سوالات تألیفی

معرفی ماتریس و جمع و تفریق آن

۱. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ به طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ i^{۲} & i<j \end{cases}$، آنگاه ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

پاسخ: با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A می‌نویسیم.

$$a_{۱۱}=۷ \quad , \quad a_{۱۲}=۱ \quad , \quad a_{۱۳}=۱ \quad , \quad a_{۱۴}=۱$$
$$a_{۲۱}=۳ \quad , \quad a_{۲۲}=۷ \quad , \quad a_{۲۳}=۴ \quad , \quad a_{۲۴}=۴$$
$$a_{۳۱}=۴ \quad , \quad a_{۳۲}=۵ \quad , \quad a_{۳۳}=۷ \quad , \quad a_{۳۴}=۹$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

۲. اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ مفروض باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۳$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۳j-i$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲j$، آنگاه ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

پاسخ: با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A می‌نویسیم.

$$a_{۱۱}=-۳ \quad , \quad a_{۱۲}=-۴ \quad , \quad a_{۱۳}=-۶$$
$$a_{۲۱}=۱ \quad , \quad a_{۲۲}=-۳ \quad , \quad a_{۲۳}=-۶$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ & -۶ \\ ۱ & -۳ & -۶ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

۳. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} ij & i>j \\ i^{۲}-۱ & i=j \\ ۲i-۳j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد. ماتریس $۳A-۲I$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$a_{۱۱}=۰ \quad , \quad a_{۱۲}=-۴ \quad , \quad a_{۱۳}=-۷$$
$$a_{۲۱}=۲ \quad , \quad a_{۲۲}=۳ \quad , \quad a_{۲۳}=-۵$$
$$a_{۳۱}=۳ \quad , \quad a_{۳۲}=۶ \quad , \quad a_{۳۳}=۸$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۴ & -۷ \\ ۲ & ۳ & -۵ \\ ۳ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

در نتیجه:

$$۳A-۲I=۳\begin{bmatrix} ۰ & -۴ & -۷ \\ ۲ & ۳ & -۵ \\ ۳ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱۲ & -۲۱ \\ ۶ & ۹ & -۱۵ \\ ۹ & ۱۸ & ۲۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۱۲ & -۲۱ \\ ۶ & ۷ & -۱۵ \\ ۹ & ۱۸ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

۴. اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} j^{۲}-۲ & i=j \\ j-i & i>j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ و ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۲n & ۰ & ۲ \\ -m & -۴ & -۲ \\ k & ۲ & ۷m \end{bmatrix}$ و $۲A+B=\bar{o}$، آنگاه حاصل $m+n+k$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا درایه‌های ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$a_{۱۱}=-۱ \quad , \quad a_{۱۲}=۰ \quad , \quad a_{۱۳}=-۱$$
$$a_{۲۱}=-۱ \quad , \quad a_{۲۲}=۲ \quad , \quad a_{۲۳}=۱$$
$$a_{۳۱}=-۲ \quad , \quad a_{۳۲}=-۱ \quad , \quad a_{۳۳}=۷$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ -۲ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

اکنون از تساوی $۲A+B=\bar{o}$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$B=-۲A \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲n & ۰ & ۲ \\ -m & -۴ & -۲ \\ k & ۲ & ۷m \end{bmatrix}=-۲\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ -۲ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های نظیر دو ماتریس باید برابر باشند پس:

$$\begin{cases} ۲n=۲ \Rightarrow n=۱ \\ -m=۲ \Rightarrow m=-۲ \\ k=۴ \\ ۷m=-۱۴ \Rightarrow m=-۲ \end{cases}$$

در نتیجه: $m+n+k=-۲+۱+۴=۳$

۵. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases} j^{۲}-i^{۲} & i<j \\ m & i=j \\ i^{۲}+۳ & i>j \end{cases}$ مفروض است. در صورتی‌که مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲۸ باشد، آنگاه مقدار m را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=m \quad , \quad a_{۱۲}=۴-۱=۳ \quad , \quad a_{۱۳}=۹-۱=۸$$
$$a_{۲۱}=۴+۳=۷ \quad , \quad a_{۲۲}=m \quad , \quad a_{۲۳}=۹-۴=۵$$
$$a_{۳۱}=۹+۳=۱۲ \quad , \quad a_{۳۲}=۹+۳=۱۲ \quad , \quad a_{۳۳}=m$$

بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix} m & ۳ & ۸ \\ ۷ & m & ۵ \\ ۱۲ & ۱۲ & m \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

اکنون بنابر فرض داریم:

$$\text{مجموع درایه‌ها}=۱۲۸ \Rightarrow ۳m+۴۷=۱۲۸ \Rightarrow ۳m=۸۱ \Rightarrow m=۲۷$$

۶. اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} ۲i-۳j & i<j \\ -j+۱ & i=j \\ i+۲j & i>j \end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $۲a_{۱۲}-۳a_{۳۱}+a_{۳۳}$ را به دست آورید.

پاسخ: فقط درایه‌های خواسته‌شده را به دست می‌آوریم.

$$a_{۱۲}=۲-۶=-۴ \quad , \quad a_{۳۱}=۳+۲=۵ \quad , \quad a_{۳۳}=-۳+۱=-۲$$

بنابراین:

$$۲a_{۱۲}-۳a_{۳۱}+a_{۳۳}=۲(-۴)-۳(۵)+(-۲)=-۸-۱۵-۲=-۲۵$$

۷. هرگاه $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ ۲ij & i=j \\ ۲j-i & i>j \end{cases}$ تعریف شده باشد، آنگاه مشخص کنید مجموع درایه‌های قطر اصلی از مجموع درایه‌های قطر فرعی چقدر بیشتر است؟

پاسخ: فقط درایه‌های روی قطرهای اصلی و فرعی ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$a_{۱۱}=۲(۱)(۱)=۲ \quad , \quad a_{۲۲}=۲(۲)(۲)=۸ \quad , \quad a_{۳۳}=۲(۳)(۳)=۱۸$$

پس:

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}=a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=۲+۸+۱۸=۲۸$$

از طرف دیگر:

$$a_{۱۳}=۱-۳=-۲ \quad , \quad a_{۲۲}=۲(۲)(۲)=۸ \quad , \quad a_{۳۱}=۲-۳=-۱$$

پس:

$$\text{مجموع درایه‌های قطر فرعی}=a_{۱۳}+a_{۲۲}+a_{۳۱}=-۲+۸-۱=۵$$

بنابراین:

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}-\text{مجموع درایه‌های قطر فرعی}=۲۸-۵=۲۳$$

۸. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A=B$، آنگاه حاصل $x-۳y+۲z$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \\ z=-۲ \end{cases}$$

اکنون از دو معادلهٔ اول مقادیر x و y را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \ , \ y=۱$$

بنابراین:

$$x-۳y+۲z=۲-۳(۱)+۲(-۲)=-۵$$

۹. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases} j-i & i\le j \\ j+i & i>j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases} i+j & i<j \\ i-j & i\ge j \end{cases}$ دو ماتریس باشند. آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $۲A-B$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{array}{lll} a_{۱۱}=۱-۱=۰ & , \quad a_{۱۲}=۲-۱=۱ & , \quad a_{۱۳}=۳-۱=۲ \\ a_{۲۱}=۱+۲=۳ & , \quad a_{۲۲}=۲-۲=۰ & , \quad a_{۲۳}=۳-۲=۱ \\ a_{۳۱}=۱+۳=۴ & , \quad a_{۳۲}=۲+۳=۵ & , \quad a_{۳۳}=۳-۳=۰ \end{array}$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

از طرف دیگر دو ماتریس مساوی هم مرتبه هستند، پس $n=۳$ و $m=۳$ بنابراین:

$$\begin{array}{lll} b_{۱۱}=۱-۱=۰ & , \quad b_{۱۲}=۱+۲=۳ & , \quad b_{۱۳}=۱+۳=۴ \\ b_{۲۱}=۲-۱=۱ & , \quad b_{۲۲}=۲-۲=۰ & , \quad b_{۲۳}=۲+۳=۵ \\ b_{۳۱}=۳-۱=۲ & , \quad b_{۳۲}=۳-۲=۱ & , \quad b_{۳۳}=۳-۳=۰ \end{array}$$

پس:

$$B=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

در نتیجه:

$$۲A-B=۲\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۵ & ۰ & -۳ \\ ۶ & ۹ & ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ماتریس } ۲A-B=۱۶$$

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix} p & ۳ & ۴ \\ ۴ & q-۱ & ۸ \\ ۶ & ۹ & k+۲ \end{bmatrix}$ و $B=[i+ij]_{m\times n}$ و $A=B$، آنگاه حاصل $p+q-۲k+m$ را به دست آورید.

پاسخ: دو ماتریس مساوی هم‌مرتبه‌اند، چون $A_{۳\times۳}$، پس ماتریس B هم از مرتبهٔ ۳×۳ است؛ بنابراین $m=n=۳$. اکنون درایه‌های ماتریس B را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{array}{lll} b_{۱۱}=۱+(۱)(۱)=۲ & , \quad b_{۱۲}=۱+(۱)(۲)=۳ & , \quad b_{۱۳}=۱+(۱)(۳)=۴ \\ b_{۲۱}=۲+(۲)(۱)=۴ & , \quad b_{۲۲}=۲+(۲)(۲)=۶ & , \quad b_{۲۳}=۲+(۲)(۳)=۸ \\ b_{۳۱}=۳+(۳)(۱)=۶ & , \quad b_{۳۲}=۳+(۳)(۲)=۹ & , \quad b_{۳۳}=۳+(۳)(۳)=۱۲ \end{array}$$

پس:

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \\ ۶ & ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

بنابراین:

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix} p & ۳ & ۴ \\ ۴ & q-۱ & ۸ \\ ۶ & ۹ & k+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \\ ۶ & ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} p=۲ \\ q-۱=۶\Rightarrow q=۷ \\ k+۲=۱۲\Rightarrow k=۱۰ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$p+q-۲k+m=۲+۷-۲(۱۰)+۳=-۸$$

۱۱. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۲ & -۳ \\ ۴ & -۱ & n \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ برابر هستند. مجموع درایه‌هاس ماتریس B را بیابید.

پاسخ: دو ماتریس مساوی هم‌مرتبه هستند، چون $A_{۲\times ۳}$، پس $n=۳$ و $m=۲$ داریم:

$$B=A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & -۳ \\ ۴ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } B = ۲+۲-۳+۴-۱+۳=۷$$

۱۲. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲a+b & ۳-a \\ ۲b+۴ & a-۲b \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. حاصل‌جمع درایه‌های قطر اصلی A را به دست آورید.

پاسخ: در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند پس:

$$\begin{cases} ۳-a=۰ \Rightarrow a=۳ \\ ۲b+۴=۰ \Rightarrow b=-۲ \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۶-۲ & ۳-۳ \\ -۴+۴ & ۳+۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A = ۴+۷=۱۱$$

۱۳. اگر $A_{۲m\times n}$ ماتریس سطری و $B_{۳\times P}$ ماتریس ستونی باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $C=\begin{bmatrix} ۰ & P-۱ & ۲m+۱ \\ ۲m-p & ۱-۲m & -۳ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ را به دست آورید.

پاسخ: A ماتریس سطری است، پس دارای فقط یک سطر می‌باشد؛ یعنی $۲m=۱ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$ و B ماتریس ستونی است پس فقط دارای یک ستون است؛ یعنی $P=۱$، بنابراین:

$$C=\begin{bmatrix} ۰ & ۱-۱ & ۲(\frac{۱}{۲})+۱ \\ ۲(\frac{۱}{۲})-۱ & ۱-۲(\frac{۱}{۲}) & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } C = ۲-۳=-۱$$

۱۴. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} m & n-۲ \\ ۲k & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۳n \\ ۴-k & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس $A+B$ یک ماتریس اسکالر باشد، آنگاه حاصل $۳m-۲n+k$ را به دست آورید.

پاسخ: در ماتریس اسکالر درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی مساوی‌اند.

$$A+B=\begin{bmatrix} m & n-۲ \\ ۲k & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۳n \\ ۴-k & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-۲ & ۴n-۲ \\ k+۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

ماتریس $A+B$ ماتریس اسکالر است، پس:

$$\begin{cases} ۴n-۲=۰ \Rightarrow n=\frac{۱}{۲} \\ k+۴=۰ \Rightarrow k=-۴ \Rightarrow ۳m-۲n+k=۳(۶)-۲(\frac{۱}{۲})+(-۴)=۱۳ \\ m-۲=۴ \Rightarrow m=۶ \end{cases}$$

۱۵. اگر A و B ماتریس‌های $m\times n$ و r یک عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $r(A\pm B)=rA\pm rB$.

پاسخ: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ داریم:

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n})=r[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}=$$
$$[r(a_{ij}\pm b_{ij})]_{m\times n}=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}\pm[rb_{ij}]_{m\times n}=$$
$$r[a_{ij}]_{m\times n}\pm r[b_{ij}]_{m\times n}=rA\pm rB$$

۱۶. اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $(r\pm s)A=rA\pm sA$.

پاسخ: می‌دانیم $rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$ پس داریم:

$$(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]_{m\times n}=[(r\pm s)a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]_{m\times n}=$$
$$[ra_{ij}]_{m\times n}\pm[sa_{ij}]_{m\times n}=r[a_{ij}]_{m\times n}\pm s[a_{ij}]_{m\times n}=rA\pm sA$$

۱۷. اگر A و B ماتریس‌های $m\times n$ و r عدد حقیقی باشد، ثابت کنید: $A=B\Rightarrow rA=rB$.

پاسخ: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، چون $A=B$، پس به‌ازای هر i و j نتیجه می‌گیریم $a_{ij}=b_{ij}$ داریم:

$$rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}=[rb_{ij}]_{m\times n}=r[b_{ij}]_{m\times n}=rB$$

بنابراین $rA=rB$.

۱۸. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) ماتریس قطری حتماً باید مربعی باشد. ◯ درست ◯ نادرست

ب) ماتریس اسکالر نوعی ماتریس قطری است. ◯ درست ◯ نادرست

ج) ماتریس صفر حتماً ماتریس قطری است. ◯ درست ◯ نادرست

د) ماتریس همانی نوعی ماتریس اسکالر است. ◯ درست ◯ نادرست

هـ) ماتریس سطری نمی‌تواند ماتریس صفر باشد. ◯ درست ◯ نادرست

و) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r عدد حقیقی باشد و $rA=rB$، آنگاه داریم: $A=B$. ◯ درست ◯ نادرست

پاسخ:

الف) درست ب) درست ج) نادرست

د) درست هـ) نادرست و) نادرست

(توجه کنید در امتحانات نهایی تعاریف را در غالب این نوع سؤالات که درستی و نادرستی عبارات را مشخص کنید، مطرح می‌شوند که فقط کافی است با درست و نادرست جواب دهید و دلیل درستی یا نادرستی عبارت از شما خواسته نمی‌شود. گاهی اوقات باید خیلی دقت کنید وگرنه ممکن است اشتباه کنید؛ مثلاً به عنوان نمونه قسمت (و) در سؤال نادرست است، زیرا اگر $r=0$ باشد از $rA=rB$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A=B$)

ضرب ماتریس‌ها

۱۹. یک ماتریس سطری ۳×۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱×۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۱۳$.

پاسخ:

فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ -۳\end{bmatrix}$، آنگاه داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ -۳\end{bmatrix}=۰-۱-۱۲=-۱۳$$

۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد و داشته باشیم $B\begin{bmatrix}۶ & -۳\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}C+B\begin{bmatrix}-۴ & ۳\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}C=\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس ABC را به دست آورید.

پاسخ: در تساوی داده‌شده از ماتریس B از سمت چپ و ماتریس C را از راست فاکتور می‌گیریم.

$$B\begin{bmatrix}۶ & -۳\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}C+B\begin{bmatrix}-۴ & ۳\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}C=\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow B\left(\begin{bmatrix}۶ & -۳\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴ & ۳\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}\right)C=\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}C=\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow B(۲I)C=\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۲BC=\begin{bmatrix}۸ & -۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}=BC=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس ABC را پیدا می‌کنیم:

$$ABC=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۶$$

۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$، آنگاه مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

پاسخ: در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر است.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۲۲. دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\bar{o}$ و $B\neq\bar{o}$ ولی $AB=\bar{o}$.

پاسخ: ماتریس‌های A و B را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

(توجه کنید پیدا کردن دو ماتریس با این شرایط می‌تواند مشکل باشد. درایه‌های صفر را در ماتریس‌های A و B بیشتر در نظر بگیرید تا $AB=\bar{o}$ ساده‌تر به وجود آید.)

۲۳. با یک مثال نقض نشان دهید اگر $AB = AC$، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$. (قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.)

پاسخ: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۲&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳&-۱\\۱&۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴&۱\\-۱&-۲\end{bmatrix}$ داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲&۱\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۱\\۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۰\\۷&۰\end{bmatrix}$$

$$A\times C=\begin{bmatrix}۲&۱\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&۱\\-۱&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۰\\۷&۰\end{bmatrix}$$

دیده می‌شود $AB = AC$ ولی $B \neq C$.

(توجه کنید پیدا کردن ماتریس‌های A و B و C که در شرایط مسئله صدق کند به نظر ساده نیست، ولی کافی است ماتریس A را طوری انتخاب کنید که دترمینان A برابر صفر باشد.)

۲۴. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$. اکنون مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس A را بیابید.

پاسخ: ابتدا دو ماتریس اول و دوم را ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۹&۳\\۷&۸&۴\\۳&۲&۵\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}۶&۹&۳\\۷&۸&۴\\۳&۲&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۶&۳\\۸&۷&۴\\۲&۳&۵\end{bmatrix}$$

بنابراین: مجموع درایه‌های قطر فرعی $A = ۳+۷+۲ = ۱۲$

۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}۴&a\\b&c\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}$ و $A\times B$ ماتریسی اسکالر باشد، آنگاه حاصل عبارت $۲a+b+c$ را به دست آورید.

پاسخ: در ماتریس اسکالر درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی برابرند.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴&a\\b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a&-۸+۲a\\b+۳c&-۲b+۲c\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b+۳c=۰\Rightarrow b=-۳c\\ ۴+۳a=-۲b+۲c\xrightarrow{a=۴}-۲b+۲c=۱۶\Rightarrow -b+c=۸\end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases}b=-۳c\\-b+c=۸\end{cases}\Rightarrow ۳c+c=۸\Rightarrow c=۲\Rightarrow b=-۶$$

بنابراین:

$$۲a+b+c=۲(۴)+(-۶)+۲=۴$$

۲۶. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ n+۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۴ \\ -m & ۰ & ۲ \\ ۰ & n & -۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A\times B$ را محاسبه کنید.

پاسخ: در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر است.

$$A \Rightarrow \begin{cases} m-۳=۰ \Rightarrow m=۳ \\ n+۲=۰ \Rightarrow n=-۲ \end{cases}$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۴ \\ -۳ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۴ \\ -۳ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ & ۸ \\ ۳ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

۲۷. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=۳i-۲j$ را در نظر بگیرید. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲-I$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{lll} a_{۱۱}=۳-۲=۱ \ , & a_{۱۲}=۳-۴=-۱ \ , & a_{۱۳}=۳-۶=-۳ \\ a_{۲۱}=۶-۲=۴ \ , & a_{۲۲}=۶-۴=۲ \ , & a_{۲۳}=۶-۶=۰ \\ a_{۳۱}=۹-۲=۷ \ , & a_{۳۲}=۹-۴=۵ \ , & a_{۳۳}=۹-۶=۳ \end{array}$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲۴ & -۱۸ & -۱۲ \\ ۱۲ & ۰ & -۱۲ \\ ۴۸ & ۱۸ & -۱۲ \end{bmatrix}$$

$$A^۲-I=\begin{bmatrix} -۲۴ & -۱۸ & -۱۲ \\ ۱۲ & ۰ & -۱۲ \\ ۴۸ & ۱۸ & -۱۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲۵ & -۱۸ & -۱۲ \\ ۱۲ & -۱ & -۱۲ \\ ۴۸ & ۱۸ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $=-۲۵-۱-۱۳=-۳۹$

۲۸. اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(AB=BA)$، ثابت کنید: $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$.

پاسخ:

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲=A^۲+AB+AB+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲$$

۲۹. اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ باشند و داشته باشیم $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$، ثابت کنید $AB = BA$. (یعنی A و B تعویض‌پذیرند)

پاسخ: ابتدا ماتریس $(A+B)^۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B^۲ \quad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر فرض داریم:

$$(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲ \quad (۲)$$

$$(۲)\ ,\ (۱)\ \text{از} \Rightarrow A^۲ + AB + BA + B^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲ \Rightarrow AB = BA$$

۳۰. اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $B = [b_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند. ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس حاصل $(-A)\times(۲B)$ را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^۲ - ۱ & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases} , \quad b_{ij} = \begin{cases} i^۲ + ۱ & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + ۲ & i < j \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{array}{lll} a_{۱۱} = ۰ & , \quad a_{۱۲} = ۲-۱ = ۱ & , \quad a_{۱۳} = ۳-۱ = ۲ \\ a_{۲۱} = ۲-۱ = ۱ & , \quad a_{۲۲} = ۴-۱ = ۳ & , \quad a_{۲۳} = ۳-۲ = ۱ \\ a_{۳۱} = ۳-۱ = ۲ & , \quad a_{۳۲} = ۳-۲ = ۱ & , \quad a_{۳۳} = ۹-۱ = ۸ \end{array}$$

پس:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{array}{lll} b_{۱۱} = ۱+۱ = ۲ & , \quad b_{۱۲} = ۱-۲+۲ = ۱ & , \quad b_{۱۳} = ۱-۳+۲ = ۰ \\ b_{۲۱} = ۲+۱ = ۳ & , \quad b_{۲۲} = ۴+۱ = ۵ & , \quad b_{۲۳} = ۲-۳+۲ = ۱ \\ b_{۳۱} = ۳+۱ = ۴ & , \quad b_{۳۲} = ۳+۲ = ۵ & , \quad b_{۳۳} = ۹+۱ = ۱۰ \end{array}$$

پس:

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

بنابراین:

$$(-A)\times(۲B) = -۲AB = -۲\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱۰ \end{bmatrix} =$$

$$-۲\begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۵ & ۲۱ \\ ۱۵ & ۲۱ & ۱۳ \\ ۳۹ & ۴۷ & ۸۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۲ & -۳۰ & -۴۲ \\ -۳۰ & -۴۲ & -۲۶ \\ -۷۸ & -۹۴ & -۱۶۲ \end{bmatrix}$$

۳۱. در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}۱\\۳\\۲\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}a & b & c\\۳ & -۶ & ۹\\d & e & f\end{bmatrix}$ حاصل $a+e+۲f$ را به دست آورید.

پاسخ: از تساوی داده‌شده نتیجه می‌گیریم، چون مرتبهٔ ماتریس $\begin{bmatrix}۱\\۳\\۲\end{bmatrix}$ مساوی ۳×۱ است، پس ماتریس A از مرتبهٔ ۱×۳ است. فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix}۱\\۳\\۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\۳ & -۶ & ۹\\d & e & f\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x & y & z\\۳x & ۳y & ۳z\\۲x & ۲y & ۲z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\۳ & -۶ & ۹\\d & e & f\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۳x=۳\Rightarrow x=۱\\۳y=-۶\Rightarrow y=-۲\\۳z=۹\Rightarrow z=۳\end{cases}$$

از طرف دیگر $a=x=۱$ و $e=۲y=-۴$ $f=۲z=۶$ پس:

$$a+e+۲f=۱-۴+۱۲=۹$$

۳۲. ماتریس $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\\frac{۱}{۲} & \frac{-\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{۳۲}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\\frac{۱}{۲} & \frac{-\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\\frac{۱}{۲} & \frac{-\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین:

$$A^{۳۲}=(A^۲)^{۱۶}=I^{۱۶}=I$$

۳۳. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\۳ & ۱\end{bmatrix}$ در تساوی $A^۲+mA+nI_۲=\bar{o}$ صدق می‌کند. حاصل $۲m-n$ را بیابید.

پاسخ: ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم و در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\۹ & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^۲+mA+nI_۲=\bar{o}\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & -۳\\۹ & -۲\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}۲ & -۱\\۳ & ۱\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}۱ & ۰\\۰ & ۱\end{bmatrix}=\bar{o}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱+۲m+n & -۳-m\\۹+۳m & -۲+m+n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\۰ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۱+۲m+n=۰\Rightarrow n=۵\\-۳-m=۰\Rightarrow m=-۳\end{cases}$$

بنابراین:

$$۲m-n=-۶-۵=-۱۱$$

(در حل این نوع سؤال نمی‌توانید از رابطهٔ $A^۲-(a+d)A+|A|I=\bar{o}$ در امتحان نهایی استفاده کنید که به رابطهٔ کیلی ـ همیلتون معروف است.)

۳۴. اگر $A=[i^2-i]_{3\times3}$ و $B=[j^2-ij+2]_{3\times3}$ و $C=2A-B$، آنگاه ماتریس C^2 را به دست آورید.

پاسخ: درایه‌های ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم.

$$A=[i^2-i]_{3\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&2&2\\6&6&6\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$B=[j^2-ij+2]_{3\times3}=\begin{bmatrix}2&4&8\\1&2&5\\0&0&2\end{bmatrix}_{3\times3}$$

بنابراین:

$$C=2A-B=2\begin{bmatrix}0&0&0\\2&2&2\\6&6&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4&8\\1&2&5\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-4&-8\\3&2&-1\\12&12&10\end{bmatrix}$$

$$C^2=C\times C=\begin{bmatrix}-2&-4&-8\\3&2&-1\\12&12&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-4&-8\\3&2&-1\\12&12&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-104&-96&-60\\-12&-20&-36\\132&96&-8\end{bmatrix}$$

۳۵. درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه یک ماتریس اسکالر است. ◯ درست ◯ نادرست

ب) ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه خاصیت جابه‌جایی دارد. ◯ درست ◯ نادرست

ج) حاصل‌ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر است هرگاه یکی از آنها صفر باشد. ◯ درست ◯ نادرست

د) اگر A و B ماتریس‌های 3×3 باشند، آنگاه $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ ◯ درست ◯ نادرست

هـ) اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس مربعی قطری باشد، آنگاه هر یک از دو ماتریس هم قطری هستند. ◯ درست ◯ نادرست

و) اگر $A=\begin{bmatrix}r_1&0&0\\0&r_2&0\\0&0&r_3\end{bmatrix}$، آنگاه $A^n=\begin{bmatrix}r_1^n&0&0\\0&r_2^n&0\\0&0&r_3^n\end{bmatrix}$. ◯ درست ◯ نادرست

پاسخ:

الف) نادرست ب) درست ج) نادرست

د) نادرست هـ) نادرست و) درست

(توجه کنید این نمونه سؤالات می‌تواند مشکل و شما را به اشتباه بیاندازد. مثلاً قسمت (هـ) نادرست است. به عنوان مثال نقض اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-3\\-1&2\end{bmatrix}$، آنگاه $AB=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$، دیده می‌شود AB ماتریس قطری است، ولی A و B قطری نیستند.)

۳۶. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۰ & m & -۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A\times B=۲۰$ آنگاه مقدار m را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۰ & m & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\\ ۷\\ -۱\\ -۲\end{bmatrix}=[۲+۶+۰-m+۱۰]=[۱۸-m]=۱۸-m$$

$$A\times B=۲۰\Rightarrow ۱۸-m=۲۰\Rightarrow m=-۲$$

۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & a & b\\ ۰ & ۰ & c\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$، ثابت کنید: $A^۳=\bar{o}$.

پاسخ: ابتدا ماتریس $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۰ & a & b\\ ۰ & ۰ & c\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & a & b\\ ۰ & ۰ & c\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ac\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ac\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & a & b\\ ۰ & ۰ & c\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{o}$$

۳۸. در صورتی‌که α و β جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲ & ۱\\ ۱ & -x & -۱\\ -۱ & ۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا معادلهٔ داده شده را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲ & ۱\\ ۱ & -x & -۱\\ -۱ & ۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}x-۳ & ۲x+۳ & x+۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۲x-۳+x^۲+۳x=۰\Rightarrow ۲x^۲-۲x-۳=۰$$

چون α و β ریشه‌های این معادله هستند، پس داریم:

$$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}=\frac{۲}{۲}=۱$$

$$\alpha\beta=P=\frac{c}{a}=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{۱}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۲}{۳}$$

سوالات طبقه‌بندی شده

۳۹. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید. (شهریور ۹۹)

۴۰. مقادیر x و y را از معادله زیر به دست آورید. (دی ۹۹)

$$[x \quad ۲]\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=[۴ \quad y-۲]$$

۴۱. اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $[x \quad ۲ \quad -y]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید. (دی ۹۷)

۴۲. اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$ باشند. مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم $A^۲-B=\bar{o}$ ($\bar{o}$ ماتریس صفر است.) (دی ۹۸)

۴۳. اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۰ \\ m-۲ & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید و اگر $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$ ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید، سپس ماتریس $B^۲+۲I$ را محاسبه کنید. (دی ۱۴۰۱)

۴۴. با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید. (دی ۱۴۰۱)

$$(A-۳I)^۲=A^۲-۶A+۹I$$

۴۵. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۷$ را به دست آورید. (دی ۹۸)

سوالات تألیفی

وارون ماتریس

۴۶. نشان دهید ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.

پاسخ: دو ماتریس A و B وارون یکدیگرند، هرگاه $AB=BA=I$.

$$BA=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I \qquad AB=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

پس ماتریس‌های A و B وارون یکدیگرند.

۴۷. مقدار m را به گونه‌ای پیدا کنید که ماتریس $\begin{bmatrix}m+1&1\\4&m-2\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

پاسخ: ماتریس مربعی A وارون‌پذیر نیست، هرگاه $|A|=0$، پس:

$$\begin{vmatrix}m+1&1\\4&m-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow(m+1)(m-2)-4=0$$

$$\Rightarrow m^2-m-2-4=0\Rightarrow m^2-m-6=0\Rightarrow(m-3)(m+2)=0\Rightarrow m=3\ ,\ m=-2$$

۴۸. ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصربه‌فرد است. (قضیهٔ یکتایی وارون)

پاسخ: فرض کنیم ماتریس A وارون‌پذیر باشد و ماتریس‌های B و C وارون‌های ماتریس A باشند، در این صورت داریم:

$$AB=BA=I\ ,\ AC=CA=I$$

اکنون ثابت می‌کنیم $B=C$.

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$$

پس اگر A وارون‌پذیر باشد آنگاه فقط یک ماتریس وارون می‌تواند داشته باشد.

۴۹. اگر $A=\begin{bmatrix}5|A|&|A|\\5&4|A|^2\end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A^3|$ را بیابید.

پاسخ: از طرفین تساوی داده‌شده دترمینان می‌گیریم.

$$A=\begin{bmatrix}5|A|&|A|\\5&4|A|^2\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}5|A|&|A|\\5&4|A|^2\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow|A|=20|A|^3-5|A|\Rightarrow 20|A|^3-6|A|=0\Rightarrow|A|(20|A|^2-6)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A|=0\\20|A|^2-6=0\Rightarrow|A|^2=\frac{3}{10}\Rightarrow|A|=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\end{cases}$$

بنابراین:

$$|A|=0\Rightarrow|A|^3=0$$

$$|A|=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\Rightarrow|A|^3=\pm\frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{10}}$$

۵۰. وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا درایه‌های ماتریس A را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۹۳}\begin{bmatrix} ۱۳ & -۲ \\ ۱ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱۳}{۹۳} & \frac{-۲}{۹۳} \\ \frac{۱}{۹۳} & \frac{۷}{۹۳} \end{bmatrix}$$

۵۱. اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $\frac{۱۴}{۵}A^{-۱}-۳B^{-۱}$ را بیابید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲۰-۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۰+۱۵}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۵}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\frac{۱۴}{۵}A^{-۱}-۳B^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}-\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۵ & -۶ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۶}{۵} \\ \frac{۳}{۵} & \frac{۶}{۵} \end{bmatrix}$$

۵۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، آنگاه ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و نشان دهید: $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$.

پاسخ: ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۶+۴}\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & -\frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۱۰} & \frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}$$

پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۶+۴=۱۰$$

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & -\frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۱۰} & \frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۳}{۵۰}+\frac{۲}{۵۰}=\frac{۵}{۵۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

بنابراین $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$.

۵۳. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ در تساوی $A^{-۱}=mA+nI_۲$ صدق می‌کند. حاصل $m+n$ را بیابید.

پاسخ: ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۲+۱}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=mA+nI_۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}=m\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}+n\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲m+n & m \\ -m & -m+n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲m+n=۱ \Rightarrow n=-۱ \\ m=۱ \end{cases}$$

پس $m+n=۰$.

۵۴. اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & -۵ \end{bmatrix}$، آنگاه ماتریس $۲A\times B$ را بیابید.

پاسخ: از $A^{-۱}$ وارون می‌گیریم تا ماتریس A به دست آید.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\frac{۱}{-۲+۴}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$۲A\times B=۲\times\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۲ & -۶ \\ -۱۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵۵. مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر ۲×۲ برابر ۳ است. وارون این ماتریس را بیابید.

پاسخ: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} m & ۰ \\ ۰ & m \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر ۲×۲ باشد.

$$\text{مجموعه درایه‌های } A=۳ \Rightarrow ۲m=۳ \Rightarrow m=\frac{۳}{۲} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{\frac{۹}{۴}}\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}=\frac{۴}{۹}\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

۵۶. اگر $A^{۲}+۳A+۲I=\bar{o}$، آنگاه نشان دهید: $A^{-۱}=-\frac{۱}{۲}(A+۳I)$.

پاسخ: ماتریس $+۲I$ را به طرف راست می‌بریم و از ماتریس A در طرف چپ فاکتور می‌گیریم.

$$A^{۲}+۳A+۲I=\bar{o}\Rightarrow A(A+۳I)=-۲I\xrightarrow{\text{تقسیم بر } -۲}$$

$$A(\frac{A+۳I}{-۲})=I\Rightarrow A^{-۱}=-\frac{۱}{۲}(A+۳I)$$

۵۷. در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&-۱\end{bmatrix}$ ماتریس A را به دست آورید.

پاسخ: طرفین تساوی را از چپ در وارون ماتریس $B=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&-۱\end{bmatrix}\xrightarrow{B^{-۱}\times}A=B^{-۱}\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۰&۱\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۰&-۱\\-۱&-۵\end{bmatrix}$$

۵۸. در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&-۱\end{bmatrix}$ ماتریس A را بیابید.

پاسخ: فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}$ با ضرب $B^{-۱}$ از چپ و $C^{-۱}$ از راست در تساوی داده‌شده ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&-۱\end{bmatrix}\xrightarrow[\times C^{-۱}]{B^{-۱}\times}A=B^{-۱}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&-۱\end{bmatrix}C^{-۱}\Rightarrow$$

$$A=\frac{۱}{-۲+۱}\begin{bmatrix}-۱&-۱\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&-۱\end{bmatrix}\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۱&-۳\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\۳&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۳\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۴&-۳\\-۷&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۳\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۱۵\\-۷&۲۵\end{bmatrix}$$

۵۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۴\end{bmatrix}$، آنگاه ماتریس $۵A^{-۱}-۲(A^{-۱})^{-۱}$ را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $(A^{-۱})^{-۱}=A$ پس داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۸-۳}\begin{bmatrix}۴&-۳\\-۱&۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۴&-۳\\-۱&۲\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$۵A^{-۱}-۲(A^{-۱})^{-۱}=۵A^{-۱}-۲A=۵\times\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۴&-۳\\-۱&۲\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۳\\-۱&۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۶\\۲&۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۹\\-۳&-۶\end{bmatrix}$$

۶۰. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & -۳ \\ ۵ & m+۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقدار m را طوری پیدا کنید که ماتریس $A+۲B$ وارون‌پذیر نباشد.

پاسخ: ماتریس $A+۲B$ وارون‌پذیر نیست، هرگاه دترمینان آن صفر باشد.

$$A+۲B=\begin{bmatrix} m & -۳ \\ ۵ & m+۲ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m-۲ & ۳ \\ ۹ & m+۴ \end{bmatrix}$$

$$|A+۲B|=۰\Rightarrow\begin{vmatrix} m-۲ & ۳ \\ ۹ & m+۴ \end{vmatrix}=۰\Rightarrow(m-۲)(m+۴)-۲۷=۰$$

$$m^۲+۲m-۳۵=۰\Rightarrow(m+۷)(m-۵)=۰\Rightarrow m=-۷ \text{ یا } m=۵$$

۶۱. ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$ مفروض است، مجموع درایه‌های ماتریس A را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $(A^{-۱})^{-۱}=A$، پس از ماتریس $A^{-۱}$ وارون می‌گیریم.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\Rightarrow(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{-۶+۴}\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر $۱+۲-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۱$ می‌باشد.

۶۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳|A| & ۲ \\ ۵ & |A| \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورید. $(|A|>۰)$

پاسخ: از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم.

$$A=\begin{bmatrix} ۳|A| & ۲ \\ ۵ & |A| \end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix} ۳|A| & ۲ \\ ۵ & |A| \end{vmatrix}\Rightarrow|A|=۳|A|^۲-۱۰\Rightarrow ۳|A|^۲-|A|-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow|A|=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۱۲۰}}{۶}=\frac{۱\pm۱۱}{۶}\Rightarrow\begin{cases}|A|=۲\\ |A|=-\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

چون $|A|>۰$ پس $|A|=-\frac{۵}{۳}$ قابل قبول نیست داریم:

$$|A|=۲\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۲-۱۰}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۵ & ۶ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۵ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -\frac{۵}{۲} & ۳ \end{bmatrix}$$

۶۳. اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۳A$ را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $(A^{-۱})^{-۱}=A$ داریم:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۳-۲}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & -۸\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۳A=\begin{bmatrix}۱۱ & -۸\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۳A$ برابر -۱ است.

۶۴. دو ماتریس A و B وارون‌پذیرند و $A^{-۱}+B^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix}-۳ & -\frac{۵}{۲}\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}$ در این صورت مجموع درایه‌های قطر اصلی $A+B$ را بیابید.

پاسخ: از تساوی $A^{-۱}+B^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=۲I$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$A^{-۱}+B^{-۱}=۲I\xrightarrow[\text{از چپ ضرب می‌کنیم } A]{\text{طرفین را در ماتریس}}A(A^{-۱}+B^{-۱})=۲AI\Rightarrow AA^{-۱}+AB^{-۱}=۲A$$

$$\Rightarrow I+AB^{-۱}=۲A\xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم } B]{\text{طرفین را در ماتریس}}(I+AB^{-۱})B=۲AB\Rightarrow B+AB^{-۱}B=۲AB$$

$$\Rightarrow B+A=۲AB\Rightarrow A+B=۲\begin{bmatrix}-۳ & -\frac{۵}{۲}\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶ & -۵\\ -۴ & -۲\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+B$ مساوی -۸ است.

۶۵. اگر $A^۳=۳I$ آنگاه ثابت کنید وارون ماتریس $A-I$ برابر $\frac{۱}{۲}(A^۲+A+I)$ است.

پاسخ:

$$A^۳=۳I\Rightarrow A^۳-I=۲I\Rightarrow(A-I)(A^۲+A+I)=۲I\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}}$$

$$(A-I)(\frac{A^۲+A+I}{۲})=I\Rightarrow(A-I)^{-۱}=\frac{۱}{۲}(A^۲+A+I)$$

۶۶. دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با $A^{-۱}$ بیابید.

پاسخ: در صورتی‌که $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ متغیرهای این دستگاه باشد، داریم:

$$AX=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۳x-۵y=۱\\ ۴x+۲y=۱۰\end{cases}$$

برای به دست آوردن جواب‌های دستگاه به روش $A^{-۱}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۶+۲۰}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۵۲\\ ۲۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ y=۱\end{cases}$$

۶۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۳&۱\end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$، آنگاه معادله $AX=B$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ: جواب‌های دستگاه $AX=B$ به صورت $X=A^{-۱}B$ به دست می‌آید.

$$A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۳&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲-۹}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۳&۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۷}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۳&۲\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{-۷}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۷}\begin{bmatrix}-۱۳\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۳}{۷}\\-\frac{۴}{۷}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱۳}{۷}\\y=-\frac{۴}{۷}\end{cases}$$

۶۸. مقدار m را طوری پیدا کنید تا دستگاه معادلات $\begin{cases}(۲m+۱)x-my=۱\\-۷mx+(m+۶)y=-m\end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد.

پاسخ: دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد، هرگاه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Rightarrow\frac{۲m+۱}{-۷m}=\frac{-m}{m+۶}=\frac{۱}{-m}\quad(۱)$$

$$\frac{-m}{m+۶}=\frac{۱}{-m}\Rightarrow m^۲-m-۶=۰\Rightarrow(m-۳)(m+۲)=۰\Rightarrow m=۳ \text{ یا } m=-۲$$

اکنون این مقادیر به دست آمده را امتحان می‌کنیم، mهای قابل قبول است که در تساوی (۱) صدق کند.

$$m=۳\Rightarrow\frac{۶+۱}{-۲۱}=\frac{-۳}{۹}=\frac{۱}{-۳}\ \checkmark$$

$$m=-۲\Rightarrow\frac{-۴+۱}{۱۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\quad \text{غیرقابل قبول}$$

پس به‌ازای $m=۳$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۶۹. مقادیر k را طوری پیدا کنید که دستگاه معادلات $\begin{cases}kx+۳y=۴\\x-۲y=۳\end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد داشته باشد.

پاسخ: دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ جواب منحصربه‌فرد دارد هرگاه $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$.

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\Rightarrow\frac{k}{۱}\neq\frac{۳}{-۲}\Rightarrow k\neq-\frac{۳}{۲}$$

۷۰. در دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=m\\cx+dy=۲m+۱\end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب مجهولات $\begin{bmatrix}۲&۰\\-۱&۱\end{bmatrix}$ است. اگر $x=۴$ باشد، آنگاه مقدار y را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم جواب‌های دستگاه $AX=B$ به صورت $X=A^{-۱}B$ می‌باشد. در این مسئله $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&۰\\-۱&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}m\\۲m+۱\end{bmatrix}$ است داریم:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ ۲m+۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲m \\ m+۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲m \\ y = m+۱ \end{cases}$$

چون $x = ۴$، پس $۲m = ۴$، در نتیجه $m = ۲$؛ بنابراین:

$$y = m+۱ = ۲+۱ \Rightarrow y = ۳$$

۷۱. در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=-۱ \\ cx+dy=۲ \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است. حاصل $dx+ay$ را به دست آورید.

پاسخ: بنا بر فرض سؤال اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه باشد آنگاه $A^{-1} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ بنابراین از A^{-1} وارون می‌گیریم تا ماتریس A به دست آید.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = \frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ d = ۳ \end{cases}$$

از طرف دیگر جواب‌های دستگاه معادلهٔ $AX = B$ از رابطهٔ $X = A^{-1}B$ به دست می‌آید.

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -۵ \\ y = ۴ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$dx + ay = (۳)(-۵) + (۱)(۴) = -۱۵ + ۴ = -۱۱$$

دترمینان

۷۲. اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا دترمینان ماتریس A را برحسب سطر سوم به دست می‌آوریم.

$$|A| = \begin{vmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۱(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} + ۳(-۱)^{۵}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۱(-۱-۴) - ۳(۱) = -۵ - ۳ = -۸$$

پس:

$$||A|A| = |-۸A| = (-۸)^{۳}|A| = (-۸)^{۳}(-۸) = ۸^{۴} = ۴۰۹۶$$

۷۳. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $|AB| + |BA|$ را بیابید.

پاسخ: ماتریس‌های AB و BA را به دست می‌آوریم.

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}=[-۲-۲-۹]=[-۱۳]\Rightarrow|AB|=-۱۳$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴ & ۶\\-۱ & -۲ & ۳\\۳ & ۶ & -۹\end{bmatrix}\Rightarrow|BA|=\begin{vmatrix}-۲ & -۴ & ۶\\-۱ & -۲ & ۳\\۳ & ۶ & -۹\end{vmatrix}\xlongequal[\text{سطر اول}]{\text{برحسب}}$$

$$-۲(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}-۲ & ۳\\۶ & -۹\end{vmatrix}-۴(-۱)^{۳}\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\۳ & -۹\end{vmatrix}+۶(-۱)^{۴}\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\۳ & ۶\end{vmatrix}=-۲(۱۸-۱۸)+۴(۹-۹)+۶(-۶+۶)=۰$$

بنابراین: $|AB|+|BA|=-۱۳+۰=-۱۳$

(توجه کنید از نکات تستی در حل این مسئله در امتحان نهایی نمی‌توانید استفاده کنید، چون می‌دانیم ماتریس $A_{۳\times۱}$ در ماتریس $B_{۱\times۳}$ ضرب شود، آنگاه همواره $|AB|=۰$ است، ولی از این موضوع استفاده نکنید.)

(در ضمن برای محاسبه دترمینان بیان کنید نسبت به چه سطر یا ستونی دترمینان را حساب می‌کنید یا می‌توانید از روش ساروس برای دترمینان ۳×۳ استفاده کنید.)

۷۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\۰ & -۳ & ۰\\۱ & ۰ & -۵\end{bmatrix}$، آنگاه $|-۲A^{۲}|$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا حاصل دترمینان A را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم.

$$|A|=\begin{vmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\۰ & -۳ & ۰\\۱ & ۰ & -۵\end{vmatrix}=-۲(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}-۳ & ۰\\۰ & -۵\end{vmatrix}=(-۲)(۱۵)=-۳۰$$

$$|-۲A^{۲}|=(-۲)^{۳}|A|^{۲}=(-۸)(-۳۰)^{۲}=-۸\times۹۰۰=-۷۲۰۰$$

۷۵. ماتریسی ۳×۳ چون A بیابید که $|A|=-۶$.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\۰ & -۳ & ۰\\۵ & ۷ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۲(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}-۳ & ۰\\۷ & ۱\end{vmatrix}=-۶$$

۷۶. اگر A ماتریس ۳×۳ و اسکالر باشد به طوری‌که مجموع درایه‌های آن برابر ۱۲ باشد، در این صورت $|A|$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}k & ۰ & ۰\\۰ & k & ۰\\۰ & ۰ & k\end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر ۳×۳ باشد.

مجموع درایه‌های $A=۱۲\Rightarrow ۳k=۱۲\Rightarrow k=۴$

بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\۰ & ۴ & ۰\\۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{برحسب}}|A|=۴(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}۴ & ۰\\۰ & ۴\end{vmatrix}=۴\times۴^{۲}=۴^{۳}=۶۴$$

۷۷. اگر $A^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه دترمینان ماتریس $AB+BA$ را بیابید.

پاسخ: ماتریس $(A+B)^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$(A+B)^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم:

$$(A+B)^{۲}=A^{۲}+AB+BA+B^{۲}\Rightarrow AB+BA=(A+B)^{۲}-A^{۲}-B^{۲}\Rightarrow$$

$$AB+BA=\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۶ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$|AB+BA|=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۶ & -۲ \end{vmatrix}=-۲-۶=-۸$$

۷۸. دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & m \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -m \end{bmatrix}$ برابر ۱۵- است. مقدار m را بیابید.

پاسخ: حاصل دترمینان را برحسب سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & m \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -m \end{vmatrix}=-۱۵\Rightarrow ۱(-۱)^{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & -m \end{vmatrix}+m(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-۱۵$$

$$\Rightarrow -m-۲m=-۱۵\Rightarrow -۳m=-۱۵\Rightarrow m=۵$$

۷۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $|۱۴B^{-۱}+A^{-۱}|$ را بیابید.

پاسخ: ماتریس‌های $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۲+۳}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۲+۱۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$۱۴B^{-۱}+A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۷ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|۱۴B^{-۱}+A^{-۱}|=\begin{vmatrix} ۰ & -۷ \\ ۴ & ۴ \end{vmatrix}=۲۸$$

۸۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} -۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳-x \end{vmatrix}=۰$ را بیابید.

پاسخ: حاصل دترمینان را برحسب سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} -۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳-x \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -۴(-۱)^{۲}\begin{vmatrix} ۲-x & ۱ \\ ۲ & ۳-x \end{vmatrix} + ۱(-۱)^{۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳-x \end{vmatrix} + ۱(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۱ & ۲-x \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow -۴(۶-۵x+x^{۲}-۲) - ۱(۳-x-۳) + ۱(۲-۶+۳x) = ۰$$

$$\Rightarrow -۱۶+۲۰x-۴x^{۲}+x-۴+۳x = ۰ \Rightarrow ۴x^{۲}-۲۴x+۲۰ = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۶x+۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۵ \text{ یا } x = ۱ \Rightarrow \text{ مجموع جواب‌ها } = ۵+۱ = ۶$$

۸۱. نشان دهید دترمینان ماتریس ۳×۳ که دارای دو سطر مساوی است، برابر صفر می‌باشد.

پاسخ: ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ که دو سطر مساوی دارد را در نظر می‌گیریم. حاصل دترمینان A را برحسب سطر سوم محاسبه می‌کنیم.

$$|A| = d(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} + e(-۱)^{۵}\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f(-۱)^{۶}\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= d(۰) - e(۰) + f(۰) = ۰$$

۸۲. اگر $A+B = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$ و $|AB| = ۵$ آنگاه دترمینان ماتریس $A^{-۱}+B^{-۱}$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنیم $|A^{-۱}+B^{-۱}| = m$ در این صورت داریم.

$$|A^{-۱}+B^{-۱}| = m \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } |A|} |A||A^{-۱}+B^{-۱}| = |A|m \Rightarrow |AA^{-۱}+AB^{-۱}| = m|A|$$

$$\Rightarrow |I+AB^{-۱}| = m|A| \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } |B|} |I+AB^{-۱}||B| = m|A||B| \xrightarrow{|AB|=|A||B|}$$

$$|IB+AB^{-۱}B| = m|AB| \Rightarrow |B+A| = m|AB| \Rightarrow m = \frac{|A+B|}{|AB|} \quad (۱)$$

از طرف دیگر $|A+B| = \begin{vmatrix} -۱ & -۳ \\ -۴ & -۲ \end{vmatrix} = ۲-۱۲ = -۱۰$ و $|AB| = ۵$ بنابراین:

$$(۱) \text{ از } \Rightarrow m = \frac{-۱۰}{۵} = -۲$$

۸۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & m \\ n & -۳ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر با درایه‌های غیرصفر مفروض است. در صورتی $A+A^{-۱}$ ماتریس قطری باشد. حاصل $|A+A^{-۱}|$ را بیابید.

پاسخ: در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & m \\ n & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} -۳ & -m \\ -n & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{|A|} & -\frac{m}{|A|} \\ -\frac{n}{|A|} & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & m\\ n & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{3}{|A|} & -\frac{m}{|A|}\\ -\frac{n}{|A|} & \frac{2}{|A|}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\frac{3}{|A|} & m-\frac{m}{|A|}\\ n-\frac{n}{|A|} & -3+\frac{2}{|A|}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{قطری است}]{\text{ماتریس } A+A^{-1}}\begin{cases}m-\frac{m}{|A|}=0\\ n-\frac{n}{|A|}=0\end{cases}\xrightarrow{m,n\neq 0}1-\frac{1}{|A|}=0\Rightarrow |A|=1$$

بنابراین:

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow |A+A^{-1}|=1$$

۸۴. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) ماتریس اسکالری که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن یک باشند را ماتریس ..... می‌نامیم.

ب) اگر دترمینان ماتریس A با دترمینان ماتریس A^{-1} برابر باشد، آنگاه $|A^{-1}|$ برابر ..... است.

ج) اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 6\\ -1 & 7 & 4\end{bmatrix}$ آنگاه $|-A^3|$ برابر ..... است.

د) اگر $A=\begin{bmatrix}a & -3\\ 5 & a+2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و ماتریس $A+2B$ وارون‌پذیر نباشد آنگاه مجموع مقادیر a برابر ..... است.

پاسخ:

الف) همانی　　ب) ± 1　　ج) -8　　د) -2

۸۵. درستی و نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $|A_{3\times 3}|=3$ آنگاه $|3A_{3\times 3}|=12$.　　درست ◯ نادرست ◯

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ma & nb & kc\\ d & e & f\end{bmatrix}$ آنگاه $|A|=0$.　　درست ◯ نادرست ◯

ج) دستگاه معادلات $\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$ جواب منحصر به فرد دارد هرگاه $ab'\neq a'b$.　　درست ◯ نادرست ◯

د) اگر $A=\begin{bmatrix}-\cos\alpha & -\sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ آنگاه $|A^3|=-1$.　　درست ◯ نادرست ◯

پاسخ:

الف) نادرست　　ب) نادرست　　ج) درست　　د) درست

سوالات طبقه‌بندی شده

۸۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، نشان دهید: $(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{۵}A^{-۱}$. (دی ۱۴۰۱)

۸۷. اگر $A=\begin{bmatrix} -۴ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$، آنگاه ماتریس $(AB)^{-۱}$ را به دست آورید.

۸۸. دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. (شهریور ۹۸)

۸۹. دستگاه $\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$ به‌ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصربه‌فرد است؟ (دی ۹۷)

۹۰. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، حاصل $|-\frac{۱}{۲}A^{۴}|$ را به دست آورید. (دی ۱۴۰۱)

۹۱. اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد. (شهریور ۹۸)

الف) حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید.

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.

۹۲. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با ..... .

ب) در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\frac{۲i}{j-۱}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $۳A$ برابر است با ..... .

ج) اگر $A^{۲}=A$ باشد، آنگاه تساوی $(I-A)(I+A)=I-A$ همواره برقرار..... .

د) اگر A ماتریس اسکالر ۴×۴ باشد و $a_{۱۱}=-۳$، در این صورت $|A|$ برابر ..... است.

هـ) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ k+۴ & r-۲ \end{bmatrix}$ ماتریس همانی باشد، آنگاه ماتریس $\begin{bmatrix} -r & k+۴ & ۰ \\ ۰ & -r & \frac{k}{۴}+۱ \\ r-۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ..... است.

و) ماتریس همانی ماتریسی ..... است که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

۹۳. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (دی ۹۷)

الف) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم $A^۳$ برابر ۵ می‌باشد. درست ◯ نادرست ◯

ب) اگر $A^۲=A$ باشد، در این صورت داریم: $(A+I)^۲=I+۳A$. درست ◯ نادرست ◯

ج) در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A|\neq ۰$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد. درست ◯ نادرست ◯

د) هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است. درست ◯ نادرست ◯

هـ) اگر برای ماتریس‌های متمایز A و B و C داشته باشیم $AB=AC$، آنگاه $B=C$. درست ◯ نادرست ◯

و) اگر A و B دو ماتریس باشند، آنگاه $|AB|=|A||B|$. درست ◯ نادرست ◯

پاسخ سوالات طبقه‌بندی شده

درس اول

پاسخ ۳۹

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}x-1 & 8\\ 3 & z+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+1 & x-2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-1=y+1\Rightarrow y=8\\ 8=x-2\Rightarrow x=10\\ z+1=4\Rightarrow z=3\end{cases}$$

بنابراین:

$$x+y+z=10+8+3=21$$

پاسخ ۴۰

$$\begin{bmatrix}x & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & y-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2x & 4x-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & y-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=4\Rightarrow x=2\\ 4x-2=y-2\Rightarrow y=8\end{cases}$$

پاسخ ۴۱ بنابر فرض سؤال $AB=BA$ است داریم:

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4x+3y & 3x+4y\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+6 & 4y-3\\ 3x+8 & 3y-4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x+8=5\Rightarrow x=-1\\ 3y-4=2\Rightarrow y=2\end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}x & 2 & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=[-2+4-2]=[0]=0$$

پاسخ ۴۲ ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^2-B=\bar{0}\Rightarrow B=A^2\Rightarrow\begin{bmatrix}a+b & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 4a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a+b=5\\ 4a+b=5\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}3a=0\Rightarrow a=0\,,\,b=5$$

پاسخ ۴۳ ماتریس A ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی در آن مساوی‌اند. پس:

$$m-2=0\Rightarrow m=2\,,\,m=n\Rightarrow n=2$$

اکنون درایه‌های ماتریس B را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{lll}b_{11}=1+1=2 & , & b_{12}=2-2=0 \;,\; b_{13}=3-2=1\\ b_{21}=1 & , & b_{22}=2+1=3 \;,\; b_{23}=3-2=1\\ b_{31}=1 & , & b_{32}=1 \;,\; b_{33}=3+1=4\end{array}$$

پس:

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B^2=B\times B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6\\ 6 & 10 & 8\\ 7 & 7 & 18\end{bmatrix}$$

$$B^2+2I=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6\\ 6 & 10 & 8\\ 7 & 7 & 18\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1 & 6\\ 6 & 12 & 8\\ 7 & 7 & 20\end{bmatrix}$$

پاسخ ۴۴

$$(A-3I)^2=(A-3I)(A-3I)=A^2-3A-3A+9I=A^2-6A+9I$$

پاسخ ۴۵ ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=-2I$$

پس:

$$A^7=(A^2)^3\times A=(-2I)^3\times A=-8I\times A=-8A$$

$$=-8\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -16\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

درس دوم

پاسخ ۸۶ ابتدا ماتریس A^{-1} را پیدا می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-3+1}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\quad(1)$$

اکنون ماتریس $(5A)^{-1}$ را به دست می‌آوریم.

$$5A=5\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & -5\\ 5 & -5\end{bmatrix}\Rightarrow(5A)^{-1}=\frac{1}{-75+25}\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -5 & 15\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-50}\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -5 & 15\end{bmatrix}=\frac{5}{-50}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\frac{-1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\quad(2)$$

با مقایسهٔ تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $(5A)^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$.

پاسخ ۸۷ ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم.

$$AB=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

پس:

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{-10+9}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -3 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 3 & 10\end{bmatrix}$$

پاسخ ۸۸ جواب دستگاه $AX=B$ به صورت $X=A^{-1}B$ است، داریم:

$$\begin{cases}3x-4y=1\\ -x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

پس:

$$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$$

پاسخ ۸۹ دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=x \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ جواب منحصربه‌فرد دارد، در صورتی‌که $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد.

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m-۳}{۴} \neq \frac{۳}{m+۱} \Rightarrow m^۲ - ۲m - ۳ \neq ۱۲ \Rightarrow m^۲ - ۲m - ۱۵ \neq ۰$$
$$\Rightarrow (m-۵)(m+۳) \neq ۰ \Rightarrow m \neq ۵ \,,\, m \neq -۳$$

پاسخ ۹۰ دترمینان ماتریس A را برحسب سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱(-۱)^۲ \begin{vmatrix} ۶ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^۳ \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۱(-۱)^۴ \begin{vmatrix} ۲ & ۶ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}$$
$$= ۱(۱۲+۲) - ۲(۴-۲) + ۱(-۲-۶) = ۱۴ - ۴ - ۸ = ۲$$

پس:

$$|-\frac{۱}{۲}A^۴| = (-\frac{۱}{۲})^۳ |A|^۴ = -\frac{۱}{۸} \times ۲^۴ = -\frac{۱}{۸} \times ۱۶ = -۲$$

پاسخ ۹۱ الف) درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$a_{۱۱} = ۱-۱ = ۰ \quad , \quad a_{۱۲} = ۲-۱ = ۱ \quad , \quad a_{۱۳} = ۳-۱ = ۲$$
$$a_{۲۱} = ۲-۱ = ۱ \quad , \quad a_{۲۲} = ۴-۱ = ۳ \quad , \quad a_{۲۳} = ۳-۲ = ۱$$
$$a_{۳۱} = ۳-۱ = ۲ \quad , \quad a_{۳۲} = ۳-۲ = ۱ \quad , \quad a_{۳۳} = ۹-۱ = ۸$$

پس:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۱۲ \\ ۱ & ۱۰ & ۱۱ \\ ۱۹ & ۵ & ۴۲ \end{bmatrix}$$

ب) دترمینان B را برحسب سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$|B| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(-۱)^۲ \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ \end{vmatrix} + ۱(-۱)^۳ \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵) - ۱(-۹) = ۳۹$$

پاسخ ۹۲

الف) ۳۰ — ب) ۱۸

ج) است — د) $(-۳)^۴ = ۸۱$

ه) اسکالر — و) قطری

(توجه کنید در این نمونه سؤالات فقط باید جاهای خالی را پر کنید و دلیلی برای جواب‌های خود نباید بیاورید.)

پاسخ ۹۳

الف) نادرست — ب) درست

ج) نادرست — د) درست

ه) نادرست — و) نادرست

(برای اینکه بیشتر توجه کنید دلیل نادرستی (و) را بیان می‌کنیم. در صورتی‌که $A_{۳\times۲}$ و $B_{۲\times۳}$ باشد، رابطهٔ $|AB| = |A||B|$ برقرار نیست، زیرا ماتریس‌های A و B مربعی نیستند؛ پس دترمینان ندارند.)