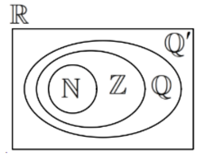
فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه اعداد:



مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعه اعداد حسابی : $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$

مجموعه اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\right\}$

مجموعه اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'=$ مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد

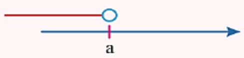
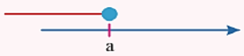
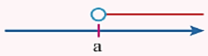
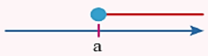
مجموعه اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

$$\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$$

تعریف بازه:

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص کننده‌ی یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم.

انواع بازه:

بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
(a,b)	$\{x\in R \mid a<x<b\}$	
$(a,b]$	$\{x\in R \mid a<x\leq b\}$	
$[a,b)$	$\{x\in R \mid a\leq x<b\}$	
$[a,b]$	$\{x\in R \mid a\leq x\leq b\}$	
$(-\infty,a)$	$\{x\in R \mid x<a\}$	
$(-\infty,a]$	$\{x\in R \mid x\leq a\}$	
$(a,+\infty)$	$\{x\in R \mid x>a\}$	
$[a,+\infty)$	$\{x\in R \mid x\geq a\}$	

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه متناهی می‌نامیم.

مجموعه B را نامتناهی گوییم، هرگاه تعداد اعضای آن قابل شمارش نباشد.

نکته: بازه اعداد حقیقی، مجموعه اعداد طبیعی، حسابی، گنگ و گویا همه مجموعه‌هایی نامتناهی هستند.

نکته:

۱) اگر A و B دو مجموعه متناهی باشد: $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$ همگی متناهی هستند.

۲) اگر A مجموعه‌ای متناهی و B نامتناهی باشد، $A\cap B$ ، $A-B$ متناهی و $A\cup B$ ، $B-A$ نامتناهی هستند.

۳) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، $A\cup B$ قطعاً نامتناهی است اما $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشند.

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه:

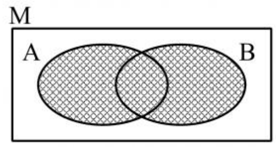
در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه:

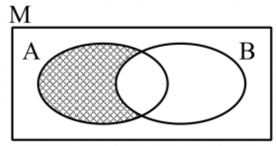
اگر A یک مجموعه متناهی باشد، تعداد اعضای مجموعه A را با نماد $n(A)$ مشخص می‌کنیم.

روابط مهم در تعداد اعضای مجموعه‌ها:



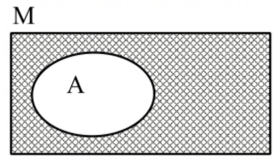
بیان فارسی: حداقل یکی از A یا B رخ دهد.

۱) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



بیان فارسی: A رخ دهد و B رخ ندهد.

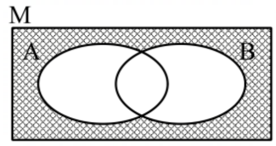
۲) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$



بیان فارسی: A رخ ندهد.

۳) $n(A') = n(M) - n(A)$

نکته: قوانین دمورگان: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\quad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$



بیان فارسی: A رخ ندهد و B رخ ندهد.

۴) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)'$

الگو و دنباله:

تعریف دنباله:

مجموعه‌ای شامل تعدادی عدد را دنباله می‌گوییم.

الگو:

اگر بین اعداد موجود در دنباله نظم خاصی وجود داشته باشد به آن الگو می‌گوییم.

الگوی خطی: به طور کلی الگوهایی را که جمله‌ی عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

به طور مثال الگوی $a_n = 3n + 2$ یک الگوی خطی است و با دقت در جملات الگوی خطی به موارد زیر پی می‌بریم:

۱- اختلاف بین جملات در الگوی خطی، مقداری ثابت است.

۲- عدد ثابت بین جملات همان ضریب n در رابطه الگوی خطی است.

۳- اگر جمله‌ی عمومی الگوی خطی $t_n = an + b$ باشد:

اگر $a > 0 \longrightarrow$ الگوی خطی صعودی است.

اگر $a < 0 \longrightarrow$ الگوی خطی نزولی است.

الگوهای غیرخطی (مربعی و مثلثی):

فرم کلی یک الگوی مربعی یا مثلثی (درجه دوم) به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ است. در این الگوها، فاصله بین جملات ثابت نیست اما فاصله بین فاصله‌ها ثابت است.

$$\underbrace{1 , 3 , 7 , 13 , 21 , \ldots}_{}$$

$+2 \quad +4 \quad +6 \quad +8 \longrightarrow$ فاصله بین جملات

$+2 \quad +2 \quad +2 \longrightarrow$ فاصله بین فاصله‌ها

با داشتن جملات این الگوها، الگوی $a_n = an^2 + bn + c$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$a = \frac{\text{فاصله بین فاصله‌ها}}{2}$$

$3a + b =$ اختلاف بین جمله اول و دوم

$c =$ جمله اول $-a-b$

نکته: اگر ضریب n^2 به صورت $\frac{K}{2}$ باشد الگو مثلثی و اگر عددی صحیح باشد مربعی است.

دنباله حسابی و هندسی:

تعریف دنباله حسابی:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

نکته: دنباله حسابی در واقع همان الگوی خطی است.

جمله‌ی عمومی دنباله حسابی:

جمله‌ی nام یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

روابط مهم در دنباله حسابی:

۱) **محاسبه قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه:** $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

۲) **واسطه حسابی بین جملات:**

اگر a و b و c سه جمله متوالی (متساوی‌الفاصله) از دنباله حسابی باشند، داریم: $b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow a + c = 2b$

۳) **رابطه اندیسی:** $m + n = p + q \longleftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

۴) **درج m رابطه بین جملات دنباله حسابی:** $a\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\ldots\bigcirc}_{\text{تا } m}b$

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

دنباله هندسی:

دنباله‌ی هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله‌ی اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیر صفر باشد.

جمله عمومی دنباله هندسی:

جمله‌ی nام دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدر نسبت می‌باشد $(t_1, r \neq 0)$.

روابط مهم در دنباله هندسی:

۱) **محاسبه واسطه هندسی با داشتن دو جمله دلخواه:** $r = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$

۲) **واسطه هندسی جملات:**

اگر a و b و c سه جمله متوالی (متساوی‌الفاصله) از یک دنباله هندسی باشند، داریم: $b = \sqrt{ac} \Rightarrow b^2 = ac$

۳) **رابطه اندیسی:** $m + n = p + q \longleftrightarrow a_m \times a_n = ap \times aq$

۴) **درج m واسطه هندسی بین جملات دنباله:** $a\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\ldots\bigcirc}_{\text{تا } m}b$

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

مثال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد گنگ، زیر مجموعه‌ای از اعداد گویا است.

ب) اشتراک اعداد طبیعی و گویا یک مجموعه نامتناهی است.

پ) ممکن است دو مجموعه نامتناهی، اشتراک متناهی داشته باشند.

مثال: دو مجموعه مثال بزنید که نامتناهی باشند و $A-B$ و $B-A$ هر دو متناهی باشند.

مثال: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید:

اجتماع دو مجموعه گنگ و گویا، مجموعه .... است.

مثال: نمایش هندسی دو بازه‌ی $A=(-۴,۲]$ و $B=(-۱,۳]$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $A\cap B$

ب) $A\cup B$

پ) $A-B$

ت) $B-A$

مثال: حاصل هریک از مجموعه‌ها زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور بدست آورید.

الف) $(-۳,۰)\cup(-۲,۵]$

ب) $(-\infty,۶]\cap(۲,۹)$

پ) $(۳,+\infty)\cap(۶,۱۰]$

ت) $(-\infty,۱)\cup[۱,+\infty)$

ث) $(۳,+\infty)-[۲,۴)$

ج) $[۲,۴)-(۳,+\infty)$

مثال: مجموعه‌ی $\mathbb{R}-\{۳\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

مثال: اگر $A=[۱,۳)$ و $B=(-۱,۲]$ باشد، مجموعه $A\cup(B-A')$ را روی محور نشان دهید.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی.

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶.

پ) بازه $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$

ت) $A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۱<x<۲\}$

ث) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

مثال: $\mathbb{N}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و :

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را بدست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

مثال: دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد.

مثال: دو مجموعه مثال بزنید که نامتناهی باشند و $A-B$ و $B-A$ هر دو متناهی باشند.

مثال: دو مجموعه جدا از هم را تعریف کنید.

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$ و $B=\{۲^x \mid x\in\mathbb{N}, x\le ۳\}$ را در نظر بگیرید:

الف) تعداد اعضای A و B را مشخص کنید.

ب) $n(A\cup B)$

پ) اگر مجموعه مرجع $U=\{۱,۲,۳,۴,\dots,۱۶\}$ باشد، حاصل $n(A-B)+n(A'\cap B')$ را محاسبه کنید.

مثال: در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌تی مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از انان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این شرکت خرید داشته‌اند.

ب) فقط از شرکت A خرید داشته‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.

ت) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

مثال: اگر $n(A)=۱۵$ ، $n(A\cap B)=۵$ و $n(A\cup B)=۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

مثال: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند به طوری که $n(U)=۱۰۰$ ، $n(A)=۶۰$ ، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$ مطلوب است:

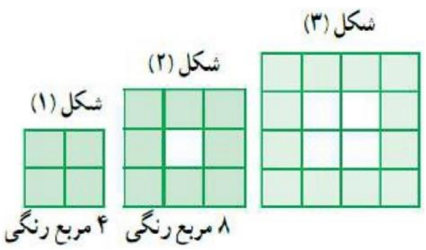
الف) $n(A\cup B)$

ب) $n(A\cap B')$

پ) $n(A'\cap B)$

ت) $n(A'\cap B')$

مثال: در شکل زیر تعداد مربع‌های رنگ شده را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید.

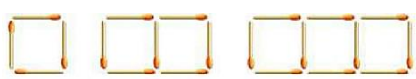


الف) الگوی آن را بنویسید.

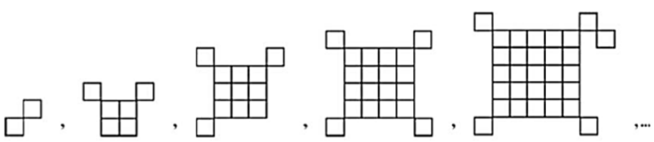
ب) شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

پ) در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ می‌باشد؟

مثال: با استفاده از چوب کبریت‌ها سه الگوی زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت‌های بکار رفته در شکل nام چقدر است؟



مثال: با توجه به الگوی زیر، در شکل پانزدهم چند مربع کوچک وجود دارد؟



مثال: الگوی هر یک از دنباله‌های زیر را تشکیل دهید.

الف) ۳ , ۹ , ۱۵ , ...

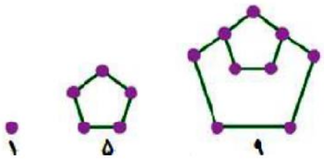
ب) ۷ , ۱۴ , ۱۱ , ...

مثال: با توجه به شکل مقابل:

الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید.

ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ می‌باشد؟



مثال: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

مثال: سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را نوشته سپس جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

الف) ۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ...

ب) $\frac{۱}{۲} , \frac{۲}{۳} , \frac{۳}{۴} , ...$

پ) ۱- , ۲ , ۳- , ۴ , ...

ت) ۱ , ۳ , ۷ , ۱۵ , ۳۱ , ...

مثال: جمله‌ی nام دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{n^{۲} - ۱۳}{n + ۱}$ می‌باشد. جمله‌ی هشتم این دنباله چند است؟ جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۹ می‌باشد؟

مثال: الگوی جملات زیر را تشکیل دهید.

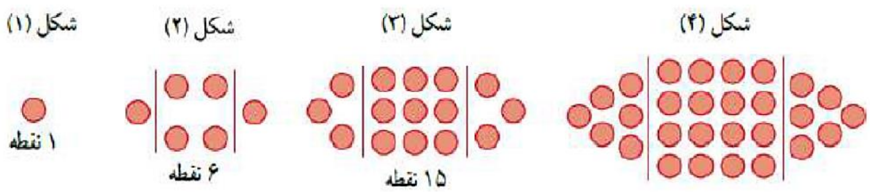
الف) ۵ , ۹ , ۱۷ , ۲۹ , ...

ب) ۳ , ۶ , ۱۰ , ۱۵ , ...

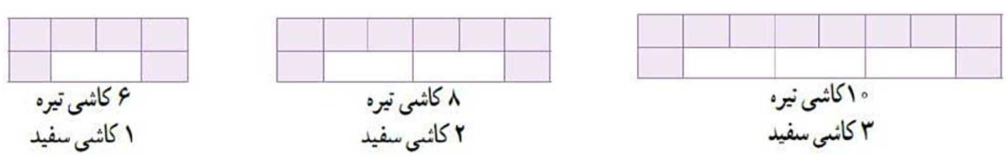
مثال: الگوی زیر را در نظر بگیرید:

الف) جمله عمومی الگو را بیابید.

ب) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟



مثال: به الگوی زیر توجه کنید:

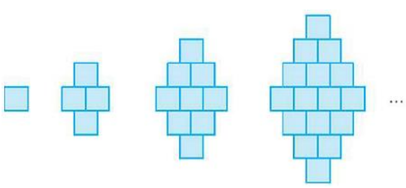


الف) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار را بر حسب n بنویسید.

ب) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

پ) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چند تاست؟

مثال: آیا می‌توان با ۱۲۳ مربع کوچک یکی از شکل‌های الگوی زیر را ساخت؟



مثال: جملات اول، سوم و چهارم یک الگوی درجه دوم به ترتیب ۳ و ۹ و ۱۵ است. الگوی درجه دوم را تشکیل دهید.

مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی ... , ۱۷ , ۱۱ , ۵ را بدست بیاورید.

مثال: در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را بدست آورید.

الف) ۵ , ۹ , ۱۳ , ۱۷ , $\square$, $\square$, $\square$, ... , $d =$, $c_n =$

ب) ۱۳ , ۷ , ۱ , ۵− , $\square$, $\square$, $\square$, ... , $d =$, $d_n =$

مثال: در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را بدست آورید. ۴ , ۱۱ , ۱۸ , ۲۵ , ...

مثال: در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

مثال: اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی سوم ۱۱ و جمله‌ی نهم ۳۵ باشد:

الف) قدر نسبت چقدر است؟

ب) جمله بیستم این دنباله کدام است؟

پ) کدام جمله دنباله برابر ۵۱ است؟

ت) این دنباله چند جمله دو رقمی دارد؟

مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی $a_۳ + a_{۱۱} = ۵۶$ و $a_{۱۲} - a_۳ = ۲۴$ می‌باشد. سه جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید.

مثال: عدد x را چنان تعیین کنید که سه عدد متوالی $۳x + ۳$ و $۲x - ۴$ و $۲x + ۱$ جملات یک دنباله‌ی عددی باشند.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی $a_۲ + a_۸ = ۳۶$ ، آنگاه $a_۲ + a_۵ + a_۸$ برابر چه عددی خواهد بود.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جمله‌های هشتم و هیجدهم برابر ۴۸ می‌باشد. جمله سیزدهم این دنباله چقدر است؟

مثال: بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

مثال: بین اعداد ۳ و ۲۸ چهار عدد چنان درج کنید که شش عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.

مثال: مسئله‌ی زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید.

« ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند و یک سومِ مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

مثال: در یک دنباله‌ی عددی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. جمله‌ی اول چند برابر قدر نسبت است؟

مثال: اگر زاویه‌های مثلثی تشکیل یک دنباله‌ی حسابی بدهند، اندازه‌ی زاویه وسطی را بدست آورید.

مثال: سه عدد تشکیل دنباله حسابی می‌دهند اگر مجموع آن‌ها ۱۲ و حاصل شرب آن‌ها ۲۸ باشد آن سه عدد را پیدا کنید.

مثال: درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دنباله ... , ۵ , ۵ , ۵ , ۵ , ۵ یک دنباله حسابی و هندسی است.

ب) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

مثال: جای خالی را عبارت مناسب پر کنید:

اگر در دنباله هندسی $a_۳ = ۴$ و $a_۷ = ۶۴$ باشد، آنگاه $a_۵ = ...$ است.

مثال: از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آن‌ها را بنویسید.

الف) $۱ , \frac{-۱}{۲} , \frac{۱}{۴} , \frac{-۱}{۸} , ...$

ب) $۷ , ۲۸ , ۱۱۲ , ۴۴۸ , ...$

پ) $۲\sqrt{۵} , ۴\sqrt{۵} , ۶\sqrt{۵} , ۸\sqrt{۵} , ...$

مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

مثال: دنباله‌ی هندسی زیر را در نظر بگیرید. ... , ۱۲ , ۶ , ۳

الف) جمله هفتم این دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۱۵۳۶ می‌باشد.

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی پنجم ۳۶ و جمله‌ی هشتم آن ۲۸۸ است. جمله‌ی سوم این دنباله را بنویسید..

مثال: جمله‌ی ششم یک دنباله‌ی هندسی مساوی با ۲۷ برابر جمله سوم آن است. نسبت جمله‌پانزدهم به جمله‌ی نهم را حساب کنید.

مثال: جمله سوم یک دنباله‌ی هندسی، ۲۷ برابر جمله ششم آن است، اگر جمله اول این دنباله ۴ باشد، جمله پنجم دنباله را بدست آورید.

مثال: یک کوه یخی یکصد تنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

۱) چیزی از آن باقی نمی‌ماند. ❑ ۲) حدود $\frac{۱}{۳}$ آن باقی می‌ماند. ❑

۳) تقریبا نصف آن آب می‌شود. ❑ ۴) حدود $\frac{۲}{۳}$ آن باقی می‌ماند. ❑

مثال: علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزارتومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰٪ نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای بدست می‌آید؟

مثال: بین ۳ و ۴۸، سه واسطه‌ی هندسی درج کنید. (قدر نسبت را منفی فرض کنید.)

مثال: حاصل ضرب ۳۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را محاسبه کنید؟ ۲ , ۴ , ۸ , ...

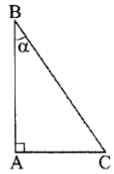
مثال: اگر $11p+8$ و $3p$ و $p-2$ جمله‌های متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار P را تعیین کنید.

مثال: سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی را بیابید که مجموعشان ۶۲ و حاصل ضربشان ۱۰۰۰ باشد.

فصل دوم – مثلثات:

شناخت نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر بگیرید. نسبت‌های مثلثاتی (sin، cos، tan و cot) در مورد زاویه‌ی در این مثلث به صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \frac{AC}{BC} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه‌ی } \alpha}{\text{اندازه‌ی وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه‌ی } \alpha}{\text{ضلع مجاور زاویه‌ی } \alpha} = \frac{AC}{AB} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه‌ی } \alpha}{\text{ضلع مقابل زاویه‌ی } \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

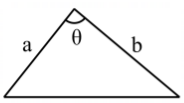
نکته: اگر دو ضلع مثلث داده شد، به کمک قضیه فیثاغورث طول سوم را بدست آورده و سپس نسبت‌های مثلثاتی را بدست می‌آوریم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف:

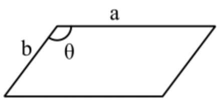
۹۰°	۶۰°	۴۵°	۳۰°	مقدار
۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	sinA
۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	cosA
تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	tanA
۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	cotA

مثلثات در هندسه:

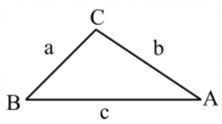
۱) $S = \frac{۱}{۲}ab\ \sin\theta$



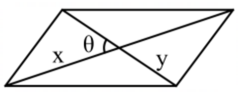
۲) $S = ab\sin\theta$



۳) $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$



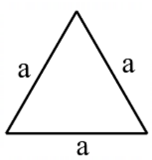
۴) $S = \frac{۱}{۲}xy\ \sin\theta$



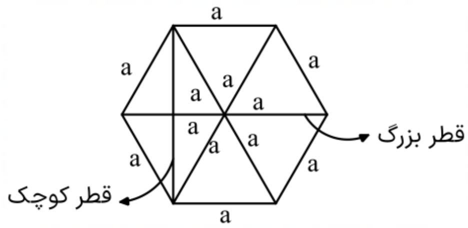
در مثلث متساوی‌الاضلاع:

۵) $h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

۶) $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$



در ۶ ضلعی منتظم:



۷) $S = ۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲})$ (۶ مثلث متساوی‌الاضلاع)

۸) زاویه‌های داخلی = ۱۲۰°

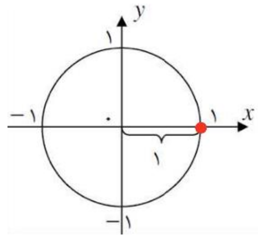
۹) طول قطر بزرگ = $۲a$

۱۰) طول قطر کوچک = $\sqrt{۳}a$

(جمع دو ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع)

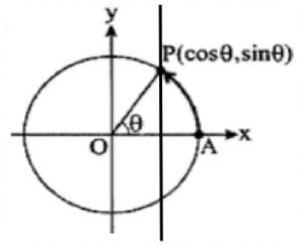
دایره مثلثاتی:

هر دایره به شعاع واحد که مرکز آن مبدأ مختصات باشد را دایره‌ی مثلثاتی می‌نامند.



نقطه روی دایره مثلثاتی:

در دایره‌ی مثلثاتی به ازای هر مقدار حقیقی زاویه‌ی θ، نقطه‌ی $P(\cos\theta, \sin\theta)$ دوران یافته‌ی نقطه‌ی A تحت دوارن θ حول مبدأ می‌باشد که در آن $\sin\theta = y$ و $\cos\theta = x$ است.

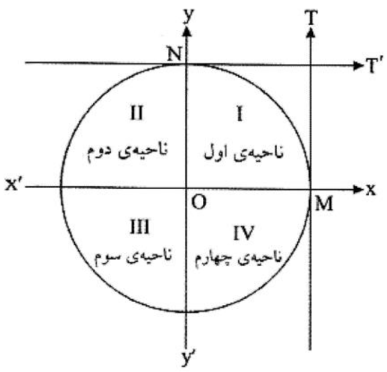


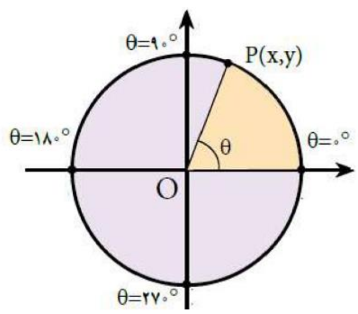
برای هر نقطه روی دایره مثلثاتی داریم: $x^{۲} + y^{۲} = ۱$

پس اگر مختصات نقطه‌ای در رابطه بالا صدق نکند یعنی نقطه‌ای روی دایره قرار ندارد.

محورهای و نواحی مختصات:

دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر یک از آن‌ها را یک ناحیه یا ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه‌ی xoy را ربع اول، ناحیه $x'oy$ را ربع دوم، ناحیه $x'oy'$ را ربع سوم و ناحیه xoy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.





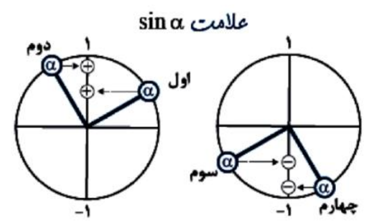
در ربع اول است $\theta \Rightarrow ۰^\circ < \theta < ۹۰^\circ$

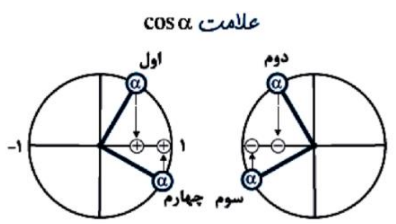
در ربع دوم است $\theta \Rightarrow ۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$

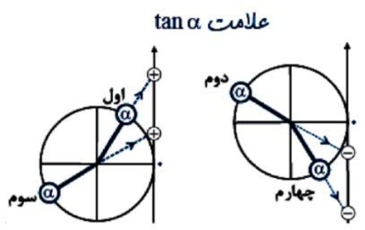
در ربع سوم است $\theta \Rightarrow ۱۸۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$

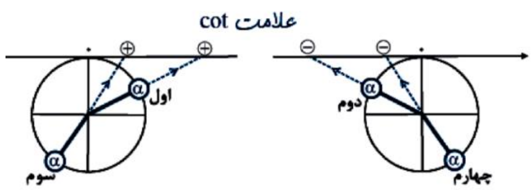
در ربع چهارم است $\theta \Rightarrow ۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$

علامت نسبت‌های مثلثاتی:









علامت نسبت‌های مثلثاتی را به شکل جدول زیر می‌توان تعیین کرد.

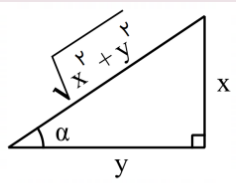
	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
Sin	+	+	−	−
Cos	+	−	−	+
Tan	+	−	+	−
Cot	+	−	+	−

ارتباط بین زوایای متمم و مکمل روی دایره:

$$\alpha+\beta=180^\circ \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\sin\beta \\ \cos\alpha=-\cos\beta \\ \tan\alpha=-\tan\beta \\ \cot\alpha=-\cot\beta \end{cases}$$

$$\alpha+\beta=90^\circ \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\cos\beta \\ \cos\alpha=\sin\beta \\ \tan\alpha=\cot\alpha \\ \cot\alpha=\tan\alpha \end{cases}$$

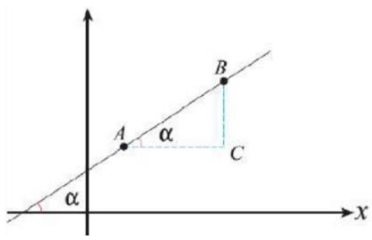
نکته مهم: هرگاه یکی از نسبت‌های زاویه α داده و دیگر نسبت‌های زاویه خواسته شود، از مثلث تبدیل نسبت استفاده می‌کنیم.



ارتباط بین شیب خط و زاویه:

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی است. به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ی باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد،

آنگاه $\tan\alpha =$ شیب خط



اتحادهای مثلثاتی:

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \longrightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \end{cases}$

2) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\longrightarrow \begin{cases} \tan\alpha.\cot\alpha=1 \\ \tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha} \end{cases}$

4) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

5) $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

6) $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$

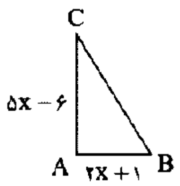
7) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha.\sin^2\alpha$

8) $\cot^2\alpha-\cos^2\alpha=\cot^2\alpha.\cos^2\alpha$

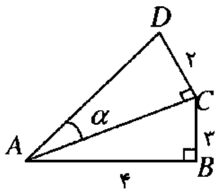
مثال: در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $A=90^\circ$ ، $a=10$ و $b=6$ مقدار $\tan C$ را بیابید.

مثال: طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۵ سانتی‌متر و کسینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{4}{5}$ است. دیگر نسبت‌های مثلثاتی را بدست آورید.

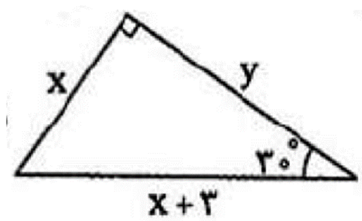
مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر زاویه‌ی A قائمه است و $\tan B=\frac{7}{4}$ می‌باشد، مقدار x را بیابید.

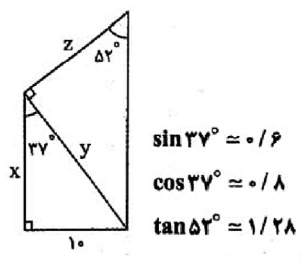


مثال: در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ را بدست آورید.

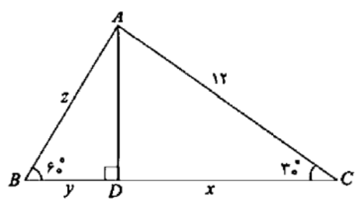


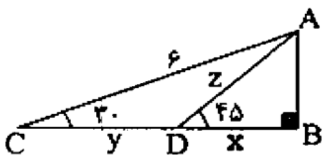
مثال: در هر شکل x و y و z را بدست آورید.





مثال: در شکل زیر، مقدار x، y و z را حساب کنید.





مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\sin 60 \cos 30 + \cos 60 \sin 30$

ب) $\tan 60 + 3\tan 30 - 2\sqrt{3}\tan 45$

پ) $4\cos^2 45 + 2\tan^2 30 - 3\sin^2 60$

ت) $(\sin 30 + \cos 30)(\tan 30 + \tan 60)$

ث) $16\sin^5 30 - 20\sin^3 30 + 5\cos 60$

مثال: مقدار x را در رابطه $x\operatorname{Sin}^2 30^\circ + 2x\tan 45^\circ = 1 + \cos^2 60$ بدست آورید.

مثال: درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

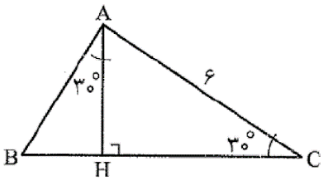
الف) $1 - 2\sin^2 30 = \cos 60$

ب) $2\sin 30 \cos 30 = \cos 60$

پ) $\frac{2\tan 30}{1-\tan^2 30} = \tan 60$

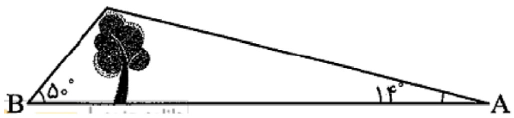
مثال: نردبانی را به دیوار تکیه داده‌ایم. اگر فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۱/۵ متر و زاویه‌ای که نردبان با زمین می‌سازد، ۶۰ درجه باشد، طول نردبان چقدر است؟

مثال: در شکل مقابل مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

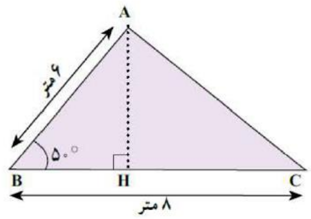


مثال: درختی به ارتفاع ۳ متر از نقطه‌ی A با زاویه‌ی 14° و از نقطه‌ی B با زاویه‌ی 50° دیده می‌شود. فاصله‌ی A از B چقدر است؟

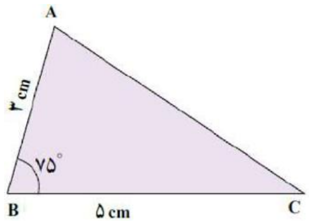
$(\tan 50^\circ = 1/19\ ,\ \tan 14^\circ = 0/25)$



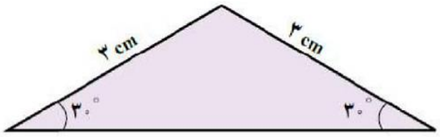
مثال: مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنید. $\sin 50 \cong 0/76$



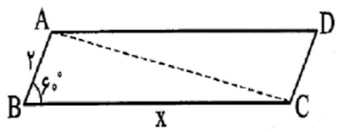
مثال: فرض کنید $\sin 75^\circ = 0/96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را بدست آورید.



مثال: مساحت مثلث زیر را پیدا کنید.

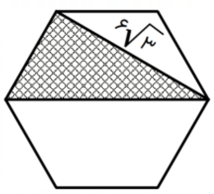


مثال: در شکل زیر مساحت متوازی‌الاضلاع $10\sqrt{3}$ می‌باشد. مقدار x را بدست آورید.

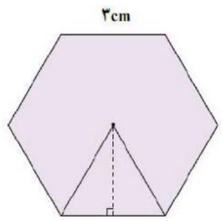


مثال: مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع $5\sqrt{3}$ است. طول ضلع آن را تعیین کنید.

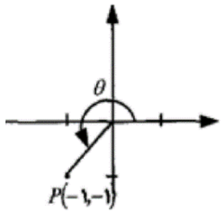
مثال: در شکل زیر مساحت مثلث هاشورخورده را محاسبه کنید.



مثال: مساحت شش ضلعی منتظم روبه‌رو را بدست آورید.



مثال: با توجه به شکل نسبت‌های مثلثاتی $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را بدست آورید.



مثال: درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\cos ۳۰ < \cos ۴۰$

ب) $\cos ۷۰ = \sin ۲۰$

پ) $\tan ۷۰ < \tan ۸۰$

ت) $\frac{\sin ۳۵}{\sin ۵۵} = \tan ۳۵$

ث) $\sin ۲۰ < \sin ۵۰$

ج) $\cos^۲ ۳۵ + \sin^۲ ۳۵ = ۱$

مثال: اگر $(-۳,۴)$ یک نقطه و θ زاویه بین شعاع OP با جهت مثبت محور طول‌ها باشد، مقدار نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بدست آورید.

مثال: حدود زاویه‌ی θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta > ۰ \ , \ \cos\theta > ۰$

ب) $\sin\theta < ۰ \ , \ \cos\theta > ۰$

مثال: اگر $\sin\alpha \times \cos\alpha < ۰$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟

مثال: زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan\alpha > \cot\alpha$ ، اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به طوری که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مثال: اگر $\tan\alpha = \frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha = \frac{\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}}{-\sin\alpha}$ باشد، α در کدام ناحیه قرار دارد؟

مثال: اگر $۹۰° < \alpha < ۱۸۰°$ و $\tan\alpha = -\frac{۳}{۴}$ در این صورت سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را بدست آورید.

مثال: اگر $\tan\alpha = -\frac{۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α را بدست آورید.

مثال: در هر یک از موارد زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را بدست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)

ب) $\sin\alpha = -\frac{۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

مثال: اگر $\sin ۱۳۵° = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتیِ زاویه $۱۳۵°$ را بدست آورید.

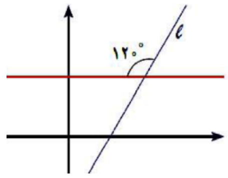
مثال: معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها 30° است و از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد.

مثال: زاویه‌ای که خط $\sqrt{3}x - y = 2$ با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد چقدر است؟

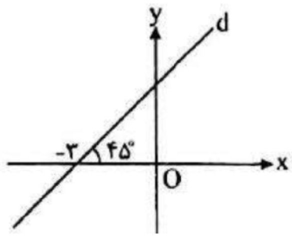
مثال: اگر خط گذرنده از نقاط $A\begin{bmatrix} 2m+2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 4 \\ -m+3 \end{bmatrix}$ با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 45° بسازد، مقدار m را بدست آورید.

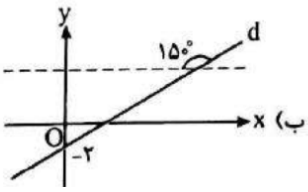
مثال: خط به معادله‌ی $(3a-2)x+(4a+1)y=7$ با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 45° می‌سازد. مقدار a را بدست آورید.

مثال: با توجه به شکل زیر، معادله خط L را بدست آورید.



مثال: با توجه به شکل‌های داده شده، معادله‌ی خط d را بنویسید.





مثال: درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

ب) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

پ) $\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \tan\alpha$

ت) $1-\frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x$

ث) $(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta) = 1$

ج) $\tan^2\theta.\sin^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد، مقدار $\sin x \cos x$ را بدست آورید.

مثال: اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ را بیابید.

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید و حاصل آن را محاسبه کنید.

الف) $\sin^2\theta + \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \sin\theta\tan^2\theta} =$

ب) $\tan\theta.\sin\theta + \cos\theta =$

پ) $\frac{1}{\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}} =$

ت) $(\frac{1}{\sin^2\theta}-1)(\frac{1}{\cos^2\theta}-1) =$

فصل ۳: توان‌های گویا

ریشه توان:

یادآوری: خواص توان

۱) $a^{0} = 1$

۲) $a^{1} = a$

۳) $a^{-1} = \frac{1}{a}$

۴) $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

۵) $a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$

۶) $a^{x} \div a^{y} = a^{x-y}$

۷) $a^{x} \times b^{x} = (ab)^{x}$

۸) $a^{x} \div b^{x} = (\frac{a}{b})^{x}$

۹) $(a^{m})^{n} = (a^{n})^{m} = a^{mn}$

ریشه دوم:

فرض کنید a عددی مثبت باشد و $a^{2} = b$، در این صورت $(-a)^{2} = a^{2} = b$ و a و $-a$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند.

مثال: $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$, $\sqrt{0/01} = 0/1$

ریشه‌ی دوم صفر، همان صفر است و $\sqrt{0} = 0$.

نکته:

$$\sqrt[n]{a^{n}} = \begin{cases} |a| & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ a & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را آموختید:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

ریشه سوم:

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه‌ی سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم. هر عدد فقط یک ریشه‌ی سوم دارد.

ریشه چهارم و پنجم:

هر عدد مثبت دارای دو ریشه‌ی چهارم است که قرینه یکدیگرند. عددهای منفی ریشه‌ی چهارم ندارند.

هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشه‌ی پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه‌ی پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه‌ی پنجم آن منفی است.

ریشه nاُم:

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه‌ی nام عدد a می‌نامیم. هرگاه: $b^{n} = a$

به طور کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & n \text{ زوج و } a\,,\, b > 0 \\ \sqrt[n]{ab} & a \text{ و } b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد} \end{cases}$$

قرارداد: به طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم:

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

توان‌های گویا:

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ ، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

هرگاه $a > ۰$ برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیر صحیحِ $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

قواعد ساده‌سازی رادیکال‌ها:

۱) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

۲) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

۳) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۴) $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$

۵) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$

۶) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[k]{\sqrt[p]{a}}}} = \sqrt[nmkp]{a}$

۷) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[mk]{a^k}$

۸) $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$

۹) $\sqrt{a^۲ \pm b^۲} \neq a \pm b$

۱۰) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad n \geq ۲$

۱۱) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$

نکته: در عباراتی به فرم $\sqrt{a \pm \sqrt[\text{فرد}]{b}}$ این احتمال وجود دارد که عبارت زیر رادیکال مربع کامل باشد. در این صورت به دنبال دو عدد مانند x و y بگردید که:

$x^۲ + y^۲ = a$

$۲xy = \sqrt[\text{زوج}]{b}$

مثال: $\sqrt{۷ - ۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(۲ - \sqrt{۳})^۲}$

$۲^۲ + \sqrt{۳}^۲$ $\qquad$ $۲(۲)(\sqrt{۳})$

اتحادها و عبارت‌های جبری:

$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$

$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

«مربع دو جلمه‌ای»

$(+a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$ «اتحاد مزدوج»

$(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$ «یک جمله‌ی مشترک»

$a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$ «تفاضل مکعب دو جمله»

$a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲)$ «مجموع مکعب دو جمله»

$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$

$(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$

«مکعب دو جمله»

$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$

تجزیه:

اگر عبارتی را به شکل حاصل ضرب چند عبارت دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن را تجزیه کرده‌ایم.

روش‌های تجزیه:

۱) **فاکتورگیری**

۲) **استفاده از اتحاد**

۳) **دسته‌بندی**

۴) **روش تدارک!**

گویا کردن مخرج کسر:

۱) اگر در مخرج عبارتی به صورت $\sqrt[n]{a}$ باشد: صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ ضرب می‌کنیم.

۲) اگر در مخرج عبارتی به صورت $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ باشد: صورت و مخرج را در مزدوج ضرب می‌کنیم.

۳) اگر در مخرج عبارتی به صورت $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ باشد: صورت و مخرج را در چاق ضرب می‌کنیم.

۴) اگر در مخرج عبارتی به صورت $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ باشد: صورت و مخرج را در لاغر ضرب می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $3^{\sqrt{5}} \times 3^{2\sqrt{5}}$

ب) $4^{3\sqrt{2}} \div 4^{2\sqrt{3}}$

پ) $((\sqrt{5})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{3}}$

ت) $(4\sqrt{7})^{\sqrt{3}} \times 4^{\sqrt{2}}$

ث) $(\sqrt{3^{\sqrt{3}}})^{\sqrt{12}}$

ج) $\sqrt[5]{2-\sqrt{5}} \times \sqrt[5]{2+\sqrt{5}}$

چ) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}+\sqrt[3]{-\frac{8}{27}+\sqrt[3]{-\frac{8}{27}+\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}}}}$

ح) $(\sqrt{3}-2)^{18} \times (\sqrt{3}+2)^{18}$

خ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{5^{25}}}} \times \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^{23}}}}$

د) $2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}} \times 2\sqrt[6]{\sqrt[4]{2^{13}}}$

مثال: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + |2\sqrt{2}-3| - \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}$ را دست آورید.

مثال: در معادله‌ی زیر a را بدست آورید.

$$\sqrt[a]{3\sqrt{3}} = 27$$

مثال: اگر $x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ باشد، x^2 را بدست آورید.

مثال: یکی از علامت‌های > یا < را در $\square$ قرار دهید.

$\sqrt{0/25} \ \square \ \sqrt[3]{0/125}$

$(0/5)^2 \ \square \ (0/5)^3$

مثال: وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامتی‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$\sqrt{a} \ \square \ \sqrt[3]{a}$

$a^2 \ \square \ a^3$

مثال: فرض کنیم $a = -1$ است، در $\square$ علامت مناسب را قرار دهید.

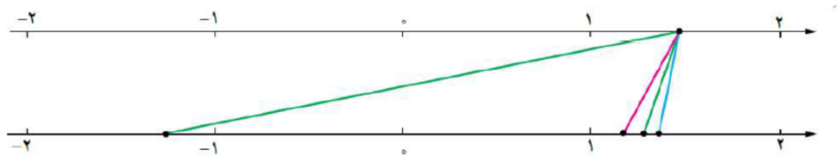
$\sqrt[5]{a} \ \square \ \sqrt[11]{a}$

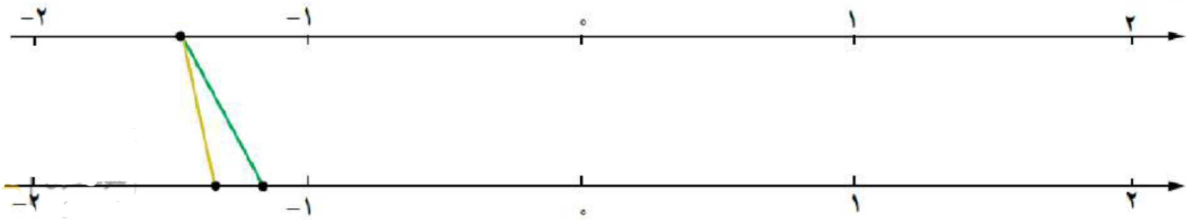
$\sqrt[3]{a} \ \square \ \sqrt[5]{a}$

$a^3 \ \square \ a^5$

$a^2 \ \square \ a^3$

مثال: در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهار و پنجم وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است؟





مثال: درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $-۲\sqrt{۵}=\sqrt{(-۲)^{۲}(۵)}=\sqrt{۲۰}$

ب) $-۲\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{-۳۲}$

پ) $-(۲)^{\frac{۳}{۵}}=-\sqrt[۵]{۸}$

ت) $\sqrt{(-۴)^{۲}}=-۴$

ث) $\sqrt[۴]{(-۲)^{۳}}=(-۲)^{\frac{۳}{۴}}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}}$

ب) $\sqrt[۳]{۲\sqrt[۵]{۲\sqrt{۲}}}$

پ) $\sqrt{۳۲}-۲\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۷۲}-\sqrt{۸}$

ت) $\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}}}\div\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}\sqrt{۲۷}}$

ث) $\frac{۷^{\sqrt{۶}}\times ۷^{\sqrt{۶}+۱}}{۴۹^{\sqrt{۶}-۱}}$

ج) $\sqrt[۶]{\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۱۴}}$

چ) $\sqrt[۶]{۴-۲\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۴}$

ح) $\sqrt{۸+۲\sqrt{۷}}+\sqrt{۸-۲\sqrt{۷}}$

خ) $\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۶]{۴+۲\sqrt{۳}}$

د) $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

ذ) $۵^{۲+\sqrt{۳}}\times ۶^{\sqrt[۴]{۷+۴\sqrt{۳}}}$

ر) $\sqrt[۳]{۳-\sqrt{۸}}\times\sqrt[۶]{۱۷+۶\sqrt{۸}}$

مثال: جاهای خالی را پر کنید.

الف) $(9x - .....)(..... + y) = ... - y^2$

ب) $(..... + 7b)^2 = a^2 + ... + ...$

پ) $(2a + ...)(....... - 2ab + b^2) = ... + b^3$

ت) $(....... - .....)(2x + 5) = ... + ... - 10$

ث) $(4x - 1)^3 = ... - 48x + ... - 1$

مثال: ساده شده عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $(3 - 2\sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5})$

ب) $(x - 2)(x^2 - 3)(x + 2) =$

پ) $(x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x + 16)$

ت) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)(8x^3 + 1)$

مثال: اگر $x + \frac{2}{x} = 3$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{4}{x^2}$ را بدست آورید.

مثال: با استفاده از $(a-1)^3$ حاصل 999^3 را بیابید.

مثال: مقدار عددی عبارت $(\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)(\sqrt[4]{2} - 1)$ را بیابید.

مثال: هریک از عبارت‌ها را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^2 - 8x + 15$

ب) $x^3 + 8$

پ) $x^6 - y^6$

ت) $x^4 - y^4$

ث) $x^2 + y^2$

مثال: عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$ را تجزیه کنید.

مثال: صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید.)

الف) $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$

ب) $\frac{x^6 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$

پ) $\frac{x^3 - 1}{(x - 1)^3}$

ت) $(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(..........................)$

ث) $x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(..............................)$

ج) $x^3 + x + 10 =$

چ) $x^3 + 4x - 5 =$

ح) $2x^2 + 3x + 1 =$

خ) $3x^2 - 7x + 4 =$

د) $m^3 + 5m^2 - 4m - 20 =$

مثال: مخرج کسرهای زیر را گویا نمایید.

الف) $\frac{۳+\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$

ب) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳۰}+\sqrt{۲}}$

پ) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۳}}$

ت) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}$

ث) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}}$

ج) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۲۰}}$

مثال: کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}+\frac{۱}{\sqrt[۸]{x}-۱}$$

مثال: حاصل $(\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۱)^{-۱}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $x=۲-\sqrt{۳}$ باشد، حاصل $x^{-۲}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $x=۱-\sqrt{۲}$ باشد، حاصل $(x-x^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$ را بدست آورید.

معادله درجه دوم و روش‌های حل:

$$ax^{۲}+bx+c=۰ \qquad (a\neq ۰)$$

۱) معادله درجه دوم ناقص:

$$۱)\ ax^{۲}+bx=۰ \longrightarrow x(ax+b)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$۲)\ ax^{۲}+c=۰ \longrightarrow x^{۲}=-\frac{c}{a} \xrightarrow{-\frac{c}{a}\geq ۰} x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

۲) معادله درجه دوم کامل:

۱) روش تجزیه: به کمک اتحاد جمله مشترک

$$x^{۲}+\underbrace{S}_{\text{جمع دو عدد}}x+\underbrace{P}_{\text{ضرب دو عدد}}=۰ \longrightarrow (x-\bigcirc)(x-\square)=۰$$

مثال:

$$x^{۲}-۶x+۸=۰ \longrightarrow (x-۲)(x-۴)=۰ \begin{cases} x=۲ \\ x=۴ \end{cases}$$

حالت‌های خاص ضرایب درجه دوم:

$$ax^{۲}+bx+c=۰ \left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{a+b+c=۰} x_{۱}=۱\ ,\ x_{۲}=\dfrac{c}{a} \\ \xrightarrow[a+c=b]{} x_{۱}=-۱\ ,\ x_{۲}=-\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

۲) روش مربع‌سازی

یک معادله درجه‌ی دوم دلخواه به شکل $ax^{۲}+bx+c=۰$ است که a و b و c اعداد معینی هستند و a ناصفر است.

۱- طرفین معادله بالا را بر عدد ناصفر تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب $x^{۲}$ برابر ۱ باشد.

۲- نصف ضریب x در معادله جدید برابر $\frac{b}{۲a}$ است. چند جمله‌ای $(x+\frac{b}{۲a})^{۲}$ را با چند جمله‌ای معادله جدید مقایسه کنید.

۳- معادله جدید را بر حسب $(x+\frac{b}{۲a})^{۲}$ بنویسید و نتیجه بگیرید $(x+\frac{b}{۲a})^{۲}=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$.

۴- نشان دهید که اگر $b^{۲}-۴ac$ مثبت باشد، طرف دوم معادله جذر دارد و جواب‌های معادله اصلی برابر جواب‌های دو معادله $x+\frac{b}{۲a}=\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$ و $x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$ است.

۵- نتیجه بگیرید، معادله درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ در صورت داشتن جواب، دارای جواب‌های زیر است:

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

مثال:

$$۲x^{۲}-۵x+۳=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^{۲}-\frac{۵}{۲}x+\frac{۳}{۲}=۰ \Rightarrow x^{۲}-\frac{۵}{۲}x=-\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{+\frac{۲۵}{۱۶}} x^{۲}-\frac{۵}{۲}x+\frac{۲۵}{۱۶}=-\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{۵}{۴})^{۲}=\frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \begin{array}{l} x-\frac{۵}{۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \\ x-\frac{۵}{۴}=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow x=۱ \end{array}$$

۳) روش درسی:

در این روش ضریب x^2 را در عدد c ضرب کرده و سپس به کمک اتحاد جمله مشترک معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم. در آخر ریشه‌های بدست آمده را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

مثال:

$$2x^2-11x+15=0$$

$$\longrightarrow x^2-11x+30=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ x=\frac{6}{3} \end{cases}$$

۴) روش Δ :

$$ax^2+bx+c=0 \longrightarrow \Delta=b^2-4ac \qquad \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

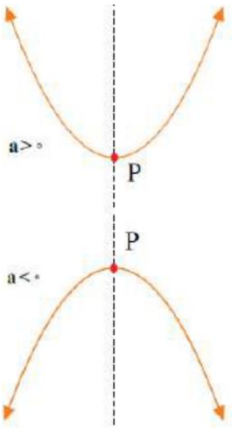
مشخص کردن تعداد جواب به روش Δ :

۱) $\Delta>0 \longrightarrow$ معادله دو جواب متمایز

۲) $\Delta=0 \longrightarrow$ معادله دارای جواب مضاعف

۳) $\Delta<0 \longrightarrow$ معادله جواب ندارد

سهمی:



ویژگی‌های اصلی نمودار سهمی شکل چند جمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$:

۱- با توجه به علامت a، جهت سهمی تعیین می‌شود. اگر $a>0$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ ، سهمی رو به پایین است.

۲- خط عمودی $x=-\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است.

۳- رأس سهمی محل برخورد محور تقارن آن و نمودار سهمی است. طول رأس همان $x=-\frac{b}{2a}$ است و عرض رأس $y=P(-\frac{b}{2a})$. به راحتی ثابت می‌شود که $P(-\frac{b}{2a})=\frac{\Delta}{4a}$ ، پس مختصات رأس سهمی $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{\Delta}{4a})$ است.

۴- اگر $|a|>1$ ، آن‌گاه نمودار سهمی فشرده‌تر از نمودار $f(x)=x^2$ است و اگر $|a|<1$ ، آن‌گاه با نموداری بازتر از نمودار $f(x)=x^2$ مواجهایم.

رأس این سهمی، نقطه‌ی $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{-\Delta}{4a})$ و خط تقارن آن نیز $x=-\frac{b}{2a}$ است.

نکته: هر سهمی به صورت $y=a(x-h)^2+k$ که $a\neq0$ است، رأسی به مختصات (h,k) و خط تقارنی به معادله‌ی $x=h$ دارد.

تعیین علامت:

تعیین علامت یعنی مشخص کردن علامت یک عبارت در قسمت‌های تعریف شده.

روش کوتاه و کلی تعیین علامت:

۱) عبارت را به کمک تجزیه تا حد امکان ساده می‌کنیم.

۲) ریشه هر عبارت را مشخص می‌کنیم.

۳) ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ درون جدول تعیین علامت مرتب می‌کنیم.

۴) علامت اولین خانه سمت راست را با توجه به ضرایب بزرگترین درجه در هر عبارت یا با قرار دادن عددی در آخرین بازه درون عبارت مشخص می‌کنیم.

۵) اگر ریشه‌ها از عبارتی با درجه فرد بدست آمده باشند علامت خانه را عوض کرده و اگر ریشه از عبارت درجه زوج یا قدر مطلق بدست آمده باشند، علامت را تغییر نمی‌دهیم.

تذکر: می‌توان برای مشخص کردن علامت خانه‌ها عددی در آن بازه انتخاب و درون عبارت قرار داد.

حل نامعادله:

منظور از نامعادله همان تعیین علامت است با این تفاوت که در نامعادله باید مجموعه جواب را بنویسیم.

$p<0$ منفی‌ها جوابند

$p>0$ مثبت‌ها جوابند

$p\le 0$ منفی‌ها و خود ریشه جواب‌اند مگر ریشه مخرج کسر

$p\ge 0$ مثبت‌ها و خود ریشه جواب‌اند مگر ریشه مخرج کسر

خواص نامساوی‌ها:

۱) $a<b\ ,\ b<c \Rightarrow a<c$

۲) $a<b\ ,\ c<d \Rightarrow a+c<b+d$

۳) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

۴) $0<a<b\ ,\ 0<c<d \Rightarrow ac<bd$

۵) $a>0\ ,\ b>0 \Rightarrow ab>0$

۶) $a>0\ ,\ b<0 \Rightarrow ab<0$

۷) $a<b\ ,\ c>0 \Rightarrow ac<bc$

۸) $a<b\ ,\ c<0 \Rightarrow ac>bc$

حل نامعادله کسری:

۱) در معادله کسری طرفین وسطین ممنوع است.

۲) کل عبارت را به یک طرف نامساوی برده و عبارت را ساده می‌کنیم.

۳) عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

حل نامعادله قدرمطلق:

نامعادلات شامل قدرمطلق

نامعادلاتی را که دارای عبارت‌های قدرمطلقی هستند، نامعادلات قدر مطلقی می‌نامند. برای حل این گونه نامعادلات ابتدا باید به کمک خواص قدر مطلق، علامت قدر مطلق را حذف نموده و سپس با حل نامعادله‌ی بدست آمده به کمک تعیین علامت، مجموعه جواب نامعادله را بیابیم.

در حل نامعادلات قدر مطلقی می‌توانیم از نکات زیر استفاده نماییم:

۱) $u\ge 0 \Leftrightarrow |u|=u$

۲) $u<0 \Leftrightarrow |u|=-u$

۳) $|u|\le a \xleftrightarrow{a>0} -a<u<a$

۴) $|u|\ge a \xleftrightarrow{a>0} u\le -a$ یا $u\ge a$

۵) $|u|\ge |v| \Leftrightarrow u^2\ge v^2$

تذکر: در حل نامعادلات قدرمطلقی، موقعی می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان زوج برسانیم که هر دو طرف هم علامت باشند.

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $n^2 - 2 = 26$

ب) $x^2 + 12 = 3$

پ) $(3t - 2)^2 = 4$

ت) $3x^2 - 6x = 0$

ث) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{6}x = 0$

مثال: معادلات زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

الف) $x^2 - 11x = -10$

ب) $4k^2 - 12k + 8 = 0$

مثال: معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید:

الف) $x^2 + 2x = 24$

ب) $2r^2 + r - 2 = 0$

مثال: معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید.

الف) $2x^2 - x - 3 = 0$

ب) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

پ) $3x^2 - 11x + 10 = 0$

مثال: معادلات زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

مثال: هریک از معادلات زیر چند جواب دارند؟

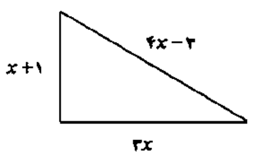
الف) $3x^2 - 5x + 3 = 0$

ب) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

مثال: به ازای تمامی مقادیر a نشان دهید که معادله $x^2 + 2ax + a^2 + 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد.

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که معادله زیر دارای ریشه مضاعف باشد $x^2 + 5x + 3m + 1 = 0$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر مقدار x را بدست آورید.

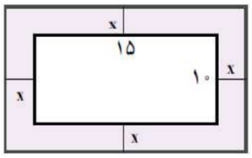


مثال: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

مثال: اختلاف سنی دو برابر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

مثال: یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



مثال: در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را بدست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها بدست آورید.

مثال: نمودار سهمی‌های زیر را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.

الف) $y = 3x^2 - 2$

ب) $y = -2x^2 + x$

مثال: نمودار سهمی زیر را رسم کرده، رأس و خط تقارن را مشخص کنید.

الف) $y = (x+1)^2 - 3$

ب) $y = -x^2 + 2x + 2$

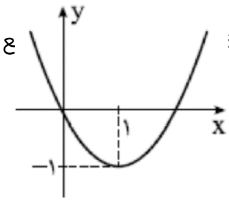
مثال: در هریک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y = -2x^2 + 1$

ب) $y = (x+1)^2 - 2$

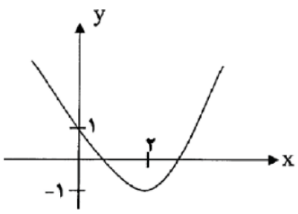
مثال: اگر $(-2,5)$ و $(0,5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را بدست آورید.

مثال: معادله‌ی سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در $+3$ و $+1$ و محور عر ع کند.



مثال: با توجه به نمودار سهمی مقادیر a و b و c را بدست آورید.

مثال: در شکل زیر، نمودار سهمی داده شده است. مقادیر a، b و c را بدست آورید.

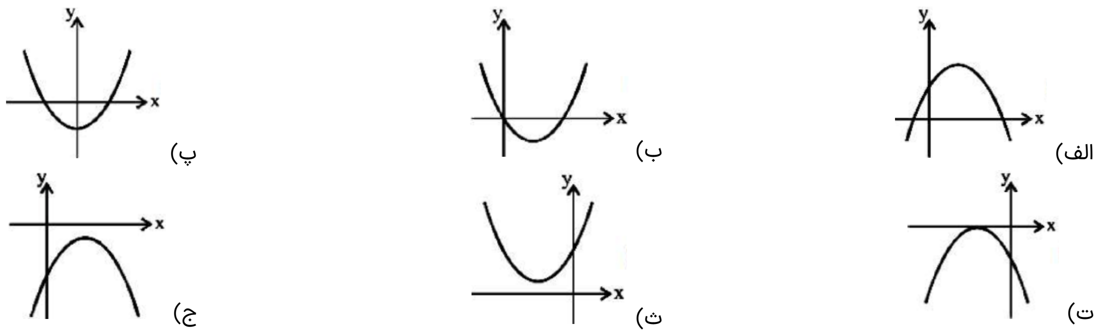


مثال: بیش‌ترین مقدار را بدست آورید.

مثال: کمترین مقدار را بدست آورید.

مثال: a و b را چنان بیابید که به ازای تابع مینیممی برابر ۴ داشته باشد.

مثال: هریک از نمودارهای زیر مربوط به سهمی است. علامت a و b و c را تعیین کنید.



مثال: حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ است. این دو عدد را چنان بیابید که حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

مثال: کشاورزی می‌خواهد در کنار رودخانه با حصاری به طول ۱۲۰ متر، زمینی مستطیل شکل را برای خودش مرزبندی کند، بیش‌ترین مساحتی که می‌تواند مشخص کند، چقدر است.

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت نمایید.

الف) $p(x)=(x-۲)^۲(x+۳)$

ب) $f(x)=|x-۱|(x^۲-۳x)$

پ) $g(x)=\dfrac{(x^۲-۴x+۴)(x-۱)}{|x|}$

ت) $t(x)=\dfrac{(x^۳-۱)(x^۲-۱)}{x^۲-۳x+۴}$

ث) $L(x)=\dfrac{(x^۲-۳x+۲)(x^۲-۱)}{(x+۱)^۲}$

ج) $p(x)=\dfrac{(-x^۳+x)(x^۲-۱)}{|x+۱|}$

چ) $c(x)=\dfrac{(-x^۲+۳x-۲)^۲(x-۱)}{x^۲+x+۲}$

مثال: هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^۲\leq ۴$

ب) $۳x^۲-x-۲\geq ۰$

مثال: حدود x را چنان تعیین کنید که عبارت $A=\dfrac{x(x-۳)}{-۲x+۱}$ منفی باشد.

مثال: اگر $A=\dfrac{x^۳(x^۲-۴x-۵)}{-(x^۲+۱)}$ حدود x را چنان تعیین کنید که:

الف) A مثبت باشد.

ب) A منفی باشد.

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورده و در صورت امکان به شکل بازه بنویسید.

الف) $x^۲-۳x<۱۰$

ب) $\dfrac{x-۳}{x+۴}\leq ۰$

پ) $\dfrac{۲x+۳}{x-۵}>۱$

ت) $۱-\dfrac{۴}{x}<۰$

ث) $\dfrac{x^۲-۳x-۱۸}{x^۲+۶x+۵}>۱$

ج) $۱\leq\dfrac{۲x-۲}{x+۲}\leq ۳$

مثال: به ازای چه مقادیری از x نمودار تابع $f(x)=x^۲+x$ بالای خط $y=۵x+۸$ قرار می‌گیرد؟

مثال: به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A = x^۲ + ۳x + k$ همواره مثبت است؟

مثال: به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y = mx^۲ - mx - ۱$ همواره پایین محور xهاست؟

مثال: در هر یک از نامعادلات زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left|\frac{x}{۳} + ۱\right| < \frac{۲}{۳}$

ب) $|۵ - ۲x| \geq ۱$

پ) $|۷ - ۲x| < ۱$

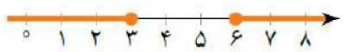
ت) $\left|\frac{x - ۱}{۲} - ۱\right| \geq ۳$

ث) $|۲x - ۳| < |۲ - ۳x|$

ج) $\frac{۲}{|x - ۳|} < \frac{۱}{۵}$

مثال: یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازه‌ی $(۱,۹)$ باشد.

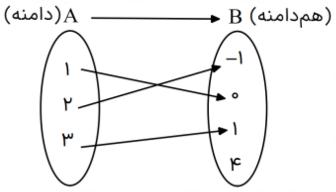
مثال: یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty,۳] \cup [۶,+\infty)$ باشد.



فصل ۵: تابع

مفهوم تابع و بازنمایی آن:

۱) از روی نمودار ون:



یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

نکته: در صورتی که از یک عضو دامنه بیش از یک فلش خارج شود، در صورتی می‌توانیم یه تابع داشته باشیم که همه‌ی فشل‌های خارج شده به عددی برابر در هم‌دامنه نظیر شوند.

۲) از روی زوج مرتب:

یک زوج مرتب به معنی یک جفت است که ترتیب آن‌ها اهمیت دارد. در ریاضی زوج مرتب را با نماد (a,b) نشان می‌دهیم.

در (a,b) به a، مؤلفه‌ی اول و به b مؤلفه‌ی دوم زوج مرتب می‌گوییم و چون ترتیب a و b اهمیت دارد بنابراین: $(a,b)\neq(b,a)$

تساوی دو زوج مرتب: دو زوج مرتب $(a,b)=(c,d)$ را مساوی می‌گویند هرگاه مؤلفه‌های اول با هم برابر و مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابرند.

$$(a,b)=(c,d)\Rightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$$

هر وقت چند تا از این زوج مرتب‌ها را کنار هم در یک مجموعه قرار دهیم، یک رابطه تشکیل می‌شود. به زبان ساده‌تر، رابطه مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هاست.

تشخیص تابع از روی زوج مرتب:

یک رابطه را که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است در صورتی تابع می‌باشد که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه اول یکسان نباشد.

$$(x,y_1)(x,y_2)\in f\longleftrightarrow x_1=x_2$$

۳) از روی نمودار:

هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن نمودار بیانگر یک تابع است.

دامنه و برد توابع:

۱) از روی نمودار ون:

مجموعه A را مجموع دامنه و بخشی از B که با اعضای A در ارتباط هستند و به آن‌ها فلش داده شده را برد می‌گوییم.

۲) از روی زوج مرتب:

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده‌ی هر تابع را «دامنه» و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

۳) از روی شکل:

محدوده تحت پوشش تابع روی محور x را دامنه و محدوده تحت پوشش تابع روی محور y را برد می‌گوییم.

مقدار تابع:

هرگاه در ضابطه‌ی یک تابع به جای متغیر تابع عدد حقیقی دل‌خواهی قرار دهیم عدد بدست آمده را مقدار تابع می‌گویند.

ورودی $\longrightarrow y=f(x)\longrightarrow$ خروجی

$$f(x)=x+\sqrt{x}$$

$$f(1)=(1)+\sqrt{1}=2$$

$$f(9)=(9)+\sqrt{9}=12$$

$$f(x+1)=x+1+\sqrt{x+1}$$

انواع توابع:

۱) تابع خطی:

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

در تابع خطی اگر $a > 0$ تابع اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد، تابع اکیداً نزولی خواهد بود.

تذکر: هرگاه در سوالی تابع خطی مطرح شد، $f(x) = ax + b$ را در نظر بگیرید.

۲) تابع ثابت:

تابعی است که خروجی آن همواره یک عدد ثابت است و ضابطه آن به صورت $f(x) = K$ است.

شکل تابع ثابت نقاطی را عرض یکسان است.

۳) تابع همانی:

تابعی است که ورودی و خروجی آن برابر است. ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

شکل تابع همانی، نقاطی روی خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم)

۴) تابع چند ضابطه‌ای:

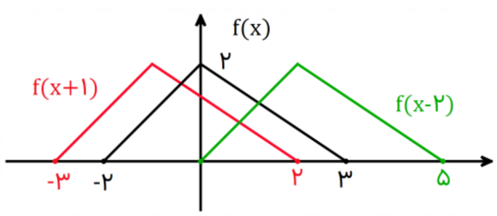
$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in D_{f_1} \\ f_2 & x \in D_{f_2} \\ \vdots & \vdots \\ f_n & x \in D_{f_n} \end{cases}$$

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \ldots D_{f_n}$$

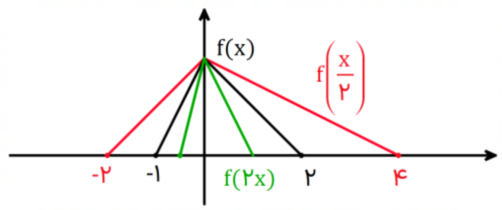
نکته: دامنه تابع چند ضابطه‌ای در قسمت‌های مختلف نباید اشتراک داشته باشد، مگر اینکه در قسمت مشترک مقدار ضابطه‌ها برابر باشد.

رسم برخی توابع به کمک انتقال:

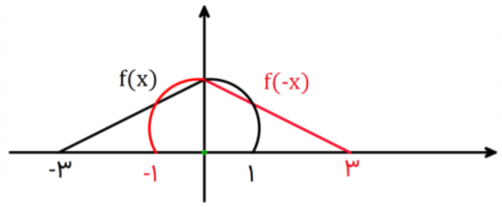
$$۱)\ f(x) \longrightarrow f(x+a): \begin{cases} a > 0 \longrightarrow & \text{a واحد به چپ} \\ a < 0 \longrightarrow & \text{a واحد به راست} \end{cases}$$



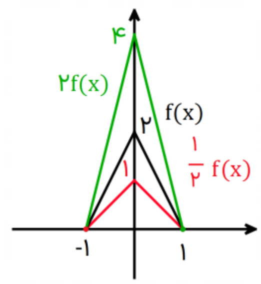
$$۲)\ f(x) \longrightarrow f(ax): \begin{cases} a > 1 \longrightarrow & \text{a برابر افقی فشرده (منقبض) می‌شود} \\ 0 < a < 1 \longrightarrow & \text{a برابر افقی کشیده (منبسط) می‌شود} \end{cases}$$



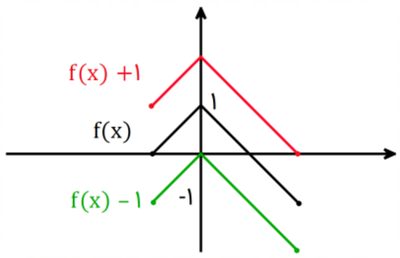
۳) $f(x) \longrightarrow f(-x)$: نسبت به محور y قرینه می‌شود



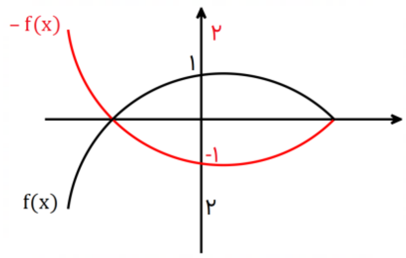
۴) $f(x) \longrightarrow af(x): \begin{cases} a > 1 \longrightarrow & \text{a برابر کشیدگی قائم (انبساط قائم)} \\ 0 < a < 1 \longrightarrow & \text{a برابر فشردگی (انقباض) قائم} \end{cases}$



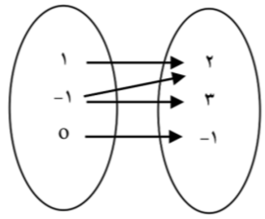
۵) $f(x) \longrightarrow f(x) + a: \begin{cases} a > 0 \longrightarrow & \text{a واحد به طرف بالا} \\ a < 0 \longrightarrow & \text{a واحد به طرف پایین} \end{cases}$

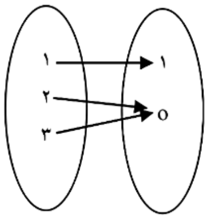


۶) $f(x) \longrightarrow -f(x):$ نسبت به محور x قرینه می‌شود

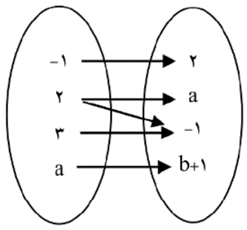


مثال: کدام یک از نمودارهای زیر تابع نمی‌باشد؟





مثال: هرگاه نمودار ون زیر یک تابع می‌باشد a و b را بیابید.

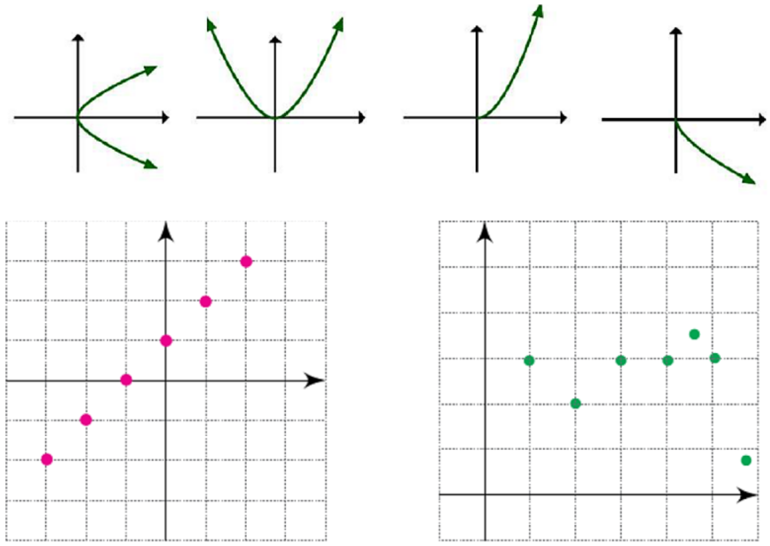


مثال: اگر $f(x)=\{(1,2),(a,2b+1),(1,a-1),(3,5)\}$ تابع باشد، مقدار a و b را بیابید.

مثال: اگر بدانیم رابطه‌ی زیر یک تابع است، مقادیر a و b را بدست آورید و نمودار تابع را رسم کنید.

$\{(a-1,2),(5,a-2),(a-2,b+3),(3,5),(5,3)\}$

مثال: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



مثال: کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدون او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

پ) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

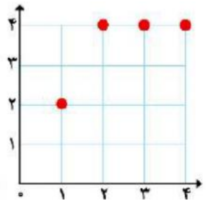
ت) رابطه‌ای که به هر دانش‌اموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

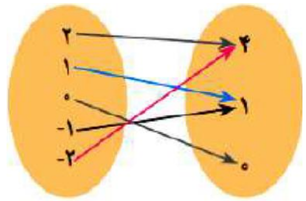
ث) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

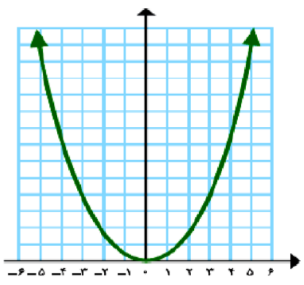
ج) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌ی سوم آن را نسبت می‌دهد.

❓ مثال: دامنه و برد رابطه‌های زیر را که به شکل‌های مختلفی ارائه شده‌اند بدست آورید. در هر مورد تابع بودن رابطه‌ی داده شده را نیز بررسی کنید.

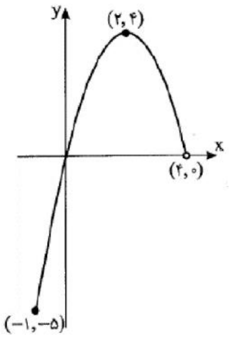
الف) $\{(۲,۳),(-۳,۵),(۲,۷)\}$

ج) 

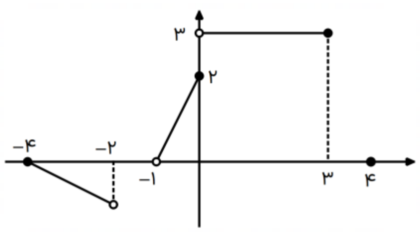
ب) 

د) 

❓ مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. دامنه و برد این تابع را پیدا کنید.



❓ مثال: دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید.



❓ مثال: جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x)=۲x$	$g(x)=۲x$	$h(x)=۲x$	$y=۲x$
دامنه	$\{۱,۲,۳,۴\}$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$[۲,۳]$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی
برد	؟	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	؟	؟

❓ مثال: اگر $f(x)=x^۲+x$ باشد:

الف) حاصل $f(۲)$ را محاسبه کنید.

ب) حاصل $f(۱)+f(f(۱))$ را محاسبه نمایید.

پ) حاصل $f(x+۱)-f(x-۱)$ را بدست آورید.

❓ مثال: اگر $f(x+۱)=x^۲+۲x$ باشد:

الف) حاصل $f(-۱)+f(۲)$ را محاسبه کنید.

ب) $f(x)$ را محاسبه کنید.

مثال: اگر معادله‌ی کلی سهمی به صورت $f(x)=ax^{2}+bx+c$ باشد و داشته باشیم $f(0)=-1$ و $f(1)=0$ و $f(2)=3$ ، مقادیر a و b و c را بیابید.

مثال: درباره‌ی تابع f با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{1\}$ می‌دانیم که به ازای هر x در دامنه‌ی f،

$$f(\frac{x+1}{x-1})=x+2$$

مقدار $f(-1)$ ، $f(\frac{1}{3})$ و $f(0)$ را پیدا کنید.

مثال: اگر در یک تابع خطی $f(1)=3$ و $f(2)=-1$ باشد، معادله تابع را مشخص کنید.

مثال: در یک تابع خطی که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم $f(2)=-4$. رابطه‌ای ریاضی این تابع خطی را بدست آورید.

مثال: تابع خطی $f(x)=x+1$ ، را با دامنه‌های زیر رسم کنید:

الف) $D_f=\mathbb{R}$

ب) $D_f=[-2,3)$

مثال: دامنه‌ی تابع خطی $f(x)=-2x+1$ بازه‌ی $[-1,2)$ است. نمودار این تابع را رسم کنید و برد آن را پیدا کنید.

مثال: در تابع خطی f رابطه‌های $f(f(-1))=-7$ و $f(1)=1$ برقرار هستند. مقدار $f(2)$ را مشخص کنید.

مثال: تابع خطی f را چنان بیابید که $f(x+2)=f(x)-4$ و $f(3)=2$ باشد.

مثال: اگر تابع $f(x)=(n+1)x^{2}+mx+n$ تابعی ثابت باشد، $f(\sqrt{5})$ را محاسبه کنید.

مثال: اگر $f(x)=\frac{4x+m}{2x-2}$ تابعی ثابت باشد $f(m)$ را محاسبه کنید.

مثال: اگر تابع $f(x)=\frac{x^{2}+ax+b-1}{2x+1}$ تابعی همانی باشد، را محاسبه کنید.

مثال: اگر تابع $g(x)=\frac{(a+1)x^{3}+x^{2}-x}{x+b}$ تابع همانی باشد، a و b را بدست آورید.

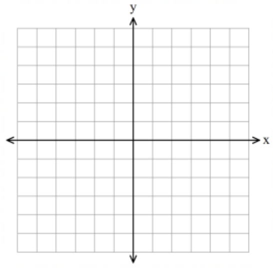
مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^{2}+x+a & x\geq 1 \\ 2x-1 & x\leq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد، $f(3)$ را محاسبه کنید.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 1 \\ 3 & -1<x<1 \\ -x & x\leq -1 \end{cases}$ باشد، $f(f(-2))$ را محاسبه کنید و برد تابع را بدست آورید.

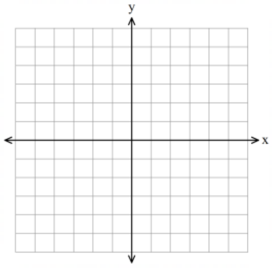
مثال: اگر $f=\{(1,a^{2}),(a+1,b),(b^{2},c-2),(d^{2},d+c)\}$ تابع همانی باشد، مقدار d را بیابید.

مثال: اگر $f=\{(-1,2a),(3,a^2+1),(4,a-k)\}$ تابع ثابت باشد، مقدار k را بیابید.

مثال: نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

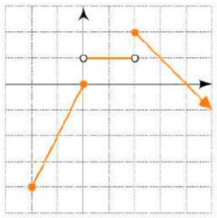


$$g(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 1 & -3<x\le 2\\ -\frac{1}{2}x & x\le -3\end{cases}$$

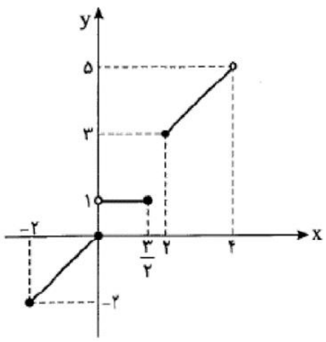


$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ 3x+1 & x\le 0\end{cases}$$

مثال: نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه‌ی آن را بدست آورید. دامنه و برد این تابع را بدست آورید.



مثال: نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. این تابع را به شکل چند ضابطه‌ای بنویسید.



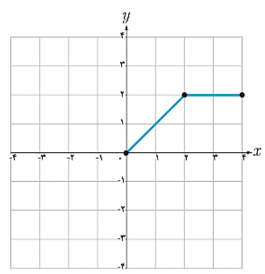
مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ -2 & 0<x<1\\ 2x+1 & x\ge 1\end{cases}$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x-1} & x\ge 0\\ x+b & x<0\end{cases}$ اگر $f(2)=2$ و $f(-2)=0$ باشد، a و b را بدست آورید.

مثال: به کمک تعیین علامت تابع $f(x)=x+|x-2|$ را بدون نماد قدر نطلق نوشته سپس نمودار آن را رسم کنید.

مثال: تابع $f(x)=|x+1|+|x-1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

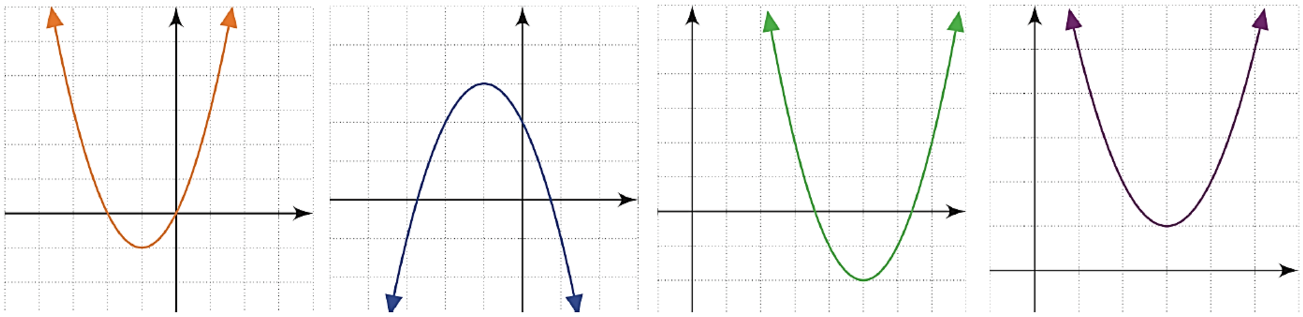
مثال: در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=-2f(x)$ را رسم کنید.



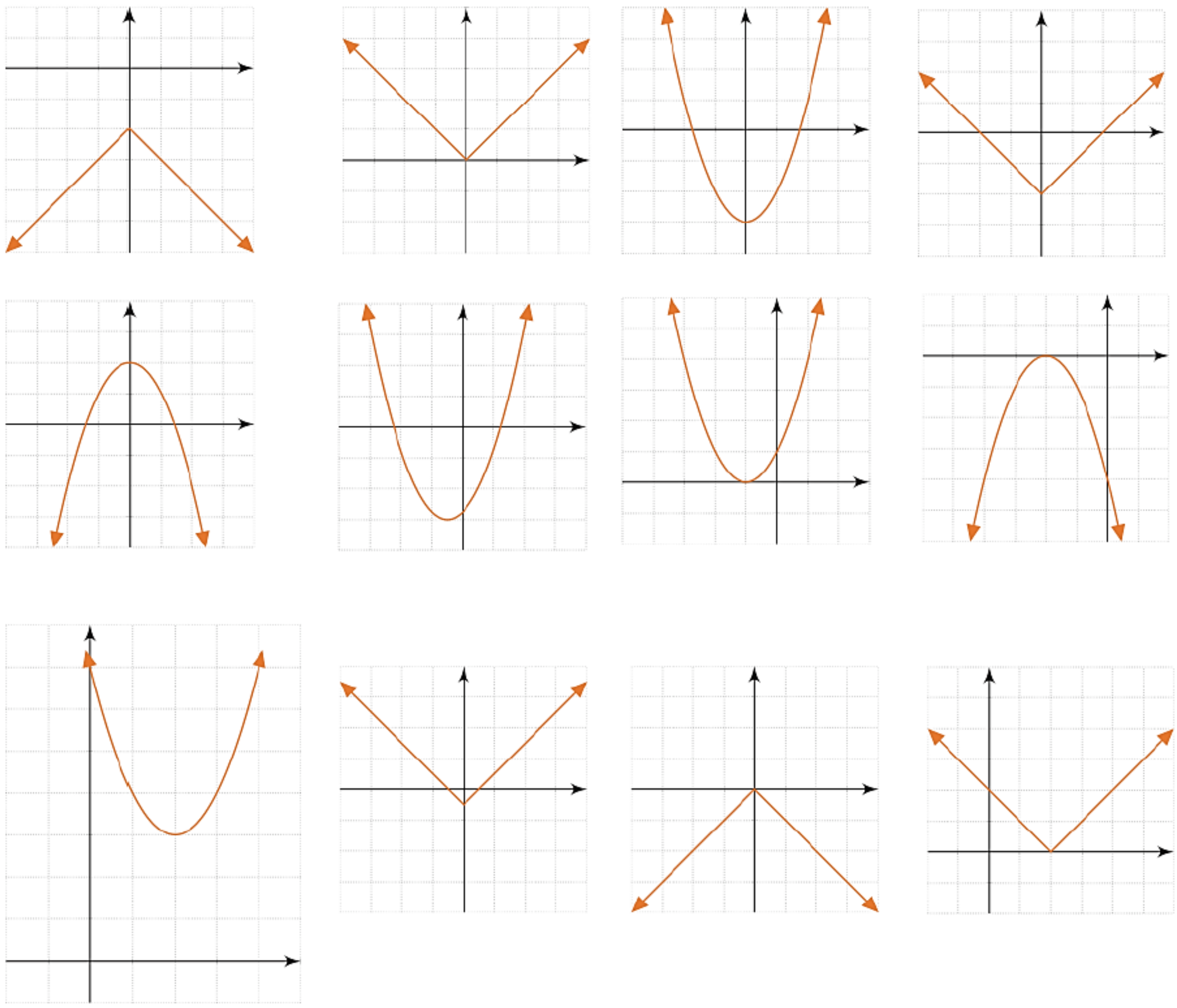
مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه‌ی دوم f، g، h و t رسم شده‌اند.

$f(x)=(x-۵)^۲-۲$ $\quad$ $g(x)=(x+۱)^۲-۱$ $\quad$ $h(x)=(x-۳)^۲+۱$ $\quad$ $t(x)=-(x+۱)^۲+۳$

هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟



مثال: هر یک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌ها (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y=x^۲-۳$ $\quad$ ب) $y=-x^۲+۲$ $\quad$ پ) $y=|x|$ $\quad$ ت) $y=-|x|$

ث) $y=(x+۱)^۲$ $\quad$ ج) $y=|x|-\frac{۱}{۲}$ $\quad$ چ) $y=|x-۲|$ $\quad$ ح) $y=-(x+۲)^۲$

خ) $y=-|x|-۲$ $\quad$ د) $y=(x-۲)^۲+۳$ $\quad$ ذ) $y=|x|-۲$ $\quad$ ر) $y=(x+\frac{۱}{۲})^۲-۳$

مثال: نمودار تابع $y=|x-2|$ و $y=|x-1|+1$ از روی نمودار $y=|x|$ رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $y=x^2-4x+3$ را به کمک انتقال از روی $y=x^2$ رسم کنید.

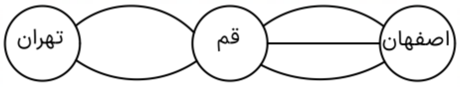
فصل ۶: شمارش بدون شمردن

اصول اولیه شمارش:

الف) اصل ضرب:

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله‌ی دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

مثال: فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند.



$۲ \times ۳ = ۶$

تذکر: مهم‌ترین نشانه اصل ضرب کلمه «و» است. دو اصل ضرب عملی مرحله به مرحله به صورت متوالی انجام می‌شود.

ب) اصل جمع:

اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش kام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_k + \ldots + m_k$ روش وجود دارد.

مثال: پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه‌ی گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه‌ی دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و ژز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟

$۷ = \underbrace{\text{شیرینی بخرد}}_{۳} + \underbrace{\text{گل بخرد}}_{۴}$

تذکر: مهم‌ترین نشانه اصل جمع کلمه «یا» است در آن نوعی انتخاب بین حالت‌های ممکن وجود دارد.

ج) اصل متمم:

هرگاه شمارش حالت‌های مطلوب وقت‌گیر باشد و تعداد حالت‌های مطلوب زیاد باشد می‌توانیم بگوییم:

حالات نامطلوب − کل حالات = حالت‌های مطلوب

جایگشت و انواع آن:

تعداد حالت‌های چیده شدن n شیء متمایز در کنار هم را جایگشت می‌گوییم.

انواع جایگشت:

الف) خطی ساده:

تعداد حالت‌های قرارگیری n شیء متمایز در کنار هم روی یک خط را جایگشت خطی ساده می‌گوییم.

تعداد حالت‌های جایگشت خطی ساده n شیء متمایز = $n!$

مثال: ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب زیست متمایز را به چند طری می‌توان در قفسه کتابخانه مرتب کرد؟

۴ کتاب ریاضی + ۳ کتاب زیست متمایز = ۷ کتاب

$\longrightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۷!$

ب) جایگشت خطی با تکرار:

اگر n شیء داشته باشیم که K_1 تای آن‌ها مثل هم، K_2 تای آن‌ها مثل هم و .... و K_m تای دیگر آن‌ها نیز مثل هم باشند، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{n!}{K_1! \times K_2! \times \ldots \times K_m!}$$

مثال: با حروف کلمه LETTER چند کلمه عروضی می‌توان ساخت؟

$$\frac{۶!}{۲!\times ۲!}$$

دو E یکسان   دو T یکسان

ساده کردن فاکتوریل:

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\ldots\times ۱$$

پس می‌توان گفت:

$$۷! = ۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱$$

$$۷! = ۷\times ۶!$$

$$۷! = ۷\times ۶\times ۵!$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{۵!}{۲!}\times\frac{۷!}{۳!}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{۷!}{۳!} = \frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۷\times ۶\times ۵\times ۴ = ۸۴۰$$

$$\frac{۵!}{۲!} = \frac{۵\times ۴\times ۳\times \cancel{۲!}}{\cancel{۲!}} = ۵\times ۴\times ۳ = ۶۰$$

$$\xrightarrow{+} \frac{۷!}{۳!}+\frac{۵!}{۲!} = ۹۰۰$$

جایگشت r شیء از بین n شیء متمایز:

تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.
$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۷ , ۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ بدون تکرار ارقام چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت؟

حل ۱: $\underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴} = ۸۴۰$

حل ۲: $p(۷,۴) = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = \frac{۷!}{۳!} = ۸۴۰$

ترکیب و خواص آن:

تعداد حالت‌های <u>انتخاب</u> r شیء از بین n شیء متمایز را با نماد $\binom{n}{r}$ معرفی می‌کنیم و ترکیب r شیء از n شیء می‌گوییم. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: از بین ۱۰ کتاب متمایز به چند طریق می‌توان ۳ کتاب را با هم انتخاب کرد؟ $\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳!۷!} = \frac{۱۰\times ۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{۳\times ۲\times ۱\times \cancel{۷!}} = ۱۲۰$

خواص ترکیب:

۱) $\binom{n}{۰} = ۱$

۲) $\binom{n}{n} = ۱$

۳) $\binom{n}{۱} = n$

۴) $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$

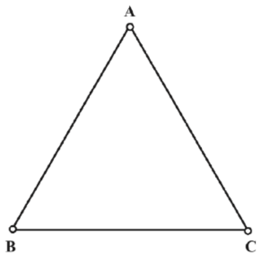
۵) $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$

۶) $\binom{n}{K}+\binom{n}{K+۱} = \binom{n+۱}{K+۱}$ اتحاد پاسکال

۷) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{n} = ۲^n$ اتحاد نیوتن

مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

مثال: در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چندتاست؟



مثال: می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم رنگ‌نباشند.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

مثال: با پلاک‌هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آن‌ها از مجموعه‌ی A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه‌ی B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه‌ی C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

$A = \{11, 22, \ldots, 99\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

C = {ب , ج , د , س , ص , ط , ق , ل , م , ن , و , ه , ی}

مثال: یک آزمون چند گزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سوال ۲ گزینه‌ای (بله – خیر) است. فردی قصد دارد به سوال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همه‌ی سوال‌ها جواب دهد؟

ب) بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

مثال: اگر شکل مقابل نشان‌دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

مثال: با ارقام ۷,۱,۰,۴,۳,۲ چند عدد در هر حالت می‌توان ساخت؟

الف) عدد ۳ رقمی با تکرار ارقام:

ب) عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام:

پ) عدد زوج ۳ رقمی با تکرار ارقام:

ت) عدد زوج ۴ رقمی بدون تکرار ارقام:

ث) عدد ۴ رقمی بزرگتر از ۴۰۰۰:

ج) عدد ۵ رقمی کوچکتر از ۵۰۰۰۰:

چ) عدد ۴ رقمی بین ۳۰۰۰ و ۴۵۰۰:

مثال: با حروف کلمه «بلوچستان» چند کلمه ۴ حرفی بدون تکرار می‌توان ساخت که:

الف) حرف اول آن‌ها نقطه‌دار باشد.

ب) حتماً شامل حرف «ت» باشد.

پ) حرف دوم دارای بیشترین نقطه باشد.

مثال: ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب فیزیک، ۲ کتاب شیمی و ۲ کتاب زیست که همگی متمایز هستند را به چند طریق می‌توان در یک کتابخانه مرتب کرد اگر:

الف) شرط خاصی نباشد:

ب) کتابهای ریاضی همگی کنار هم باشند:

پ) کتابهای فیزیک همگی کنار هم نباشند:

ت) کتابهای هم موضوع کنار هم باشند:

ث) کتابهای ریاضی و فیزیک یک در میان باشند:

ج) کتابهای زیست و شیمی یک در میان باشند:

چ) هیچ دو کتاب کتاب فیزیکی کنار هم نباشند:

مثال: با حروف کلمه‌ی «جهانگردی» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چندتا از آن‌ها به «ی» ختم می‌شود؟

ب) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه‌ی «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه‌ی «جهان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

مثال: با حروف کلمه «TADAROKAT» چند کلمه ۹ حرفی می‌توان ساخت که:

الف) شرط خاصی نباشد.

ب) حروف یکسان کنار هم باشند.

پ) شامل کلمه «ROK» باشد.

ت) حروف T و A یک در میان باشند.

مثال: یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

مثال: از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چندتاست؟

مثال: در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

مثال: با حروف کلمه‌ی «گل پیرا» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «گل» شروع می‌شود؟

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی نمی‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه‌ی «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

مثال: در هر عبارت مقدار n را محاسبه کنید.

الف) $\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!}=۷۲$

ب) $\frac{n!}{(n-۳)!}=۱۳۲۰$

پ) $\frac{۴!}{۲!}\times\frac{۷!}{۴!}\times ۲=n!$

مثال: با ارقام ۱,۱,۲,۲,۲,۳ :

الف) چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت؟

پ) چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت؟

مثال: با ارقام فرد، چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت اگر:

الف) شرط خاصی نباشد.

ب) تکرار غیرمجاز باشد.

پ) یکان > دهگان > صدگان

مثال: ۵ نفر سوار آسانسور یک ساختمان ۸ طبقه شده‌اند. چند حالت برای پیاده شدن دارند اگر:

الف) شرط خاصی نباشد

ب) در هر طبقه حداکثر یک نفر بتواند پیاده شود.

پ) در هر طبقه حداکثر یک نفر پیاده شود و شخص a بالاتر از b پیاده شود.

مثال: از میان شش کتاب مختلف:

الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

مثال: در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیته‌ی ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

مثال: از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته‌ی ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

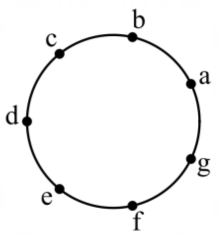
ب) کمیته‌ی ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

پ) کمیته‌ی ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

مثال: در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

مثال: گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

مثال: مطابق شکل ۷ نقطه روی محیط دایره قرار دارد. از وصل کردن آن‌ها چند مثلث در حالت‌های زیر می‌توان رسم کرد؟



الف) شرط خاصی نباشد.

ب) نقطه g حتماً یکی از رئوس مثلث باشد.

ج) مثلث شامل ضلع ae باشد.

مثال: شخصی قصد دارد از بین ۸ دوست صمیمی خود ۴ نفر را به مهمانی دعوت کند. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) شرط خاصی نباشد.

ب) شخص a حتما دعوت شود.

پ) شخص b و c دعوت نشوند.

ت) شخص a دعوت شود ولی b و c دعوت نشوند.

ث) شخص c بدون a جایی نرود.

ج) شخص b و d قهر باشند.

مثال: در هر یک از اشکال زیر از اتصال نقاط به هم چند مثلث می‌توان ساخت؟

مثال: یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم میشوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

مثال: مجموعه اعداد A = {۱,۲,۳,۴,۵,۶} :

الف) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل عدد ۳ دارد؟

پ) چند زیرمجموعه ۳ عضوی فاقد عضو ۱ دارد؟

ت) چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل عضو ۱ و فاقد ۲ دارد.

مثال: کیسه‌ای حاوی ۴ مهره سفید، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی است. از این کیسه به چند طریق می‌توان ۳ مهره خارج کرد:

الف) شرط خاصی نباشد.

ب) از هر رنگ یک مهره خارج شود.

پ) مهره‌ها همگی همرنگ باشند و با هم خارج شوند.

ت) مهره‌ها یکی یکی به ترتیب خارج شوند و همگی همرنگ باشند.

ث) مهره‌ها با هم خارج شوند و حداقل یک مهره سفید خارج شود.

ج) مهره‌ها یکی یکی به ترتیب خارج شوند و حداقل یک مهره آبی خارج شود.

چ) مهره با هم خارج شوند و حداکثر ۲ مهره آبی داشته باشیم.

فصل ۷: آمار و احتمال

تعاریف اولیه:

پدیده تصادفی: آزمایشی که قبل از وقوع نتیجه آن قابل پیش‌بینی نباشد. (مثلاً پرتاب تاس)

فضای نمونه‌ای: تمام حالت‌های ممکن در یک پدیده تصادفی. مثلا در پرتاب تاس: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

پیشامد مطلوب: بخشی از فضای نمونه‌ای که می‌خواهیم احتمال آن را محاسبه نماییم. مثلا در پرتاب تاس به پیشامد اینکه تاس عددی اول بیاید.

$A=\{۲,۳,۵\}$

احتمال ساده: اندازه‌گیری شانس وقوع یک پدیده!

احتمال رخ دادن پدیده A $\longleftarrow p(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

$n(A) \longrightarrow$ تعداد اعضای پیشامد

$n(S) \longrightarrow$ تعداد کل حالات (فضای نمونه‌ای)

فضاهای نمونه‌ای معروف:

۱) فضای نمونه پرتاب n سکه برابر است با : $n(S)=۲^n$

۲) فضای نمونه پرتاب n تاس برابر است با : $n(S)=۶^n$

۳) فضای نمونه یک خانواده n فرزندی برابر است با : $n(S)=۲^n$

۴) فضای نمونه پرتاب n سکه و m تاس برابر است با : $n(S)=۲^n\times ۶^m$

۵) کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز : $n!$

۶) انتخاب r شیء از بین n شیء : $\binom{n}{r}$

۷) انتخاب r شیء از بین n شیء یکی یکی : $\underbrace{\binom{n}{۱}\binom{n-۱}{۱}\binom{n-۲}{۱}\cdots}_{r \text{ مرتبه}}$

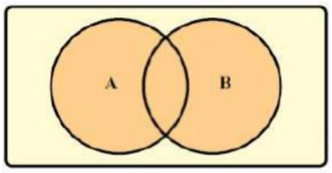
عملیات روی پیشامدها:

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت هر یک از پیشامدهای $(A\cup B)$ ، $(A\cap B)$ و $(A-B)$ در فضای نمونه‌ای S به صورت‌های زیر توصیف می‌شوند:

الف) اجتماع دو پیشامد:

پیشامد $(A\cup B)$ وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد. (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند.)

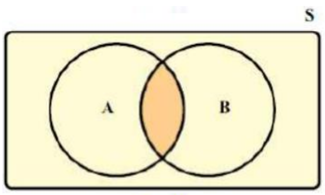
$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$



$A\cup B$

ب) اشتراک دو پیشامد:

پیشامد $(A\cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد.)

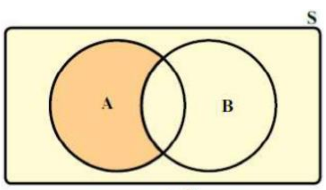


$A\cap B$

پ) تفاضل دو پیشامد:

پیشامد $(A-B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.

$$p(A-B)=p(A)-p(A\cap B)$$

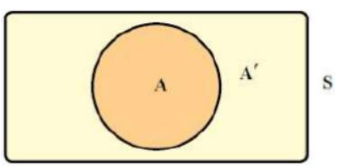


$A-B$

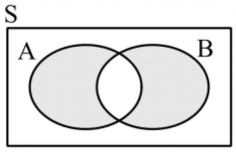
ت) متمم یک پیشامد:

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیشامد A که با A' (یا A^C) نمایش داده می‌شود، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد؛ بنابراین با توجه به نمودار واضح است که $A\cup A'=S$ و $A\cap A'=\varnothing$

$$p(A')=۱-p(A)$$



تفاضل متقارن دو پیشامد:



پیشامد $A\Delta B$ به معنای آن است که فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد. بنابراین:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

$$p\ (A\Delta B)=p\ (A)+p\ (B)-2p\ (A\cap B)$$

نکته مهم: در فصل ۱ آموختین به کمک قوانین دمورگان داریم:

A رخ ندهد و B رخ ندهد $\longrightarrow A'\cap B'=(A\cup B)'$

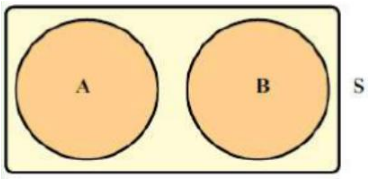
A و B با هم رخ ندهند $\longrightarrow A'\cup B'=(A\cap B)'$

$$p\ (A'\cap B')=p\ (A\cup B)'=1-p\ (A\cup B)$$

$$p\ (A'\cup B')=p\ (A\cap B)'=1-p\ (A\cap B)$$

دو پیشامد ناسازگار:

تعریف: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\cap B=\varnothing$ ، در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی‌دهند.



تذکر: با توجه به تعریف متمم یک پیشامد، همواره هر پیشامد تصادفی مانند A و متمم آن یعنی A' ، دو پیشامد ناسازگارند.

اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم، هرگاه $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$ و $B\cap C=\varnothing$ باشد.

آمار:

آمار، مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش ،تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

تعریف جامعه یا جمعیت:

مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه:

تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند. به عنوان مثال، دانش آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هر یک از دانش آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

تعریف اندازه یا حجم نمونه

تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند.

به عنوان مثال دانش آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

تعریف سرشماری

اگر در یک بررسی آماری، تمام افراد جامعه ی آماری را مورد مطالعه قرار دهیم می‌گوییم سرشماری کرده‌ایم. معمولا در سرشماری با مشکلاتی مثل در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه، وقت‌گیر بودن، گران تمام شدن، از بین رفتن جامعه در برخی از مطالعات و ... مواجه هستیم.

نمونه

زیر مجموعه‌ی یک جامعه‌ی آماری را نمونه می‌گوییم. تعداد اعضای نمونه را «اندازه‌ی نمونه» یا «حجم نمونه» می گوییم.

تذکر : عمل «نمونه‌گیری» مهم‌ترین بخش آمار است. یک نمونه گروه کوچکی از جامعه‌ی آماری است که به نحوی انتخاب می شود که نمایانگر خصوصیات جامعه باشد.

داده

نتایج حاصل از بررسی یا اندازه‌گیری نمونه را «داده» می‌گوییم. داده‌ها را به چهار روش جمع‌آوری می‌کنند که عبارت است از:

۱) داده‌های از پیش تهیه شده
۲) جمع‌آوری داده‌ها از طریق پرسش
۳) جمع‌آوری داده‌ها از طریق آزمایش
۴) جمع‌آوری داده‌ها از طریق مشاهده

متغیر و انواع آن:

متغیر

- **کمی:** قابل شمارش و اندازه‌گیری
  - **کمی گسسته:** با اعداد حسابی شمرده می‌شوند (تعداد افراد)
  - **کمی پیوسته:** شامل اعداد اعشاری نیز هستند (وزنِ یک فیل)
- **کیفی:** غیرقابل شمارش و اندازه‌گیری
  - **کیفی ترتیبی:** دارای یک ترتیب ذاتی هستند (مراحل تحصیلی)
  - **کیفی اسمی:** ترتیب ندارند (رنگ چشم)

مثال: در مورد هر یک از متغیرهای زیر نوع متغیر را مشخص کنید.

الف) گروه خونی

ب) کمربندهای کاراته

پ) قد

ت) تعداد بیماران در یک بیمارستان

ث) حجم آب موجود در یک منبع

ج) روزهای تعطیل در یک سال

چ) مراحل پیشرفت یک پروژه

ح) رنگ پوست

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم و پیشامد A را به این صورت تعریف می کنیم که تاس عدد زوج و سکه «رو» بیاید و پیشامد B را به این صورت تعریف میکنیم که سکه «پشت» و تاس عدد کمتر از ۴ باشد. A و B را مشخص کنید.

مثال: دو تاس را با هم می‌اندازیم و پیشامدهای A و B را به ترتیب «مجموع اعداد دو تاس برابر ۷» و «عدد رو شده حداقل یک تاس برابر ۶» تعریف می‌کنیم، پیشامدهای A و B را معلوم کنید.

مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان خانواده را مشخص کنید.

مثال: با ارقام ۶,۵,۴,۳,۲,۱ یک عدد ۴ رقمی بدون تکرار ساخته‌ایم. با کدام احتمال این عدد:

الف) زوج است؟

ب) مضرب ۵ است؟

پ) بزرگتر از ۳۰۰۰ است؟

مثال: دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن که :

الف) اعداد رو شده هر دو تاس زوج باشند.

ب) اعداد رو شده هر دو تاس مثل هم باشند.

پ) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا اعداد رو شده‌ی هر دو تاس زوج باشند.

ت) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس کمتر از ۱۰ باشد.

ث) مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۴ باشد.

مثال: اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد :

الف) دو برا در کنار یکدیگر نباشند؟

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

مثال: اگر حروف کلمه جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد :

الف) حرف «ی» آخر باشد؟

ب) دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

پ) با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

مثال: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. مطلوب است احتمال آن که :

الف) ۲ فرزند این خانواده پسر باشد.

ب) حداقل ۲ فرزند خانواده پسر باشد.

پ) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

مثال: از جعبه‌ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم. مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب، سالم و یکی خراب باشد.

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیشتر باشد.

مثال: در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :

الف) هر سه مهره آبی باشند.

ب) هر سه مهره همرنگ باشند.

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم.

مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر سه سبز باشند

ب) هر سه همرنگ باشند

پ) فقط ۲ مهره آبی باشد

ت) حداقل ۱ مهره آبی باشد

ث) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

مثال: می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد. چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر هم رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

مثال: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید آنگاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه ای این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک بار سکه رو بیاید.

پ) پیشامد B به طوری که حداقل دو بار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.

ت) $A \cap B'$

مثال: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است مطلوب است :

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد A که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند پسر باشد.

ت) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

ث) هر یک از پیشامدهای $A \cap B$ و $A - C$ و B' را مشخص کنید، آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

مثال: ارقام ۵,۳,۰,۹ را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی ساخته شده با این ارقام و بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد A، آن که اعداد دورقمی مضرب ۵ باشد.

پ) پیشامد B، آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.

ت) پیشامد $A \cap B'$

مثال: هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

پ) پیشامد C که در آن عدد ر«و شده بزرگ تر از ۲ باشد».

مثال: یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A $(p(A)=\frac{۳۴}{۱۰۰})$ و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

مثال: در یک شهر ۴۰ درصد افراد روزنامه و ۲۰ درصد کتاب می‌خوانند. همچنین ۵ درصد افراد فقط روزنامه می‌خوانند. اگر شخصی را از این شهر انتخاب کنیم، احتمال اینکه:

الف) فقط کتاب بخواند.

ب) حداقل یکی از روزنامه یا کتاب را بخواند.

پ) نه روزنامه بخواند و نه کتاب.

ت) هم روزنامه بخواند و هم کتاب.

ث) فقط روزنامه یا فقط کتاب بخواند.

مثال: در یک مهمانی ۶۰ نفر حاضرند. ۲۵ نفر آن‌ها آبمیوه و ۳۰ نفر آن‌ها قهوه می‌نوشند. اگر ۱۰ نفر هیچ نووشیدنی ننوشند، شخصی را از این جمع انتخاب کنیم، احتمال اینکه:

الف) حداقل یکی از نوشیدنی‌ها را استفاده کند؟

ب) فقط قهوه بنوشد؟

پ) هر دو نوشیدنی را استفاده کند؟

ت) فقط قهوه یا فقط آبمیوه بنوشد؟

مثال: کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اندازه‌ی جامعه کمتر از اندازه نمونه است.

ب اعضای نمونه همان اعضای جامعه‌اند.

پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است.

مثال: می‌خواهیم درباره کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:

ویژگی مورد بررسی	اندازه‌ی نمونه	اندازه‌ی جامعه	جامعه