۲}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x}+۱}}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی $x$ برابر $\frac{۴}{۳}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{۴}{۳}$ است.

**گام دوم**

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و در نهایت مقدار $x$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = ۲x-۲ \ , \ \ g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+۱}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}+۱} = \frac{۲x-۲}{\sqrt{۲x-۲}+۱} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳(۲x-۲) = ۴\sqrt{۲x-۲}+۴$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲x-۲}=t} ۳t^۲ = ۴t+۴ \Rightarrow ۳t^۲-۴t-۴ = ۰ \Rightarrow$$

$$(۳t+۲)(t-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = ۲ \Rightarrow ۲x-۲ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \\ t = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = -\frac{۲}{۳} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = ۳$ به دست آمد.

**۱۲** گزینه ۲

**گام اول**

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(۳)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید غلط نیست ولی زمان حل تست طولانی تر می شود.) ضابطهٔ $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حالا ما مقدار $f(۳)$ را می خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای $x$ به دست آمده، مقدار $f(۳)$ محاسبه می شود.

**گام دوم**

$$g(x) = ۲x-۱ \ , \ fog(x) = \frac{x}{x-۳} \Rightarrow f(۲x-۱) = \frac{x}{x-۳}$$

$$۲x-۱ = ۳ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow[x=۲]{f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}} f(۳) = \frac{۲}{۲-۳} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$

۱۳ **گزینه ۴**

ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(16)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر $y$ در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(3x-4) \Rightarrow y = f(3x-4)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطهٔ تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = f(3x-4) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(3x-4)) = f^{-1}(y) = 3x-4$$

$$\Rightarrow 3x = f^{-1}(y) + 4 \Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y)+4}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)+4}{3}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(16)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(16)$ را حساب می کنیم:

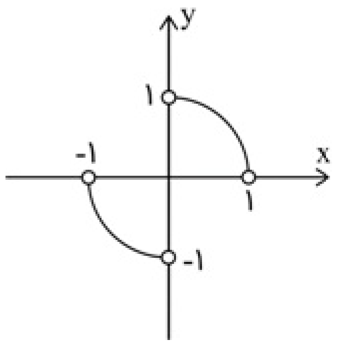
$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 16 + 4 = 20$$

$$g^{-1}(16) = \frac{20+4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

۱۴ **گزینه ۱**

$$f(x) = \begin{cases} +\sqrt{1-x^2} & ; 0 < x < 1 \\ -\sqrt{1-x^2} & ; -1 < x < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ نیمدایره به شعاع یک است و وارون هر تابع قرینهٔ آن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و چهارم است؛ بنابراین نمودار $f^{-1}$ شبیه نمودار $f$ است.



**۱۵** **گزینه ۴**

ضابطهٔ $f^{-1}(\sin x)$ از ما خواسته شده است ابتدا باید ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر $x$ نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطهٔ $f^{-1}(\sin x)$ را به دست آوریم.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1+x^2}=x \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$
$$y^2(1+x^2)=x^2 \Rightarrow y^2+y^2x^2=x^2 \Rightarrow x^2-y^2x^2=y^2 \Rightarrow$$
$$x^2(1-y^2)=y^2 \Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2} \xrightarrow{y,x \text{ هم علامت}} x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ضابطهٔ $f^{-1}(\sin x)$ را به دست می آوریم:

$$f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \xrightarrow{1-\sin^2 x=\cos^2 x} f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{|\cos x|}$$

**۱۶** **گزینه ۴**

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدرمطلق ابتدا با توجه به ریشه های عبارت درون قدرمطلق، ضابطهٔ تابع را به صورت ساده شده می نویسیم.

ب) تعیین می کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، $x$ را بر حسب $y$ به دست آورده و در نهایت به جای $x$، $f^{-1}(x)$ و به جای $y$، $x$ را جای گزین می کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنهٔ تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x)=|2x-6|-|x+4|+x=\begin{cases} x<-4: -(2x-6)+(x+4)+x=10 \\ -4\le x\le 3: -(2x-6)-(x+4)+x=-2x+2 \\ x>3: (2x-6)-(x+4)+x=2x-10 \end{cases}$$

تابع در بازهٔ $[-4,3]$ اکیداً نزولی است. ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می آوریم:

$$y=-2x+2 \Rightarrow y-2=-2x \Rightarrow x=-\frac{1}{2}y+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$$

در ضابطهٔ تابع اصلی وقتی $-4\le x\le 3$ باشد، $-4\le y\le 10$ است. پس دامنهٔ تابع معکوس به صورت $[-4,10]$ در می آید. پس گزینهٔ ۴ درست است.

**۱۷** **گزینه ۴**

اگر تـابع $f(x)$ یـک تـابع اکیـداً صـعودی باشـد، برای تعیین نقـاط تلاقی نمودارهای $f$ و $f^{-1}$ یـا همـان جواب های معادلهٔ $f^{-1}(x) = f(x)$ کافی است جواب های معادلهٔ $f(x) = x$ را تعیین کنیم. (توجه کنید این نکته در مورد توابع اکیداً نزولی کاربرد ندارد.) تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۱ = (x+۱)^۲$ با دامنهٔ $(-۱, +\infty)$ یک تابع اکیـداً صـعودی روی دامنه تعریف شده است.

بنابراین برای تعیین نقاط تلاقی $f$ و $f^{-1}$ معادلهٔ $f(x) = x$ را حل می کنیم.

$$f(x) = x \Rightarrow (x+۱)^۲ = x \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = x \Rightarrow x^۲ + x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۱ - ۴(۱)(۱) = -۳ < ۰ \rightarrow \text{این معادله فاقد ریشه است}$$

بنابراین نمودارهای دو تابع $f$ و $f^{-1}$ غیر متقاطع هستند.

**۱۸** **گزینه ۳**

نقاط برخورد در ضابطهٔ توابع $f(x) = A(۲)^{Bx}$ و $۴y = ۵x$ صدق می‌کند.

$$۴y = ۵x \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \Rightarrow y = \frac{۵}{۲} \Rightarrow (۲, \frac{۵}{۲}) \\ x = ۴ \Rightarrow y = ۵ \Rightarrow (۴, ۵) \end{cases}$$

$$f(x) = A(۲)^{Bx} \Rightarrow \begin{cases} (۲, \frac{۵}{۲}) : \frac{۵}{۲} = A(۲)^{B\times ۲} \Rightarrow ۵ = ۲A(۲)^{۲B} \\ (۴, ۵) : ۵ = A(۲)^{B\times ۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲A(۲)^{۲B} = A(۲)^{۴B} \Rightarrow ۲^{۲B+۱} = ۲^{۴B} \Rightarrow ۲B + ۱ = ۴B \Rightarrow B = \frac{۱}{۲}$$

$$۵ = A(۲)^{۴B} \xrightarrow{B=\frac{۱}{۲}} ۵ = A(۲)^۲ \Rightarrow A = \frac{۵}{۴} \Rightarrow f(x) = \frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}$$

$$\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}} = ۱۰ \Rightarrow (۲)^{\frac{x}{۲}} = ۸ = ۲^۳ \Rightarrow \frac{x}{۲} = ۳ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow f^{-1}(۱۰) = ۶$$

**۱۹** **گزینه ۲**

$$f(۶) = f(-\tfrac{۱}{۴}) = ۰$$

$$f(g(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۶ \\ g(x) = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = ۶ \\ x - \sqrt{x} = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - ۶ = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲) = ۰ \xrightarrow{t>۰} t = ۳ \xrightarrow{x=t^۲} x = ۹$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow (t - \frac{۱}{۲})^۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=t^۲} x = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع $fog$ محور xها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

**۲۰** گزینه ۱

**گام اول**

الف) عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس $ax+b>0$ بوده و $x>-\frac{b}{a}$ می شود. از طریق مقایسه با مقادیر قابل قبول برای $x$ رابطهٔ بین $a$ و $b$ مشخص می شود.

ب) $f(4)=2$ است. بـا حل دو معادله و دو مجهول داده شـده مقادیر $a$ و $b$ مشـخص شده و در نهایت $f(-\frac{4}{9})$ حساب می شود.

**گام دوم**

$$x>-\frac{b}{a},x\in(-\frac{1}{2},+\infty)\Rightarrow-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=2b\quad(I)$$

$$f(4)=2\Rightarrow log_3^{(4a+b)}=2\Rightarrow 4a+b=3^2=9\Rightarrow 4a+b=9$$

$$\xrightarrow{(I)}4(2b)+b=9\Rightarrow 8b+b=9\Rightarrow 9b=9\Rightarrow b=1\xrightarrow{(I)}a=2$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=log_3^{(2x+1)}$ به دست آمد. حالا $f(-\frac{4}{9})$ را محاسبه می کنیم:

$$f(-\frac{4}{9})=log_3^{(-\frac{8}{9}+1)}=log_3^{\frac{1}{9}}=log_3^{3^{-2}}=-2\,log_3^3=-2$$

**۲۱** گزینه ۲

$$2-x\geq 0\Rightarrow x\leq 2\Rightarrow D_f=(-\infty,2]$$

$$x^2-15x>0\Rightarrow x(x-15)>0\Rightarrow D_g=(\infty,0)\bigcup(15,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

$$=\left\{x|x\in\underbrace{(-\infty,0)\bigcup(15,+\infty)}_{*},log(x^2-15x)\leq 2\right\}$$

$$log(x^2-15x)\leq log_{10}^{100}\Rightarrow x^2-15x\leq 100\Rightarrow x^2-15x-100\leq 0$$

$$\Rightarrow (x-20)(x+5)\leq 0\Rightarrow x\in[-5,20]\,(**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**),(*)}x\in[-5,0)\bigcup(15,20]$$

۲۲ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\Rightarrow ۱+x^۲=۰\Rightarrow x^۲=-۱\quad \text{غ.ق.ق}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^۲}\Rightarrow x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۱-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱\Rightarrow D_g:[۰,۱]$$

$$D_{gof}:\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}|۰\leq\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱\}$$

همواره داریم ۱ $\leq \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ ، درنتیجه:

$$\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\geq ۰\xrightarrow{۱+x^۲>۰}۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow x\in[-۱,۱]$$

۲۳ گزینه ۳

ضابطهٔ $f(x)$ را داریم. با توجه به آن حاصل $f(۲x-۳)$ را به دست می آوریم سپس تابع $g(x)$ را تشکیل داده و با استفاده از ویژگی های جزء صحیح، برد آن را به دست می آوریم.

$$f(x)=x-[x]\Rightarrow f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x-۳]\xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{[x+k]=[x]+k}$$

$$f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x]+۳=۲x-[۲x]$$

$$g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)=۲x-[۲x]-۲(x-[x])=۲x-[۲x]-۲x+۲[x]$$

$$=۲[x]-[۲x]$$

از ویژگی های جزء صحیح به خاطر داشته باشید: $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$

بنابراین تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x)=۲[x]-[x]-[x+\frac{۱}{۲}]=[x]-[x+\frac{۱}{۲}]$$

قسمت اعشاری عدد $x$ را با $p$ نشان می دهیم. با توجه به مقدار $p$ دو حالت برای $g(x)$ اتفاق می افتد:

$$g(x)=[x]-[x+\frac{۱}{۲}]=\begin{cases}۰ & ۰\leq p<\frac{۱}{۲}\\ -۱ & \frac{۱}{۲}\leq p<۱\end{cases}$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر $\{-۱,۰\}$ می شود.

**۲۴** **گزینه ۴**

**گام اول**

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد پس داریم:$xf(x) \geq ۰$

**گام دوم**

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می کنیم در چه بازه هایی$xf(x) \geq ۰$ برقرار است. داریم:

| x | -۴ | -۳ | | ۰ | | ۱ | | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | - | | - | ۰ | + | | + | |
| f(x) | + | ۰ | - | | - | ۰ | + | ۰ |
| xf(x) | - | ۰ | + | ۰ | - | ۰ | + | ۰ |
| | | | ج | | | | ج | |

دو بازهٔ مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$ درمی آید.

**۲۵** **گزینه ۴**

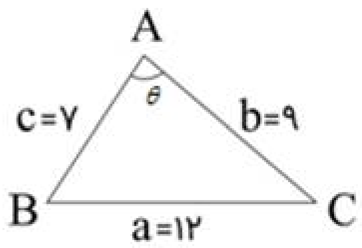
$$B = ۶۰^\circ, C = ۴۵^\circ \Rightarrow A = ۷۵^\circ$$
$$\sin(۷۵^\circ) = \sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث $ABC$ داریم:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{۳ + \sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ \times \frac{۳ + \sqrt{۳}}{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}$$
$$= ۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳} + ۱)}{\sqrt{۲}(\sqrt{۳} + ۱)} = ۳\sqrt{۲}$$

**۲۶** **گزینه ۴**

اضلاع مثلث را به‌صورت شکل زیر درنظر می‌گیریم:




پس مساحت مثلث به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2}(7)(9)\sin\theta = \frac{63}{2}\sin\theta$$

برای محاسبهٔ $\sin\theta$ از رابطهٔ کسینوس‌ها استفاده می‌نماییم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \Rightarrow 12^2 = 9^2 + 7^2 - 2(9)(7)\cos\theta \Rightarrow 144 = 49 + 81 - 2 \times 9 \times 7\cos\theta$$

$$\Rightarrow 14 = -2 \times 9 \times 7\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{9}$$

حال مقدار $\sin\theta$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

درنتیجه:

$$S = \frac{63}{2}\left(\frac{4\sqrt{5}}{9}\right) = 14\sqrt{5}$$

**۲۷** **گزینه ۳**

دورهٔ تناوب تابع برابر $\pi$ و ماکزیمم مقدار آن ۱.۵ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad (I)$$

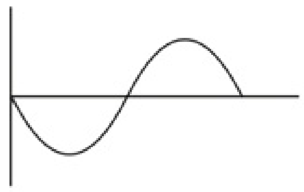
$$\text{ماکزیمم تابع} = 1 + |a| = 1/5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \; (II)$$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس نمودار با محور yها بزرگ‌تر از یک است.

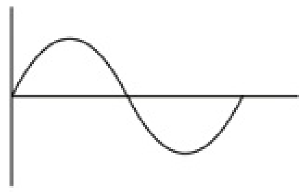
$$x = 0 : y = 1 + a\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 1 - \frac{a}{2} > 1 \Rightarrow \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a < 0 \xrightarrow{(II)} a = \frac{-1}{2}$$

باتوجه‌به اینکه ضریب sin در تابع منفی است و باتوجه‌به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = 2$ قابل‌قبول است.

$$a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



نمودار y=-sinx



نمودار y=-sin(-x)

**۲۸** **گزینه ۱**

**گام اول**

بـا توجه به اینکه در صورت سؤال مقـدار $\tan ۱۵^\circ$ داده شـده است، سـعی می کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویـهٔ $۱۵^\circ$ به دست آوریم.

**گام دوم**

$$A=\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵^\circ)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$

$$=\frac{\sin ۱۵^\circ-(-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}$$

برای این که در کسر داده شده $\tan ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}$$

$$=\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

**۲۹** **گزینه ۳**

**گام اول**

الف)

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

ب)

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

**گام دوم**

باتوجه‌به صورت سؤال و قسمت (الف) از گام اول، مقدار $\tan\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan\alpha}=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱+\tan\alpha=۵\,(۱-\tan\alpha)\Rightarrow ۱+\tan\alpha=۵-۵\tan\alpha\Rightarrow ۶\tan\alpha=۴$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول مقدار $\tan ۲\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\frac{۲(\frac{۲}{۳})}{۱-(\frac{۲}{۳})^{۲}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

**۳۰** **گزینه ۲**

**گام اول**

طبق فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\cos p+\cos q=۲\cos\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$$

**گام دوم**

$$\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}+۲=\frac{۱+۲\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{۲(\frac{۱}{۲}+\cos ۲۰^\circ)}{\cos ۲۰^\circ}$$

می‌دانیم $\frac{۱}{۲}=\cos ۶۰^\circ$ است. باتوجه‌به گام اول، کسر حاصل را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$\frac{۲\,(\frac{۱}{۲}+\cos ۲۰^\circ)}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{۲(\cos ۶۰^\circ+\cos ۲۰^\circ)}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{۲(۲\cos\frac{۶۰^\circ+۲۰^\circ}{۲}\cos\frac{۶۰^\circ-۲۰^\circ}{۲})}{\cos ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۴\cos ۴۰^\circ\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=۴\cos ۴۰^\circ$$

۳۱ گزینه ۴

گام اول

می‌دانیم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ = \frac{\sin ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ} + \frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} = \frac{\sin ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ + \sin ۱۰^\circ \cos ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ}$$
$$= \frac{\sin(۱۰^\circ + ۷۰^\circ)}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ}$$
$$= \frac{\sin ۸۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲} - ۱۰^\circ)}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{\cos ۱۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ} = \frac{۱}{\cos ۷۰^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$\cos ۵۰^\circ(\tan ۷۰^\circ + \tan ۱۰^\circ) = \frac{\cos ۵۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ} = \frac{\cos(\frac{\pi}{۲} - ۴۰^\circ)}{\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲۰^\circ)} = \frac{\sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} = \frac{\sin ۲(۲۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}$$
$$= \frac{۲\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} = ۲\cos ۲۰^\circ$$

۳۲ گزینه ۴

گام اول

طبق فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\sin p - \sin q = ۲\sin\frac{p-q}{۲}\cos\frac{p+q}{۲}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\sin ۳x - \sin x = ۲\sin\frac{۳x-x}{۲}\cos\frac{۳x+x}{۲} = ۲\sin x\cos ۲x$$

بنابراین:

$$\sin ۳x - \sin x + ۲\sin^۲ x = ۱ \Rightarrow ۲\sin x\cos ۲x + ۲\sin^۲ x = ۱ \Rightarrow ۲\sin x\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos ۲x = \cos ۲x \Rightarrow ۲\sin x\cos ۲x - \cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x(۲\sin x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x = \frac{\pi}{۴}, x = \frac{۳\pi}{۴}, x = \frac{۵\pi}{۴}, x = \frac{۷\pi}{۴} \\ ۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x = \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x = \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ داده‌شده در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، دارای ۶ جواب است.

۳۳ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$۲\cos ۲x = \cot x(۴\sin x + \tan x) \Rightarrow ۲(۲\cos^۲ x - ۱) = ۴\cot x\sin x + \cot x\tan x$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۲ x - ۲ = ۴\cos x + ۱ \Rightarrow ۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۴+\sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{۴+۸}{۸} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \cos x = \frac{۳}{۲} \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{۴-\sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{۴-۸}{۸} = -\frac{۴}{۸} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۳۴ **گزینه ۴**

**گام اول**

می‌دانیم:

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x \ , \ \sin ۲x = ۲\sin x \cos x$$

**گام دوم**

باتوجه‌به گام اول، کسر داده‌شده را ساده کرده و سپس حل می‌کنیم:

$$\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۲\sin^۲ x}{۲\sin x \cos x} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{۳} \Rightarrow \tan x = \sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

۳۵ **گزینه ۱**

**گام اول**

طبق فرمول‌های تبدیل ضرب به جمع و جمع به ضرب داریم:

$$\cos a \cos b = \frac{۱}{۲}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$
$$\sin a \sin b = -\frac{۱}{۲}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$
$$\cos p + \cos q = ۲\cos\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$$

**گام دوم**

باتوجه‌به گام اول، معادلهٔ داده‌شده را ساده کرده و جواب آن را به دست می‌آوریم:

$$\cos ۵x \cos ۳x - \sin ۳x \sin x = \frac{۱}{۲}(\cos(۵x+۳x) + \cos(۵x-۳x))$$
$$+\frac{۱}{۲}(\cos(۳x+x) - \cos(۳x-x))$$
$$= \frac{۱}{۲}\cos ۸x + \frac{۱}{۲}\cos ۲x + \frac{۱}{۲}\cos ۴x - \frac{۱}{۲}\cos ۲x = \frac{۱}{۲}\cos ۸x + \frac{۱}{۲}\cos ۴x$$
$$= \frac{۱}{۲}(\cos ۸x + \cos ۴x) = \frac{۱}{۲} \times ۲(\cos\frac{۸x+۴x}{۲}\cos\frac{۸x-۴x}{۲}) = \cos ۶x \cos ۲x$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\cos ۵x \cos ۳x - \sin ۳x \sin x}{\cos ۲x} = ۱ \Rightarrow \frac{\cos ۶x \cos ۲x}{\cos ۲x} = ۱ \Rightarrow \cos ۶x = ۱$$
$$\Rightarrow ۶x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۶} = \frac{k\pi}{۳}$$

۳۶ **گزینه ۴**

**گام اول**

الف) طبق فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\sin p + \sin q = ۲\sin \frac{p+q}{۲}\cos \frac{p-q}{۲}$$
$$\cos p + \cos q = ۲\cos \frac{p+q}{۲}\cos \frac{p-q}{۲}$$

ب) می‌دانیم:

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$$

**گام دوم**

باتوجه‌به گام اول، معادلهٔ داده‌شده را ساده کرده و جواب آن را به دست می‌آوریم.

$$\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x} = \frac{۲\sin\frac{x+۲x}{۲}\cos\frac{x-۲x}{۲}}{۲\cos\frac{x+۲x}{۲}\cos\frac{x-۲x}{۲}} = \frac{۲\sin(\frac{۳x}{۲})\cos(-\frac{x}{۲})}{۲\cos\frac{۳x}{۲}\cos(-\frac{x}{۲})}$$
$$= \frac{۲\sin(\frac{۳x}{۲})\cos(\frac{x}{۲})}{۲\cos(\frac{۳x}{۲})\cos(\frac{x}{۲})} = \tan(\frac{۳x}{۲})$$
$$\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x} = \cot x \Rightarrow \tan(\frac{۳x}{۲}) = \cot x = \tan(\frac{\pi}{۲} - x)$$
$$\Rightarrow \frac{۳x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow \frac{۵x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\times\frac{۲}{۵}} x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵}$$
$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۵}(۲k+۱)\pi$$

**۳۷** گزینه ۱

### گام اول

داریم:

$$\sin^{2} x = 1 - \cos^{2} x$$

### گام دوم

با استفاده از رابطهٔ گام اول، معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را برحسب $\cos x$ مرتب می‌کنیم:

$$2\sin^{2} x - \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin^{2} x = 1 - \cos^{2} x} 2 - 2\cos^{2} x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^{2} x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس هر دو مقدار به‌دست‌آمده، قابل‌قبول است. باتوجه‌به آن‌ها جواب‌های معادله را در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos \pi \Rightarrow x_2 = \pi$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3}$$

۳۸ گزینه ۱

**گام اول**

الف) دامنهٔ تابع $fog(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$

ب) می‌دانیم به ازای هر u دلخواه؛ $-۱\leq \sin u\leq ۱$ است؛ بنابراین دامنهٔ تابع $y=\sin^{-1}u$ به‌صورت $-۱\leq u\leq ۱$ تعریف می‌شود.

**گام دوم**

ابتدا دامنهٔ توابع $f(x)$ و $g(x)$ و سپس دامنهٔ تابع $fog(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$f(x)=\sin^{-۱}(۲x-۱)\Rightarrow -۱\leq ۲x-۱\leq ۱\xrightarrow{+۱}۰\leq ۲x\leq ۲\xrightarrow{\div ۲}۰\leq x\leq ۱\Rightarrow D_f=[۰,۱]$$

$$g(x)=\frac{x^۲}{۱+x^۲}\xrightarrow{۱+x^۲\neq ۰}D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g|g(x)\in D_f\right\}=\{x\in\mathbb{R}|۰\leq \frac{x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱\}$$

اگر $x=۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{x^۲}{۱+x^۲}=۰$$

اگر $x\neq ۰$ باشد، آنگاه $۱+x^۲>x^۲$ و درنتیجه $۰\leq \frac{x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱$ است.

بنابراین $D_{fog}=\mathbb{R}$ می‌شود.

۳۹ گزینه ۱

با یک ترفند ساده ولی زیرکانه، تست را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\sin^{-۱}(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=x\Rightarrow \sin x=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

باتوجه‌به مقدار $\sin x$، حاصل $\cos x$ را تعیین می‌کنیم:

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱\Rightarrow (\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})^۲+\cos^۲x=۱\Rightarrow \frac{۸}{۹}+\cos^۲x=۱\Rightarrow \cos^۲x=\frac{۱}{۹}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۳}$$

$$\cos(۳\sin^{-۱}\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\cos ۳x=۴\cos^۳x-۳\cos x=۴(\frac{۱}{۳})^۳-۳(\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۲۷}-۱=-\frac{۲۳}{۲۷}$$

۴۰ گزینه ۲

نکته: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{cases}\alpha=\cos^{-1}(\frac{3}{5})\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}\xrightarrow{\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \beta=\cos^{-1}(-\frac{4}{5})\Rightarrow\cos\beta=-\frac{4}{5}\xrightarrow{\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)}\sin\beta=\frac{3}{5}\end{cases}$$

$$\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5})+\cos^{-1}(-\frac{4}{5}))=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=(\frac{4}{5})(-\frac{4}{5})$$

$$+(\frac{3}{5})(\frac{3}{5})=-\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=-\frac{7}{25}$$

۴۱ گزینه ۳

$$\log_x^{(3x+8)}+\log_x^{(x-6)}=2\Rightarrow\log_x^{(3x+8)(x-6)}=2\Rightarrow x^2=3x^2-10x-48\Rightarrow x^2-5x$$

$$-24=0$$

$$\Rightarrow(x-8)(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=8\Rightarrow\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}\\ x=-3\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

۴۲ گزینه ۴

$$A=\log_8^{2\sqrt[3]{0/25}}\xrightarrow{\sqrt[3]{0/25}=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}}\log_{2^3}^{2\times2^{-\frac{2}{3}}}\Rightarrow\log_{2^3}^{2^{\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\log_4^{\frac{1}{A}-1}\xrightarrow{A=\frac{1}{9}}\log_4^{9-1}=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}$$

## ۴۳ گزینه ۳

معادلهٔ توانی را با استفاده از تغییر متغیر $۲^x = t$ حل می کنیم. توجه داشته باشید که مقدار $۲^x$ همیشه مثبت است.

$$۴^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^۲)^x + ۲^x = ۷۲ \Rightarrow (۲^x)^۲ + ۲^x = ۷۲ \xrightarrow{۲^x=t} t^۲ + t = ۷۲ \Rightarrow t^۲ + t - ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t+۹)(t-۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۹ \quad \text{غ ق ق} \\ t = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۸ \Rightarrow ۲^x = ۲^۳ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

حال که مقدار $x$ را به دست آوردیم آن را در معادلـهٔ لگاریتمی قرار داده و با اسـتفاده از ویژگی های لگاریتم، مقدار $y$ را به دست می آوریم.

$$log(x+۱) + log(۲y + x^۲) = ۲ \xrightarrow{x=۳} log\,۴ + log(۲y+۹) = ۲$$

$$\xrightarrow{log\,a + log\,b = log\,ab} log_{۱۰}^{۴(۲y+۹)} = ۲$$

$$\xrightarrow{log_b^a = c \Rightarrow a = b^c} ۴(۲y+۹) = ۱۰^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow ۲y + ۹ = ۲۵ \Rightarrow ۲y = ۱۶ \Rightarrow y = ۸$$

## ۴۴ گزینه ۴

### گام اول

الف) در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$، جملهٔ $(k+۱)$اُم از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$a_{k+۱} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

بنابراین جملهٔ $(k+۱)$اُم بسط $(x^۲ + \frac{۲}{x})^۶$ برابر است با:

$$a_{k+۱} = \binom{۶}{k} (x^۲)^{۶-k} (\frac{۲}{x})^k$$

ب) ما می خواهیم ضـریب جملهٔ مستقل از $x$ را تعیین کنیم، پس جملهٔ$(k+۱)$اُم را ساده کرده و توان $x$ را برابر صفر قرار می دهیم سپس مقدار $k$ موردنظر را محاسبه می کنیم. با داشتن $k$ ضریب جملهٔ مستقل از $x$ هم مشخص می شود.

### گام دوم

$$\text{جملهٔ } (k+۱)\text{اُم} = \binom{۶}{k} x^{۱۲-۲k} \times \frac{۲^k}{x^k} = ۲^k \binom{۶}{k} x^{۱۲-۲k-k} = ۲^k \binom{۶}{k} x^{۱۲-۳k}$$

توان $x$ را برابر صفر قرار می دهیم:

$$۱۲ - ۳k = ۰ \Rightarrow ۳k = ۱۲ \Rightarrow k = ۴$$

پس ضریب عددی جملهٔ مستقل از $x$ برابر است با:

$$۲^۴ \times \binom{۶}{۴} = ۱۶ \times \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۶ \times ۱۵ = ۲۴۰$$

۴۵ **گزینه ۲**

نکته: برای به دست آوردن مجموع ضرایب یک بسط، کافی است به‌جای متغیرهای آن عدد ۱ را قرار دهیم.

باتوجه‌به نکتهٔ بالا، داریم:

$$x=۱:(۳x^۲-۵)^{n+۱}\ \text{مجموع ضرایب}=(۳-۵)^{n+۱}=۶۴\Rightarrow(-۲)^{n+۱}=۶۴\Rightarrow n+۱$$
$$=۶\Rightarrow n=۵$$
$$x=۱,n=۵:(x+۲x^۳)^{۲n-۷}\ \text{مجموع ضرایب}=(۱+۲)^{۲n-۷}=۳^۳=۲۷$$

۴۶ **گزینه ۲**

ابتدا معادلهٔ خط را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$۲y+x=۵\Rightarrow ۲y=-x+۵\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

نمودار تـابع $y=۴-|x|$ بالـای خط $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ قرار دارد پس بایـد نامعادلـهٔ $۴-|x|>-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ برقرار باشد.

جواب نامعادله را در دو حالت $x\geq ۰$ و $x<۰$ تعیین می کنیم.

$$x\geq ۰:|x|=x\Rightarrow ۴-x>-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}x<۴-\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow x<۳\xrightarrow{x\geq ۰}۰$$
$$\leq x<۳\quad(I)$$

$$x<۰:|x|=-x\Rightarrow ۴+x>-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}x>-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\div\frac{۳}{۲}}x>-۱\xrightarrow{x<۰}-۱<x<۰$$
$$(II)$$

مجموعه جواب کل، اجتماع دو بازهٔ $(I)$ و $(II)$ بوده که برابر $(-۱,۳)$ می شود. $b-a$ برابر است با:

$$b-a=۳-(-۱)=۳+۱=۴$$

۴۷ **گزینه ۳**

**گام اول**

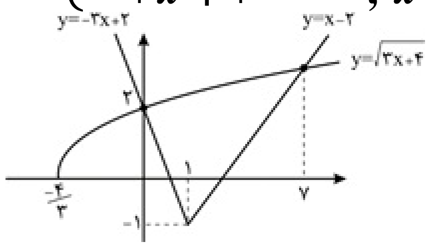
هر عبارت شامل قـدر مطلق را می‌توان به ازای مقادیر بزرگ‌تر از ریشـهٔ قدر مطلق و مقادیر کوچک‌تر از آن به‌طور جداگانه بررسـی کرد.

**گام دوم**

روش اول:

منحنی مربوط به دو تابع $y=\sqrt{۳x+۴}$ و $y=۲|x-۱|-x$ را رسم می‌کنیم. مجموعه جواب ناحیه‌ای است که نمودار تابع $y=\sqrt{۳x+۴}$ بالای نمودار تابع $y=۲|x-۱|-x$ قرار می‌گیرد. باتوجه‌به گام اول، ابتدا وضـعیت قدر مطلق را مشـخص می‌کنیم، داریم:

$$y=2|x-1|-x=\begin{cases}2(x-1)-x & ; x\geq 1\\ 2(-x+1)-x & ; x<1\end{cases}\Rightarrow y$$
$$=\begin{cases}x-2 & ; x\geq 1\\ -3x+2 & ; x<1\end{cases}$$




همان‌طور که از روی نمودار مشخص است مجموعه جواب نامعادلهٔ داده‌شده بازهٔ $(0,7)$ است و طول وسط آن $\frac{7}{2}$ می‌شود.

روش دوم:

عبارت رادیکالی $\sqrt{3x+4}$ روی بازهٔ $[-\frac{4}{3},+\infty)$ تعریف شده و $x=1$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است، بنابراین مجموعه جواب نامعادله را در دو حالت $x\geq 1$ و $\frac{-4}{3}\leq x<1$ به دست می‌آوریم:

$$x\geq 1:\quad |x-1|=x-1\quad\Rightarrow\quad \sqrt{3x+4}>2(x-1)-x\quad\Rightarrow\quad \sqrt{3x+4}$$
$$>x-2$$

در بازهٔ $[1,2)$ این رابطه همواره برقرار است؛ زیرا روی این بـازه $x-2<0$ و $\sqrt{3x+4}>0$ است. به ازای $x\geq 2$ دو طرف نامساوی مثبت است بنابراین می‌توان دو طرف را به توان دو رساند، پس داریم:

$$3x+4>(x-2)^2\quad\Rightarrow\quad 3x+4>x^2-4x+4\quad\Rightarrow\quad x^2-7x<0$$
$$\Rightarrow\quad x(x-7)<0\quad\Rightarrow\quad 0<x<7\quad\xrightarrow{x\geq 1}\quad 1\leq x<7\qquad (I)$$
$$x<1:\quad |x-1|=-(x-1)=-x+1\quad\Rightarrow\quad \sqrt{3x+4}>2(-x+1)-x$$
$$\Rightarrow\quad \sqrt{3x+4}>-2x+2-x\quad\Rightarrow\quad \sqrt{3x+4}>-3x+2$$

درمحدودهٔ $-\frac{4}{3}\leq x\leq 0$ نامعادلهٔ $\sqrt{3x+4}>-3x+2$ برقرار نیست پس جواب نامعـادله را در محـدودهٔ $0<x<1$ بررسی می‌کنیم. باتوجه‌به اینکه به ازای $0<x<1$، $\left|\sqrt{3x+4}\right|>|-3x+2|$ است پس می‌توان دو طرف نامساوی را به توان دو رساند:

$$3x+4>(2-3x)^2\Rightarrow 3x+4>9x^2-12x+4\Rightarrow 9x^2-15x<0$$
$$\Rightarrow 3x(3x-5)<0\Rightarrow 0<x<\frac{5}{3}\xrightarrow{0<x<1} 0<x<1\,(II)$$

اجتماع دو بازهٔ $(I)$ و $(II)$، بازهٔ $0<x<7$ می‌شود که طول وسط این بازه برابر $\frac{7}{2}$ است.

۴۸ **گزینه ۲**

**گام اول**

الف) نمودار تابع $f(x) = \frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$ در صورتی پایین خط $y = ۲$ قرار می گیرد که نامعادلهٔ $\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴} < ۲$ برقرار باشد.

ب) بـا تعیین علامت، محـدودهٔ جواب نامعادله را تعیین کرده، آن را با بازهٔ $(a,b)$ مطابقت داده و مقدار $b-a$ را محاسبه می کنیم.

**گام دوم**

$$\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴} < ۲ \Rightarrow \frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴} - ۲ < ۰ \Rightarrow \frac{۳x^۲-۲x-۲x^۲-۸}{x^۲+۴} < ۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۲x-۸}{x^۲+۴} < ۰$$

$$\xrightarrow{x^۲+۴>۰} x^۲-۲x-۸ < ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲) < ۰ \Rightarrow -۲ < x < ۴ \Rightarrow x \in (-۲\,,\,۴)$$

بنابراین بازهٔ $(a\,,\,b)$ به صورت $(-۲\,,\,۴)$ در آمده و حاصل $b-a$ برابر است با:

$$b-a = ۴-(-۲) = ۴+۲ = ۶$$

۴۹ **گزینه ۴**

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۱+۱۵} = \frac{۱}{۱۸} \Rightarrow \frac{۲x_۱+۱۵}{x_۱(x_۱+۱۵)} = \frac{۱}{۱۸}$$

$$\Rightarrow {x_۱}^۲ - ۲۱x_۱ - ۲۷۰ = ۰ \Rightarrow (x_۱-۳۰)(x_۱+۹) = ۰$$

$$\Rightarrow x_۱ = ۳۰ \Rightarrow x_۲ = ۴۵ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۷۵$$

۵۰ **گزینه ۱**

چون $x = ۱$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x = ۱ \Rightarrow \sqrt{۲+a} = \sqrt{۱}+۲ \Rightarrow ۲+a = ۹ \Rightarrow a = ۷$$

حال برای حل معادله، کافی است طرفین را به توان ۲ برسانیم:

$$(\sqrt{۲x+۷})^۲ = (\sqrt{x}+۲)^۲ \Rightarrow ۲x+۷ = x+۴+۴\sqrt{x} \Rightarrow x+۳ = ۴\sqrt{x}$$

مجدداً طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲+۶x+۹ = ۱۶x \Rightarrow x^۲-۱۰x+۹ = ۰ \Rightarrow (x-۹)(x-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۹ = ۰ \Rightarrow x = ۹ \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

چون ۹ در دامنه قرار دارد و در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند؛ پس ریشهٔ دوم این معادله $x = ۹$ است.

۵۱ **گزینه ۳**

صورت و مخرج کسر را در عبارت $(t^3+1)$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\frac{(t^3+1)(t^8-t^7+t^6-\dots-t+1)}{(t^3+1)(t^6-t^3+1)}=\frac{(t^2-t+1)(t+1)(t^8-t^7+t^6-\dots-t+1)}{t^9+1}$$

$$=\frac{(t^2-t+1)(t^9+1)}{t^9+1}=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{17}{4}+\frac{3}{4}=5$$

۵۲ **گزینه ۲**

**گام اول**

الف) وقتی بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد قرار گرفته باشد به طوری که این پنج عدد تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند، نتیجه می گیریم یک تصاعد هندسی با جملهٔ اول $a_1=4$ و جملهٔ پنجم $a_5=324$ داریم. با استفاده از همین دو مورد قدر نسبت تصاعد را به دست می آوریم.

ب) به انتهای تست، خوب دقت کنید. گفته شده "مجموع ۵ عدد مثبت" یعنی اینکه تمامی جملات دنباله باید مثبت باشند، پس قدر نسبت دنباله نمی تواند یک عدد منفی باشد و حتماً باید مثبت در نظر گرفته شود.

**گام دوم**

$$a_n=a_1q^{n-1}\Rightarrow a_5=a_1q^4\xrightarrow[a_1=4]{a_5=324}324=4q^4\Rightarrow q^4=\frac{324}{4}=81\xrightarrow{q>0}q=3$$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{4(1-3^5)}{1-3}=\frac{4(1-243)}{-2}=\frac{4(-242)}{-2}=2\times242=484$$

۵۳ **گزینه ۳**

**گام اول**

ظاهر تست ممکن است کمی گیـج کننـده به نظر برسد. اما اگر مرحله‌به‌مرحله گفته های تست را به زبان ریاضـی برگردانیم حل تست کار چندان دشواری نخواهد بود.

الف) تست به ما گفته تعـداد جملات یک دنبالهٔ هندسـی، زوج است. ما فرض می کنیم تعداد جملات این دنباله برابر $2n$ و قدر نسبت آن برابر $q$ باشد.

ب) جملات با شـماره های فرد تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $q^2$ می دهند. اگر تعداد کل جملات برابر $2n$ باشد، پس تعداد جملات فرد برابر $n$ است.

**گام دوم**

باتوجه به اینکه مجموع $n$ جملهٔ اول یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q$ از رابطهٔ $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می آید، داریم:

$$S_{2n} = 3S_n \Rightarrow \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{3}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-q} = \frac{3}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{3}{1+q} = 1 \Rightarrow q+1 = 3 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین قدر نسبت دنبالهٔ هندسی برابر ۲ می شود.

۵۴ **گزینه ۳**

نکته: مجموع $n$ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1$ و قدر نسبت $d$ برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

راه‌حل اول:

نکته: در دنبالهٔ حسابی $a_n$، اگر $m+n = p+q$، آنگاه: $a_m + a_n = a_p + a_q$

$$a_3 + a_{13} = 24 \xrightarrow{3+13=1+15} a_1 + a_{15} = 24$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = 15 \times 12 = 180$$

راه‌حل دوم:

$$a_3 + a_{13} = 24 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 12d = 24 \Rightarrow 2a_1 + 14d = 24 \quad (*)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) \overset{(*)}{=\!=} \frac{15}{2} \times 24 = 180$$

**۵۵** **گزینه ۲**

جمله‌های مشترک تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت دو دنباله است.

$$۲,۹,۱۶,۲۳,۳۰,۳۷,\dots \Rightarrow d_۱ = ۷$$
$$۱۲,۱۷,۲۲,۲۷,۳۲,۳۷,\dots \Rightarrow d_۲ = ۵$$

اولین جملهٔ مشترک بین دو دنباله، ۳۷ است.

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \xrightarrow{d=[۷,۵]=۳۵} a_n = ۳۷ + ۳۵(n-۱) = ۳۵n + ۲$$
$$۱۰۰ \leq a_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۳۵n + ۲ < ۳۰۰$$
$$\Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸ \Rightarrow ۲/\dots \leq n < ۸/\dots$$
$$۳ \leq n \leq ۸ \Rightarrow n \in \{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$$

پس ۶ عدد با این شرایط داریم.

**۵۶** **گزینه ۴**

$$a_۲, ۲a_۵, a_۸ \rightarrow aq, ۲aq^۴, aq^۷$$
$$\xrightarrow{\text{تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند}} aq + aq^۷ = ۲(۲aq^۴) \Rightarrow q^۷ - ۴q^۴ + q = ۰$$
$$q(q^۶ - ۴q^۳ + ۱) = \begin{cases} q = ۰ \\ q^۶ - ۴q^۳ + ۱ = ۰ \end{cases}$$
$$\xrightarrow{q^۳ = t} t^۲ - ۴t + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow t = ۲ \pm \sqrt{۳} \Rightarrow q^۳ = ۲ \pm \sqrt{۳}$$
$$\frac{aq^۷}{aq} = q^۶ = (q^۳)^۲ = (۲ + \sqrt{۳})^۲ = ۷ + ۴\sqrt{۳}$$

**۵۷** **گزینه ۴**

$$(۸-x)(۱۲+x) = x^۲ \Rightarrow -x^۲ - ۴x + ۹۶ = x^۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۴۸ = ۰$$
$$\Rightarrow (x+۸)(x-۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۸ \text{ غ‌ق} \\ x = ۶ \end{cases} \Rightarrow ۱۸,۶,۲ \Rightarrow a = ۱۸ , q = \frac{۱}{۳}$$
$$\text{حد مجموع}: S = \frac{a}{۱-q} = \frac{۱۸}{۱-\frac{۱}{۳}} = ۲۷$$

**۵۸** **گزینه ۴**

تمامی عبارت‌ها را بر اساس توان‌هایی از ۲ و ۳ می‌نویسیم:

$$\sqrt[6]{2^2\times 3}\times\sqrt[4]{2\times 3^3}\times\sqrt[3]{2\times\sqrt[4]{2\times 3}}$$
$$=((2)^{\frac{2}{6}}\times(3)^{\frac{1}{6}})\times(2^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}})\times(2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{12}}\times 3^{\frac{1}{12}})$$
$$=2^{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12})}\times 3^{(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{12})}=2^1\times 3^1=6$$

**۵۹** **گزینه ۴**

**گام اول**

طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

**گام دوم**

با استفاده از اتحاد مزدوج  و با در نظر گرفتن $A=\alpha^2+\beta^2$ و $B=\alpha\beta$ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\left(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\right)\left(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\right)=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-(\alpha\beta)^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2$$
$$=\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2$$

مقادیر $\alpha$ و $\beta$ را در عبارت به‌دست‌آمده جایگذاری می‌کنیم:

$$\left(\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}\right)^4+\left(\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}\right)^4+\left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2}-4)}\right)^2\left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2}+4)}\right)^2$$
$$\left(\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}\right)^4+\left(\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}\right)^4+\left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2}-4)}\right)^2\left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2}+4)}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}\right)^4+\left(\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}\right)^4+\left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2}-4)\,(3\sqrt{2}+4)}\right)^2$$
$$=3\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}+4+\sqrt{2}=7\sqrt{2}$$

**۶۰** **گزینه ۱**

$$0/a_1\ldots a_m\overline{b_1\ldots b_n}=\frac{a_1\ldots a_mb_1\ldots b_n-a_1\ldots a_m}{\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ تا}}\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ تا}}}$$

ابتدا با استفاده از نکتهٔ بالا، عدد A را به دست می‌آوریم:

$$A=1/\overline{45}=\frac{145-1}{99}=\frac{144}{99}=\frac{16}{11}\Rightarrow\frac{1}{A}=\frac{11}{16}$$

برای محاسبهٔ تعداد ارقام اعشاری عدد $\frac{1}{A}$، کافی است حاصل تقسیم ۱۱ بر ۱۶ را به دست آوریم:

$\frac{11}{16}=0/6875\ \Rightarrow\ \frac{1}{A}=0/6875\Rightarrow$ $\frac{1}{A}$ دارای ۴ رقم اعشار است

۱ دو دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = n\,ln(n)$ و $b_n = n\,ln(n+1)$ مفروض‌اند، دنبالهٔ $\{b_n - a_n\}$ چگونه است؟

۱) واگرا
۲) نزولی - کران‌دار
۳) همگرا به صفر
۴) همگرا به ۱

۲ بزرگ‌ترین کران پایین دنبالهٔ $\left\{\sqrt{n^2+3n}-n\right\}$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۲

۳ حد دنبالهٔ $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$ وقتی $n \to \infty$ کدام است؟

۱) $2e$
۲) $e^2$
۳) $3e$
۴) $3e^2$

۴ حد دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = n(log(n+1) - log\,n)$ وقتی $n \to \infty$، کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}log\,e$
۳) $log\,e$
۴) ۱

۵ به ازای مقادیر $n \geq n_0$، اگر فاصلهٔ نقاط نظیر دنبالهٔ $\left\{\frac{2n-5}{3n+2}\right\}$ از نقطهٔ همگرایی خود کمتر از ۰/۰۱ باشد، کوچک‌ترین مقدار $n_0$ کدام است؟

۱) ۲۰۹
۲) ۲۰۱
۳) ۲۱۱
۴) ۲۱۲

۶ دنبالهٔ $\left\{\frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+2}\right\}$، چگونه است؟

۱) غیریکنوا - واگرا
۲) غیریکنوا - همگرا
۳) نزولی - همگرا
۴) صعودی - واگرا

۷ اگر $a_n = \sqrt{n^2+n}$ و $b_n = \frac{n^2+1}{n}$، هر یک از دو دنبالهٔ $\{a_n - b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ به ترتیب چگونه اند؟

۱) همگرا - همگرا
۲) همگرا - واگرا
۳) واگرا - همگرا
۴) واگرا - واگرا

۸ اگر $a_n = \frac{n+1}{n}$ و $f(x) = \frac{2x+[-x]}{x^2-1}$ آنگاه دنبالهٔ $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) همگرا نیست.

۹ در بازهٔ $(0,2)-\{1\}$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq 4\tan^{-1}(x^2-2x+2)$، حاصل $\lim_{x\to 1} f(x)$ برابر کدام است؟

۱) صفر
۲) $\pi$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) نامشخص

۱۰ حاصل $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

۱۱ حاصل $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 3x}}{1-\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲ اگر $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} = 2^a$ باشد، آنگاه $a$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{2}$

۱۳ اگر $\lim_{x\to \frac{1}{6}^+} \frac{[4\cos^2 \pi x]-12x}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) $-20$
۲) $-16$
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۱۴ حد عبارت $\left[\frac{x}{\sin x}\right] + 2\left[\frac{\sin x}{x}\right]$، وقتی $x \to 0$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) حد ندارد.

۱۵ اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲} = -۱$، آنگاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x = -۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۶ حاصل $\lim_{x\to ۴} (۲-\sqrt{x})\,\tan\frac{\pi x}{۸}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}$
۲) $-\frac{۲}{\pi}$
۳) $\frac{۲}{\pi}$
۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۷ حاصل $\lim_{x\to -۴} \left(\frac{x+۱۹}{x^۲+۳x-۴} + \frac{۳}{x+۴}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۴}{۵}$
۲) $\frac{-۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۸ اگر $\lim_{x\to ۳} \frac{x-۴}{۲x^۲+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $-۳$
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

۱۹ حدّ عبارت $\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}] - \cos x[\sin ۲x]$، وقتی $x \to \pi$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) حد ندارد

۲۰ اگر $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱} = \frac{۳}{۲}$ باشد، b کدام است؟

۱) -۸
۲) -۶
۳) ۴
۴) ۵

۲۱ حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{x^۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) صفر

۲۲ اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}$، کدام گزینه در مورد پیوستگی تابع $gof$ در $x=1$ صحیح است؟

۱) تابع $gof$ در $x=1$ فقط پیوستگی چپ دارد.
۲) تابع $gof$ در $x=1$ فقط پیوستگی راست دارد.
۳) تابع $gof$ در $x=1$ پیوسته است.
۴) تابع $gof$ در $x=1$ شرایط بحث در مورد پیوستگی را ندارد.

۲۳ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; \ |x|\geq 1 \\ x[x] & ; \ |x|<1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می کند؟

۱) $-2$
۲) $-1$
۳) $1$
۴) $2$

۲۴ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-[x^2]$ در بازهٔ $[0,2]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۵ به ازای کدام مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & ; \ 0<x<a \\ 1-\frac{x}{4} & ; \ x\geq a \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

۲۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \left[\frac{\sin x}{x}\right]\cos 4x & ; \ |x|\leq \frac{\pi}{2} \\ a & ; \ x=0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=0$ پیوسته است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) $-1$
۲) صفر
۳) ۱
۴) همواره ناپیوسته

۲۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادلهٔ درجهٔ سوم $3x^3+ax-1=0$، فقط یک ریشه در بازهٔ $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ دارد؟

۱) $(\frac{1}{3},\frac{5}{4})$
۲) $(\frac{3}{2},\frac{8}{3})$
۳) $(\frac{5}{4},\frac{3}{2})$
۴) $(\frac{5}{4},\frac{8}{3})$

۲۸ کوچک‌ترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۳ - ۳x + ۱ = ۰$ در کدام بازه است؟

۱) $(۰, \frac{۱}{۳})$
۲) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳})$
۳) $(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۵})$
۴) $(\frac{۲}{۵}, \frac{۱}{۲})$

۲۹ اگر $f(x) = \frac{x+۱۱}{x^۲-۳x-۴}$ و $g(x) = \frac{۳}{x-۴}$، نقطهٔ تلاقی مجانب های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۰)$
۲) $(-۱, ۲)$
۳) $(۴, -۱)$
۴) $(۴, ۰)$

۳۰ خط به معادلهٔ $y = \frac{۳}{۲}$ مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x - ۱ + \sqrt{ax^۲ + bx}$ است، $b$ کدام است؟

۱) $-۱۰$
۲) $-۵$
۳) $۵$
۴) $۱۰$

۳۱ ضریب زاویهٔ خط مجانب مایل نمودار تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x) = x(۲e^{-x} - ۱)$ کدام است؟

۱) $-۲$
۲) $-۱$
۳) $۱$
۴) $۲$

۳۲ امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲-۱}}$ در نقاط A و B با عرض‌های مثبت متقاطع هستند. اندازهٔ $AB$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۳$

۳۳ نمودار تابع $f(x) = x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳}$ با کدام طول مجانب خود را قطع می کند؟

۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۴ مشتق تابع $f(x) = tan(\frac{\pi}{۶} + sin^{-۱}\sqrt{x})$ در نقطهٔ $x = \frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$
۲) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

۳۵ اگر تابع f در $x=-2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $x^2f(x)$ در $x=-2$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۳۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+e^{2x}$ مفروض است. معادلـهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f^{-1}$، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $3y-x=-1$
۲) $y-3x=-3$
۳) $2y-x=-2$
۴) $2y+x=1$

۳۷ خط قائم بر نمودار $x^2y-\ln(2x-y)=12$ در نقطهٔ $(2,3)$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-5$
۲) $-4$
۳) ۱
۴) ۲

۳۸ اگر $\theta$ زاویهٔ بین دو مماس چپ و راست در نقطهٔ گوشهٔ نمودار تابع $y=\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3}}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

۳۹ به ازای کدام مقدار a خط به معادلهٔ $y=-3x+2$، بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+a}{x-2}$، مماس است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۴۰ امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{3}$ با نیمساز ربع سوم، زاویهٔ $\alpha$ می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۲
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۳

۴۱ اگر $\theta$ زاویهٔ بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطـهٔ $f(x)=[2+\cos\frac{x}{2}]\sin 2x$، در نقطهٔ $x=\pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $\frac{1}{9}$
۲) $\frac{1}{5}$
۳) $\frac{2}{9}$
۴) $\frac{2}{5}$

۴۲ از رابطهٔ $x^2y+y^2+3=0$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطهٔ $(2,-1)$ کدام است؟

۱) $-11$
۲) $-9$
۳) $-8$
۴) $-6$

۴۳ اگر $f(x)=x+e^x$ باشد، معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع $f^{-1}$ در نقطهٔ تلاقی آن با محور xها کدام است؟

۱) $2y-x=-1$
۲) $2y+x=1$
۳) $y-2x=1$
۴) $y+2x=2$

۴۴ دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=3x+|x|$ و $g(x)=\frac{3}{4}x+a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، تابع $gof$ در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

۱) $-\frac{1}{4}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) هیچ مقدار a

۴۵ اگر $f^{-1}$ وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد و $g(x)=\sqrt{2x}f^{-1}(x)$، $f(4)=2$ و $f'(4)=\frac{1}{3}$، آنگاه $g'(2)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۴۶ از نقطهٔ $A(2,9)$ دو خط مماس بر منحنی $y=-x^2+2x+5$ رسم شده است. تانژانت زاویهٔ بین این دو خط مماس کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{5}{12}$
۲) $\frac{7}{10}$
۳) $\frac{8}{11}$
۴) $\frac{7}{6}$

۴۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & ; \ x\geq 1 \\ x^2+ax+b & ; \ x<1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1-\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $3-\sqrt{2}$
۲) $2-\sqrt{2}$
۳) $2-2\sqrt{2}$
۴) $3-2\sqrt{2}$

۴۸ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، حاصل $f'(x)\cdot g'(f(x))$ کدام است؟

۱) $-1$
۲) $1$
۳) $x$
۴) $\frac{1}{2}x$

**۴۹** خط گذرا از دو نقطهٔ $(1, 2)$ و $(-1, 3)$، بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x)+4f(x)-5}{3-x}$ وقتی $x \to 3$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

**۵۰** اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

۱) $4g''(0)$
۲) $5g''(0)$
۳) $4g''(0) + 20$
۴) $5g''(0) + 20$

**۵۱** اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، آن‌گاه $(f^{-1})'(\frac{3}{5})$ کدام است؟

۱) $\frac{125}{64}$
۲) $\frac{32}{25}$
۳) $\frac{25}{32}$
۴) $\frac{64}{125}$

**۵۲** اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2}\cos \pi x$ باشد، مشتق $y = f(f(x))$ در $x = \frac{1}{3}$ چند برابر $3\sqrt{3}$ است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$
۲) $\frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi^2}{8}$
۴) $\frac{\pi^2}{4}$

**۵۳** مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطهٔ $x = -3$ کدام است؟

۱) $-\frac{16}{3}$
۲) $-5$
۳) $-4$
۴) $\frac{7}{3}$

**۵۴** اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟

۱) -۶
۲) -۳
۳) $-\frac{3}{2}$
۴) $-\frac{3}{4}$

**۵۵** به ازای کدام مقدار $a$ نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = ax^2 + 4x$، بر هم مماس‌اند؟

۱) -۴
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۱

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۲ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۳ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۴ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۵ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۶ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۷ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۸ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۹ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۱۰ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۱۱ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۱۲ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۱۳ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۱۴ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۱۵ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۱۶ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۱۷ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۱۸ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۱۹ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۲۰ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۲۱ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۲۲ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۲۳ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۲۴ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۲۵ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۲۶ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۲۷ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۲۸ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۲۹ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۳۰ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۳۱ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۳۲ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۳۳ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۳۴ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۳۵ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۳۶ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۳۷ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۳۸ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۳۹ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۴۰ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۴۱ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۴۲ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۴۳ | ○ | ○ | ○ | ● |
| ۴۴ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۴۵ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۴۶ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۴۷ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۴۸ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۴۹ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۵۰ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۵۱ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۵۲ | ○ | ○ | ● | ○ |
| ۵۳ | ○ | ● | ○ | ○ |
| ۵۴ | ● | ○ | ○ | ○ |
| ۵۵ | ○ | ● | ○ | ○ |

۱ **گزینه ۴**

نکته:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$c_n=b_n-a_n=n\,ln(n+1)-n\,ln(n)=n(ln(n+1)-ln(n))=n\left(ln\,\frac{n+1}{n}\right)=ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)=ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)=ln\,e=1\Rightarrow$$ همگرا به یک

۲ **گزینه ۱**

$$a_n=\sqrt{n^2+3n}-n\times\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}$$

هرچه n افزایش پیدا کند، $\frac{3}{n}$ کاهش پیـدا می‌کنـد و مخرج کوچک‌تر می‌شود درنتیجه مقدار دنباله افزایش می‌یابد، پس دنباله صعودی است. در یک دنبالهٔ صعودی بزرگ‌ترین کران پایین، جملهٔ اول است:

$$a_1=\sqrt{1^2+3(1)}-1=1$$

۳ **گزینه ۲**

باتوجه‌به اینکه حد دنبالهٔ $a_n$ به‌صورت مبهم $1^\infty$ (حدی) است، برای رفع ابهام از رابطهٔ $e=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$ استفاده می‌کنیم؛ بنابراین عبارت داده‌شده را ساده کرده و به‌صورت رابطهٔ فوق می‌نویسیم.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n+3}{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{2n+3}{n+1}}=e^2$$

۴ **گزینه ۳**

نکته: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$$\lim_{n\to\infty}n(log(n+1)-log\,n)=\lim_{n\to\infty}n\left(log\,\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\,log\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=log\,e$$

۵ گزینه ۳

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۲n-۵}{۳n+۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\left|\frac{۲n-۵}{۳n+۲} - \frac{۲}{۳}\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \left|\frac{۶n-۱۵-۶n-۴}{۳(۳n+۲)}\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱۹}{۳(۳n+۲)} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow ۳n+۲ > \frac{۱۹۰۰}{۳} \Rightarrow ۳n > \frac{۱۸۹۴}{۳} \Rightarrow n > \frac{۱۸۹۴}{۹} \simeq ۲۱۰/۴ \Rightarrow n \geq ۲۱۱$$

۶ گزینه ۲

**گام اول**

می‌دانیم:

$$(-۱)^n = \begin{cases} ۱ & ; \ n \text{ زوج} \\ -۱ & ; \ n \text{ فرد} \end{cases}$$

**گام دوم**

داریم:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^۲+۱}{۲n^۲+۲} & ; \ n \text{ زوج} \\ \frac{n^۲-۱}{۲n^۲+۲} & ; \ n \text{ فرد} \end{cases}$$

حاصل حد دنباله، وقتی $n \to \infty$، به ازای $n$های زوج و فرد برابر $\frac{۱}{۲}$ است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{۲n^۲} = \frac{۱}{۲}$$

پس این دنباله همگرا است (رد گزینه‌های ۱ و ۴).

برای بررسی نزولی یا غیریکنوا بودن دنباله، چند جملهٔ اول آن را می‌نویسیم:

$$a_۱ = \frac{۱-۱}{۲+۲} = ۰ \ , \ a_۲ = \frac{۴+۱}{۸+۲} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲} \ , \ a_۳ = \frac{۹-۱}{۱۸+۲} = \frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵} \ , \ \ldots$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید جملات دنباله نه صعودی است و نه نزولی، از جملهٔ اول به دوم مقدار دنباله افزایش یافته است، سپس از جملهٔ دوم به سوم مقدار دنباله کاهش می‌یابد، بنابراین دنباله غیریکنوا و همگرا است.

۷ **گزینه ۱**

برای حل تست به دو نکتهٔ زیر توجه کنید:

الف) برای بررسی همگرایی یا واگرایی دنبالهٔ $\{a_n - b_n\}$ از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{n^۲ + n} \underset{n\to\infty}{\sim} n + \frac{۱}{۲}$$

ب) در بررسی همگرایی یا واگرایی دنبالهٔ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ وقتی $n \to \infty$ می توان $\sqrt{n^۲ + n}$ را هم ارز با $\sqrt{n^۲}$ در نظر گرفت.

ابتدا همگرایی دنبالهٔ $\{a_n - b_n\}$ را بررسی می کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^۲ + n} - \frac{n^۲+۱}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(n + \frac{۱}{۲}\right) - \left(n + \frac{۱}{n}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{n}\right) = \frac{۱}{۲}$$

پس دنبالهٔ $\{a_n - b_n\}$ همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است.

در ادامه همگرایی دنبالهٔ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ را بررسی می کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^۲+n}}{\frac{n^۲+۱}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n^۲+n}}{n^۲+۱} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n^۲}}{n^۲} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n)}{n^۲}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{n^۲} = ۱$$

دنبالهٔ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ نیز همگرا به ۱ است. بنابراین هر دو دنبالهٔ داده شده همگرا هستند.

۸ **گزینه ۲**

برای حل تست گام های زیر را بر می داریم:

الف) وقتی $n \to +\infty$ حد هم گرایی دنبالهٔ $\{a_n\}$ را به دست آورده و آن را $L$ می نامیم.

ب) اگر $a_n > L$ بود باید $\lim_{x\to L^+} f(x)$ و اگر $a_n < L$ بود باید $\lim_{x\to L^-} f(x)$ را به دست آوریم.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+۱}{n} = ۱$$

$$n + ۱ > n \xrightarrow{\div n} \frac{n+۱}{n} > \frac{n}{n} \Rightarrow \frac{n+۱}{n} > ۱$$

پس باید حاصل $\lim_{x\to۱^+} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow -x < -۱ \Rightarrow [-x] = -۲$$

$$\lim_{x\to۱^+} f(x) = \lim_{x\to۱^+}\frac{۲x + [-x]}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to۱^+}\frac{۲x - ۲}{x^۲ - ۱}$$

اگر $x = ۱$ را در صورت و مخرج کسر جای گذاری کنیم حاصل برابر $\frac{۰}{۰}$ و مبهم می شود. از عامل صفرکنندهٔ $(x - ۱)$ در صورت و مخرج فاکتور گرفته و با ساده کردن آن، حاصل حد را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{۲x - ۲}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to۱^+}\frac{۲(x - ۱)}{(x - ۱)(x + ۱)} = \lim_{x\to۱^+}\frac{۲}{x + ۱}$$

$$= \frac{۲}{۱ + ۱} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۹ **گزینه ۲**

برای حل تست به صورت زیر عمل می کنیم:

الف) در بازهٔ $(۰,۲)-\{۱\}$ رابطهٔ $\frac{\sin \pi x}{۱-x} \leq f(x) \leq ۴\tan^{-۱}(x^۲-۲x+۲)$ همـواره برقرار است. پس برای به دست آوردن حاصل حد $\lim_{x\to ۱} f(x)$ از قضیهٔ فشردگی استفاده می کنیم.

ب) حاصـل حـد هر یک از توابع $\frac{\sin \pi x}{۱-x}$ و $۴\tan^{-۱}(x^۲-۲x+۲)$ را وقـتی $x\to ۱$ به دست می آوریم. بـا تـوجه به قضـیه فشردگی، حاصل $\lim_{x\to ۱} f(x)$ با حاصل حد این دو تابع وقتی $x\to ۱$ برابر است.

$$\lim_{x\to ۱} ۴\tan^{-۱}(x^۲-۲x+۲) = ۴\tan^{-۱}(۱-۲+۲) = ۴\tan^{-۱}(۱)$$

$$= ۴\times\frac{\pi}{۴} = \pi \qquad (I)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{hopital} \lim_{x\to ۱}\frac{\sin \pi x}{۱-x} = \lim_{x\to ۱}\frac{\pi\cos \pi x}{-۱}$$

$$= \frac{\pi\cos\pi}{-۱} = \frac{\pi(-۱)}{-۱} = \pi \quad (II) \xrightarrow[\text{فشردگی}]{(I),(II)} \lim_{x\to ۱} f(x) = \pi$$

۱۰ **گزینه ۱**

حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. برای رفع ابهـام از هم ارزی توابع مثلثاتی اسـتفاده می کنیم. می دانیم هم ارزی توابع مثلثاتی وقتی برقرار است که عبارت جلوی نسـبت های مثلثاتی به سـمت صفر میل کند. اینجا $x$ به سمت $\pi$ میل می کنـد پس باید از تغییر متغیر اسـتفاده کنیم. فرض می کنیم $x-\pi=t$ باشـد. در این صورت $x=\pi+t$ بوده و هم چنین $t$ به سمت صفر میل می کند. با تغییرات داده شده می توان از هم ارزی های زیر استفاده کرد:

$$\sin t \underset{t\to ۰}{\sim} t \quad , \quad ۱-\cos t \underset{t\to ۰}{\sim} \frac{t^۲}{۲}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x} = \lim_{t\to ۰}\frac{\sin(۱+\cos(\pi+t))}{۱-\cos ۲(\pi+t)} =$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(۱-\cos t)}{۱-\cos ۲t} = \lim_{t\to ۰}\frac{\sin(\frac{t^۲}{۲})}{\frac{(۲t)^۲}{۲}} = \lim_{t\to ۰}\frac{\frac{t^۲}{۲}}{۲t^۲} = \frac{۱}{۴}$$

**۱۱** **گزینه ۴**

**گام اول**

حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۳x}}{۱-\cos x}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام از حد داده شده و ساده تر کردن عبارت مثلثاتی، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۳x}}{۱-\cos x}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos ۳x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos ۳x}}=\frac{\cos x-\cos ۳x}{(۱-\cos x)(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos ۳x})}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۳x}}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{(۱-\cos x)(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos ۳x})}$$
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{۲(۱-\cos x)}$$

**گام دوم**

روش اول:

از فرمول های تبدیل جمع به ضرب به خاطر داریم که:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

بعد از ساده شدن عبارت داده شده از فرمول های هم ارزی مثلثاتی زیر استفاده می کنیم:

$$\sin u \underset{u\to ۰}{\sim} u \quad , \quad ۱-\cos u \underset{u\to ۰}{\sim}\frac{u^۲}{۲}$$

با استفاده از دو نکتهٔ فوق داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{۲(۱-\cos x)}=$$
$$\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{x+۳x}{۲}\sin\frac{x-۳x}{۲}}{۲(۱-\cos x)}=$$
$$\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin ۲x\sin(-x)}{۲(۱-\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲(۲x)(-x)}{۲(\frac{x^۲}{۲})}=$$
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۴x^۲}{x^۲}=۴$$

روش دوم:

بعد از ضرب صورت و مخرج در عبارت مزدوج صورت می توانیم از قاعدهٔ هوپیتال هم استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{۲(۱-\cos x)}\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x+۳\sin ۳x}{۲\sin x}=\frac{۰}{۰}$$
$$\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{-\cos x+۹\cos ۳x}{۲\cos x}=\frac{-\cos ۰+۹\cos ۰}{۲\cos ۰}=\frac{-۱+۹}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۱۲ **گزینه ۲**

با استفاده از نسبت های مثلثاتی کمان $\alpha+\beta$، حاصل $cos(x+\frac{\pi}{۴})$ را به دست می آوریم:

$$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم تا عبارت مثلثاتی فرم ساده تری به خود بگیرد. سپس با از بین رفتن عامل صفرکننده در صورت و مخرج، حاصل حد را محاسبه می کنیم و در نهایت مقدار $a$ را به دست می آوریم.

$$cos(x+\frac{\pi}{۴})=cos\,x\,cos\,\frac{\pi}{۴}-sin\,x\,sin\,\frac{\pi}{۴}=$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}cos\,x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}sin\,x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(cos\,x-sin\,x)$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{cos\,x}-\sqrt{sin\,x}}{cos(x+\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{cos\,x}-\sqrt{sin\,x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(cos\,x-sin\,x)}\times\frac{\sqrt{cos\,x}+\sqrt{sin\,x}}{\sqrt{cos\,x}+\sqrt{sin\,x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(cos\,x-sin\,x)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(cos\,x-sin\,x)(\sqrt{cos\,x}+\sqrt{sin\,x})}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{cos\,x}+\sqrt{sin\,x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{cos\,\frac{\pi}{۴}}+\sqrt{sin\,\frac{\pi}{۴}}}=$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\times\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲\times\sqrt{۲^{-\frac{۱}{۲}}}}=\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲\times۲^{-\frac{۱}{۴}}}=$$

$$\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۳}{۴}}}=۲^{-\frac{۱}{۴}}=۲^{a}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

۱۳ **گزینه ۱**

ابتـدا تعیین می کنیم حاصل $[۴cos^۲ \pi x]$ وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ برابر چه عـددی می شود. بـا توجه به این که حاصل حـد برابر $\frac{۱}{۲}$ است، مقادیر $a$ و $b$ و در نهایت مقدار $a+b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \to \frac{۱}{۶}^+ \Rightarrow x > \frac{۱}{۶} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۶} \Rightarrow cos\, \pi x < cos\, \frac{\pi}{۶}$$

دقت کنید که در ناحیهٔ اول مثلثاتی با افزایش مقدار x، مقدار $cos\, x$ کاهش پیدا می کند. چون $\pi x$ از $\frac{\pi}{۶}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $cos\, \pi x$ از مقدار $cos\, \frac{\pi}{۶}$ کمتر خواهد بود.

$$\xrightarrow{cos\, \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} cos\, \pi x < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} cos^۲ \pi x < \frac{۳}{۴} \overset{\times ۴}{\Rightarrow}$$

$$۴cos^۲ \pi x < ۳ \Rightarrow ۴cos^۲ \pi x \to ۳^- \Rightarrow [۴cos^۲ \pi x] = ۲$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ برابر صـفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{۱}{۲}$ است، اگر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسـر عددی غیر از صـفر باشد حاصل حد برابر صـفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ داده شده پس باید وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} ax + b = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۶} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۶} \Rightarrow a = -۶b \quad (I)$$

با فرض $a = -۶b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{ax + b} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{-۶bx + b} =$$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲(۱ - ۶x)}{b(-۶x + ۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۴$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} a = -۶b = -۶ \times ۴ = -۲۴$$

بنابراین $a+b$ برابر است با:

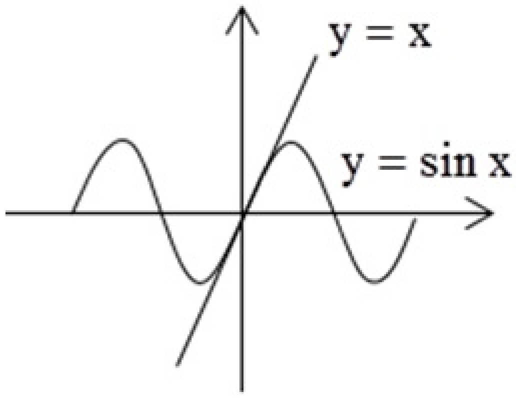
$$a + b = -۲۴ + ۴ = -۲۰$$

۱۴ **گزینه ۲**

در مورد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to 0$ رابطهٔ زیر برقرار است: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. با اسـتفاده از تساوی داده شده می توان گفت $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to 0$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیـک می شود و تابع $\frac{x}{\sin x}$ وقتی $x \to 0$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود.

با استفاده از نمودار دو تابع نیز می توان دریافت که

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\right] = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = 0$$




همان طور که مشاهده می کنید اگر $x > 0$ باشد نمودار $y = x$ بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد و اگر $x < 0$ باشد نمودار $y = x$ پایین تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد.

$$x \to 0 \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \to 1^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\right] = [1^+] = 1$$

$$x \to 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \to 1^- \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = [1^-] = 0$$

بنابراین حد عبارت داده شده وقتی $x \to 0$ برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] + 2\left[\frac{x}{\sin x}\right] = 0 + 2(1) = 0 + 2 = 2$$

**۱۵** **گزینه ۴**

ابتـدا حاصل حـد تابع $f(x)=\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}$ را وقتـی $x\to+\infty$ برابر $-1$ قرار داده و مقــدار $a$ را محاسـبه می کنیـم. وقـتی $x\to+\infty$ عبارت $x^2-4$ مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشـی کرد. برای محاسبۀ $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{ax^2}=\frac{1}{a}=-1$$

$$\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(x)=\frac{|x^2-4|}{-x^2-x+2}$$

برای به دست آوردن $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)$، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x\to(-2)^+\Rightarrow x>-2\Rightarrow x^2<4\Rightarrow x^2-4<0\Rightarrow$$
$$|x^2-4|=-(x^2-4)$$

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^2-4)}{-x^2-x+2}=$$
$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x-2}{x-1}=$$
$$\frac{-2-2}{-2-1}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

**۱۶** **گزینه ۳**

**گام اول**

حاصل حد وقتی $x\to4$ به صورت $\infty\times0$ در می آید. بنابراین حاصل حد مبهم بوده و باید رفع ابهام کنیم.

**گام دوم**

یکی از راه های رفع ابهام عبارت هایی که به صورت $\infty\times0$ در می آیند این است که عامل $\infty$ (که در اینجا $tan\frac{\pi x}{8}$است) را به صورت معکوس به مخرج کسر منتقل کرده، ابهام را به ابهام $\frac{0}{0}$ تبدیل و با استفاده از قاعدۀ هوپیتال حاصل حد را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to4}(2-\sqrt{x})\,tan\frac{\pi x}{8}=\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{\frac{1}{tan\frac{\pi x}{8}}}=$$

$$\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{cot\frac{\pi x}{8}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{cot\frac{\pi x}{8}}=$$

$$\lim_{x\to4}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{\pi}{8}(1+cot^2\frac{\pi x}{8})}=\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\pi}{8}(1+0)}=\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\pi}{8}}=\frac{8}{4\pi}=\frac{2}{\pi}$$

۱۷ گزینه ۱

گام اول

وقتی $x \to -۴$ حاصل حد $\infty - \infty$ بوده و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام ابتدا با مخرج مشترک گیری میان دو کسـر، عبارت را به ساده ترین شـکل ممکن در آورده سپس حد آن را وقتی $x \to -۴$ محاسبه می کنیم.

$$\frac{x+۱۹}{x^{۲}+۳x-۴}+\frac{۳}{x+۴}=\frac{x+۱۹}{(x+۴)(x-۱)}+\frac{۳}{x+۴}=$$
$$\frac{x+۱۹+۳(x-۱)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{x+۱۹+۳x-۳}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴x+۱۶}{(x+۴)(x-۱)}$$
$$=\frac{۴(x+۴)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴}{x-۱}$$

حالا حاصل عبارت ساده شده را وقتی $x \to -۴$ حساب می کنیم:

$$\lim_{x\to -۴}\frac{۴}{x-۱}=\frac{۴}{-۴-۱}=\frac{۴}{-۵}=-\frac{۴}{۵}$$

۱۸ گزینه ۳

گام اول

الف) وقتی $x \to ۳$ حد عبارت صورت برابر $-۱$ است. پس حـد عبارت مخرج باید برابر $۰^{+}$ شود تا حاصل حد برابر $-\infty$ شود.
حد عبارت مخرج وقتی $x \to ۳$ در صورتی $۰^{+}$ می شود که $x = ۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد (حاصل حد مخرج کسر وقتی $x \to ۳^{+}$ و $x \to ۳^{-}$ باید برابر $۰^{+}$ شود).

ب) مخرج باید به صورت $۲(x-۳)^{۲}$ باشد تا بتوان گفت $x = ۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

گام دوم

$$۲(x-۳)^{۲}=۲(x^{۲}-۶x+۹)=۲x^{۲}-۱۲x+۱۸=۲x^{۲}+ax+b$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=-۱۲ \\ b=۱۸ \end{cases} \Rightarrow a+b=-۱۲+۱۸=۶$$

۱۹ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi^{+}} f(x)=\sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^{+}]-\cos\pi[\sin(۲\pi)^{+}]$$
$$=۱\times[۰^{-}]-(-۱)[۰^{+}]=۱\times(-۱)-۰=-۱$$
$$\lim_{x\to\pi^{-}} f(x)=\sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^{-}]-\cos\pi[\sin(۲\pi)^{-}]$$
$$=۱\times[۰^{+}]-(-۱)[۰^{-}]=۰+(-۱)=-۱ \Rightarrow \lim_{x\to\pi} f(x)=-۱$$

۲۰ گزینه ۱

هنگامی‌که $x=1$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ درنتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیرصفر باشد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow\sqrt{a+b}-2=0\Rightarrow a+b=4$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$Hop:\lim_{x\to 1}\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{a}{4\sqrt{a+b}}=\frac{3}{2}\xrightarrow{a+b=4}a=12\Rightarrow b=-8$$

۲۱ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1-\cos x}{\cos x})}{x^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{u\to 0}\sin u=\lim_{u\to 0}u\\ \lim_{u\to 0}1-\cos^n u=\lim_{u\to 0}\frac{nu^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\times x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\times\frac{x^2}{2}}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

۲۲ گزینه ۴

دامنه تعریف تابع $f$ را به دست می آوریم:

$$D_f=(-\infty,1]$$

دامنه تعریف تابع $g$ برابر است با:

$$D_g=[1,+\infty)\bigcup\{0\}$$

برای بررسی پیوستگی تابع $gof$ در $x=1$ ابتدا پیوستگی تابع $f$ را در این نقطه بررسی کرده و حد آن را به دست می آوریم. سپس پیوستگی تابع $gof$ را بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0$$

برای این که تابع $gof$ در $x=1$ پیوسته باشد، باید تابع $g$ در همسایگی صفر تعریف شود. با توجه به دامنه تعریف تابع $g$، این تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است و تابع $gof$ در $x=1$ شرایط بحث در مورد پیوستگی را ندارد.

۲۳ **گزینه ۲**

مرز ضابطه ها خیلی شـفاف مشـخص نشده است. با توجه به نامعادلات قدرمطلقی، ضابطه ها را با مرز شـفاف آن یک بار دیگر می نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & , \quad x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \\ x[x] & , \quad -۱<x<۱ \end{cases}$$

برای این که تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد.

می دانیم خط $x=۳$ بالای خط $x=۱$ قرار دارد، بنـابراین بایـد برای به دست آوردن نقطـهٔ برخورد آن بـا محور عرض ها از ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ استفاده کرد.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to ۱^+} ax+b=\lim_{x\to ۱^-} x[x]\Rightarrow a+b=۱\times ۰=۰\Rightarrow a+b=۰ \quad (I)$$

بررسی پیوستگی تابع در $x=-۱$:

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-} ax+b=-a+b \;,\; f(-۱)=-a+b$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+} x[x]=(-۱)[-۱^+]=(-۱)(-۱)=۱$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=f(-۱)\Rightarrow -a+b=۱ \quad (II)$$

از دو رابطهٔ $(I)$ و $(II)$ نتیجه می شود:

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱ \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \overset{(I)}{\Rightarrow} a=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ax+b=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=۳} f(۳)=-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=-۱$$

۲۴ گزینه ۴

گام اول

الف) تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که در آن $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می شود، ناپیوسته است.

ب) تابع $y = x$ یک تابع همواره پیوسته است. بنابراین اگر قرار باشد تابع $f(x) = x - [x^۲]$ یک تابع ناپیوسته شود، باید نقاط ناپیوستگی تابع $y = [x^۲]$ را به دست آوریم. پس در بازهٔ $[۰, ۲]$ باید دنبال نقاطی باشیم که در آن $x^۲$ یک مقدار صحیح باشد.

گام دوم

$$y = x^۲,\ x^۲ \in \mathbb{Z}\ ,\ x \in [۰, ۲] \Rightarrow x^۲ = K \Rightarrow x = \sqrt{K}$$
$$x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱$$
$$x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$
$$x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \sqrt{۳}$$
$$x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

توجه داشته باشید که در $x = ۰$ تابع از راست پیوسته بوده و این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی شود. بنابراین تابع $f(x)$ در ۴ نقطه ناپیوسته است.

۲۵ گزینه ۲

شرط پیوستگی در نقطهٔ a:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \dfrac{۱}{a} \\ f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = ۱ - \dfrac{a}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{a} = ۱ - \frac{a}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۴-a}{۴}$$
$$\Rightarrow ۴ = ۴a - a^۲ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow (a-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

۲۶ گزینه ۲

برای اینکه تابع در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته باشد باید حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos ۴x = \left[۱^-\right] \times ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

**۲۷** **گزینه ۴**

نکته: قضیـهٔ بولزانو: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < ۰$، آنگاه تابع f دارای حـداقل یک ریشه در این بازه است.

معادلهٔ درجه سوم $۳x^۳ + ax - ۱ = ۰$ در بازهٔ $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲})$ پیوسـته است، برای اینکه در این بازه دارای حداقل یک ریشه باشـد باید داشته باشیم:

$$f(\frac{۱}{۳}).f(\frac{۱}{۲}) < ۰ \Rightarrow (۳(\frac{۱}{۳})^۳ + \frac{a}{۳} - ۱)(۳(\frac{۱}{۲})^۳ + \frac{a}{۲} - ۱) < ۰$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{۳} - \frac{۸}{۹})(\frac{a}{۲} - \frac{۵}{۸}) < ۰ \Rightarrow (\frac{۳a - ۸}{۹})(\frac{۴a - ۵}{۸}) < ۰ \Rightarrow (۳a - ۸)(۴a - ۵) < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۴} < a < \frac{۸}{۳} \Rightarrow (\frac{۵}{۴}, \frac{۸}{۳})$$

باتوجه‌به اینکه $f'(x) = ۹x^۲ + a > ۰$ بنابراین f اکیدا صعودی است و ریشه یکتا است.

**۲۸** **گزینه ۳**

**گام اول**

باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که مقادیر ابتدا و انتهای بازه غیر هم‌علامت بوده و درنتیجه حاصل‌ضرب این دو مقدار منفی شود.

**گام دوم**

گزینهٔ ۱:

$$f(۰) > ۰ \,,\, f(\frac{۱}{۳}) > ۰ \Rightarrow f(۰) \times f(\frac{۱}{۳}) > ۰$$

گزینهٔ ۲:

$$f(\frac{۱}{۲}) < ۰ \,,\, f(\frac{۲}{۳}) < ۰ \Rightarrow f(\frac{۱}{۲}) \times f(\frac{۲}{۳}) > ۰$$

گزینهٔ ۳:

$$f(\frac{۱}{۳}) > ۰ \,,\, f(\frac{۲}{۵}) < ۰ \Rightarrow f(\frac{۱}{۳}) \times f(\frac{۲}{۵}) < ۰$$

گزینهٔ ۴:

$$f(\frac{۲}{۵}) < ۰ \,,\, f(\frac{۱}{۲}) < ۰ \Rightarrow f(\frac{۲}{۵}) \times f(\frac{۱}{۲}) > ۰$$

**۲۹** **گزینه ۱**

ابتدا ضابطهٔ تابع $f-g$ را به ساده ترین شکل ممکن به دست می آوریم (مخرج مشترک گیری کرده و عبارت را تا حد امکان ساده می کنیم). مجانب افقی حاصل حد تابع است وقتی $x\to\infty$ میل می کند. مجانب قائم هم ریشه های مخرج کسر است. با تعیین مجانب ها، محل برخورد آن ها نیز مشخص می شود.

$$f(x)-g(x)=\frac{x+۱۱}{x^۲-۳x-۴}-\frac{۳}{x-۴}=$$

$$\frac{x+۱۱}{(x-۴)(x+۱)}-\frac{۳}{x-۴}=\frac{x+۱۱-۳(x+۱)}{(x-۴)(x+۱)}=\frac{x+۱۱-۳x-۳}{(x-۴)(x+۱)}$$

$$=\frac{-۲x+۸}{(x-۴)(x+۱)}=\frac{-۲(x-۴)}{(x-۴)(x+۱)}=\frac{-۲}{x+۱}$$

تعیین مجانب های افقی و قائم:

مجانب افقی : $y=\lim_{x\to\infty}\frac{-۲}{x+۱}=۰\Rightarrow y=۰$

مجانب قائم : $x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$

پس محل برخورد مجانب های تابع نقطهٔ $(-۱,۰)$ است.

۳۰ گزینه ۱

**گام اول**

الف) برای یافتن مقدار $b$، بایـد معادلـۀ مجانب افقی تابع را تعیین کرده و آن را برابر $\frac{۳}{۲}$ قرار دهیم. برای یافتن معادلۀ مجانب افقی از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}| \ , \ a>۰$$

ب) بررسـی می کنیم در کدام یک از حالت های $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ تابع مجانب افقی دارد، سـپس معادلۀ آن را تعیین می کنیم.

**گام دوم**

$$\sqrt{ax^۲+bx} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}| = \sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (۲x-۱+\sqrt{a}x+\frac{\sqrt{a}b}{۲a}) = +\infty$$

پس در حالت $x\to+\infty$ حاصل حد برابر $+\infty$ شده و تابع مجانب افقی ندارد.

$$\sqrt{ax^۲+bx} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}| = -\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (۲x-۱-\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{a}b}{۲a}) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(۲-\sqrt{a})+(-۱-\frac{b}{۲\sqrt{a}}) = \frac{۳}{۲}$$

حاصل حد برابر عدد شده است، بنابراین ضریب $x$ باید برابر صفر و مقدار عددی برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد. داریم:

$$۲-\sqrt{a}=۰ \Rightarrow \sqrt{a}=۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a=۴$$

$$-۱-\frac{b}{۲\sqrt{a}} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a=۴} -۱-\frac{b}{۴} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{b}{۴} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow$$

$$b=-۱۰$$

۳۱ گزینه ۲

### گام اول

فرض می کنیم خط $y = ax + b$ مجانب مایل تابع $f(x)$ باشد. در این صورت ضریب زاویه (شیب) خط مجانب مایل از رابطهٔ $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ به دست می آید.

### گام دوم

شیب خط مجانب مایل تابع برابر است با:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(2e^{-x}-1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (2e^{-x} - 1)$$

در دو حالت $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$ مقدار $a$ را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} (2e^{-x} - 1) = 2(\frac{1}{e})^{+\infty} - 1 = 2(0) - 1 = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (2e^{-x} - 1) = 2e^{\infty} - 1 = \infty$$

پس تابع فقط وقتی $x \to +\infty$ مجانب مایل دارد و ضریب زاویهٔ آن برابر ۱- است.

۳۲ گزینه ۲

ابتدا مجانب‌های $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{مجانب‌های قائم} : x = \pm 1$$

فرض کنید مجانب مایل f به‌صورت $y = ax + b$ باشد. در این صورت داریم:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -1 \end{cases}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2}{x} - x) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} (\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{x^2}{-x} + x) = 0 \end{cases}$$

بنابراین $y = \pm x$ مجانب‌های مایل نمودار f هستند.

حال محل تقاطع مجانب‌ها با عرض‌های مثبت را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = x \text{ با } x = 1 \text{ تقاطع} : A(1, 1) \\ y = -x \text{ با } x = -1 \text{ تقاطع} : B(-1, 1) \end{cases} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-1)^2} = 2$$

**۳۳** **گزینه ۱**

ابتدا با استفاده از هم ارزی زیر که مخصوص توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد است، ضابطهٔ $y$ را ساده کرده و مجانب افقی تابع را به دست می آوریم: $\underset{x\to\pm\infty}{\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}} \underset{\text{فرد}\, n}{\sim} \sqrt[n]{a}(x+\frac{b}{na})$

معادلهٔ مجانب افقی را با ضابطهٔ $f(x)$ تلاقی داده و مختصات طول نقطهٔ برخورد را به دست می آوریم.

$$\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\sqrt[۳]{-x^۳+x^۲} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[۳]{-۱}(x+\frac{۱}{-۳})=-x+\frac{۱}{۳}$$

معادلهٔ مجانب افقی عبارت است از:

$$y=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(x-x+\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}$$

مختصات نقطهٔ برخورد برابر است با:

$$f(x)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲-x^۳}=\frac{۱}{۳}-x \xrightarrow{\text{به توان ۳}}$$

$$x^۲-x^۳=(\frac{۱}{۳}-x)^۳=\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۳}x+x^۲-x^۳\Rightarrow \frac{۱}{۳}x=\frac{۱}{۲۷}\Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

**۳۴** **گزینه ۲**

نکته:

۱) مشتق تابع $y=sin^{-۱}u$ که u تابعی از x است به‌صورت $y'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$ محاسبه می‌شود.

۲) مشتق تابع $y=tan\ u$ که u تابعی از x است از رابطهٔ $y'=u'(۱+tan^۲u)$ محاسبه می‌شود.

بنابراین داریم:

$$f(x)=(tan(\frac{\pi}{۶}+sin^{-۱}\sqrt{x}))$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{۱-x}}\times(۱+tan^۲(\frac{\pi}{۶}+sin^{-۱}\sqrt{x}))$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۱}{۴})=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}}\times(۱+tan^۲\underbrace{(\frac{\pi}{۶}+\underbrace{sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})}_{\frac{\pi}{۶}})}_{\frac{\pi}{۳}})=\frac{۲}{\sqrt{۳}}(۱+(\sqrt{۳})^۲)=\frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

۳۵ **گزینه ۴**

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f(-۲)=-۳\\ f'(-۲)=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-۲}-۴f(-۲)+۴f'(-۲)=-۴(-۳)+۴(\frac{۱}{۲})=۱۲+۲=۱۴$$

۳۶ **گزینه ۱**

$$A\left|\begin{matrix}۱\\?\end{matrix}\right.\in f^{-۱}\Leftrightarrow A'\left|\begin{matrix}?\\۱\end{matrix}\right.\in f\Rightarrow x+e^{۲x}=۱\Rightarrow x=۰\Rightarrow A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$$

$$f'(x)=۱+۲e^{۲x}$$

$$m=\left(f^{-۱}(x)\right)'_{x=۱}=\left(\frac{۱}{f'(x)}\right)_{x=۰}=\frac{۱}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow y-۰=\frac{۱}{۳}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳y-x=-۱$$

۳۷ **گزینه ۲**

$$x^۲y-ln(۲x-y)-۱۲=۰\Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲xy-\frac{۲}{۲x-y}}{x^۲-\frac{-۱}{۲x-y}}$$

$$\xrightarrow{(۲,۳)}y'=m_{\text{مماس}}=-\frac{۲\times۲\times۳-\frac{۲}{۴-۳}}{۲^۲-\frac{-۱}{۴-۳}}=-\frac{۱۰}{۵}=-۲\Rightarrow m'_{\text{قائم}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط قائم}: y-۳=\frac{۱}{۲}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۲$$

$$\xrightarrow[y=۰]{\text{تقاطع با محور }x\text{ها}}\frac{۱}{۲}x+۲=۰\Rightarrow x=-۴$$

## ۳۸ گزینه ۳

نکته: اگر x یک نقطهٔ گوشه برای تابع f باشد و مشـتق چپ در این نقطه را $m_1$ و مشتق راست را $m_2$ در نظر بگیریم و $\theta$ زاویهٔ بین دو مماس چپ و راست در این نقطه باشد، در این صورت $tan\ \theta$ را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$tan\ \theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع نقطهٔ $x = 1$ یک نقطهٔ گوشه برای تابع f است، داریم:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}; x \geq 1 \\ -\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}(x-1)}{x^2+3} & ; x \geq 1 \\ -\dfrac{\sqrt{x^2+3} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}(x-1)}{x^2+3} & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \dfrac{1}{2} \\ f'_-(1) = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow tan\ \theta = \left|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right| = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

## ۳۹ گزینه ۲

درصورتی‌که خط بر منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی دو منحنی، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2+a}{x-2} \\ y = -3x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2+a}{x-2} = -3x+2$$

$$\Rightarrow x^2 + a = -3x^2 + 8x - 4 \Rightarrow 4x^2 - 8x + (a+4) = 0$$

برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف، $\Delta = 0$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-8)^2 - 4(4)(a+4) = 0 \Rightarrow 64 - 16a - 64 = 0 \Rightarrow a = 0$$

## ۴۰ گزینه ۲

باید شیب خط مماس بر نمودار را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{3}$ بیابیم:

$$f(x) = \frac{sin\,x}{1+cos\,x} \Rightarrow f'(x) = \frac{cos\,x(1+cos\,x) - (-sin\,x)\,sin\,x}{(1+cos\,x)^2} = \frac{1+cos\,x}{(1+cos\,x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+cos\,x} \Rightarrow m_1 = f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{1+cos\,\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$y = x \Rightarrow m_2 = 1$$

$$tan\,\alpha = \left|\frac{1-\frac{2}{3}}{1+(1)(\frac{2}{3})}\right| = \left|\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}\right| = \frac{1}{5} = 0/2$$

۴۱ **گزینه ۳**

**گام اول**

الف) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب $m_۱$ و $m_۲$ برابر است با:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱+m_۱ m_۲}\right|$$

**گام دوم**

به ازای $x = \pi$ مقدار $\sin ۲x$ برابر با صفر است؛ ازطرفی $۲ + \cos\frac{x}{۲}$ نیز همواره کران‌دار است؛ بنـابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \pi$ پیوسته است.

باتوجه‌به گام اول، شـیب مماس چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = \pi$ برابر با مقدار مشـتق چپ و راست تابع در این نقطه است.

قبل از محاسبهٔ مشتق راست و چپ تابع، ضابطهٔ تابع را وقتی $x \to \pi^+$ و وقتی $x \to \pi^-$ تعیین می‌کنیم.

$$x \to \pi^+ : x > \pi \Rightarrow \frac{x}{۲} > \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos\frac{x}{۲} < ۰ \Rightarrow ۲ + \cos\frac{x}{۲} < ۲$$

$$\Rightarrow [۲ + \cos\frac{x}{۲}] = ۱ \Rightarrow f(x) = \sin ۲x$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲\cos ۲x \Rightarrow f'_+(\pi) = ۲\cos ۲\pi = ۲ \Rightarrow m_۱ = ۲$$

$$x \to \pi^- : x < \pi \Rightarrow \frac{x}{۲} < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos\frac{x}{۲} > ۰ \Rightarrow ۲ + \cos\frac{x}{۲} > ۲$$

$$\Rightarrow [۲ + \cos\frac{x}{۲}] = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲\sin ۲x$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۴\cos ۲x \Rightarrow f'_-(\pi) = ۴\cos ۲\pi = ۴ \Rightarrow m_۲ = ۴$$

بنابراین $\tan\theta$ برابر است با:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱+m_۱ m_۲}\right| = \left|\frac{۲-۴}{۱+۸}\right| = \left|\frac{-۲}{۹}\right| = \frac{۲}{۹}$$

۴۲ **گزینه ۱**

**گام اول**

مشتق تابع ضمنی $f(x,y)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

**گام دوم**

$\frac{d^۲y}{dx^۲}$ مشتق دوم y نسبت به x است. باتوجه‌به گام اول، ابتدا مشتق اول y نسبت به x را در نقطهٔ $(۲,-۱)$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x,y) = x^۲y + y^۲ + ۳$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲xy+۰+۰}{x^۲+۲y+۰} = -\frac{۲xy}{x^۲+۲y}$$

$$y'(۲,-۱) = -\frac{-۴}{۴-۲} = ۲$$

مشتق دوم تابع را به‌صورت مستقیم تعیین می‌کنیم. به یاد داشته باشید $\frac{dx}{x} = ۱$ و $\frac{dy}{x} = y'$ است.

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{(-۲y-۲xy')(x^۲+۲y)-(۲x+۲y')(-۲xy)}{(x^۲+۲y)^۲}$$

اکنون مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ را در نقطهٔ $(۲,-۱)$ به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[y'(۲,-۱)=۲]{x=۲\,,\,y=-۱} \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{(۲-۸)(۴-۲)-(۴+۴)(۴)}{(۴-۲)^۲}$$

$$= \frac{(-۶)(۲)-(۸)(۴)}{۲^۲} = \frac{-۱۲-۳۲}{۴} = -\frac{۴۴}{۴} = -۱۱$$

۴۳ گزینه ۴

### گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ عبور می‌کند برابر است با:

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$$

ب) شیب‌خط قائم بر منحنی تابع در یک نقطه برابر است با معکوس و قرینهٔ شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه.

ج) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

د) اگر $f^{-1}$ وارون تابع مشتق‌پذیر f و $(\alpha,\beta) \in f$ باشد؛ آنگاه $(\beta,\alpha) \in f^{-1}$ است و داریم:

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

### گام دوم

فرض می‌کنیم $x = \alpha$ نقطهٔ تلاقی منحنی تابع $f^{-1}$ با محور xها است پس $(\alpha, \circ) \in f^{-1}$ و درنتیجه $(\circ, \alpha) \in f$ است. با جایگذاری مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع f، مقدار $\alpha$ را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x + e^x \xrightarrow{(\circ,\alpha)\in f} \alpha = \circ + e^\circ = \circ + 1 = 1$$

بنابراین $(\circ, 1) \in f$ و $(1, \circ) \in f^{-1}$ است. برای نوشتن معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع $f^{-1}$ لازم است ابتدا مقدار مشتق تابع $f^{-1}$ را در این نقطه محاسبه کنیم که باتوجه‌به قسمت (د) از گام اول داریم:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(\circ)}$$

$$f'(x) = 1 + e^x \Rightarrow f'(\circ) = 1 + e^\circ = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{1}{2}$$

اکنون شیب‌خط قائم و سپس معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y - \circ = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 \Rightarrow y + 2x = 2$$

۴۴ گزینه ۱

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.

ب) مشتق تابع $gof(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع $gof$ را در نقطهٔ $x = ۰$ به‌طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۴x \Rightarrow f'(x) = ۴ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_+(۰) = f'_+(۰)g'_+(f(۰)) = ۴(\frac{۳}{۴} + a) = ۳ + ۴a$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_-(۰) = f'_-(۰)g'_-(f(۰)) = ۲(\frac{۳}{۴} - a) = \frac{۳}{۲} - ۲a$$

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، تابع $gof$ در $x = ۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \Rightarrow ۶a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۴۵ گزینه ۳

گام اول

اگر $f^{-۱}$ وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد و $(\alpha, \beta) \in f$ آنگاه داریم:

$$(f^{-۱})'(\beta) = \frac{۱}{f'(\alpha)}$$

گام دوم

$g(x)$ به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع $\sqrt{۲x}$ و $f^{-۱}(x)$ است، با استفاده از فرمول مشتق توابع حاصل‌ضربی داریم:

$$g(x) = \sqrt{۲x}f^{-۱}(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}f^{-۱}(x) + \sqrt{۲x}(f^{-۱})'(x)$$

$$\Rightarrow g'(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۴}}f^{-۱}(۲) + \sqrt{۴}(f^{-۱})'(۲)$$

طبق صورت سؤال، $f(۴) = ۲$ است؛ پس $(۴, ۲) \in f$ و $(۲, ۴) \in f^{-۱}$ است. باتوجه‌به گام اول، داریم:

$$(f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{f'(۴)} = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۳$$

$$\Rightarrow g'(۲) = \frac{۱}{۲}(۴) + ۲(۳) = ۲ + ۶ = ۸$$

۴۶ **گزینه ۳**

### گام اول

الف) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

ب) تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب $m_1$ و $m_2$ برابر است با:

$$tan\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

### گام دوم

مختصات نقطهٔ A در ضابطهٔ تابع صدق نمی‌کند؛ پس این نقطه خارج از منحنی تابع قرار دارد. فرض می‌کنیم خط رسم‌شده از نقطهٔ A در نقطهٔ $(\alpha, -\alpha^2 + 2\alpha + 5)$ بر منحنی تابع مماس شده است. برای یافتن شیب این خط مماس، مقدار $y'(\alpha)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y = -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow y' = -2x + 2 \Rightarrow y'(\alpha) = -2\alpha + 2$$

معادلهٔ این خط مماس برابر است با:

$$y - (-\alpha^2 + 2\alpha + 5) = (-2\alpha + 2)(x - \alpha)$$

نقطهٔ A نیز روی خط مماس است؛ پس مختصات آن در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=2\,,\,y=9} 9 + \alpha^2 - 2\alpha - 5 = -4\alpha + 4 + 2\alpha^2 - 2\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 4 \end{cases}$$

به ازای $\alpha = 0$ و $\alpha = 4$، شیب دو خط مماس به دست می‌آید:

$$\alpha = 0 \xrightarrow{y'=-2\alpha+2} m_1 = -2(0) + 2 = 2$$

$$\alpha = 4 \xrightarrow{y'=-2\alpha+2} m_2 = -2(4) + 2 = -6$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، تانژانت زاویهٔ بین دو خط مماس را محاسبه می‌کنیم:

$$tan\,\theta = \left|\frac{2+6}{1-12}\right| = \left|\frac{8}{-11}\right| = \frac{8}{11}$$

۴۷ گزینه ۳

### گام اول

الف) $f'(۱)$ موجود است؛ یعنی در $x = ۱$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.

ب) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ج) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(۱) = f'_-(۱)$$

### گام دوم

باتوجه‌به اینکه $۱ - \sqrt{۲} < ۱$ است، برای محاسبهٔ $f(۱-\sqrt{۲})$ باید از ضابطهٔ مربوط به $x$های کوچک‌تر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر $a$ و $b$ را بیابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \left(x - \frac{۱}{x}\right) = ۱ - ۱ = ۰ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} x^۲ + ax + b = a + b + ۱ \\ \quad f(۱) = ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b$$

$$+۱ = ۰ \Rightarrow a + b = -۱\,(I)$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطهٔ $x = ۱$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ + \frac{۱}{x^۲} & ; x > ۱ \\ ۲x + a & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \quad \Rightarrow \quad ۱ + ۱ = ۲ + a \quad \Rightarrow \quad a + ۲ = ۲ \quad \Rightarrow \quad a = ۰$$

با جایگذاری در رابطهٔ $I$ مقدار $b$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a + b = -۱ \quad \Rightarrow \quad ۰ + b = -۱ \quad \Rightarrow \quad b = -۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به ازای $x < ۱$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$x < ۱ \ : \qquad f(x) = x^۲ - ۱$$

$$\Rightarrow \ f(۱-\sqrt{۲}) = (۱-\sqrt{۲})^۲ - ۱ = ۱ - ۲\sqrt{۲} + ۲ - ۱ = ۲ - ۲\sqrt{۲}$$

**۴۸** **گزینه ۲**

**گام اول**

می‌دانیم $gof\,(x) = g(f(x))$ و $(gof)'\,(x) = g'\,(f(x)) \cdot f'\,(x)$ است. توجه کنیـد که دامنهٔ تعریف تابع $gof\,(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{gof} = \left\{x \in D_f | \, f(x) \in D_g\right\}$$

**گام دوم**

باتوجه‌به گام اول، ابتدا ضابطهٔ $gof\,(x)$ را تعیین کرده و مشـتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطـهٔ $g\,(f\,(x))$ کافی است در ضابطهٔ $g\,(x)$ به‌جای متغیر $x$، ضابطهٔ $f\,(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-1,1)\,, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{gof} = (-1,1)$$

$$f\,(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, g\,(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$gof\,(x) = g\,(f\,(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \quad ; \; -1 < x$$

$$< 1$$

$$\Rightarrow y = gof\,(x) = x \Rightarrow f'\,(x)\,g'\,(f\,(x)) = y' = 1; -1 < x < 1$$

**۴۹** **گزینه ۲**

**گام اول**

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطهٔ $x = 3$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و منحنی صدق می‌کند.

**گام دوم**

ابتدا معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A\left(1, 2\right)$ و $B\left(-1, 3\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 1$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده‌شده را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x)+4f(x)-5}{3-x} = \lim_{x\to 3} -\frac{(f(x)+5)(f(x)-1)}{x-3} = \lim_{x\to 3} -\left(f(x)+5\right)\frac{(f(x)-f(3))}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} -\left(f(x)+5\right)\left(f'(3)\right) = -\left(f(3)+5\right)f'(3) = -6\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x)+4f(x)-5}{3-x} = \frac{f^2(3)+4f(3)-5}{3-3} = \frac{1+4-5}{3-3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x)+4f(x)-5}{3-x} = \lim_{x\to 3} \frac{2f'(x)f(x)+4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3)+4f'(3)}{-1}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)(1)+4\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1-2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

**۵۰** **گزینه ۲**

ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + ۱ + (g(x))^۵ \Rightarrow f'(x) = ۱ + ۵g'(x)(g(x))^۴$$
$$\Rightarrow f'(۰) = ۱ + ۵g'(۰)(g(۰))^۴$$

با توجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(۰)=g(۰)=۱} ۱ = ۱ + ۵g'(۰)(۱)^۴ \Rightarrow ۵g'(۰) = ۰ \Rightarrow g'(۰) = ۰$$

در محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $f''(x)$ با عبارت $g'(x)(g(x))^۴$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(۰) = ۰$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفر شوندهٔ تابع $f'(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(۰) = ۰ + ۵g''(۰)(g(۰))^۴$$

$$\xrightarrow[g(۰)=۱]{x=۰} f''(۰) = ۵g''(۰)(۱)^۴ = ۵g''(۰)$$

**۵۱** **گزینه ۱**

$$(a,b) \in f \Rightarrow (f^{-۱})(b) = \frac{۱}{f'(a)} \Rightarrow f^{-۱}(\frac{۳}{۵}) = x \Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{۳}{۵} = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow \frac{۹}{۲۵} = \frac{x^۲}{۱+x^۲} \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow x = \frac{۳}{۴}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{۱+x^۲} - \frac{۲x^۲}{۲\sqrt{۱+x^۲}}}{۱+x^۲} = \frac{۱}{(۱+x^۲)\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow f'(\frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{\frac{۲۵}{۱۶} \times \frac{۵}{۴}} = \frac{۶۴}{۱۲۵}$$

$$(f^{-۱})'(b) = \frac{۱}{f'(a)} \Rightarrow (f^{-۱})'(\frac{۳}{۵}) = \frac{۱}{f'(\frac{۳}{۴})} = \frac{۱۲۵}{۶۴}$$

۵۲ گزینه ۳

### گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به‌طوری‌که $u$ خود تابعی از $x$ است، آنگاه داریم:

$$y' = u' f'(u)$$

### گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$y = f(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) f'(f(x))$$

ابتدا لازم است ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست آوریم، داریم:

$$f(x) = \sin^2 \pi x - \tfrac{1}{2} \cos \pi x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2\pi \cos \pi x \ \sin \pi x + \tfrac{\pi}{2} \sin \pi x = \pi \left(2 \sin \pi x \ \cos \pi x\right) + \tfrac{\pi}{2} \sin \pi x = \pi \sin$$

$$2\pi x + \tfrac{\pi}{2} \sin \pi x$$

قبل از محاسبهٔ مقدار $y'\left(\frac{1}{3}\right)$، مقادیر $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ و $f'\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'\left(\tfrac{1}{3}\right) = \pi \sin \tfrac{2\pi}{3} + \tfrac{\pi}{2} \sin \tfrac{\pi}{3} = \pi\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{3\pi}{2} \times \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,\tfrac{\pi}{4}$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \sin^2 \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{1}{2} \cos \tfrac{\pi}{3} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

$$f'\left(f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) = f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi \sin \pi + \tfrac{\pi}{2} \sin \tfrac{\pi}{2} = 0 + \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}$$

بعد از انجام این محاسبات طاقت‌فرسا، می‌رسیم به محاسبه $y'\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$y'\left(\tfrac{1}{3}\right) = f'\left(\tfrac{1}{3}\right) f'\left(f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) = f'\left(\tfrac{1}{3}\right) f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(3\sqrt{3}\,\tfrac{\pi}{4}\right)\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \left(3\sqrt{3}\right)\tfrac{\pi^2}{8}$$

پس حاصل $y'\left(\frac{1}{3}\right)$، $\frac{\pi^2}{8}$ برابر $3\sqrt{3}$ است.

۵۳ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \to (-3)^+$ داریم:

$$x \to (-3)^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow [x] = -3, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-3 + x)\sqrt[3]{9x} = (x - 3)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{81x^2}}(x - 3)$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{9}{3\sqrt[3]{729}}(-6) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -3 - 2 = -5$$

**۵۴** گزینه ۱

**گام اول**

طبق تعریف مشتق، حد خواسته‌شده مشتق تابع $f\,(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ است یعنی:

$$f'\left(-۱\right) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$$

**گام دوم**

به ازای $x = -۱$ عبارت $\left(x^۲ - x - ۲\right)$ برابر صفر می‌شود و تابع $g(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۷x}$ نیز در $x = -۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبهٔ مشتق در نقطهٔ $x = -۱$ کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $\left(x^۲ - x - ۲\right)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و درنهایت مقدار آن را به ازای $x = -۱$ به دست آوریم:

$$x = -۱ \;:\; f'\,(x) = \left(۲x - ۱\right)\sqrt[۳]{x^۲ - ۷x} \Rightarrow f'\left(-۱\right) = \left(-۲ - ۱\right)\sqrt[۳]{\left(-۱\right)^۲ - ۷\left(-۱\right)}$$

$$= \left(-۳\right)\sqrt[۳]{۸} = -۳ \times ۲ = -۶$$

**۵۵** گزینه ۲

معادلهٔ دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم، باید معادلهٔ به‌دست‌آمده ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f\,(x) = g\,(x) \quad \Rightarrow \quad ax^۲ + ۴x = x^۲ + ۱ \quad \Rightarrow \quad \left(a - ۱\right)x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ باشد.

$$\xrightarrow{\Delta=۰} ۴^۲ - ۴\left(a - ۱\right)\left(-۱\right) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۱۶ + ۴\left(a - ۱\right) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۴\left(a - ۱\right) = -۱۶$$

$$\Rightarrow \quad a - ۱ = -۴ \quad \Rightarrow \quad a = -۳$$

۱ اگر $f(x) = max\{x^{۲}, |x - \frac{۳}{۴}|\}$ باشد، کمترین مقدار تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x - ۱)|x^{۲} + x - ۲|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵

۳) ۶ ۴) ۸

۳ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^{۲}}}{x}$ بر روی دامنهٔ خود، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴ برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام است؟

۱) $(۰, ۱]$ ۲) $[۰, ۲]$

۳) $[۱, ۲]$ ۴) $(۱, ۳)$

۵ بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸

۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

۶ مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} + ۲\sqrt{۲}\cos x\ ;\ ۰ \leq x \leq ۲\pi$ روبه‌بالا باشد، در کدام بازه است؟

۱) $(۰, \frac{۳\pi}{۴})$ ۲) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴})$

۳) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴})$

۷ تابع $f$ در نقطهٔ $c$ دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

۱) مثبت ۲) منفی

۳) نامنفی ۴) نامثبت

۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ + ax^۲ - ۸x$ در بازهٔ $(۱, ۴)$ قرار می‌گیرد؟

۱) $-۳ < a < ۱/۵$
۲) $-۳ < a < ۲/۵$
۳) $-۵ < a < ۱/۵$
۴) $-۵ < a < ۲/۵$

۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) مینیمم نسبی
۲) ماکسیمم نسبی
۳) مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی
۴) فاقد اکسترمم نسبی

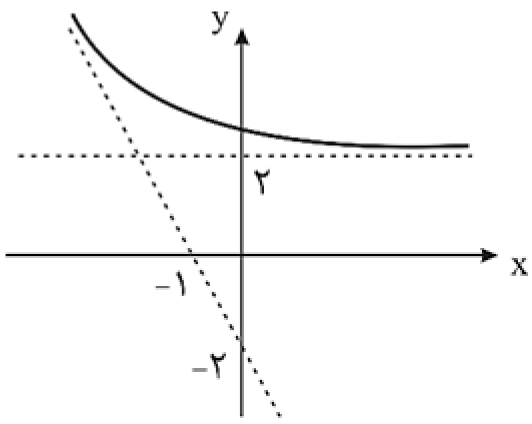
۱۰ نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی منحنی $y = x^۲$ از مبـدأ مختصات دور می‌شود. اگر مؤلفهٔ $x$ با سرعت ثابت ۰/۰۵ افزایش یابد، سرعت افزایش فاصلهٔ $M$ از مبدأ مختصات در لحظهٔ $x = \frac{۱۲}{۵}$ تقریباً کدام است؟

۱) ۰/۱۸
۲) ۰/۲۱
۳) ۰/۲۴
۴) ۰/۲۶

۱۱ نردبانی به طول ۱۰ متر به دیواری تکیه دارد. اگر انتهای نردبان با سرعت ۰/۵ متر بر ثانیه به زمین نزدیک شود، وقتی پای نردبان در فاصلهٔ ۶ متری دیوار است، با سرعت چندمتر بر ثانیه از دیوار دور می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

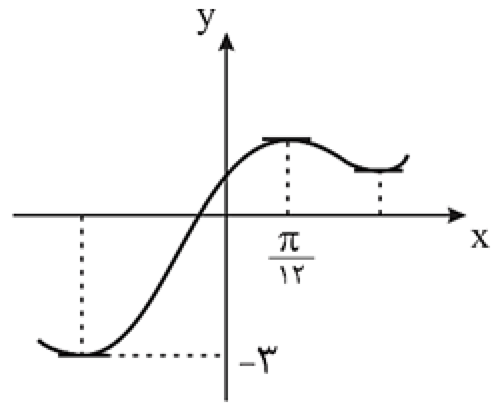
۱۲ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ax + \sqrt{x^۲ + bx + ۵}$ می‌باشد. دوتایی مرتب $(a,b)$ کدام است؟



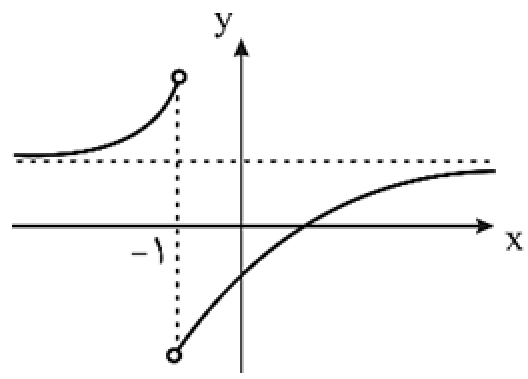

۱) $(-۱, -۴)$
۲) $(-۱, ۴)$
۳) $(۱, -۴)$
۴) $(۱, ۴)$

۱۳ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos ۴x + b\sin ۲x$ می‌باشد. $b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) $-۲$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $-\sqrt{۳}$




**۱۴** شکل زیر نمودار تابع $y = tan^{-۱}\, U$ می‌باشد. $U(x)$ برابر کدام است؟



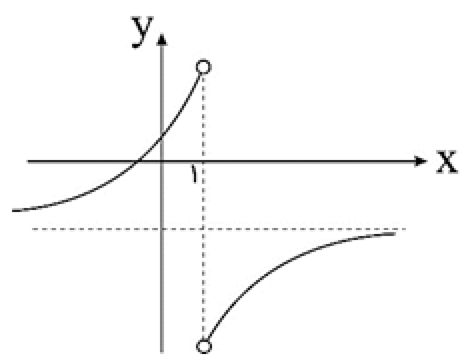

۱) $\frac{۱-x}{۱+x}$

۲) $\frac{۱+x}{۱-x}$

۳) $\frac{x+۱}{x-۱}$

۴) $\frac{x-۱}{x+۱}$

**۱۵** شکل زیر، نمودار تابع $y = tan^{-۱}(U(x))$ می‌باشد، ضابطهٔ $U(x)$ به کدام صورت است؟




۱) $\frac{۱+x}{۱-x}$

۲) $\frac{۱-x}{۱+x}$

۳) $\frac{x+۱}{x-۱}$

۴) $\frac{x-۱}{x+۱}$

**۱۶** نمودار $y = x\, ln\, |x|$، در کدام بازه، نزولی و تقعر آن روبه‌پایین است؟

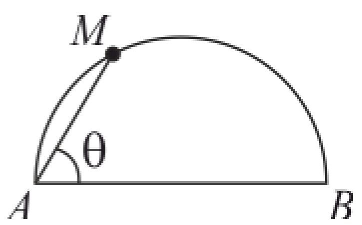
۱) $(-۱, -\frac{۱}{e})$

۲) $(-\frac{۱}{e}, ۰)$

۳) $(۰, \frac{۱}{e})$

۴) $(\frac{۱}{e}, ۱)$

**۱۷** نقطهٔ M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر $AB = ۱۰$، با سرعت ثابت ۰/۲ واحد در ثانیه از نقطهٔ A دور می‌شود. سرعت کاهش زاویهٔ $MAB = \theta$، در لحظه‌ای که وتر $MA = ۶$ باشد، کدام است؟



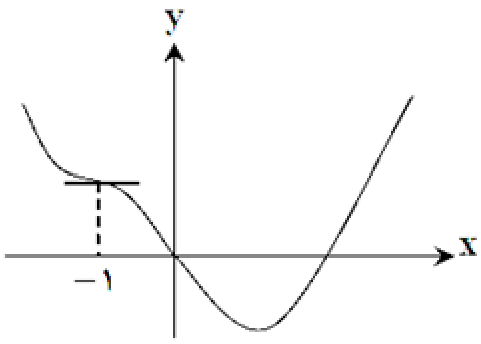

۱) ۰/۰۲۵

۲) ۰/۰۴۰

۳) ۰/۰۴۵

۴) ۰/۰۵۰

۱۸ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx$ می‌باشد. b کدام است؟




۱) $-11$

۲) $-10$

۳) $-9$

۴) $-8$

۱۹ دو نقطهٔ $A(2,3)$ و $B(4,7)$ و خط به معادلهٔ $y=x-1$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطهٔ M بر روی خط مفروض؛ با کدام طول انتخاب شود به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۱) $-1$ ۲) صفر

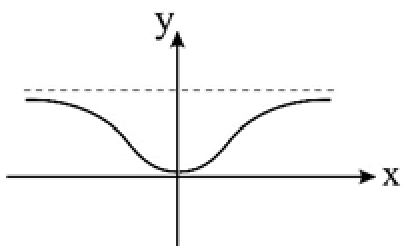
۳) ۱ ۴) ۳

۲۰ در کدام بازه تابع با ضابطهٔ $f(x)=e^{x-2x^2}$، صعودی و تقعر نمودار آن روبه‌پایین است؟

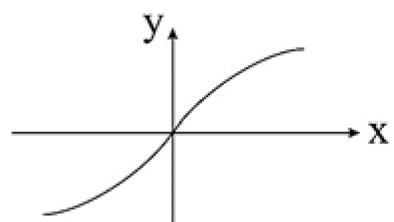
۱) $(-\infty,\frac{1}{4})$ ۲) $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

۳) $(-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ ۴) $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

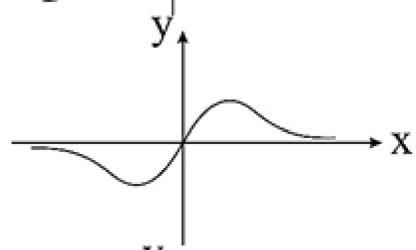
۲۱ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



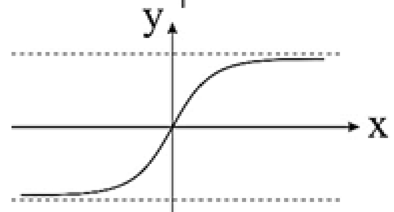

۱)



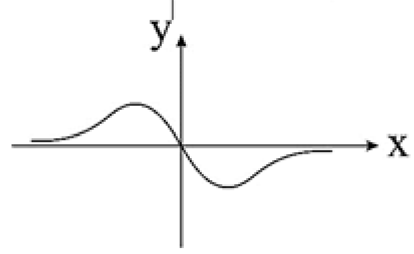

۲)



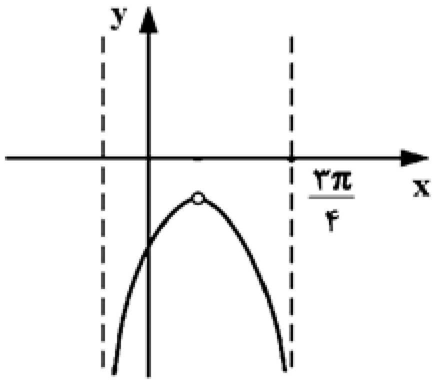

۳)




۴)



۲۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{a\sin x-\cos x}{b+\cos 2x}$ می‌باشد. a کدام است؟




۱) $-\sqrt{2}$
۲) ۱
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

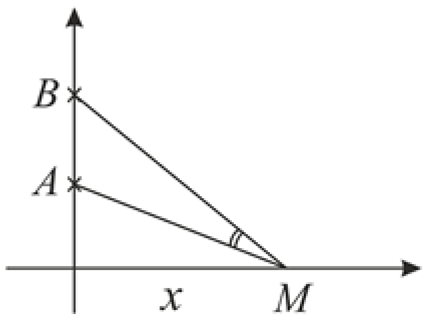
۲۳ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{2}{3}$

۲۴ اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه با سرعت ثابت $\frac{1}{20}$ رادیان بر ثانیه کاهش می‌یابد. اگر طول وتر آن ثابت و برابر ۱۰ واحد باشد، وقتی اندازهٔ یک زاویهٔ حادّه به $\frac{\pi}{6}$ برسد سرعت تغییر مساحت مثلث قائم‌الزاویه، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۱/۷۵

۲۵ دو نقطهٔ A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطهٔ M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود تا زاویهٔ AMB بیشترین مقدار ممکن باشد؟




۱) $3\sqrt{2}$
۲) ۶
۳) $2\sqrt{10}$
۴) ۷

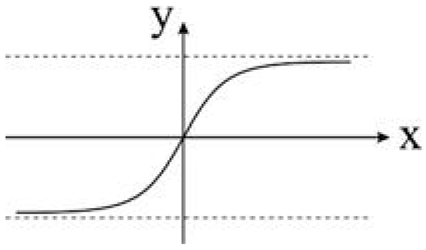
۲۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin^2 x-2\sin x\ ;\ x\in[0,2\pi]$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن روبه‌پایین است؟

۱) $(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$
۲) $(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$
۳) $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$
۴) $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6})$

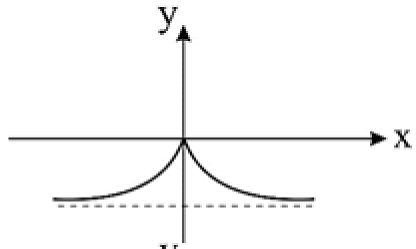
۲۷ در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) ۱
۳) $\sqrt[3]{2}$
۴) $\sqrt{2}$

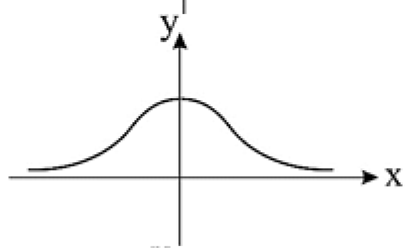
**۲۸** شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



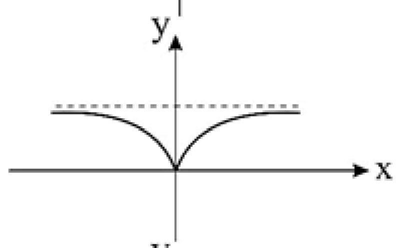

۱)



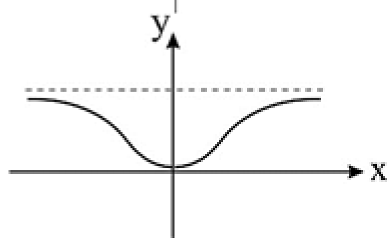

۲)



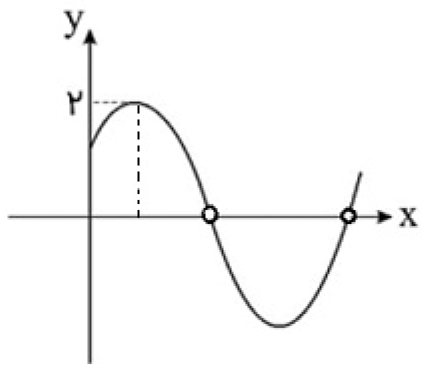

۳)




۴)




**۲۹** شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{a\sin 2x+b}{\sin x+\cos x}$، در یک دورهٔ تناوب می‌باشد. a کدام است؟




۱) $-1$

۲) $1$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $2$

**۳۰** مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادلهٔ $y=x|x^2-4x|$، کدام است؟

۱) $\{\frac{4}{3}\}$

۲) $\{0,\frac{4}{3},4\}$

۳) $\{\frac{4}{3},4\}$

۴) $\{0,\frac{4}{3}\}$

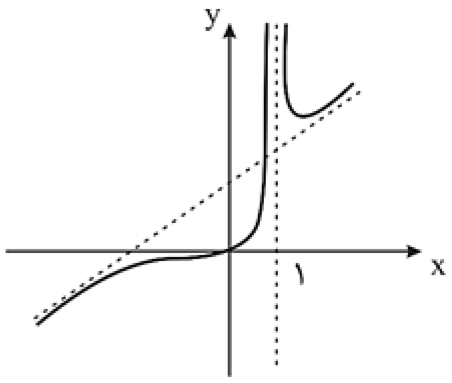
**۳۱** شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^3+ax^2}{x^2+bx+c}$ می‌باشد، عدد $(bc-a)$ کدام است؟

۱) $-2$

۲) $-1$

۳) $1$

۴) $2$

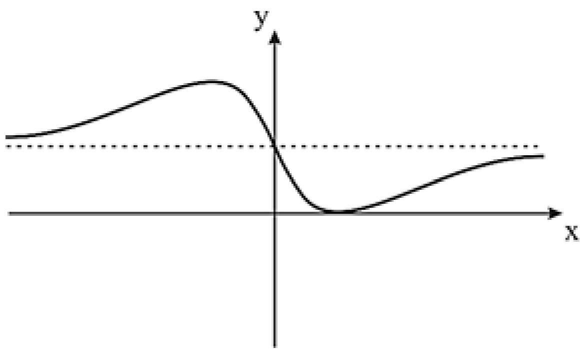



**۳۲** اگر $a > ۰$ و $a$ ثابت و $x$ متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}$ کدام است؟

۱) $۴a$      ۲) $۳a$

۳) ۳      ۴) ۴

**۳۳** شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^۲+bx+۲}{x^۲+۱}$ می‌باشد. دوتایی مرتب $(a,b)$ کدام است؟




۱) $(۱, -۲)$

۲) $(۱, ۲)$

۳) $(۲, -۴)$

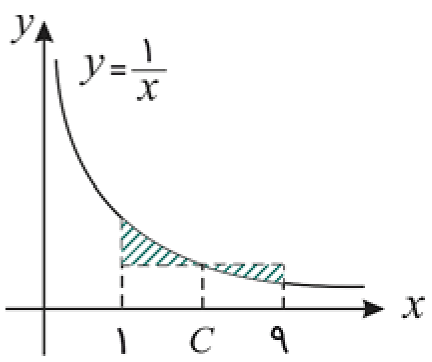
۴) $(۲, ۴)$

**۳۴** حاصل انتگرال $\int_۰^۴ \sqrt{(x^۲-۲x)^۲}\,dx$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$      ۲) $\frac{۲۰}{۳}$

۳) ۸      ۴) ۹

**۳۵** باتوجه‌به نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ به ازای کدام مقدار C، مساحت دو ناحیهٔ سایه‌زده، برابر است؟




۱) $\frac{۳}{\ln ۴}$

۲) $\frac{۳}{\ln ۳}$

۳) $\frac{۳}{\ln ۲}$

۴) $\frac{۴}{\ln ۳}$

**۳۶** میانگین تابع $f(x) = \frac{x^۲+۴}{x^۲}$ بر بازهٔ $[۲,a]$ برابر $\frac{۵}{۴}$ است. a کدام است؟

۱) ۶      ۲) ۷

۳) $۵\sqrt{۲}$      ۴) ۸

۳۷ حاصل $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos x}$، کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{3}-1$
۳) $\frac{\pi}{3}$
۴) $\sqrt{3}$

۳۸ حاصل انتگرال $\int_{0}^{2} \frac{x^2-[x]}{x+1}dx$، کدام است؟

۱) $\ln 2$
۲) $1-\ln 2$
۳) $\frac{1}{2}+\ln 2$
۴) $1+\ln 2$

۳۹ حاصل $\int_{0}^{9} |\sqrt{x}-2|\,dx$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{8}{3}$
۳) ۴
۴) $\frac{16}{3}$

۴۰ برای تابع $f(x)=\frac{x}{1+x}$، روی بازهٔ $[0,2]$ با انتخاب $n=4$، در بررسی انتگرال معین، مجموع بالا یعنی $U_4$ کدام است؟

۱) ۰/۹۵
۲) ۱/۰۲
۳) ۱/۰۵
۴) ۱/۰۸

۴۱ حاصل انتگرال $\int_{1}^{4} \left(\sqrt{(1+\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}}\right)dx$، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{5}{3}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{8}{3}$

۴۲ تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} 2 & ;\ x \text{ گویا} \\ -3 & ;\ x \text{ گنگ} \end{cases}$ مفروض است. حاصل $U_n(f)-L_n(f)$ در بازهٔ $[0,1]$ برای $n=10$ کدام است؟

۱) $-1$
۲) ۲
۳) $-3$
۴) ۵

۴۳ اگر $f(x)=\int_{2}^{2x} \frac{t+1}{t}dt$، معادلهٔ خط قائم بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $x-2y=1$
۲) $x+2y=1$
۳) $x+3y=1$
۴) $x-3y=1$

**۴۴** اگر $\int \sin x(1+\frac{1}{\cos^2 x})dx = \frac{f(x)}{\cos x}+c$ و $x \neq \frac{k\pi}{2}$، آنگاه تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\sin^2 x$ ۲) $\sin 2x$

۳) $1+\cos^2 x$ ۴) $1+\sin^2 x$

**۴۵** مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y = x^2|x|$ و خط به معادلهٔ $y = 8$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸

۳) ۲۲ ۴) ۲۴

**۴۶** مساحت ناحیـهٔ محدود به منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ و محور $x$ها و دو خط به معادلات $x = -\frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-1$ ۲) $2\sqrt{3}-2$

۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $2\sqrt{3}$

**۴۷** شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$، در هر نقطهٔ $M(x,y)$ واقع بر آن برابر $\frac{3}{(x-1)^2}$ است. اگر منحنی این تابع از نقطهٔ $(2,1)$ بگذرد، معادلهٔ خط مجانب افقی آن کدام است؟

۱) $y = -3$ ۲) $y = 2$

۳) $y = 3$ ۴) $y = 4$

**۴۸** مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k - 5^{k+1}}{10^k}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

**۴۹** مساحت زیر منحنی $y = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ و بالای محور $x$ها در بازهٔ $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $4-\sqrt{3}$

۳) $2\sqrt{3}-1$ ۴) $2\sqrt{3}$

**۵۰** مقدار متوسط تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^2-1|$ در بازهٔ $[-2,2]$ برابر $f(c)$ است، مجموعهٔ مقادیر $c$ کدام است؟

۱) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ۲) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

۳) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ ۴) $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ●○○○ | ۱۱ | ○●○○ | ۲۱ | ○●○○ | ۳۱ | ●○○○ | ۴۱ | ○●○○ |
| ۲ | ○○●○ | ۱۲ | ○●○○ | ۲۲ | ○●○○ | ۳۲ | ○○○● | ۴۲ | ○○○● |
| ۳ | ●○○○ | ۱۳ | ●○○○ | ۲۳ | ●○○○ | ۳۳ | ○○●○ | ۴۳ | ○○●○ |
| ۴ | ○●○○ | ۱۴ | ○○○● | ۲۴ | ○●○○ | ۳۴ | ○○●○ | ۴۴ | ●○○○ |
| ۵ | ○●○○ | ۱۵ | ●○○○ | ۲۵ | ○○●○ | ۳۵ | ○○○● | ۴۵ | ○○○● |
| ۶ | ○○●○ | ۱۶ | ○●○○ | ۲۶ | ●○○○ | ۳۶ | ○○○● | ۴۶ | ○○○● |
| ۷ | ○○●○ | ۱۷ | ●○○○ | ۲۷ | ○○●○ | ۳۷ | ○○○● | ۴۷ | ○○○● |
| ۸ | ○○○● | ۱۸ | ●○○○ | ۲۸ | ○●○○ | ۳۸ | ●○○○ | ۴۸ | ○●○○ |
| ۹ | ●○○○ | ۱۹ | ○●○○ | ۲۹ | ○○●○ | ۳۹ | ○○○● | ۴۹ | ○○○● |
| ۱۰ | ○○●○ | ۲۰ | ○●○○ | ۳۰ | ○○○● | ۴۰ | ○○●○ | ۵۰ | ○○●○ |

۱ **گزینه ۱**

با رسم نمودار دو تابع $y = x^{۲}$ و $y = |x - \frac{۳}{۴}|$ نمودار تابع $f(x) = \max\{x^{۲}, |x - \frac{۳}{۴}|\}$ را مشخص و کمترین مقدار آن را تعیین می‌کنیم. برای رسم دقیق نمودار دو تابع ابتدا محل تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$$x^{۲} = |x - \frac{۳}{۴}|$$

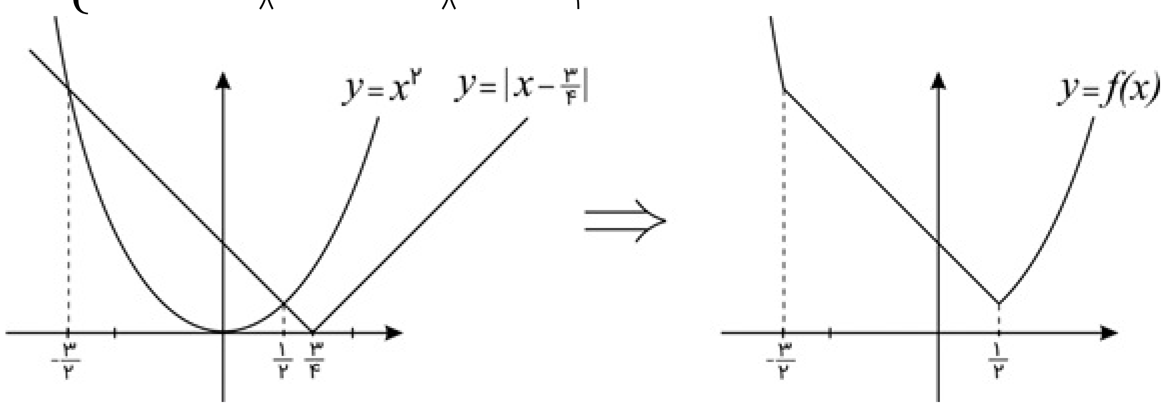
$$x \geq \frac{۳}{۴} \Rightarrow x - \frac{۳}{۴} \geq ۰ \Rightarrow |x - \frac{۳}{۴}| = x - \frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{x^{۲} = |x - \frac{۳}{۴}|} x^{۲} = x - \frac{۳}{۴} \Rightarrow x^{۲} - x + \frac{۳}{۴} = ۰ \xrightarrow{\Delta < ۰} \text{ریشه ندارد}$$

$$x < \frac{۳}{۴} \Rightarrow x - \frac{۳}{۴} < ۰ \Rightarrow |x - \frac{۳}{۴}| = -(x - \frac{۳}{۴}) = \frac{۳}{۴} - x$$

$$\xrightarrow{x^{۲} = |x - \frac{۳}{۴}|} x^{۲} = \frac{۳}{۴} - x \Rightarrow x^{۲} + x - \frac{۳}{۴} = ۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^{۲} + ۴x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = \frac{-۴ + \sqrt{۶۴}}{۸} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} \\ x_{۲} = \frac{-۴ - \sqrt{۶۴}}{۸} = -\frac{۱۲}{۸} = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$




کمترین مقدار تابع $f(x)$ به ازای $x = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید:

$$\min f = f(\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

**۲** گزینه ۳

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x^{۲}+x-۲|$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$f(x)=(x-۱)|x^{۲}+x-۲|=(x-۱)|(x+۲)(x-۱)|$$

$x=-۲$ و $x=۱$ ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)^{۲}(x+۲) & ;x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۲\\ -(x-۱)^{۲}(x+۲) & ;-۲<x<۱\end{cases}$$

تابع در نقاط $x=-۲$ و $x=۱$ پیوسته است پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases}(x-۱)(۳x+۳) & ;x>۱ \text{ یا } x<-۲\\ -(x-۱)(۳x+۳) & ;-۲<x<۱\end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

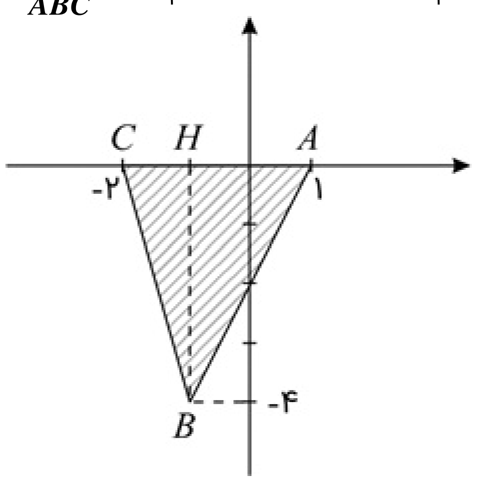
$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱,\ x<-۲\ :\ (x-۱)(۳x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}\ \text{غ ق ق}\\ -۲<x<۱\ :\ -(x-۱)(۳x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}\end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه $f'_{-}(۱)=f'_{+}(۱)=۰$ است پس $x=۱$ نیز نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است. داریم:

$$\left.\begin{aligned}f'_{+}(-۲)&=-(-۲-۱)(-۳)=-۹\\ f'_{-}(-۲)&=(-۲-۱)(-۳)=۹\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'_{+}(-۲)\neq f'_{-}(-۲)\Rightarrow f'(-۲)\ \text{وجود ندارد}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطهٔ بحرانی $A(۱,۰)$، $B(-۱,-۴)$ و $C(-۲,۰)$ است. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳=\frac{۱۲}{۲}=۶$$



۳ **گزینه ۱**

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

حال ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

معادلهٔ $f'(x) = 0$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x = 0$ تعریف‌نشده است اما $x = 0$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن برابر صفر است.

۴ **گزینه ۲**

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}} \quad : \quad \frac{2-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_f = (0, 2]$$

به ازای $0 < x \leq 2$، $|x| = x$ است پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}} = (x + x)\sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2x\sqrt{\frac{2-x}{x}} \overset{(*)}{=} 2\sqrt{\frac{x^2(2-x)}{x}} = 2\sqrt{2x - x^2}$$

(*) چون $x > 0$ است پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطهٔ $x = 2$ محاسبه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2\sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2-2x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

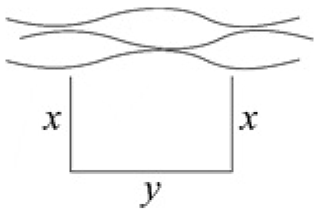
$$f(1) = 2\sqrt{2 - 1} = 2$$

$$f(2) = 2\sqrt{4 - 4} = 0$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازهٔ $[0, 2]$ است.

۵ **گزینه ۲**

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:




$$y + ۲x = ۸۸ \Rightarrow y = ۸۸ - ۲x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول در عرض آن است پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(۸۸ - ۲x) = ۸۸x - ۲x^۲$$

برای محاسبهٔ بیشترین مساحت، معادلهٔ $S'_x = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = ۸۸ - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow ۴x = ۸۸ \Rightarrow x = ۲۲ \,,\; y = ۸۸ - ۴۴ = ۴۴$$

بنابراین:

$$S_{max} = xy = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

۶ **گزینه ۳**

گام اول:

جهت تقعر منحنی یـک تـابع را می‌توان بـا تعیین علامـت مشـتق دوم این تابع مشـخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه $f''(x) > ۰$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = x^۲ + ۲\sqrt{۲}\cos x \Rightarrow f'(x) = ۲x - ۲\sqrt{۲}\sin x \Rightarrow f''(x) = ۲ - ۲\sqrt{۲}\cos x$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) > ۰$ را روی بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$f''(x) > ۰ \Rightarrow ۲ - ۲\sqrt{۲}\cos x > ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۲}\cos x < ۲ \Rightarrow \cos x < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (I)$$

می‌دانیم به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $-۱ \leq \cos x \leq ۱$ است پس باتوجه‌به رابطهٔ $(I)$ داریم:

$$-۱ \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (II)$$

مجمـوعه مقـادیری از x، کـه در رابطـهٔ $(II)$ صــدق می‌کننـد، دو ناحیـهٔ دوم و سـوم مثلثـاتی و دو بـازهٔ $\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲} \leq x \leq \frac{۷\pi}{۴}$ به ترتیب در ناحیهٔ اول و چهارم مثلثاتی هستند؛ بنابراین تقعر منحنی $f(x)$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴})$ روبه‌بالا است.

۷ **گزینه ۳**

باتوجه‌به اینکه تابع $f$ در نقطهٔ $x = c$ مشـتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شـده است. نقطهٔ $x = c$ مینیمم نسبی تابع $f$ است؛ بنابراین به ازای هر $x$ عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > ۰ \\ f(x) - f(c) \geq ۰ \end{cases} \qquad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطهٔ $x = c$ داریم:

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \xrightarrow{(*)} f'_{+}(c) \geq ۰$$

بنابراین مشتق راست تابع $f$ در نقطهٔ $x = c$ الزاماً نامنفی است.

۸ **گزینه ۴**

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازهٔ $(۱, ۴)$ پیوسـته است. برای یافتن نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حـل کنیم. می‌دانیم این معادله روی بازهٔ $(۱, ۴)$ ریشه خواهد داشت درصورتی‌که رابطهٔ $f'(۱)f'(۴) < ۰$ برقرار باشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ - ۸x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax - ۸$$

$$\begin{cases} f'(۱) = ۳ + ۲a - ۸ = ۲a - ۵ \\ f'(۴) = ۴۸ + ۸a - ۸ = ۸a + ۴۰ \end{cases} \xrightarrow{f'(۱)f'(۴)<۰} ۸(a+۵)(۲a-۵) < ۰$$

$$\Rightarrow -۵ < a < ۲/۵$$

۹ **گزینه ۱**

برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادلهٔ $f'(x) = ۰$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x \Rightarrow f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۴(x^۳ - ۳x + ۲) = ۰ \Rightarrow ۴(x-۱)(x^۲ + x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴(x-۱)(x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow ۴(x-۱)^۲(x+۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$، اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

| $x$ | $+\infty$ | | -۲ | | ۱ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | min | ↗ | | ↗ | |

باتوجه‌به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطهٔ $x = -۲$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x = ۱$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = ۰$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

۱۰ **گزینه ۳**

**گام اول**

فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $F=\sqrt{x^2+y^2}$

**گام دوم**

نقطهٔ $M$ روی منحنی $y=x^2$ قرار دارد پس می‌توان مختصـات این نقطه را به‌صورت $M(x,x^2)$ در نظر گرفت. باتوجه‌به گام اول می‌توان نوشت:

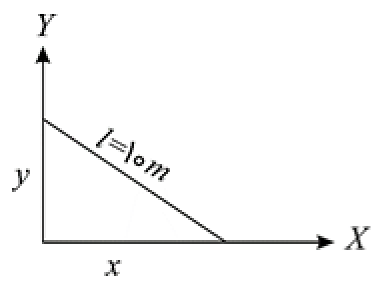
$$F=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^4}$$

با مشتق‌گیری از رابطهٔ بالا نسبت به زمان و باتوجه‌به اینکه $\frac{dx}{dt}=0/05$ است، سرعت افزایش فاصلهٔ $M$ از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+4x^3\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+x^4}}=\frac{2x\frac{dx}{dt}(1+2x^2)}{2x\sqrt{1+x^2}}=\frac{\frac{dx}{dt}(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\xrightarrow[x=\frac{12}{5}]{\frac{dx}{dt}=0/05}\frac{dF}{dt}=\frac{0/05(1+2(\frac{12}{5})^2)}{\sqrt{1+(\frac{12}{5})^2}}=\frac{0/05(1+\frac{288}{25})}{\sqrt{\frac{169}{25}}}=\frac{3/13}{13}\simeq 0/24$$

۱۱ **گزینه ۲**




با نزدیک شدن انتهای نردبان به سطح زمین، پای نردبان به‌سمت راست حرکت می‌کند؛ بنابراین داریم: $\frac{dy}{dt}=-0/5$

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$x^2+y^2=l^2\Rightarrow 6^2+y^2=10^2\Rightarrow y^2=100-36=64\xrightarrow{y>0}y=8m$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از رابطهٔ $x^2+y^2=100$ سرعت دور شدن پای نردبان از دیوار را به دست می‌آوریم.

$$x^2+y^2=100\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\xrightarrow[x=6,y=8]{\frac{dy}{dt}=-0/5}12\frac{dx}{dt}+16(-0/5)=0\Rightarrow 12\frac{dx}{dt}=8\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}m/s$$

۱۲ **گزینه ۲**

باتوجه‌به شکل، خط $y = ۲$ مجانب افقی تابع است و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۲$$

با استفاده از هم‌ارزی‌های رادیکالی داریم:

$$\sqrt{x^۲ + bx + ۵} \underset{x\to+\infty}{\sim} \left|x + \frac{b}{۲}\right| \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{b}{۲}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ax + \sqrt{x^۲ + bx + ۵} = \lim_{x\to+\infty} ax + x + \frac{b}{۲} = \lim_{x\to+\infty} (a+۱)x + \frac{b}{۲}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to+\infty} f(x)=۲} \begin{cases} a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱ \\ \dfrac{b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = ۴ \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (-۱, ۴)$$

۱۳ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، تابع در نقطه‌ای با طول $x = \frac{\pi}{۱۲}$ دارای مماس افقی است؛ پس داریم: $f'(\frac{\pi}{۱۲}) = ۰$

$$f(x) = a\cos ۴x + b\sin ۲x \quad ; D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -۴a\sin ۴x + ۲b\cos ۲x \xrightarrow{f'(\frac{\pi}{۱۲})=۰} f'(\frac{\pi}{۱۲}) = -۴a\sin ۴(\frac{\pi}{۱۲}) + ۲b\cos ۲(\frac{\pi}{۱۲})$$

$$= -۴a\sin\frac{\pi}{۳} + ۲b\cos\frac{\pi}{۶} = -۴a(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + ۲b(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \sqrt{۳}(-۲a+b) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

$(I)$

باتوجه‌به نمودار، مقدار به ازای اولین مینیمم نسبی تابع با طول منفی برابر ۳- است. با حل معادلهٔ $f'(x) = ۰$ طول نقاط اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow -۴a\sin ۴x + ۲b\cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲b\cos ۲x = ۴a\sin ۴x$$

$$\xrightarrow{b=۲a} \cos ۲x = \sin ۴x \xrightarrow{\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha} \cos ۲x = ۲\sin ۲x\cos ۲x$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x - \cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases} \end{cases}$$

به ازای $k = -۱$ داریم:

$$x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{k=-۱} x = \frac{-\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = -\frac{\pi}{۴}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=-۱} x = -\pi + \frac{\pi}{۱۲} = -\frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

$$x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=-۱} x = -\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} = -\frac{۷\pi}{۱۲}$$

بزرگ‌ترین طول اکسترمم، $x = \frac{-\pi}{۴}$ است؛ بنابراین داریم:

$$f(-\frac{\pi}{۴}) = -۳$$

$$\Rightarrow a\cos ۴(-\frac{\pi}{۴}) + b\sin ۲(-\frac{\pi}{۴}) = -۳ \Rightarrow -a-b = -۳ \Rightarrow a+b = ۳$$

$$\xrightarrow{b=۲a} a + ۲a = ۳ \Rightarrow ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = ۲(۱) = ۲$$

۱۴ گزینه ۴

تابع در نقطه‌ای به طول $x = -۱$ تعریف نشده است؛ پس مخرج $U(x)$ به ازای $x = -۱$ برابر صفر می‌شود؛ بنابراین گزینه‌های ۲ و ۳ رد می‌شوند. ازطرفی منحنی تابع در نقطه‌ای با طول مثبت محور xها را قطع کرده است همچنین مقدار تابع در نقطهٔ $x = ۰$ منفی می‌باشد؛ بنابراین $U(x) = \frac{x-۱}{x+۱}$ است.

**۱۵** **گزینه ۱**

باتوجه‌به نمودار، تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ تعریف نشده است؛ پس $x = ۱$ ریشهٔ مخرج تابع $U(x)$ است؛ بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ به‌راحتی رد می‌شوند.

همچنین دو شاخهٔ منحنی تابع، صعودی است و چون $tan^{-۱}$ تابعی اکیداً صعودی است؛ پس $U(x)$ نیز باید صعودی باشد؛ یعنی $U'(x)$ باید مثبت باشد.

بررسی گزینهٔ اول:

$$U(x) = \frac{۱+x}{۱-x} \Rightarrow U'(x) = \frac{۱-x+۱+x}{(۱-x)^۲} = \frac{۲}{(۱-x)^۲} > ۰$$

پس همین گزینه جواب سؤال است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$U(x) = \frac{x+۱}{x-۱} \Rightarrow U'(x) = \frac{x-۱-x-۱}{(x-۱)^۲} = \frac{-۲}{(x-۱)^۲} < ۰$$

**۱۶** **گزینه ۲**

**گام اول**

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازهٔ نزولی است؛ هرگاه روی آن بازه داشته باشیم $f'(x) < ۰$

ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است؛ هرگاه روی آن بازه داشته باشیم $f''(x) < ۰$

**گام دوم**

ابتدا ضابطهٔ $y'$ و $y''$ را نوشته، سپس مجموعه جواب دو نامعادلهٔ $y' < ۰$ و $y'' < ۰$ را تعیین می‌کنیم.

$$y = x\,ln\,|x| \quad , \quad D = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$y' = ln\,|x| + x(\frac{۱}{x}) = ln\,|x| + ۱$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ln\,|x| + ۱ = ۰ \Rightarrow ln\,|x| = -۱ \Rightarrow |x| = e^{-۱} = \frac{۱}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{e}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{۱}{e}$ | | ۰ | | $\frac{۱}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | ۰ | − | ن ت | − | ۰ | + | |
| $y$ | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |

$$y' < ۰ \Rightarrow x \in (-\frac{۱}{e}, ۰) \text{ یا } x \in (۰, \frac{۱}{e}) \qquad (I)$$

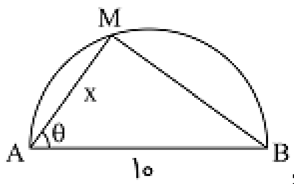
$$y'' = \frac{۱}{x} \xrightarrow{y'' < ۰} \frac{۱}{x} < ۰ \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, ۰) \quad (II)$$

تابع روی اشتراک دو مجموعه جواب؛ یعنی بازهٔ $(-\frac{۱}{e}, ۰)$، نزولی با تقعر روبه‌پایین است.

۱۷ **گزینه ۱**

با جابه‌جایی نقطهٔ M، طول پاره‌خط AM و همچنین اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ تغییر می‌کند. در مثلث $\overset{\Delta}{AMB}$، چون زاویهٔ M، یک زاویهٔ محاطی و مقابل به قطر AB است، پس $M = ۹۰^\circ$ و مثلث $\overset{\Delta}{AMB}$ قائم‌الزاویه خواهد بود. اگر تعریف کنیم $AM = x$، آنگاه داریم:

$$\cos\theta = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{۱۰}$$




برای محاسبهٔ سرعت کاهش زاویهٔ $\theta$، ازطرفین رابطهٔ بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow -\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۱۰}\frac{dx}{dt}$$

اگر $x = ۶$ باشد؛ آنگاه داریم:

$$\xrightarrow{x=۶} \cos\theta = \frac{x}{۱۰} = \frac{۶}{۱۰} \xrightarrow{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱} \sin\theta = \frac{۸}{۱۰}$$

همچنین باتوجه‌به صورت سؤال $\frac{dx}{dt} = \frac{۲}{۱۰}$ است، پس $\frac{d\theta}{dt}$ برابر است با:

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۱۰}\frac{dx}{dt} \Rightarrow -\frac{۸}{۱۰}\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{۱}{۴۰} = -۰/۰۲۵$$

(مقدار منفی نشان‌دهندهٔ کاهش زاویهٔ $\theta$ است)

۱۸ **گزینه ۱**

باتوجه‌به نمودار، تابع در نقطه‌ای با طول $x = -۱$ مماس افقی دارد؛ پس $f'(-۱) = ۰$ است. ازطرفی بسیار واضح است که جهت تقعر منحنی تابع در نقطهٔ $x = -۱$ عوض شده است؛ بنابراین داریم: $f''(-۱) = ۰$ با حل دو معادلهٔ $f'(-۱) = ۰$ و $f''(-۱) = ۰$، مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^۴ - x^۳ + ax^۲ + bx$$

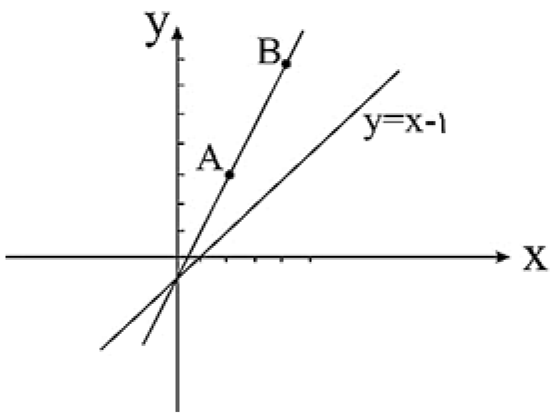
$$f'(x) = ۴x^۳ - ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f'(-۱) = -۴ - ۳ - ۲a + b = ۰ \Rightarrow b - ۲a = ۷ \quad (I)$$

$$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۶x + ۲a \Rightarrow f''(-۱) = ۱۲ + ۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow ۲a = -۱۸ \Rightarrow a = -۹$$

$$\xrightarrow{(I)} b - ۲(-۹) = ۷ \Rightarrow b + ۱۸ = ۷ \Rightarrow b = -۱۱$$

۱۹ گزینه ۲

دو نقطهٔ A و B و خط داده‌شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.




همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $y = x - ۱$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد؛ همان محل برخورد خط $y = x - ۱$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$
$$y - ۳ = \frac{۷-۳}{۴-۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو خط، نقطهٔ برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۲x - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow M(۰, -۱)$$

بنابراین طول نقطهٔ M برابر با صفر است.

۲۰ گزینه ۲

## گام اول

الف) تابع f بر روی یک بازه صعودی است؛ هرگاه روی آن بازه داشته باشیم $f'(x) > ۰$

ب) تقعر منحنی تابع $f$ بر روی یک بازه روبه‌پایین است؛ هرگاه روی آن بازه داشته باشیم $f''(x) < ۰$

## گام دوم

باتوجه‌به گام اول، مجموعه جواب دو نامعادلهٔ $f'(x) > ۰$ و $f''(x) < ۰$ را به دست می‌آوریم. اشتراک این دو مجموعه، همان بازه‌ای است که تابع $f$ بر روی آن صعودی و تقعر نمودارش روبه‌پایین است.

$$f(x) = e^{x-۲x^۲} \Rightarrow f'(x) = (۱ - ۴x)e^{x-۲x^۲} \xrightarrow{f'(x)>۰} (۱ - ۴x)e^{x-۲x^۲} > ۰$$
$$\xrightarrow{e^{x-۲x^۲}>۰} (۱ - ۴x) > ۰ \Rightarrow ۴x < ۱ \Rightarrow x < \frac{۱}{۴} \qquad (I)$$
$$f''(x) = -۴e^{x-۲x^۲} + (۱ - ۴x)e^{x-۲x^۲}(۱ - ۴x) = e^{x-۲x^۲}(-۴ + (۱ - ۴x)^۲)$$
$$\xrightarrow{f''(x)<۰} e^{x-۲x^۲}(-۴ + (۱ - ۴x)^۲) < ۰ \xrightarrow{e^{x-۲x^۲}>۰} -۴ + (۱ - ۴x)^۲ < ۰$$
$$\Rightarrow (۱ - ۴x)^۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < (۱ - ۴x) < ۲ \Rightarrow -۳ < -۴x < ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۴} < x < \frac{۳}{۴} \qquad (II)$$
$$I \bigcap II : x \in (-\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$$

۲۱ **گزینه ۲**

باتوجه‌به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ نزولی است؛ پس نمودار $f'$ در این بازه منفی است (زیر محور xها) و همچنین تابع f در بازهٔ $(۰, +\infty)$ صعودی است پس نمودار $f'$ در این بـازه مثبت است (بالای محور xها)، نمودار تابع f دارای یک مجانب افقی است که تابع در $+\infty$ و $-\infty$ به آن میل می‌کند؛ بنابراین مشتق تابع در $+\infty$ و $-\infty$ به صفر میل خواهد کرد پس خط $y = ۰$ مجانب افقی تابع $f'$ است. باتوجه‌به گزینه‌ها، تنها گزینهٔ ۲ همهٔ شرایط را دارد.

۲۲ **گزینه ۲**

باتوجه‌به نمودار، خط $x = \frac{۳\pi}{۴}$ مجانب قائم تابع است؛ پس به ازای $x = \frac{۳\pi}{۴}$ مخرج کسر برابر صفر می‌شود.

$$b + \cos ۲x = ۰ \xrightarrow{x=\frac{۳\pi}{۴}} b + \cos \frac{۳\pi}{۲} = ۰ \Rightarrow b + ۰ = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{a \sin x - \cos x}{\cos ۲x}$$

تابع $f(x)$ در نقطه‌ای بین ۰ و $\frac{۳\pi}{۴}$ تعریف نشده است؛ اما در این نقطه تابع مجانب قائم ندارد؛ پس باید هم ریشهٔ مخرج کسر باشد و هم ریشهٔ صورت کسر. ریشهٔ مخرج کسر که در بازهٔ $(۰, \frac{۳\pi}{۴})$ قرار می‌گیرد را به دست می‌آوریم.

$$\cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

$$\xrightarrow{x\in(۰,\frac{۳\pi}{۴})} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}$$

باید $x = \frac{\pi}{۴}$ ریشهٔ صورت کسر نیز باشد:

$$a \sin \frac{\pi}{۴} - \cos \frac{\pi}{۴} = ۰ \Rightarrow a(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

۲۳ **گزینه ۱**

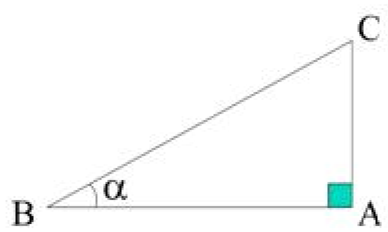
$$y = (x-۱)^۲ \sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow y' = ۲(x-۱)(x^{\frac{۲}{۳}}) + (x-۱)^۲(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}) \Rightarrow y' = \frac{۶(x-۱)x + ۲(x-۱)^۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\text{صورت} = ۰ \Rightarrow ۲(x-۱)(۳x + (x-۱)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

باتوجه‌به گزینه‌ها $x = \frac{۱}{۴}$ جواب مسئله است.

**۲۴** **گزینه ۲**




$$BC = 10\ ,\ \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{20}(rad/s)$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{2} \times BC \times AB \times \sin\alpha \\ \frac{AB}{BC} = \cos\alpha \Rightarrow AB = BC\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}BC^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}BC^2\sin 2\alpha$$

$$\xrightarrow{BC=10} 25\sin 2\alpha \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 25(2\cos 2\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$

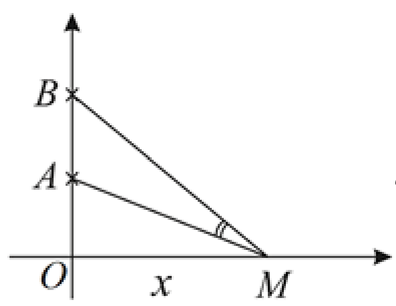
$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6},\frac{d\alpha}{dt}=\frac{-1}{20}} 25(2\cos(2\times\frac{\pi}{6})(\frac{-1}{20})) = -1/25$$

مساحت مثلث با سرعت ۱.۲۵ کاهش می‌یابد.

**۲۵** **گزینه ۳**

راه‌حل اول:

نکته:




$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

چون تابع $tanM$ در بازه‌هایی که مجانب قائم نـدارد صـعودی است پس بیشترین مقـدار زاویهٔ M معادل بیشترین مقدار تابع $tanM$ است (دقت کنید M در ربع اول است).

$$OMB = \alpha\ ,\ OMA = \beta$$

$$\tan\alpha = \frac{8}{x}\ ,\ \tan\beta = \frac{5}{x}$$

$$\tan M = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{8}{x}-\frac{5}{x}}{1+\frac{40}{x^2}} = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x^2+40}{x^2}} = \frac{3x}{x^2+40}$$

با مشتق‌گیری بیشترین مقدار این تابع را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+40} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x^2+40)-2x(3x)}{(x^2+40)^2} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

راه‌حل تستی:

$$OM^2 = x^2 = OA \times OB = 5\times 8 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

۲۶ گزینه ۱

$$f'(x) = ۲\sin x\cos x - ۲\cos x = ۲\cos x(\sin x - ۱)$$

$$\text{صعودی} \Rightarrow f'(x) > ۰ \Rightarrow ۲\cos x\underbrace{(\sin x - ۱)}_{\text{نامثبت}} > ۰ \Rightarrow \cos x < ۰ \Rightarrow \quad x \in (\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$$

ربع دوم یا سوم (*)

$$f''(x) = -۲\sin x(\sin x - ۱) + ۲\cos^۲ x = -۲\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲\cos^۲ x$$

$$= -۲\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲(۱ - \sin^۲ x) = -۴\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲ \xrightarrow{\sin x = t} -۴t^۲ + ۲t + ۲$$

$$\text{تقعر روبه‌پایین} \Rightarrow f''(x) < ۰ \Rightarrow -۴t^۲ + ۲t + ۲ < ۰ \Rightarrow t < \frac{-۱}{۲} \text{ یا } t > ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x > ۱ \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \\ \sin x < \frac{-۱}{۲} \xrightarrow{-۱ \le \sin x \le ۱} -۱ \le \sin x < \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x \in (\frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}) \quad (**) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*) \bigcap (**)} x \in (\frac{۷\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲})$$

**۲۷** **گزینه ۳**

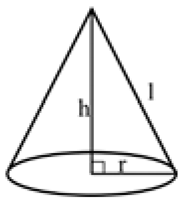
### گام اول

الف) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ $r$ و ارتفاع $h$ برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با: $S = \pi r l$




### گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کم‌ترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم. باتوجه‌به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{۳}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{\pi}{۳} \quad \Rightarrow \quad r^{۲}h = ۱ \quad \Rightarrow \quad r^{۲} = \frac{۱}{h} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{۱}{\sqrt{h}} \qquad (I)$$

برای محاسبهٔ مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازهٔ $l$ را به دست آوریم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$l^{۲} = r^{۲} + h^{۲} \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{r^{۲} + h^{۲}} \qquad (II)$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطهٔ $(I)$ و $(II)$ در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(II)} S = \pi r\sqrt{r^{۲} + h^{۲}} \xrightarrow{(I)} S = \pi \times \frac{۱}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{۱}{h} + h^{۲}} = \frac{\pi\sqrt{h^{۳}+۱}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از $S$ نسبت به $h$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

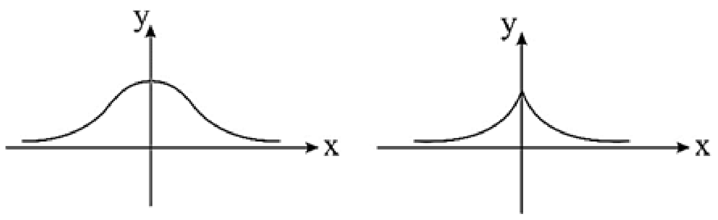
$$S' = \pi \times \frac{\frac{۳h^{۲}}{۲\sqrt{h^{۳}+۱}} \times h - \sqrt{h^{۳}+۱}}{h^{۲}} = \frac{\pi}{h^{۲}}\left(\frac{۳h^{۳} - ۲h^{۳} - ۲}{۲\sqrt{h^{۳}+۱}}\right) = \frac{\pi}{h^{۲}}\left(\frac{h^{۳} - ۲}{۲\sqrt{h^{۳}+۱}}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad h^{۳} - ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad h^{۳} = ۲ \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[۳]{۲}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{۳}$، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

**۲۸** **گزینه ۲**

نمودار تابع f همواره صعودی است؛ بنابراین $f'(x) > ۰$ است (رد گزینهٔ ۱). تقعر تابع f در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ روبه‌بالا است $(f'' > ۰)$؛ بنابراین روی این بازه $f'$ صعودی است (رد گزینهٔ ۳ و ۴). دقت کنید که $x = ۰$ نقطهٔ عطف تابع $f$ است؛ اما $f''$ در این نقطه می‌تواند برابر با صفر باشد یا نباشد؛ بنابراین $f'$ می‌تواند در این نقطه مماس افقی داشته باشد یا نداشته باشد، پس نمودار $f'$ به هر دو شکل زیر قابل‌قبول است.




۲۹ **گزینه ۳**

تابع $f(x)$، یک تابع کسری مثلثاتی است. باتوجه‌به نمودار تابع فاقد مجانب قائم است؛ بنابراین ریشه‌های مخرج کسر، قطعاً ریشه‌های صورت کسر نیز هست، پس داریم:

$$f(x)=\frac{a\sin ۲x+b}{\sin x+\cos x}$$

$$\sin x+\cos x=۰\Rightarrow \sin x=-\cos x\xrightarrow{\div \cos x}\tan x=-۱$$

$$\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{k=۱}x=\frac{۳\pi}{۴}$$

$$a\sin ۲x+b=۰\xrightarrow{x=\frac{۳\pi}{۴}}a\sin ۲(\frac{۳\pi}{۴})+b=۰\Rightarrow a\sin\frac{۳\pi}{۲}+b=۰$$

$$\Rightarrow -a+b=۰\Rightarrow a=b$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a\sin ۲x+a}{\sin x+\cos x}=\frac{a(\sin ۲x+۱)}{\sin x+\cos x}$$

می‌دانیم:

$$\sin ۲x=۲\sin x\cos x\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a(\sin x+\cos x)^۲}{\sin x+\cos x}=a(\sin x+\cos x)$$

ازطرفی:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x)=\sqrt{۲}(\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴})$$

$$=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow f(x)=a\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

می‌دانیم $|\sin(x+\frac{\pi}{۴})|\leq ۱$ است پس:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})\leq ۱\Rightarrow a\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})\leq a\sqrt{۲}\Rightarrow f(x)\leq a\sqrt{۲}$$

باتوجه‌به نمودار، بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر با ۲ است، پس:

$$a\sqrt{۲}=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

۳۰ **گزینه ۴**

گام اول:

$x=a$ طول نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد.

ب) تابع f در نقطهٔ $x = a$ دارای مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطهٔ $x = a$ عوض شود.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق، تابع داده‌شده را ساده می‌کنیم، سپس بررسی می‌کنیم چه نقاطی شرایط ذکرشده در گام را دارند.

| $x$ | | ۰ | | ۴ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲-۴x$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

$$x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x|x^۲ - ۴x| = \begin{cases} x(x^۲ - ۴x) & ; x > ۴ \\ x(-x^۲ + ۴x) & ; ۰ \leq x \leq ۴ \\ x(x^۲ - ۴x) & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x^۳ - ۴x^۲ & ; x > ۴ \\ -x^۳ + ۴x^۲ & ; ۰ \leq x \leq ۴ \\ x^۳ - ۴x^۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} ۳x^۲ - ۸x & ; x > ۴ \\ -۳x^۲ + ۸x & ; ۰ \leq x < ۴ \\ ۳x^۲ - ۸x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' = \begin{cases} ۶x - ۸ & ; x > ۴ \\ -۶x + ۸ & ; ۰ < x < ۴ \\ ۶x - ۸ & ; x < ۰ \end{cases}$$

با تعیین علامت تابع $y''$ داریم:

$$۶x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

$$-۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

| $x$ | $+\infty$ | ۰ | | $\frac{۴}{۳}$ | | ۴ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $۶x-۸$ | − | | | ۰ | | | + |
| $-۶x+۸$ | | | + | ۰ | − | | |
| $y''$ | − | | + | ۰ | − | | + |

تابع $y''$ در سه نقطهٔ $x = ۰, \frac{۴}{۳}, ۴$ تغییر علامت داده است. بررسی می‌کنیم در کدام‌یک از این نقاط شرط پیوستگی و داشتن مماس واحد نیز برقرار است.

تابع y در تمام نقاط $\mathbb{R}$ و ازجمله در سه نقطهٔ $x = ۰, \frac{۴}{۳}, ۴$ پیوسته است. داریم:

$$y'_-(۰) = y'_+(۰) = ۰ \quad , \quad y'_-(\frac{۴}{۳}) = y'_+(\frac{۴}{۳}) = \frac{۱۶}{۳}$$

اما در نقطهٔ $x = ۴$ داریم:

$$y'_-(۴) = -۱۶ \ , \ y'_+(۴) = ۱۶$$

درنتیجه تابع y در نقطهٔ $x = ۴$ مماس واحد ندارد.

بنابراین مجموعهٔ نقاط عطف تابع y عبارت است از: $\{۰, \frac{۴}{۳}\}$

۳۱ **گزینه ۱**

باتوجه‌به شکل، $x = ۰$ تنها ریشهٔ تابع $f(x)$ است؛ پس:

$$f(x) = \frac{x^۳+ax^۲}{x^۲+bx+c} \xrightarrow{f(x)=۰} x^۳ + ax^۲ = x^۲(x+a) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -a \end{cases}$$

بنابراین:

$$-a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

ازطرفی خط $x = ۱$ مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌باشد؛ پس $x = ۱$ ریشهٔ مخرج کسر است؛ اما باتوجه‌به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x) = +\infty$$

بنابراین $x = ۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است؛ پس:

$$x^۲ + bx + c = (x-۱)^۲ \Rightarrow x^۲ + bx + c = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} b = -۲ \\ c = ۱ \end{cases}$$

بنابراین:

$$bc - a = -۲(۱) - ۰ = -۲$$

۳۲ **گزینه ۴**

$a$ مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر $x$، $a$ فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل $a$ را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = ۲$، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{۶+x}{\sqrt[۴]{۸x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار $y$ ابتدا معادلهٔ $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{۶+x}{\sqrt[۴]{۸x}} = (۶+x)(۸x)^{-\frac{۱}{۴}}$$

$$y' = (۸x)^{-\frac{۱}{۴}} - ۲(۶+x)(۸x)^{-\frac{۵}{۴}} = (۸x)^{-\frac{۵}{۴}}(۸x - ۱۲ - ۲x) = \frac{۶x-۱۲}{\sqrt[۴]{(۸x)^۵}}$$

$$y' = ۰ \xrightarrow{x\neq ۰} ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(۲)$ است و داریم:

$$y(۲) = \frac{۶+۲}{\sqrt[۴]{۸(۲)}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۱۶}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۲^۴}} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

**۳۳** **گزینه ۳**

تابع دارای یک مجانب افقی است. معادلهٔ این مجانب برابر است با:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^۲+bx+۲}{x^۲+۱} = a \Rightarrow y = a$$

مجانب افقی، منحنی تابع را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند؛ بنابراین $f(۰) = a$ است.

$$f(۰) = \frac{۰+۰+۲}{۰+۱} = a \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow f(x) = \frac{۲x^۲+bx+۲}{x^۲+۱}$$

باتوجه‌به نمودار، منحنی در نقطه‌ای با طول مثبت بر محور xها مماس است؛ بنابراین معادلهٔ $f(x) = ۰$ یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

$$f(x) = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + bx + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشهٔ مضاعف}} \Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴(۲)(۲) = ۰$$
$$\Rightarrow b^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \pm ۴$$

بررسی می‌کنیم به ازای کدام‌یک از مقادیر $b = ۴$ و $b = -۴$ معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد.

$$b = ۴ : ۲x^۲ + ۴x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱) = ۰ \Rightarrow x = -۱ \text{غ‌ق‌ق}$$

$$b = -۴ : ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \quad \checkmark$$

بنابراین $b = -۴$ قابل‌قبول است و داریم: $(a,b) = (۲,-۴)$

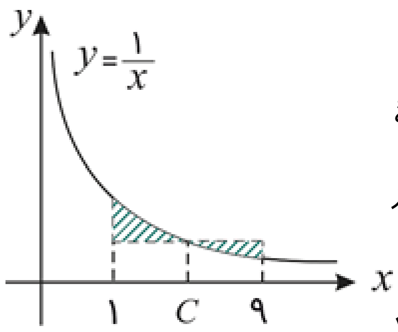
**۳۴** **گزینه ۳**

$$\int_۰^۴ \sqrt{(x^۲-۲x)^۲}\,dx = \int_۰^۴ |x^۲-۲x|\,dx = \int_۰^۲ (۲x-x^۲)dx + \int_۲^۴ (x^۲-۲x)dx$$

$$= \left(x^۲ - \frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۲\right) + \left(\frac{x^۳}{۳} - x^۲\Big|_۲^۴\right)$$

$$= \left((۴-\frac{۸}{۳}) - (۰-۰)\right) + \left((\frac{۶۴}{۳} - ۱۶) - (\frac{۸}{۳} - ۴)\right) = \frac{۴}{۳} + \frac{۱۶}{۳} + \frac{۴}{۳} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

**۳۵** **گزینه ۴**




راه‌حل اول:

مساحت ناحیـهٔ هاشورخوردهٔ بین نمودار $\frac{۱}{x}$ و خـط $y = \frac{۱}{C}$ در فاصلـهٔ $[۱, C]$ و مساحت ناحیهٔ هـاشورخوردهٔ بین خط $y = \frac{۱}{C}$ و نمـودار $\frac{۱}{x}$ در فاصلـهٔ $[C, ۹]$ را محاسبـه کرده و برابر بـاهم قرار می‌دهیم:

$$\text{مساحت ناحیهٔ ۱} = \int_{۱}^{C} (\frac{۱}{x} - \frac{۱}{C})dx = \ln x - \frac{x}{C}\Big]_{۱}^{C} = \ln C - ۱ + \frac{۱}{C}$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ ۲} = \int_{C}^{۹} (\frac{۱}{C} - \frac{۱}{x})dx = \frac{x}{C} - \ln x\Big]_{C}^{۹} = (\frac{۹}{C} - \ln ۹) - (۱ - \ln C)$$

بنابراین داریم:

$$\ln C - ۱ + \frac{۱}{C} = \frac{۹}{C} - \ln ۹ - ۱ + \ln C \Rightarrow \frac{۸}{C} = \ln ۹ \Rightarrow C = \frac{۸}{\ln ۹} = \frac{۸}{۲\ln ۳} = \frac{۴}{\ln ۳}$$

راه‌حل دوم:

$$f(C) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow \frac{۱}{C} = \frac{\int_{۱}^{۹} \frac{۱}{x}dx}{۹-۱} \quad (*)$$

$$\int_{۱}^{۹} \frac{۱}{x}dx = \ln|x|\Big|_{۱}^{۹} = \ln ۹ - \ln ۱ = ۲\ln ۳$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۱}{C} = \frac{۲\ln ۳}{۸} \Rightarrow C = \frac{۴}{\ln ۳}$$

**۳۶** **گزینه ۴**

$$\text{میانگین تابع} = \frac{\int_{۲}^{a} \frac{x^۲+۴}{x^۲}dx}{a-۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{\int_{۲}^{a} (۱ + \frac{۴}{x^۲})dx}{a-۲} = \frac{(x - \frac{۴}{x})]_{۲}^{a}}{a-۲}$$

$$= \frac{(a - \frac{۴}{a}) - (۲ - \frac{۴}{۲})}{a-۲} = \frac{a - \frac{۴}{a}}{a-۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ۴a - \frac{۱۶}{a} = ۵a - ۱۰ \Rightarrow a + \frac{۱۶}{a} - ۱۰ = ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۱۰a + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (a-۸)(a-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ & \text{غ ق ق} \\ a = ۸ \end{cases}$$

۳۷ گزینه ۴

$$\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\cos x}=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))dx$$

$$=\tan(\frac{x}{2})\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\tan(\frac{\pi}{3})-\tan(0)=\sqrt{3}$$

۳۸ گزینه ۱

گام اول

باتوجه‌به وجود $[x]$ در عبارت تحت انتگرال، محدودهٔ انتگرال‌گیری را به دو بازهٔ $(0,1)$ و $(1,2)$ تفکیک کرده و حاصل انتگرال را در هر مرحله به‌صورت جداگانه به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$0<x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow\frac{x^2-[x]}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$$
$$1<x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow\frac{x^2-[x]}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}$$

در محاسبهٔ انتگرال معین $\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx$، برای اینکه بتوانیم انتگرال را راحت‌تر محاسبه کنیم عبارت تحت انتگرال را به‌صورت $\frac{x^2-1+1}{x+1}$ تغییر می‌دهیم. آن را به دو کسر تفکیک می‌کنیم و بعد انتگرال معین را محاسبه می‌کنیم.

$$\int_0^2\frac{x^2-[x]}{x+1}dx=\int_0^1(\frac{x^2}{x+1})dx+\int_1^2\frac{(x^2-1)}{x+1}dx=\int_0^1(\frac{x^2-1+1}{x+1})dx+\int_1^2\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}dx$$
$$=\int_0^1\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx+\int_1^2\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}dx=\int_0^1(x-1)dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx+$$
$$\int_1^2(x-1)dx$$
$$=(\frac{x^2}{2}-x)\Big]_0^1+\ln(x+1)\Big]_0^1+(\frac{x^2}{2}-x)\Big]_1^2=[(\frac{1}{2}-1)-0]+(\ln 2-\ln 1)$$
$$+[(2-2)-(\frac{1}{2}-1)]$$
$$=-\frac{1}{2}+\ln 2-\ln 1+\frac{1}{2}=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=\ln 2$$

**۳۹** **گزینه ۴**

ابتدا ریشهٔ عبارت داخل قدر مطلق را تعیین کرده و بر اساس آن محدودهٔ انتگرال‌گیری را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم، سپس حاصل هر یک را به‌صورت جداگانه به دست می‌آوریم.

$$\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x=4$$

پس فاصلهٔ $[0,9]$ را به دو بازهٔ $[0,4]$ و $[4,9]$ تقسیم می‌کنیم:

$$0<x<4 \Rightarrow 0<\sqrt{x}<2 \Rightarrow \sqrt{x}-2<0 \Rightarrow |\sqrt{x}-2|=-(\sqrt{x}-2)=2-\sqrt{x}$$

$$4<x<9 \Rightarrow 2<\sqrt{x}<3 \Rightarrow \sqrt{x}-2>0 \Rightarrow |\sqrt{x}-2|=\sqrt{x}-2$$

بنابراین حاصل انتگرال معین داده‌شده برابر است با:

$$\int_0^9 |\sqrt{x}-2|\,dx=\int_0^4 |\sqrt{x}-2|\,dx+\int_4^9 |\sqrt{x}-2|\,dx=\int_0^4 (2-\sqrt{x})dx+\int_4^9 (\sqrt{x}-2)dx$$

$$=\int_0^4 (2-x^{\frac{1}{2}})dx+\int_4^9 (x^{\frac{1}{2}}-2)dx=\left(2x-\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big]_0^4+\left(\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}-2x\right)\Big]_4^9$$

$$=\left(2x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big]_0^4+\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x\right)\Big]_4^9=\left[\left(8-\frac{2}{3}(8)\right)-0\right]+\left[(18-18)-\left(\frac{16}{3}-8\right)\right]$$

$$=8-\frac{16}{3}+0-\frac{16}{3}+8=16-\frac{32}{3}=\frac{48}{3}-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$$

۴۰ گزینه ۳

گام اول

الف) مقدار $\Delta x$ را باتوجه‌به اینکه $x \in [۰, ۲]$ و $n = ۴$ است، به دست می‌آوریم.

ب) تابع $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ در بازهٔ $[۰, ۲]$ یک تابع اکیداً صعودی است؛ زیرا:

$$f'(x) = \frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲} = \frac{۱}{(x+۱)^۲} > ۰$$

بنابراین برای محاسبهٔ مجموع بالا یا همان $U_۴$، مقادیر سمت راست هریک از بازه‌ها (مقدار انتهایی هریک از بازه‌ها) را در نظر می‌گیریم.

گام دوم

$$x \in [۰, ۲] \ , \ n = ۴ \Rightarrow \Delta x = \frac{۲-۰}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین بازهٔ اصلی به ۴ بازهٔ زیر افراز می‌شود:

$$[۰, \frac{۱}{۲}], [\frac{۱}{۲}, ۱], [۱, \frac{۳}{۲}], [\frac{۳}{۲}, ۲]$$

مجموع بالای تابع یا $U_۴(f)$ برابر است با:

$$U_۴(f) = \Delta x(f(\frac{۱}{۲}) + f(۱) + f(\frac{۳}{۲}) + f(۲)) =$$
$$\frac{۱}{۲}(\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{۲} + \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۳}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۵} + \frac{۲}{۳}) = \frac{۱}{۲}(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۵})$$
$$= \frac{۱}{۲}(\frac{۱۰+۵+۶}{۱۰}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۱}{۱۰} = \frac{۲۱}{۲۰} = ۱/۰۵$$

۴۱ گزینه ۲

ابتدا عبارت رادیکالی را ساده می‌کنیم. در ساده کردن عبارت رادیکالی، باتوجه‌به اینکه $x$ در محدودهٔ $[۱, ۴]$ قرار دارد، مشخص می‌کنیم عبارت داخل قدر مطلق مثبت است یا منفی سپس آن را از قدر مطلق خارج می‌کنیم.

$$\sqrt{(۱+\sqrt{x})^۲ - ۴\sqrt{x}} = \sqrt{۱ + ۲\sqrt{x} + x - ۴\sqrt{x}} = \sqrt{۱ - ۲\sqrt{x} + x} =$$
$$\sqrt{(۱-\sqrt{x})^۲} = |۱-\sqrt{x}| \xrightarrow[۱-\sqrt{x}<۰]{x\in[۱,۴]} |۱-\sqrt{x}| = \sqrt{x} - ۱$$

حالا انتگرال معین $\int_۱^۴ (\sqrt{x} - ۱)dx$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_۱^۴ (\sqrt{x} - ۱)dx = \int_۱^۴ (x^{\frac{۱}{۲}} - ۱)dx = (\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}x^{\frac{۳}{۲}} - x)\Big]_۱^۴ = (\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - x)\Big]_۱^۴$$
$$= (\frac{۲}{۳}x\sqrt{x} - x)\Big]_۱^۴ = [(\frac{۱۶}{۳} - ۴) - (\frac{۲}{۳} - ۱)] = \frac{۵}{۳}$$

۴۲ **گزینه ۴**

**گام اول**

الف) در بازهٔ $[۰,۱]$ و با مقدار $n = ۱۰$، $\Delta x$ را حساب می‌کنیم.

ب) برای محاسبـهٔ مجموع بالای تابع یا همان $U_{۱۰}(f)$ در تمام زیربازه‌ها مقدار ماکسـیمم تابع یا همان ۲ را در نظر می‌گیریم. در محاسبهٔ مجموع پایین تابع یا همان $L_{۱۰}(f)$ در تمام زیربازه‌ها مقدار مینیمم تابع را که $-۳$ است در نظر می‌گیریم.

**گام دوم**

$$x \in [۰,۱]\ ,\quad n = ۱۰ \Rightarrow \Delta x = \frac{۱-۰}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\text{مجموع بالای تابع } f = U_{۱۰}(f) = \frac{۱}{۱۰}(\underbrace{۲ + ۲+...+۲}_{۱۰\text{تا}۲}) = \frac{۱}{۱۰} \times ۲۰ = ۲$$

$$\text{مجموع پایین تابع } f = L_{۱۰}(f) = \frac{۱}{۱۰}(\underbrace{-۳ - ۳-...-۳}_{۱۰\text{تا}(-۳)}) = \frac{۱}{۱۰}(-۳۰) = -۳$$

پس اختلاف مجموع بالا و پایین تابع برابر است با:

$$U_{۱۰}(f) - L_{۱۰}(f) = ۲ - (-۳) = ۲ + ۳ = ۵$$

۴۳ **گزینه ۳**

**گام اول**

الـف) ابتـدا عرض نقطه‌ای به طول $x = ۱$ را تعیین می‌کنیـم. در محاسـبهٔ عرض نقطـه، به این نکته تـوجه داشـته باشـید که $\int_a^a f(x)dx = ۰$ است.

ب) برای به دست آوردن معادلهٔ خط قائم باید شـیب خط قائم را در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ داشته باشیم. شیب خط قائم برابر با $-\frac{۱}{f'(۱)}$ است، پس ابتدا باید مشتق تابع انتگرالی $f(x)$ را به دست آوریم، سپس با محاسبهٔ $f'(۱)$، شیب خط قائم را تعیین کنیم.

**گام دوم**

$$f(x) = \int_۲^{۲x} \frac{t+۱}{t}dt \xrightarrow{x=۱} f(۱) = \int_۲^۲ \frac{t+۱}{t}dt = ۰$$

بنابراین معادلهٔ خط قائم را در نقطه‌ای با مختصات $(۱,۰)$ می‌نویسیم.

$$f'(x) = ۲ \times \frac{۲x+۱}{۲x} - ۰ \Rightarrow f'(۱) = ۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳$$

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{f'(۱)} = -\frac{۱}{۳}$$

پس معادلهٔ خط قائم به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y - ۰ = -\frac{۱}{۳}(x - ۱) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times ۳} ۳y = -x + ۱ \Rightarrow ۳y + x = ۱$$

**۴۴** گزینه ۱

ابتدا با تفکیک عبارت تحت انتگرال، حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم. حاصل را به نحوی ساده می‌کنیم که عبارت ساده‌شده به فرم $\frac{f(x)}{cox}$ درآمده و با مقایسهٔ دو طرف تساوی، ضابطهٔ $f(x)$ را تعیین می‌کنیم.

$$\int \sin x(1+\frac{1}{cos^2 x})dx = \int \sin xdx + \int \frac{sin\,x}{cos^2 x}dx = \int \sin xdx + \int \sin x(cos\,x)^{-2}dx$$

$$= -cos\,x + \frac{1}{cos\,x} + c = \frac{-cos^2 x+1}{cos\,x} + c = \frac{1-cos^2 x}{cos\,x} + c = \frac{f(x)}{cos\,x} + c$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - cos^2 x = sin^2 x$$

**۴۵** گزینه ۴

**گام اول**

الف) یک‌بار فرض می‌کنیم $x \geq 0$ باشد و یک‌بار $x < 0$. با حل نامعادلهٔ $x^2\,|x| = 8$ در هر یک از این حالات، محدودهٔ تغییرات $x$ را مشخص می‌کنیم.

ب) مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y = x^2\,|x|$ و خط به معادلهٔ $y = 8$، یعنی مساحت محدود به منحنی $y = 8 - x^2\,|x|$ و محور $x$ها در محدوده‌ای که باید آن را محاسبه کنیم.

ج) تابع $y = 8 - x^2\,|x|$ یک تابع زوج است؛ زیرا با تغییر $x$ به $-x$ حاصل $y$ عوض نمی‌شود.

**گام دوم**

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x^2\,|x| = x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = x^2\,|x| = -x^3 = 8 \Rightarrow x = -2$$

پس انتگرال‌گیری در بازهٔ $[-2, 2]$ انجام می‌شود که یک بازهٔ متقارن است و باتوجه‌به اینکه تابع $y = 8 - x^2\,|x|$ یک تابع زوج است، به‌جای انتگرال‌گیری از تابع در فاصلهٔ $[-2, 2]$، انتگرال را در فاصلهٔ $[0, 2]$ حساب کرده و حاصل را ۲ برابر می‌کنیم.

پس داریم:

$$S = \left|\int_{-2}^{2} (8 - x^2\,|x|)dx\right| = 2\left|\int_{0}^{2} (8 - x^2\,|x|)dx\right|$$

$$x \in [0, 2] \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x^3$$

$$S = 2\left|\int_{0}^{2} (8 - x^3)dx\right| = 2\left|(8x - \frac{1}{4}x^4)\right]_{0}^{2}\right|$$

$$= 2[(16 - 4) - 0] = 2 \times 12 = 24$$

**۴۶** **گزینه ۴**

بررسی می‌کنیم که آیا معادلهٔ $y = ۰$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳})$ ریشه دارد یا خیر. داریم:

$$y = ۰ \Rightarrow \frac{۱+\sin x}{\cos^۲ x} = ۰ \Rightarrow ۱ + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x = -۱$$

رابطهٔ $\sin x = -۱$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳})$ فاقد ریشه است.

پس مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $y$ و دو خط به معادلات $x = \frac{\pi}{۳}$ و $x = -\frac{\pi}{۳}$ با حاصل انتگرال تابع $y$ روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳})$ برابر است.

می‌توان ضابطهٔ $y$ را به‌صورت دو تابع $y = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $y = \frac{\sin x}{\cos^۲ x}$ تفکیک کنیم. تابع $y = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ یک تابع زوج است؛ بنابراین به‌جای محاسبهٔ انتگرال در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}]$ می‌توانیم انتگرال را در فاصلهٔ $[۰, \frac{\pi}{۳}]$ به دست آوریم، سپس آن را دو برابر کنیم. تابع $y = \frac{\sin x}{\cos^۲ x}$ یک تابع فرد است؛ بنابراین حاصل انتگرال این تابع در بازهٔ متقارن $[-\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}]$ برابر صفر می‌شود.

$$S = \left|\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} (\frac{۱+\sin x}{\cos^۲ x})dx\right| = \left|\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{۱}{\cos^۲ x}dx + \int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x}{\cos^۲ x}dx\right|$$

$$= ۲\left|\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{۱}{\cos^۲ x}dx\right| + ۰ = ۲\left|\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}} (۱ + \tan^۲ x)dx\right| = ۲\left|\tan x\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\Big|$$

$$= ۲\left|\tan \frac{\pi}{۳} - \tan ۰\right| = ۲\left|\sqrt{۳} - ۰\right| = ۲ \times \sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

**۴۷** **گزینه ۴**

**گام اول**

شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در هر نقطه واقع بر آن، برابر با مقدار مشتق تابع در آن نقطه است؛ بنابراین می‌توان نوشت: $f'(x) = \frac{۳}{(x-۱)^۲}$

**گام دوم**

با استفاده از انتگرال نامعین، ضابطهٔ تابع را که شامل مقدار ثابت $c$است، به دست می‌آوریم. چون تابع از نقطهٔ $(۲, ۱)$ عبور می‌کند می‌توانیم ضابطهٔ تابع را به‌صورت دقیق تعیین کنیم و در نهایت معادلهٔ خط مجانب افقی آن را مشخص کنیم.

$$f'(x) = \frac{۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{۳}{(x-۱)^۲}dx = ۳\int \frac{۱}{(x-۱)^۲}dx$$

$$= ۳\int (x-۱)^{-۲}dx = ۳ \times \frac{(x-۱)^{-۱}}{-۱} + c = \frac{-۳}{x-۱} + c \Rightarrow f(x) = \frac{-۳}{x-۱} + c$$

مختصات نقطهٔ $(۲, ۱)$ را در ضابطهٔ تابع جایگذاری می‌کنیم:

$$۱ = \frac{-۳}{۲-۱} + c \Rightarrow ۱ = -۳ + c \Rightarrow c = ۴$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x) = \frac{-۳}{x-۱} + ۴ = \frac{-۳+۴x-۴}{x-۱} = \frac{۴x-۷}{x-۱}$$

معادلهٔ خط مجانب افقی تابع برابر است با:

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x-۷}{x-۱} = ۴ \Rightarrow y = ۴$$

۴۸ **گزینه ۲**

سری داده‌شده در این سؤال یک سری هندسی نزولی است، از حد مجموع برای محاسبهٔ آن استفاده می‌کنیم.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^k-5^{k+1}}{10^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^k-5\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}-5(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}})=4-5(1)=-1$$

۴۹ **گزینه ۴**

**گام اول**

الف) ابتدا با استفاده از فرمول $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$، عبارت مثلثاتی داده‌شده را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم.

ب) تعیین می‌کنیم تابع $y$ در محدودهٔ $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$ نسبت به محور $x$ها چه وضعیتی دارد، سپس با استفاده از انتگرال معین، مساحت زیر منحنی را محاسبه می‌کنیم.

**گام دوم**

$$y=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}=\frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 2x)^2}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{4}(\sin^2 2x)}=\frac{4}{\sin^2 2x}=4(1+\cot^2 2x)$$

$y$ همواره مثبت بوده و نمودار آن بالای محور $x$ها قرار دارد پس با محاسبهٔ حاصل انتگرال معین $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} ydx$، سطح زیر منحنی را به دست می‌آوریم:

$$S=\left|\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}4(1+\cot^2 2x)dx\right|=2\left|\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}2(1+\cot^2 2x)dx\right|=2\left|-\cot 2x]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\right|$$
$$=2\left|-(\cot\frac{\pi}{2}-\cot\frac{\pi}{6})\right|=2\left|-(0-\sqrt{3})\right|=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

۵۰ **گزینه ۳**

برای محاسبهٔ مقدار متوسط تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ ابتدا باید حاصل انتگرال معین $\int_{-۲}^{۲}|x^۲-۱|dx$ را به دست آوریم.

تابع $f(x)=|x^۲-۱|$، زوج است (چون $D_f=\mathbb{R}$ بوده و دامنهٔ تعریف متقارن است و همچنین $f(-x)=f(x)$ است).

بنابراین داریم:

$$\int_{-۲}^{۲}f(x)dx = ۲\int_{۰}^{۲}f(x)dx$$

$$\text{مقدار متوسط تابع در بازهٔ } [-۲,۲] = \frac{۲\int_{۰}^{۲}f(x)dx}{۲-(-۲)} = \frac{۲\int_{۰}^{۲}f(x)dx}{۴}$$

$$= \frac{\int_{۰}^{۲}f(x)dx}{۲} = \frac{\int_{۰}^{۲}|x^۲-۱|dx}{۲}$$

عبارت درون قدر مطلق در بازهٔ $[۰,۱]$ منفی و در بازهٔ $[۱,۲]$ مثبت است؛ بنابراین $f(c)$ یا مقدار متوسط تابع در بازهٔ داده‌شده برابر است با:

$$f(C) = \frac{\int_{۰}^{۱}(۱-x^۲)dx+\int_{۱}^{۲}(x^۲-۱)dx}{۲} = \frac{(x-\frac{x^۳}{۳})\Big]_{۰}^{۱}+(\frac{x^۳}{۳}-x)\Big]_{۱}^{۲}}{۲}$$

$$= \frac{[(۱-\frac{۱}{۳})-۰]+[(\frac{۸}{۳}-۲)-(\frac{۱}{۳}-۱)]}{۲} = \frac{\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}}{۲} = \frac{\frac{۶}{۳}}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱ \Rightarrow f(c)=۱$$

$f(c)=|c^۲-۱|$ است پس مقادیر قابل‌قبول برای $c$ عبارت‌اند از:

$$|c^۲-۱|=۱ \Rightarrow \begin{cases} c^۲-۱=۱ \Rightarrow c^۲=۲ \Rightarrow c=\pm\sqrt{۲} \\ c^۲-۱=-۱ \Rightarrow c^۲=۰ \Rightarrow c=۰ \end{cases}$$

مجموعهٔ مقادیر $c$ برابر است با: $\{-\sqrt{۲},۰,\sqrt{۲}\}$