سوالات تألیفی

تعریف مقاطع مخروطی

۱. در چه صورتی فصل مشترک یک صفحه با سطح مخروطی هذلولی است؟

پاسخ: اگر صفحه به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند به طوری‌که موازی محور سطح مخروطی و شامل محور نباشد آنگاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است.

۲. هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

پاسخ: صفحهٔ شامل محور سطح مخروطی آن را در دو خط متقاطع قطع می‌کند.

۳. در برخورد یک صفحه با یک رویهٔ مخروطی کدام‌یک از شکل‌های زیر نمی‌توانند فصل مشترک صفحه با رویهٔ مخروطی باشند؟

نقطه ـ هذلولی ـ دو خط متقاطع ـ دایره ـ سهمی ـ دو خط موازی ـ نیم‌دایره ـ بیضی ـ یک خط ـ مستطیل

پاسخ: با توجه به تعریف مقاطع مخروطی فصل مشترک صفحه با یک رویهٔ مخروطی نمی‌تواند دو خط موازی و نیم‌دایره و مستطیل باشد.

۴. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (L) عمود باشد، فصل مشترک حاصل یک دایره است. درست ◯ نادرست ◯

ب) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است. درست ◯ نادرست ◯

ج) اگر صفحهٔ P از مولد سطح مخروطی عبور کند، شکل حاصل یک خط است. درست ◯ نادرست ◯

د) اگر خط d و خط L متقاطع غیرعمود باشند، سطح حاصل از دوران d حول محور L یک سطح مخروطی است. درست ◯ نادرست ◯

پاسخ: الف) نادرست، زیرا اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، مقطع یک نقطه است.

ب) نادرست، در این حالت مقطع دو خط متقاطع است.

ج) درست

د) درست

(توجه کنید در این نوع سؤالات در امتحان نهایی لزومی به توضیح دادن و دلیل آوردن نیست. در اینجا برای یادگیری بیشتر توضیح داده شده است.)

۵. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه سهمی است اگر صفحه موازی ..... سطح مخروطی باشد.

ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (L) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک ..... است.

ج) در صورتی که صفحهٔ قاطع یک سطح مخروطی، موازی محور آن و غیرمنطبق با آن باشد، مقطع ایجادشده یک ..... است.

د مقطع یک صفحه با سطح مخروطی ..... دو خط موازی باشد.

پاسخ:

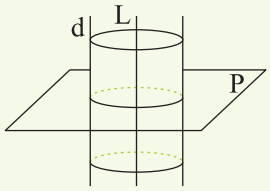
الف) مولد و غیرمنطبق بر مولد　　ب) بیضی

ج) هذلولی　　د) نمی‌تواند

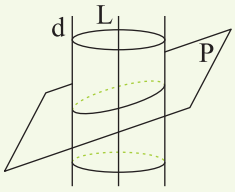
۶. هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می‌شود که آن را سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال اگر صفحهٔ P این سطح استوانه‌ای را قطع کند، در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)

پاسخ: مقطع صفحه با سطح استوانه‌ای به چهار حالت زیر است.

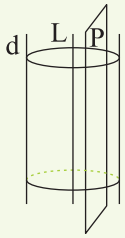
حالت اول: صفحهٔ P عمود بر محور L باشد، مقطع دایره است.



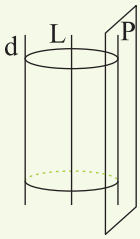
حالت دوم: صفحهٔ P متقاطع با محور L و عمود بر L نباشد، مقطع بیضی است.



حالت سوم: صفحهٔ P متقاطع با سطح استوانه‌ای و موازی با محور L باشد، مقطع دو خط موازی است.



حالت چهارم: صفحهٔ P بر سطح استوانه‌ای مماس باشد، مقطع یک خط است.

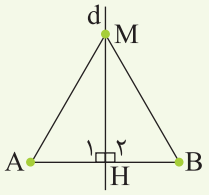


مکان هندسی

۷. ثابت کنید عمودمنصف یک پاره‌خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

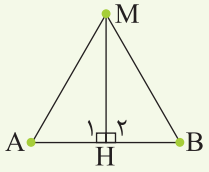
پاسخ: در اینجا یک قضیهٔ دوشرطی مطرح است. باید ثابت کنیم هر نقطه روی عمود منصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است و برعکس.

فرض کنید d عمودمنصف پاره‌خط AB است و M نقطه‌ای روی d باشد. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ AH = BH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow MA = MB$$

برعکس فرض کنیم نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است. از M عمود MH را بر AB رسم می‌کنیم. داریم:



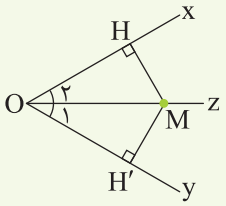
$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow AH = BH$$

پس MH عمودمنصف AB است، یعنی M روی عمودمنصف AB است.

۸. نشان دهید نیمساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند.

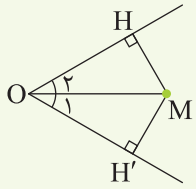
پاسخ: در اینجا یک قضیهٔ دوشرطی مطرح است. باید ثابت کنیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.

فرض کنیم Oz نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ باشد و M نقطه‌ای روی Oz باشد. عمودهای MH و MH' را بر اضلاع زاویهٔ xOy رسم می‌کنیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ OM = OM \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{MOH} \cong \overset{\Delta}{MOH'} \Rightarrow MH = MH'$$

برعکس فرض کنیم نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ xoy به یک فاصله باشد. یعنی $MH = MH'$. از M به O وصل کرده داریم:



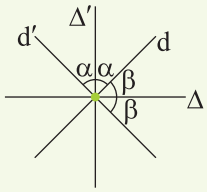
$$\left.\begin{array}{l} MH = MH' \\ OM = OM \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\Delta}{MOH} \cong \overset{\Delta}{MOH'} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

پس M روی نیمساز زاویهٔ O قرار دارد.

۹. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند را مشخص کنید.

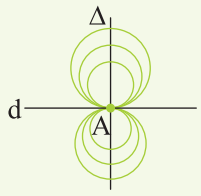
پاسخ: بین دو خط متقاطع d و d' چهار زاویه ایجاد شده است. نیمسازهای این زاویه‌ها که دو خط Δ و Δ' است مکان هندسی موردنظر است.

(توجه کنید در سؤالات مربوط به مکان هندسی رسم شکل الزامی است و در صورت نکشیدن شکل نمره از شما کم می‌شود.)



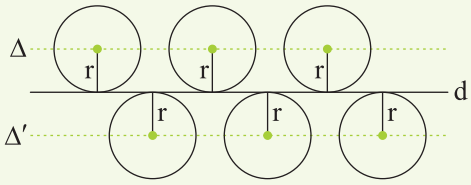
۱۰. مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند را مشخص کنید.

پاسخ: مکان هندسی مرکز این دایره‌ها خط Δ است که از نقطهٔ A گذشته و بر d عمود است.



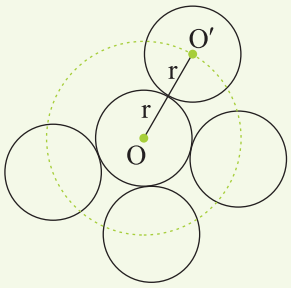
۱۱. مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند را مشخص کنید.

پاسخ: مرکز این دایره‌ها از خط d به فاصلهٔ معلوم r است، پس مکان هندسی مرکز دایره‌ها دو خط موازی با d به فاصلهٔ r از d است. (در شکل دو خط Δ و Δ')



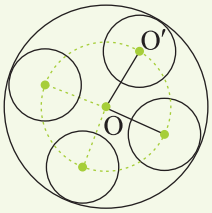
۱۲. مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی به شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارجی‌اند را مشخص کنید.

پاسخ: مرکز دایره‌هایی به شعاع r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ مماس خارجی‌اند، از مرکز O به فاصلهٔ ۲r هستند. پس مکان هندسی مرکز این دایره‌ها، دایره به مرکز O و شعاع ۲r است.



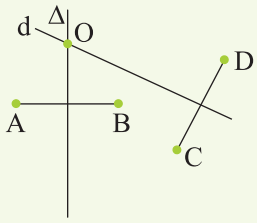
۱۳. مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی به شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,R)$ در صفحهٔ این دایره مماس داخلی‌اند را مشخص کنید. $(R > r)$

پاسخ: مرکز این دایره‌ها از مرکز O به فاصلهٔ $R-r$ قرار دارد، پس مکان هندسی مرکز دایره‌ها دایره به مرکز O و شعاع $R-r$ است.

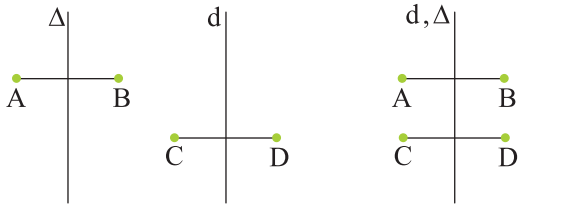


۱۴. نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید.)

پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف پاره‌خط AB (خط Δ) هستند و مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف پاره‌خط CD (خط d) هستند. تلاقی دو خط عمودمنصف Δ و d جواب این مسئله است.



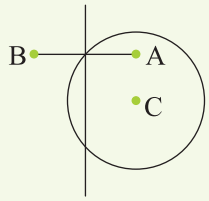
بحث در تعداد جواب‌ها: در صورتی‌که دو عمودمنصف d و Δ متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد و اگر d و Δ موازی باشند، مسئله جواب ندارد و اگر d و Δ بر هم منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد.
(توجه کنید در مسائل مربوط به کاربرد مکان هندسی ابتدا مکان‌های موردنظر در سؤال را مطرح کنید، بعد به بررسی تعداد جواب‌ها بپردازید.)



مسئله جواب ندارد — مسئله بی‌شمار جواب دارد

۱۵. نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.)

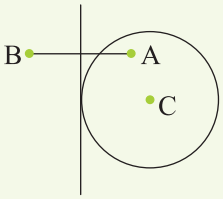
پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی خط عمودمنصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر است، دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است. تلاقی عمودمنصف AB با این دایره جواب این مسئله است.



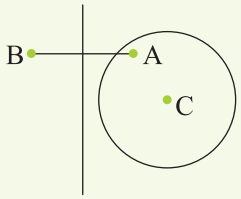
مسئله دو جواب دارد

بحث در تعداد جواب‌ها: اگر عمودمنصف AB دایره به مرکز C را قطع کند، مسئله دو جواب دارد.

اگر عمودمنصف AB بر دایرهٔ C مماس باشد، مسئله یک جواب دارد و اگر دایره را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



مسئله یک جواب دارد

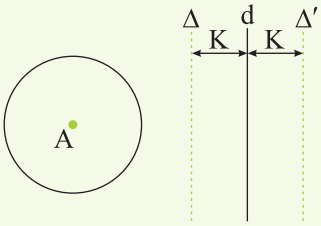


مسئله جواب ندارد

۱۶. نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ R و از d به فاصلهٔ K باشد. (بحث کنید.)

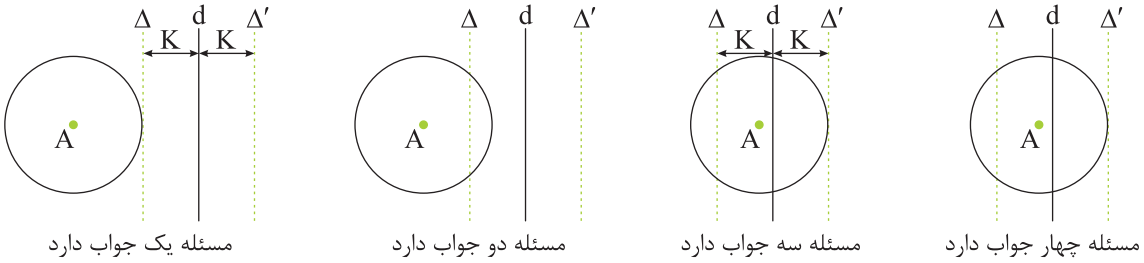
پاسخ: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A به فاصلهٔ R است، دایره به مرکز A و شعاع R است و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ K است، دو خط موازی d در طرفین آن است. تلاقی دایره با این دو خط موازی جواب این مسئله است.

بحث در تعداد جواب‌ها: با توجه به مقادیر R و K اگر هیچ‌کدام از دو خط موازی d دایره به مرکز A را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

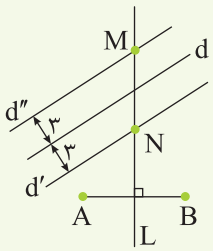


مسئله جواب ندارد

اگر یکی از دو خط موازی مماس بر دایره باشد، مسئله یک جواب دارد و اگر یکی از دو خط موازی دایره را قطع کند، مسئله دو جواب دارد و اگر یکی از دو خط موازی مماس و دیگری قطع کند مسئله سه جواب دارد و اگر هر دو خط موازی دایره را قطع کند، مسئله چهار جواب خواهد داشت. بنابراین مسئله حداکثر چهار جواب دارد.



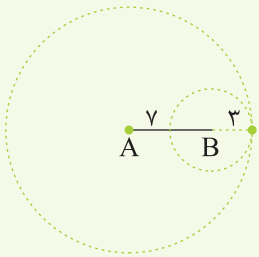
۱۷. دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد.



پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند. بنابراین نقطهٔ برخورد عمودمنصف AB (در شکل خط L) و دو خط موازی d (در شکل خطوط d'' و d') جواب مسئله است.

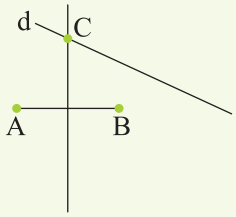
بحث در وجود جواب: اگر L یکی از دو خط موازی d' و d'' را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند و مسئله مانند شکل دو جواب دارد. اگر L با دو خط d' و d'' موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر L بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۱۸. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر و از B به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (مسئله چند جواب دارد.)



پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌مترند روی دایره به مرکز A و شعاع ۱۰ سانتی‌متر است و مکان هندسی نقاطی که از B به فاصلهٔ ۳ سانتی‌مترند روی دایره به مرکز B و شعاع ۳ سانتی‌متر قرار دارد. نقاط تلاقی این دو دایره جواب این مسئله است. چون $۱۰ - ۳ = ۷$ یعنی طول خط‌المرکزین دو دایره (یعنی AB) مساوی تفاضل شعاع‌های دو دایره است، پس این دو دایره مماس درونی‌اند، در نتیجه مسئله فقط یک جواب دارد. (نقطهٔ تماس دو دایره)

۱۹. خط d و پاره‌خط AB در صفحه مفروض‌اند. روی خط d نقطه‌ای مثل C پیدا کنید به طوری‌که مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین باشد. در تعداد جواب‌ها بحث کنید.

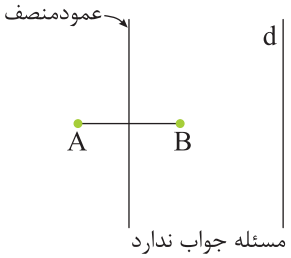


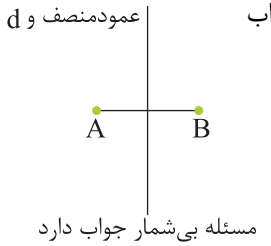
مسئله یک جواب دارد

پاسخ: مثلث ABC متساوی‌الساقین است، یعنی $CA = CB$ پس C روی عمودمنصف AB قرار دارد. در نتیجه عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی عمودمنصف AB با خط d جواب این مسئله است.

بحث در تعداد جواب‌ها: در صورتی‌که عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند، مسئله یک جواب دارد.

و اگر عمودمنصف AB موازی با خط d باشد، مسئله جواب ندارد و اگر بر d منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.





۲۰. هر عبارت را به طوری کامل کنید تا یک گزارهٔ درست حاصل شود.

الف) نیمساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ..... .

ب) دایرهٔ $C(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ..... .

ج) عمودمنصف یک پاره‌خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ..... .

د) مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه است.

هـ) دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از یکدیگر قرار دارند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A به فاصلهٔ ۲/۵ و از B به فاصلهٔ ۱/۵ باشد، یک مجموعهٔ ..... عضوی است.

و) روی دایرهٔ C ..... نقطه وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند.

پاسخ:

الف) از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

ب) از مرکز O به فاصلهٔ ثابت r هستند.

ج) از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

د) مشترک

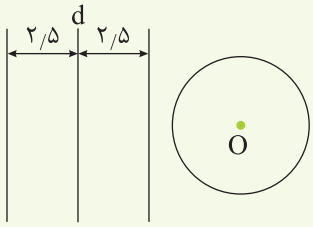
هـ) هیچ

و) حداکثر ۴ نقطه

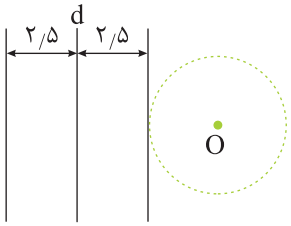
۲۱. نقطهٔ O و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقاطی را بیابید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر باشد. (در تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید.)

پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند، دایره به مرکز O و شعاع ۲ است و مکان نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر هستند، دو خط موازی با d به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر از آن هستند. محل برخورد این دایره و دو خط موازی جواب این مسئله است.

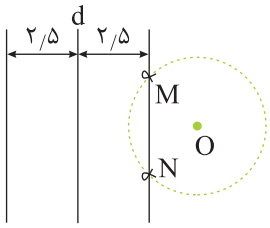
بحث در مورد وجود جواب: در صورتی‌که هیچ‌کدام از دو خط موازی با d دایره را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



و اگر یکی از دو خط موازی مماس بر دایره باشد، مسئله یک جواب دارد.



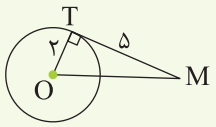
و اگر یکی از دو خط موازی دایره را قطع کند، مسئله دو جواب دارد.



دقت کنید حالتی که هر دو خط موازی دایره را قطع کند یا یکی از دو خط موازی دایره را قطع و دیگری بر آن مماس باشد در اینجا ایجاد نمی‌شود. زیرا بیشترین فاصلهٔ نقاط دایره برابر ۴ ولی فاصلهٔ دو خط موازی برابر ۵ است. پس این مسئله حداکثر ۲ جواب دارد.

۲۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آنها می‌توان مماس‌هایی به طول ۵ بر دایرهٔ C(۰ , ۲) رسم کرد را بیابید.

پاسخ: اگر نقطهٔ M یکی از نقاط قابل قبول از مکان هندسی باشد، آنگاه طول مماس MT برابر ۵ و شعاع دایره برابر با ۲ است داریم:

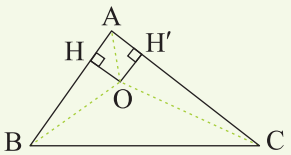


$$\overset{\Delta}{OMT}: OM^{۲} = MT^{۲} + OT^{۲} = ۵^{۲} + ۲^{۲} = ۲۹ \Rightarrow OM = \sqrt{۲۹}$$

بنابراین نقطهٔ M همواره از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ $\sqrt{۲۹}$ است پس مکان هندسی M دایره به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲۹}$ است.

۲۳. مثلث ABC را در نظر بگیرید. مکان هندسی نقطهٔ O درون مثلث ABC که در شرط $\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \frac{AB}{AC}$ صدق کند را به دست آورید.

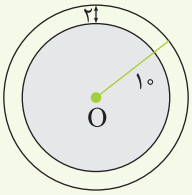
پاسخ: از نقطهٔ O درون مثلث ABC عمودهای OH و OH′ را بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. داریم:



$$\text{فرض سؤال} \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}OH \times AB}{\frac{۱}{۲}OH' \times AC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow OH = OH'$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ O از دو ضلع AB و AC با هم برابر است. پس مکان هندسی نقطهٔ O روی نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ است.

۲۴. دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۱۰ واحد و سکه‌ای به قطر ۴ واحد مفروض‌اند. سکه را روی دایره پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی مرکز سکه به شرط آنکه سکه کاملاً درون دایره قرار گیرد را بیابید.



پاسخ: برای آنکه سکه کاملاً درون دایره قرار بگیرد مرکز سکه باید از محیط دایره حداقل ۲ واحد فاصله داشته باشد. پس مرکز سکه از مرکز O همواره به فاصلهٔ ۸ یا کمتر از ۸ است. در نتیجه مکان هندسی مرکز سکه سطح دایره به مرکز O و شعاع ۸ واحد است.

سوالات طبقه‌بندی شده

۲۵. نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.) (ری ۹۸)

۲۶. مکان هندسی مرکز توپی که روی سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتد را با رسم شکل بیابید.

۲۷. دایرهٔ C و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ C تعیین کنید که از خط Δ به فاصلهٔ معلوم k باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۲۸. دو خط متقاطع d و d' مفروض‌اند. نقاطی را بیابید که از d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از d' به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ سانتی‌متر باشند.

@hendese_beigi

سوالات تألیفی

دایره

۲۹. مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ را به دست آورید.

پاسخ: معادلهٔ دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \Rightarrow (x^۲+ax)+(y^۲+by)+c=۰$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}+(y+\frac{b}{۲})^۲-\frac{b^۲}{۴}+c=۰ \Rightarrow (x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

پس مرکز این دایره $O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ و شعاع آن $R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$ است.

۳۰. کدام‌یک از روابط زیر دایره است؟ در صورت مثبت بودن جواب، دایره را رسم کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$

ب) $(x-۱)^۲+(y+\frac{۱}{۲})^۲=۱$

ج) $(۲x+۱)^۲+(۱-۲y)^۲=۸$

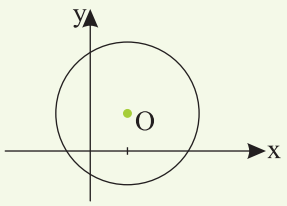
د) $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

هـ) $(۳x+۱)^۲+(۲+۲y)=۱$

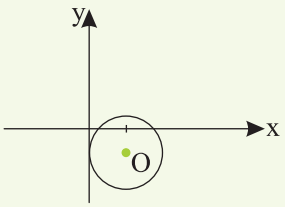
پاسخ: الف) دایره است. زیرا:

$$a=-۲\ ,\ b=-۶\ ,\ c=-۱ \Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۴+۳۶+۴=۴۴>۰$$

مرکز این دایره $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۳)$ است و شعاع آن $R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۳۶+۴}}{۲}=\sqrt{۱۱}$ است.



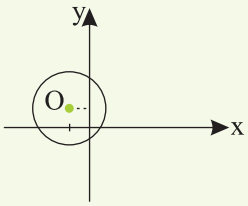
ب) دایره به مرکز $O(۱,-\frac{۱}{۲})$ و شعاع ۱ است.



ج) دایره است، زیرا:

$$(۲x+۱)^۲+(۱-۲y)^۲=۸ \Rightarrow ۴(x+\frac{۱}{۲})^۲+۴(y-\frac{۱}{۲})^۲=۸$$

$$\Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=۲$$



پس دایره به مرکز $O(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و شعاع $\sqrt{۲}$ است.

د) دایره نیست، زیرا:

$a=۲, b=۳, c=۴ \Rightarrow a^۲+b^۲-۴c=۴+۹-۱۶=-۳<۰ \Rightarrow$ تهی است

ه) دایره نیست، زیرا در معادلهٔ داده‌شده ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر نیستند، در صورتی‌که در معادلهٔ دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ باید مساوی هم باشند.

۳۱. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

پاسخ: معادلهٔ استاندارد دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است. پس:

معادلهٔ دایره: $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$

اگر در این معادله $y=۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور xها به دست می‌آید.

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴ \xrightarrow{y=۰} (x-۲)^۲+۱=۴ \Rightarrow (x-۲)^۲=۳ \Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$$

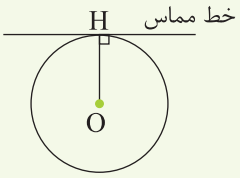
پس این دایره محور xها را در نقاط $A(۲-\sqrt{۳},۰)$ و $B(۲+\sqrt{۳},۰)$ قطع می‌کند و اگر در معادلهٔ دایره، $x=۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد با محور yها به دست می‌آید.

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴ \xrightarrow{x=۰} ۴+(y+۱)^۲=۴ \Rightarrow (y+۱)^۲=۰ \Rightarrow y=-۱$$

بنابراین دایرهٔ فوق محور yها را فقط در نقطهٔ $C(۰,-۱)$ قطع می‌کند، به عبارتی دایره بر محور yها مماس است.

۳۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(۲,-۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $۳x-۴y+۵=۰$ مماس باشد.

پاسخ: فاصلهٔ مرکز O تا خط مماس برابر شعاع دایره است.



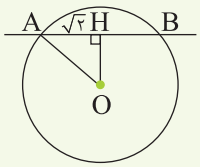
$$R=OH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۶+۴+۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹$

(توجه کنید در حل مسائل مربوط به دایره ابتدا فرمول‌های مورد استفاده را بنویسید، مثلاً فرمول محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه تا خط یا معادلهٔ کلی دایره.)

۳۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۳,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $۲x+y=۱۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

پاسخ: فرض کنیم خط $۲x+y=۱۰$ دایره را در نقاط A و B قطع کرده باشد. در این صورت عمود OH وتر AB را نصف می‌کند، یعنی $AH=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۲}$. داریم:



$$OH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۶-۱-۱۰|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^۲=AH^۲+OH^۲ \xrightarrow{OA=R} R^۲=\sqrt{۲}^۲+\sqrt{۵}^۲=۷ \Rightarrow R=\sqrt{۷}$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۷$

۳۴. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(۶,-۱)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰$ مماس بیرونی باشد.

پاسخ: ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را پیدا می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰$$

$$O'=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,-۱)\,,\ R'=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۴+۱۶}}{۲}=۳$$

در ضمن دو دایره مماس بیرونی هستند هرگاه $OO'=R+R'$. داریم:

$$OO'=\sqrt{(۶-۲)^۲+(-۱+۱)^۲}=۴$$

$$OO'=R+R' \Rightarrow ۴=R+۳ \Rightarrow R=۱$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x-۶)^۲+(y+۱)^۲=۱$

۳۵. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۱,-۲)$ بوده و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۳=۰$ مماس داخل باشد.

پاسخ: ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را پیدا می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y-۳=۰$$

$$O'(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,-۱)\,,\ R'=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۴+۱۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

در ضمن دو دایره مماس داخلی هستند هرگاه $OO'=|R-R'|$.

$$OO'=\sqrt{(۲-۱)^۲+(-۱+۲)^۲}=\sqrt{۲}$$

$$OO'=|R-R'| \Rightarrow \sqrt{۲}=|R-۲\sqrt{۲}| \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{۲}=R-۲\sqrt{۲} \Rightarrow R=۳\sqrt{۲}\\ -\sqrt{۲}=R-۲\sqrt{۲} \Rightarrow R=\sqrt{۲}\end{cases}$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow \begin{cases}R=۳\sqrt{۲} \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۸\\ R=\sqrt{۲} \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۲\end{cases}$

۳۶. وضعیت نسبی دو دایرهٔ $C: x^2+y^2-10x-14y+73=0$ و $C': x^2+y^2-4x-6y=3$ را مشخص کنید.

پاسخ: مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دو دایره را پیدا می‌کنیم. سپس OO' را با جمع و تفریق شعاع‌ها مقایسه می‌کنیم.

$$C: x^2+y^2-10x-14y+73=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(5,7) \\ R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{10^2+14^2-4\times 73}}{2}=\frac{\sqrt{2^2(25+49-73)}}{2}=\sqrt{1}=1 \end{cases}$$

$$C': x^2+y^2-4x-6y-3=0 \Rightarrow \begin{cases} O'=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(2,3) \\ R'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16+36+12}}{2}=\frac{\sqrt{64}}{2}=4 \end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

دیده می‌شود $OO'=R+R'$ $(5=1+4)$ پس دو دایره مماس بیرونی هستند.

۳۷. وضعیت نسبی دو دایرهٔ $C: x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$ و $C': x^2+y^2=2$ را بررسی کنید.

پاسخ: مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دو دایره را پیدا می‌کنیم. سپس OO' را با جمع و تفریق شعاع‌ها مقایسه می‌کنیم.

$$C: x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0 \Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}) \\ R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{18+18-20}}{2}=2 \end{cases}$$

$$C': x^2+y^2=2 \Rightarrow \begin{cases} O'=(0,0) \\ R'=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}=\sqrt{9}=3$$

دیده می‌شود $|R-R'|<OO'<R+R'$ $(2-\sqrt{2}<3<2+\sqrt{2})$ پس دو دایره متقاطع هستند.

۳۸. حدود a را طوری تعیین کنید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ معادلهٔ یک دایره باشد.

پاسخ: شرط دایره بودن معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ آن است که $a^2+b^2-4c>0$ باشد.

$$a^2+b^2-4c>0 \xrightarrow{a=-3\,,\,b=5\,,\,c=a} 9+25-4a>0 \Rightarrow -4a>-34$$

$$\Rightarrow a<\frac{34}{4} \Rightarrow a<\frac{17}{2}$$

۳۹. وضعیت نسبی خط $x+y=۴$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ را تعیین کنید.

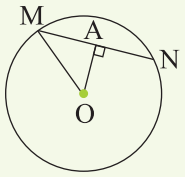
پاسخ: فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را به دست آورده با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. پس ابتدا مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲y-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۰,۱) \\ R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۰+۴+۱۲}}{۲}=۲ \end{cases}$$

$$\text{فاصلهٔ O تا خط } x+y=۴ = \frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰+۱-۴|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

چون فاصلهٔ O تا خط از شعاع دایره بیشتر است، پس خط دایره را قطع نمی‌کند.

۴۰. اندازهٔ کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ $A(۱,۳)$ در دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۴y-۲۸=۰$ را به دست آورید.



پاسخ: اگر O مرکز دایره باشد، آنگاه کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ A وتر MN است که از A عبور کرده و بر OA عمود است. چون OA بر MN عمود است، پس A وسط وتر MN است. داریم:

$$x^۲+y^۲-۴x+۴y-۲۸=۰ \Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,-۲) \\ R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶+۴\times۲۸}}{۲}=\frac{\sqrt{۴(۴+۴+۲۸)}}{۲}=۶ \end{cases}$$

$$OA=\sqrt{(۲-۱)^۲+(-۲-۳)^۲}=\sqrt{۱+۲۵}=\sqrt{۲۶}$$

$$\overset{\Delta}{OAM}: AM^۲=OM^۲-OA^۲ \xrightarrow{OM=R=۶} AM^۲=۶^۲-\sqrt{۲۶}^۲=۱۰ \Rightarrow AM=\sqrt{۱۰}$$

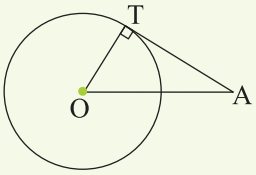
بنابراین:

$$MN=۲AM=۲\sqrt{۱۰}$$

(توجه کنید در حل این سؤال از فرمول‌های تستی مثل $f(A)$ در امتحان نهایی نمی‌توانید استفاده کنید.)

۴۱. طول قطعه مماسی که از نقطهٔ $A(۴,۱)$ بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۳=۰$ رسم می‌شود را به دست آورید.

پاسخ: از نقطهٔ A مماس AT را بر دایره رسم کرده‌ایم و مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT ایجاد شده است. داریم:



$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۲) \\ R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۱۶-۱۲}}{۲}=\sqrt{۲} \end{cases}$$

بنابراین:

$$OA=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}$$

$$\overset{\Delta}{OAT}: AT^۲=OA^۲-OT^۲ \xrightarrow{OT=R=\sqrt{۲}} AT^۲=۱۸-۲=۱۶ \Rightarrow AT=۴$$

(توجه کنید در حل این مسئله در امتحان نهایی نمی‌توانید از رابطهٔ ($\sqrt{f(A)}$ = طول مماس) استفاده کنید.)

۴۲. مقدار m را طوری به دست آورید تا دو دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x+۸y+m=۰$ مماس بیرونی باشند.

پاسخ: شرط آنکه دو دایره مماس بیرونی باشند آن است که $OO'=R+R'$ باشد.

$$C: x^۲+y^۲+۴x=۰ \Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۲,۰) \\ R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}=۲ \end{cases}$$

$$C': x^۲+y^۲-۲x+۸y+m=۰ \Rightarrow \begin{cases} O'=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۴) \\ R'=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۶۴-۴m}}{۲}=\frac{\sqrt{۴(۱+۱۶-m)}}{۲}=\sqrt{۱۷-m} \end{cases}$$

بنابراین:

$$OO'=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$
$$OO'=R+R' \Rightarrow ۵=۲+\sqrt{۱۷-m} \Rightarrow \sqrt{۱۷-m}=۳ \Rightarrow ۱۷-m=۹ \Rightarrow m=۸$$

۴۳. در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است با تعیین مختصات مرکز دایره یعنی O شیب OA را پیدا کرده و آن را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب خط مماس به دست آید.

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰ \Rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۱)$$

پس:

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$$

در نتیجه شیب خط مماس برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.

معادلهٔ خط مماس: $y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۴$

۴۴. معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

پاسخ: نقطهٔ تلاقی دو قطر دایره، مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۲x=۴ \Rightarrow x=۲, y=-۱ \Rightarrow O(۲,-۱)$$

و فاصلهٔ مرکز O تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$R=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۸-۳-۶|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱}{۵}$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=\frac{۱}{۲۵}$

۴۵. معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد.

پاسخ: فرض کنیم $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، چون مرکز دایره روی قطر دایره قرار دارد نتیجه می‌گیریم.

$$O\in(y=۲x-۱)\Rightarrow \beta=۲\alpha-۱\Rightarrow O(\alpha,۲\alpha-۱)$$

از طرف دیگر نقاط A و B روی دایره هستند. بنابراین:

$$OA=OB\Rightarrow \sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۳)^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{\alpha^۲}+۱-۲\alpha+\cancel{۴\alpha^۲}+۹-۱۲\alpha=\cancel{\alpha^۲}+۹-۶\alpha+\cancel{۴\alpha^۲}+۱-۴\alpha$$

$$\Rightarrow ۴\alpha=۰\Rightarrow \alpha=۰\Rightarrow O(۰,-۱)$$

پس:

$$R=OA=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲+۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\Rightarrow (x-۰)^۲+(y+۱)^۲=۱۰$

۴۶. وضعیت نقطهٔ $A(۴,-۲)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.

پاسخ: فاصلهٔ مرکز دایره تا A را به دست آورده با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. ابتدا مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰\Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۲) \\ R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۲۰}}{۲}=\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}=\sqrt{۱۰} \end{cases}$$

پس:

$$OA=\sqrt{(۴-۱)^۲+(-۲+۲)^۲}=\sqrt{۹}=۳$$

چون $OA<R$ پس A درون دایره است.

۴۷. خط $۳x+۴y+m=۰$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۶y=۶$ مماس است. مقدار m را به‌دست آورید.

پاسخ: خط بر دایره مماس است هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد. پس ابتدا مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲x+۶y-۶=۰\Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۳) \\ R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۳۶+۲۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴}}{۲}=۴ \end{cases}$$

$$\text{فاصلهٔ O تا خط}=R\Rightarrow \frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=R\Rightarrow \frac{|۳-۱۲+m|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۴\Rightarrow |m-۹|=۲۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-۹=۲۰\Rightarrow m=۲۹ \\ m-۹=-۲۰\Rightarrow m=-۱۱ \end{cases}$$

۴۸. نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهٔ خط مماس بر این دایره در رأس B را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم معادلهٔ دایره به صورت زیر باشد:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\begin{array}{l} A\in \text{دایره} \Rightarrow 1+1-a-b+c=0 \\ B\in \text{دایره} \Rightarrow 1+1+a+b+c=0 \\ C\in \text{دایره} \Rightarrow 1+9+a-3b+c=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -a-b+c=-2 & (1) \\ a+b+c=-2 & (2) \\ a-3b+c=-10 & (3) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2c=-4 \Rightarrow c=-2$$

$$(2),(3) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-2 \\ a-3b+c=-10 \end{cases} \xrightarrow{c=-2} \begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=-8 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 4b=8 \Rightarrow b=2, a=-2$$

پس معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ است.

در ضمن شیب خط مماس در نقطهٔ B عکس و قرینهٔ شیب OB است.

$$O=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-1) \Rightarrow m_{OB}=\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0}$$

پس شیب خط مماس برابر صفر است.

معادلهٔ خط مماس: $(y-y_B)=m(x-x_B) \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$

۴۹. دو دایرهٔ $x^2+y^2+4x=0$ و $x^2+y^2-2x+8y+m=0$ مماس درونی هستند. مقدار m را بیابید.

پاسخ: دو دایره مماس درونی هستند هرگاه $OO'=|R-R'|$.

$$x^2+y^2+4x=0 \Rightarrow \begin{cases} O=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-2,0) \\ R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-2x+8y+m=0 \Rightarrow \begin{cases} O'=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-4) \\ R'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4+64-4m}}{2}=\frac{\sqrt{4(1+16-m)}}{2}=\sqrt{17-m} \end{cases}$$

بنابراین:

$$OO'=\sqrt{(1+2)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$OO'=|R-R'| \Rightarrow 5=|2-\sqrt{17-m}| \Rightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{17-m}=5 \Rightarrow \sqrt{17-m}=-3 \quad \text{غیرقابل قبول} \\ 2-\sqrt{17-m}=-5 \Rightarrow \sqrt{17-m}=7 \Rightarrow 17-m=49 \Rightarrow m=-32 \end{cases}$$

۵۰. مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(2,4)$ مساوی $\sqrt{3}$ برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(1,2)$ باشد را مشخص کنید.

پاسخ: فرض کنیم $M(x,y)$ عضو این مکان هندسی باشد، در صورتی‌که $A(۲,۴)$ و $B(۱,۲)$ باشد، آنگاه داریم:

$$MA=\sqrt{۳}MB \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+(y-۴)^۲}=\sqrt{۳}\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۲)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+۴-۴x+y^۲+۱۶-۸y=۳(x^۲+۱-۲x+y^۲+۴-۴y)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲-۲x-۴y-۵=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲-x-۲y-\frac{۵}{۲}=۰$$

پس مکان هندسی M یک دایره است.

۵۱. معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-۱\ ,\ ۲)$ مرکز آن بوده و بر خط $y=-۳$ مماس باشد.

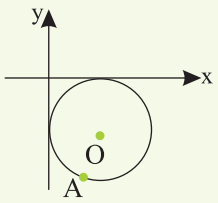
پاسخ: فاصله O تا خط $y=-۳$ برابر شعاع دایره است.

$$R=\text{فاصله O تا خط}=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲+۳|}{\sqrt{۱}}=۵$$

$$\text{معادله دایره}=(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۲۵$$

۵۲. شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای را به دست آورید که از نقطهٔ $A(۲\ ,\ -۹)$ عبور کرده و بر محورهای مختصات مماس باشد.

پاسخ: چنین دایره‌ای در ناحیه چهارم بر محورهای مختصات مماس است و مرکز آن اگر R شعاع دایره باشد، به صورت $O(R\ ,\ -R)$ است.



$$\text{معادله دایرهٔ}: (x-R)^۲+(y+R)^۲=R^۲ \xrightarrow{\text{A روی دایره است}} (۲-R)^۲+(-۹+R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۲۲R+۸۵=۰ \Rightarrow (R-۵)(R-۱۷)=۰ \Rightarrow R=۵ \text{ یا } R=۱۷$$

۵۳. دو دایرهٔ متمایز $x^۲+y^۲+ax+۴y=۴$ و $x^۲+y^۲-۲x+by=۱۱$ هم‌مرکز هستند. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر این دو دایره مماس باشد را به دست آورید.

پاسخ: مرکز هر دو دایره را پیدا کرده مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$x^۲+y^۲+ax+۴y-۴=۰ \Rightarrow O(-\frac{a}{۲}\ ,\ -\frac{b}{۲}) \Rightarrow O(-\frac{a}{۲}\ ,\ -۲)$$

$$x^۲+y^۲-۲x+by-۱۱=۰ \Rightarrow O'(-\frac{a}{۲}\ ,\ -\frac{b}{۲}) \Rightarrow O'(۱\ ,\ -\frac{b}{۲})$$

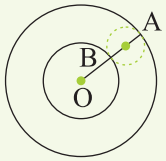
$$O=O' \Rightarrow (-\frac{a}{۲}\ ,\ -۲)=(۱\ ,\ -\frac{b}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{۲}=۱ \Rightarrow a=-۲ \\ -۲=\frac{-b}{۲} \Rightarrow b=۴ \end{cases}$$

بنابراین معادلات دو دایره به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰ \Rightarrow R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۱۶}}{۲}=۳$$

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱۱=۰ \Rightarrow R'=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۴۴}}{۲}=۴$$

با توجه به شکل شعاع کوچک‌ترین دایرهٔ مماس بر دو دایرهٔ بالا برابر است با:



$$\text{شعاع دایرهٔ مطلوب} = \frac{AB}{۲} = \frac{OA - OB}{۲} = \frac{۴-۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۵۴. خط $۳x + y = m$ بر دایرهٔ $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + y = ۰$ مماس است. کوچک‌ترین مقدار m را بیابید.

پاسخ: در صورتی خط بر دایره مماس است که فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد.

$$۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + y = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + y^۲ - \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) \Rightarrow O(-\frac{-\frac{۳}{۲}}{۲}, -\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}) = (\frac{۳}{۴}, \frac{-۱}{۴}) \\ R = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{\frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۴}}}{۲} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \end{cases}$$

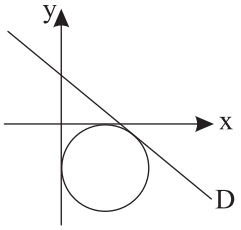
بنابراین:

$$\text{فاصلهٔ O تا خط مماس} = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|\frac{۹}{۴} - \frac{۱}{۴} - m|}{\sqrt{۹+۱}}$$

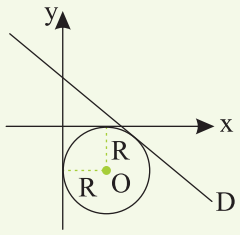
$$\text{فاصلهٔ O تا خط مماس} = R \Rightarrow \frac{|۲-m|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \Rightarrow |۲-m| = \frac{۱۰}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۲ - m = \frac{۱۰}{۴} \Rightarrow m = -\frac{۱}{۲} \\ ۲ - m = -\frac{۱۰}{۴} \Rightarrow m = \frac{۹}{۲} \end{cases}$$

پس کوچک‌ترین مقدار m برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.

۵۵. معادلهٔ دایرهٔ شکل زیر که در ربع چهارم بر محورهای مختصات و خط $D: x + y = ۶$ مماس است را به دست آورید.



پاسخ: اگر O مرکز دایره و R شعاع آن باشد، در این صورت مختصات O به صورت $(R, -R)$ خواهد بود. در ضمن فاصلهٔ O تا خط D برابر شعاع R است. داریم:



$$\text{فاصلهٔ O تا خط D} = R \Rightarrow \frac{|R - R - ۶|}{\sqrt{۱+۱}} = R \Rightarrow \frac{۶}{\sqrt{۲}} = R \Rightarrow R = ۳\sqrt{۲}$$

پس مرکز دایره به صورت $O = (۳\sqrt{۲}, -۳\sqrt{۲})$ است.

$$\text{معادلهٔ دایره}: (x-\alpha)^۲ + (y-\beta^۲) = R^۲ \Rightarrow (x - ۳\sqrt{۲})^۲ + (y + ۳\sqrt{۲})^۲ = ۱۸$$

۵۶. دایرهٔ محیطی مثلث ABC با رئوس $A(-۱, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ و $C(۰, -۳)$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ خط مماس بر این دایره در رأس A را به دست آورید.

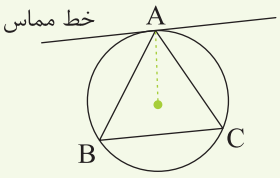
پاسخ: فرض کنیم معادلهٔ دایره به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد.

$$\begin{cases} A\in \text{دایره} \Rightarrow ۱+۰-a+c=۰ \\ B\in \text{دایره} \Rightarrow ۹+۰+۳a+c=۰ \\ C\in \text{دایره} \Rightarrow ۰+۹-۳b+c=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+c=-۱ \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۴a=-۸ \Rightarrow a=-۲\ ,\ c=-۳ \\ ۳a+c=-۹ \\ -۳b+c=-۹ \Rightarrow -۳b-۳=-۹ \Rightarrow b=۲ \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۳=۰$ است.

مرکز دایره $O=(-\frac{a}{۲}\ ,\ -\frac{b}{۲})=(۱\ ,\ -۱)$

در ضمن شیب خط مماس در رأس A عکس و قرینهٔ شیب OA است.



$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{۰+۱}{-۱-۱}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow m_{\text{خط مماس}}=۲$$

$$\text{خط مماس}: (y-y_A)=m(x-x_A) \Rightarrow y-۰=۲(x+۱) \Rightarrow y=۲x+۲$$

سوالات طبقه‌بندی شده

۵۷. وضعیت دو دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید. (دی ۹۹)

۵۸. معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که بر خط $3x+4y=1$ مماس بوده و مرکز آن $(1,2)$ باشد. (شهریور ۹۹)

۵۹. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس داخل باشد. (شهریور ۹۹)

۶۰. وضعیت دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$ را نسبت به هم مشخص کنید. (دی ۹۹)

۶۱. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(4,-1)$ و $B(-2,1)$ دو سر قطری از آن باشد. (دی ۹۷)

۶۲. معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه را تعیین کنید طوری که مجموع مربعات فواصل هر کدام از آنها از دو نقطهٔ $A(-1,0)$ و $B(1,0)$ برابر ۴ باشد.

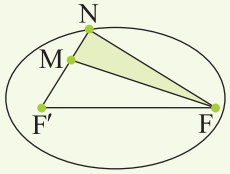
۶۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+2$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور طول‌ها مماس باشد.

سوالات تألیفی

بیضی

۶۴. یک نقطهٔ دلخواه مانند M درون بیضی در نظر بگیرید نشان دهید مجموع فواصل M از دو کانون بیضی کمتر از ۲a است.

پاسخ: فرض کنیم M درون بیضی با کانون‌های F و F' باشد. MF' را امتداد می‌دهیم تا بیضی را در N قطع کند، چون N روی بیضی است، پس $NF + NF' = ۲a$. داریم:

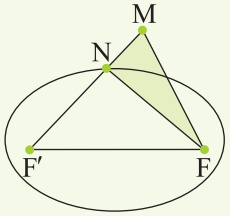


$$\overset{\Delta}{MNF}: MF < NF + MN \xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{به طرفین } MF'} MF + MF' < NF + MN + MF'$$

$$\xrightarrow{MN+MF'=NF'} MF + MF' < NF + NF' \Rightarrow MF + MF' < ۲a$$

۶۵. یک نقطهٔ دلخواه مثل M بیرون بیضی در نظر بگیرید. نشان دهید مجموع فواصل M از دو کانون بزرگ‌تر از ۲a است.

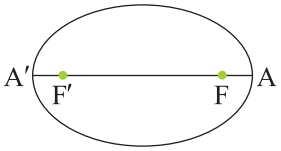
پاسخ: فرض کنیم M بیرون بیضی با کانون‌های F و F' باشد و MF' بیضی را در N قطع کند، چون N روی بیضی است، پس $NF + NF' = ۲a$. داریم:



$$\overset{\Delta}{MNF}: NF < MF + MN \xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{به طرفین } NF'} NF + NF' < MF + MN + NF'$$

$$\xrightarrow[NF+NF'=۲a]{MN+NF'=MF'} ۲a < MF + MF'$$

۶۶. در بیضی با کانون‌های F و F' ثابت کنید $FA = F'A'$.



پاسخ: می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر ۲a است. داریم:

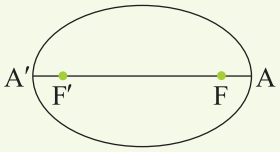
$$\left.\begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = ۲a \\ A' \in \text{بیضی} \Rightarrow A'F + A'F' = ۲a \end{array}\right\} \Rightarrow AF + AF' = A'F + A'F' \quad (۱)$$

از طرف دیگر $AF' = AF + FF'$ و $A'F = A'F' + FF'$ از (۱) داریم:

$$AF + AF + \cancel{FF'} = A'F' + \cancel{FF'} + A'F' \Rightarrow ۲AF = ۲A'F' \Rightarrow AF = A'F'$$

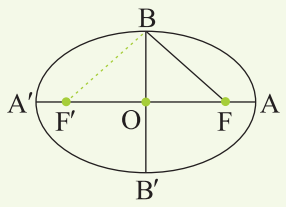
۶۷. نشان دهید طول قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است.

پاسخ: در صورتی‌که F و F' کانون‌های بیضی باشند و AA' قطر بزرگ بیضی آنگاه $AF = A'F'$ داریم:



$$A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = ۲a \xrightarrow{AF=A'F'} A'F' + AF' = ۲a \Rightarrow AA' = ۲a$$

۶۸. در بیضی با قطر بزرگ $AA' = 2a$ و قطر کوچک $BB' = 2b$ و فاصلهٔ کانونی $FF' = 2c$ نشان دهید $a^2 = b^2 + c^2$.



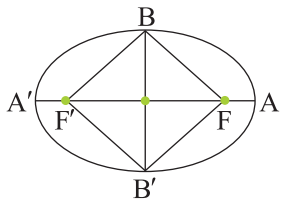
پاسخ: می‌دانیم در بیضی قطر BB' عمودمنصف FF' است، پس $BF = BF'$ داریم.

$$B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF = BF'} 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF، $OB = b$ و $OF = c$ و $BF = a$ داریم:

$$\overset{\Delta}{OBF} : BF^2 = OB^2 + OF^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۶۹. در بیضی زیر که AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک و F و F' کانون‌های آن هستند، ثابت کنید محیط چهارضلعی $BFB'F'$ برابر $4a$ است.

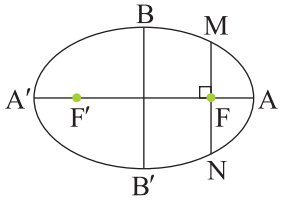


پاسخ: می‌دانیم قطر کوچک BB' عمودمنصف FF' است، پس $BF = BF'$ داریم:

$$B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF = BF'} 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $BF' = B'F = B'F' = a$، پس چهارضلعی $BFB'F'$ لوزی به ضلع a است، پس محیط آن برابر $4a$ است.

۷۰. در بیضی شکل زیر با قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ ثابت کنید طول وتر MN که از کانون F گذشته و بر قطر بزرگ عمود است برابر $\frac{2b^2}{a}$ است.



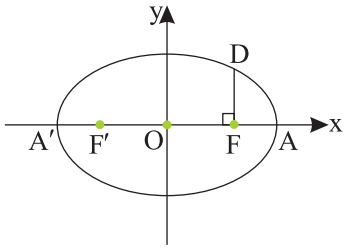
پاسخ: طول پاره‌خط MF را در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFF' به دست می‌آوریم.

$$MF'^2 = MF^2 + FF'^2 \xrightarrow[\text{پس } MF' = 2a - MF]{MF + MF' = 2a} (2a - MF)^2 = MF^2 + (2c)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 + MF^2 - 4a.MF = MF^2 + 4c^2 \Rightarrow a.MF = a^2 - c^2$$

$$\xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2} a.MF = b^2 \Rightarrow MF = \frac{b^2}{a} \Rightarrow MN = 2MF = \frac{2b^2}{a}$$

۷۱. مرکز بیضی زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در F بر AA' عمود است بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید.



پاسخ: با توجه به شکل OF طول نقطهٔ D و DF عرض نقطهٔ D است. بنابر فرض داریم:

$$OF = ۴ \Rightarrow c = ۴ \,,\, OA = OF + AF = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow a = ۸$$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow b = ۴\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر:

$$D \in \text{بیضی} \Rightarrow DF + DF' = ۲a \Rightarrow DF + DF' = ۱۶ \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{DFF'} : DF'^۲ = DF^۲ + FF'^۲ \xrightarrow{\text{از } (۱)} (۱۶ - DF)^۲ = DF^۲ + ۸^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵۶ + DF^۲ - ۳۲DF = DF^۲ + ۶۴ \Rightarrow ۳۲DF = ۱۹۲ \Rightarrow DF = ۶$$

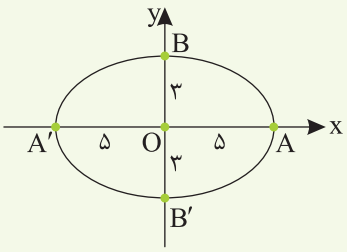
بنابراین مختصات D به صورت زیر است:

$$D = (OF, DF) = (۴, ۶)$$

۷۲. بیضی افقی با قطر بزرگ $AA' = ۱۰$ و فاصلهٔ کانونی $FF' = ۸$ با مرکز مبدأ مختصات را رسم کنید.

پاسخ: قطر بزرگ بیضی ۲a است، پس $AA' = ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$ و فاصلهٔ کانونی بیضی ۲c است، پس $FF' = ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$

در نتیجه:



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۱۶ \Rightarrow b^۲ = ۹ \Rightarrow b = ۳$$

بنابراین قطر کوچک بیضی $BB' = ۶$ است. پس نقاط A و A' را روی محور xها به فاصلهٔ ۵ از مبدأ مختصات انتخاب می‌کنیم و نقاط B و B' را روی محور yها به فاصلهٔ ۳ از مبدأ انتخاب می‌کنیم و بیضی را رسم می‌کنیم.

۷۳. پاره‌خط AB به طول ۳ سانتی‌متر مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M از صفحه را که در تساوی $\frac{MA - MB}{MA - ۲} = ۲$ صدق می‌کند به دست آورید.

پاسخ: از تساوی داده‌شده استفاده کرده می‌نویسیم:

$$\frac{MA - MB}{MA - ۲} = ۲ \Rightarrow MA - MB = ۲MA - ۴ \Rightarrow MA + MB = ۴$$

بنابراین مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت ۴ است و این مقدار ثابت از طول پاره‌خط AB بیشتر است. پس مکان هندسی نقطهٔ M بیضی با کانون‌های A و B و مقدار ثابت ۴ است.

۷۴. بیضی با کانون‌های $F(۳,۰)$ و $F'(-۳,۰)$ و طول قطر کوچک ۸ مفروض است. وضعیت نقطهٔ $M(۱,۵)$ نسبت به این بیضی را مشخص کنید.

پاسخ: بنابر فرض سؤال داریم:

$$۲c = FF' = ۶ \Rightarrow c = ۳ \text{ , قطر کوچک} = ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow ۲a = ۱۰$$

اکنون مجموع فاصلهٔ نقطهٔ M از دو کانون را به دست آورده با ۲a مقایسه می‌کنیم.

$$MF = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۰-۵)^۲} = \sqrt{۴+۲۵} = \sqrt{۲۹} \simeq ۵/۳$$

$$MF' = \sqrt{(۱+۳)^۲ + (۵-۰)^۲} = \sqrt{۱۶+۲۵} = \sqrt{۴۱} \simeq ۶/۴$$

پس $MF + MF' \simeq ۱۱/۷$ در نتیجه $MF + MF' > ۲a$ بنابراین M خارج بیضی قرار دارد.

۷۵. نشان دهید اگر $\frac{c}{a} = ۱$ آنگاه بیضی تبدیل به پاره‌خط می‌شود.

پاسخ: اگر $\frac{c}{a} = ۱$ آنگاه $c = a$. از طرف دیگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بنابراین $b = ۰$، یعنی قطر کوچک بیضی طول صفر دارد؛ در نتیجه B و B' بر هم منطبق می‌شوند و بیضی به شکل پاره‌خط خواهد بود.

۷۶. نشان دهید اگر $\frac{c}{a} = ۰$ آنگاه بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

پاسخ: اگر $\frac{c}{a} = ۰$ آنگاه $c = ۰$ و چون $a^۲ = b^۲ + c^۲$ پس $a = b$، یعنی طول قطر بزرگ و کوچک بیضی با هم برابرند؛ در نتیجه بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

۷۷. خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ $AA' = ۲۰$ و قطر کوچک $BB' = ۱۵$ را بیابید.

پاسخ: اندازهٔ قطر بزرگ بیضی برابر ۲a و قطر کوچک بیضی برابر ۲b است.

$$AA' = ۲a = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۰ \text{ , } BB' = ۲b = ۱۵ \Rightarrow b = \frac{۱۵}{۲}$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۱۰^۲ - (\frac{۱۵}{۲})^۲ = ۱۰۰ - \frac{۲۲۵}{۴} = \frac{۱۷۵}{۴} \Rightarrow c = \frac{۵\sqrt{۷}}{۲}$$

بنابراین:

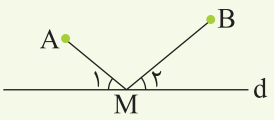
$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{۵\sqrt{۷}}{۲}}{۱۰} = \frac{۵\sqrt{۷}}{۲۰} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

۷۸. نشان دهید خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ $AA' = ۲a$ و قطر کوچک $BB' = ۲b$ از رابطهٔ $\sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$ به دست می‌آید.

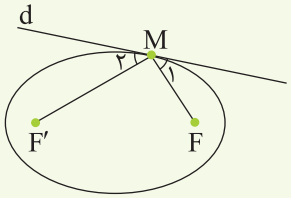
پاسخ: خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{c}{a}$ است. داریم:

$$\sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{\frac{a^۲ - b^۲}{a^۲}} = \sqrt{\frac{c^۲}{a^۲}} = \frac{c}{a}$$

۷۹. نشان دهید اگر از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی بتابد، انعکاس نور از کانون بعدی آن می‌گذرد. (خاصیت بازتابندگی بیضی)

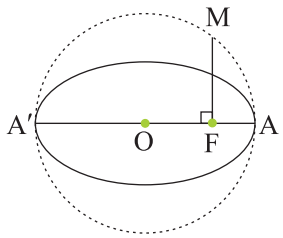


پاسخ: می‌دانیم اگر کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A به نقطهٔ B با عبور از نقطهٔ M روی خط d مسیر AMB باشد، آنگاه $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. (مسئلهٔ هرون)



حال فرض کنیم خط d در نقطهٔ M بر بیضی با کانون‌های F و F′ مماس باشد. در این صورت هر نقطه روی خط d انتخاب کنیم مجموع فاصله‌های آن نقطه از دو کانون F و F′ بیشتر از ۲a است، زیرا این نقاط بیرون بیضی هستند و فقط در نقطهٔ M این مجموع برابر ۲a است. پس مجموع فواصل M از F و F′ مینیمم است، در نتیجه $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. پس بنابر ویژگی آینه‌های تخت اگر از کانون F شعاع نوری بر بیضی بتابد، بازتابش آن از کانون F′ می‌گذرد، زیرا زاویه تابش و بازتابش برابرند.

۸۰. در شکل قطر دایره برابر قطر بیضی است و از کانون F عمودی بر AA′ رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



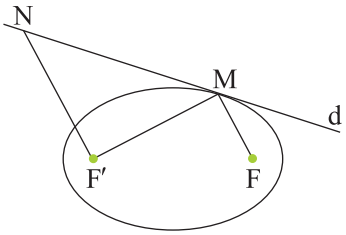
پاسخ: چون قطر دایره برابر قطر بیضی است، پس شعاع دایره مساوی $\frac{AA'}{۲} = \frac{۲a}{۲} = a$ است. از O به M وصل می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\overset{\Delta}{OMF} : OM^۲ = MF^۲ + OF^۲ \xrightarrow{OM=a\,,\,OF=c} a^۲ = MF^۲ + c^۲$$

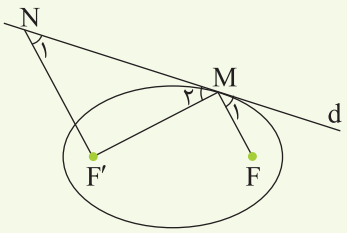
$$MF^۲ = a^۲ - c^۲ \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} MF^۲ = b^۲ \Rightarrow MF = b$$

پس MF مساوی نصف قطر کوچک بیضی است.

۸۱. در بیضی شکل زیر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. از کانون F′ خطی موازی MF رسم می‌کنیم تا d را در N قطع کند. ثابت کنید NF′ = MF′. (F کانون بعدی است)

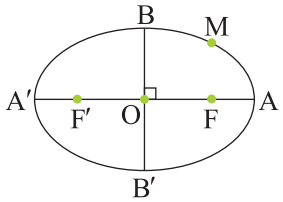


پاسخ: بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ است. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MF \parallel NF' \\ \text{مورب } d \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{M}_1 \xrightarrow{\hat{M}_1 = \hat{M}_2} \hat{N}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow NF' = MF'$$

۸۲. نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. طول‌های MF و MF′ را به دست آورید. (F و F′ کانون‌های بیضی هستند.)



پاسخ: از M به O و F و F′ وصل می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

پس $FF' = 2c = 8$. چون میانهٔ OM به طول ۴ در مثلث MFF′ نصف FF′ است، پس مثلث $\overset{\Delta}{MFF'}$ قائم‌الزاویه است.

$$M \in \text{بیضی} \Rightarrow MF + MF' = 2a = 10$$

فرض کنیم $MF = x$ پس $MF' = 10 - x$ بنابراین:

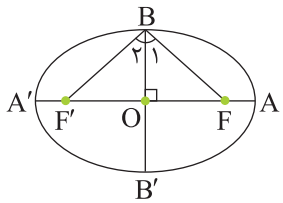
$$\overset{\Delta}{MFF'}: MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow x^2 + (10 - x)^2 = 8^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 100 + x^2 - 20x = 64 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 18}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \begin{cases} MF = 5 - \sqrt{7} \\ MF' = 5 + \sqrt{7} \end{cases}$$

(به این مسئله خوب توجه کنید که بارها در امتحانات نهایی و سؤالات کنکور مطرح شده است.)

۸۳. در بیضی زیر طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF′ چند درجه است؟



پاسخ: بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$\text{قطر بزرگ} = 2(\text{قطر کوچک}) \Rightarrow AA' = 2BB' \Rightarrow 2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$$

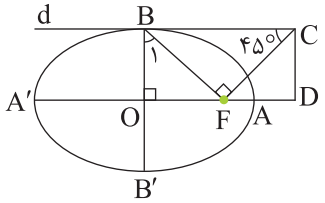
از طرف دیگر:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = (2b)^2 - b^2 = 3b^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}b$$

بنابراین:

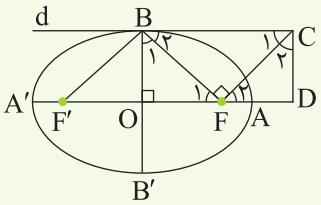
$$\overset{\Delta}{OBF}: \tan \hat{B}_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F' = 120^\circ$$

۸۴. در بیضی زیر AA' و BB' دو قطرند و خط d در نقطهٔ B مماس بر بیضی است. اگر CD بر امتداد قطر بزرگ عمود باشد و $B\hat{F}C = 90^\circ$ و $B\hat{C}F = 45^\circ$، آنگاه مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



پاسخ: مثلث‌های $\overset{\Delta}{OBF}$ و $\overset{\Delta}{BFC}$ و $\overset{\Delta}{FCD}$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند، زیرا $\hat{B}_1 = \hat{F}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{F}_2 = 45^\circ$.

چون $OB = b$، پس $OF = FD = CD = b$. داریم:

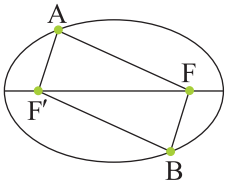


$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=c} a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b \ , \ AF = OA - OF = a - c$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{FD - AF}{AF} = \frac{b-(a-c)}{a-c} = \frac{b-a+c}{a-c} = \frac{b-\sqrt{2}b+b}{\sqrt{2}b-b}$$

$$= \frac{2b-\sqrt{2}b}{\sqrt{2}b-b} = \frac{\sqrt{2}b(\sqrt{2}-1)}{b(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}$$

۸۵. در بیضی شکل زیر $BF = AF'$ نشان دهید $AF \parallel BF'$. (F و F' دو کانون بیضی هستند.)

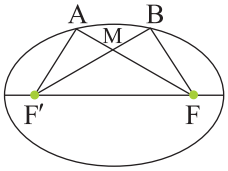


پاسخ: می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون بیضی برابر $2a$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \\ B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{BF=AF'} AF = BF'$$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل آن دو به دو مساوی‌اند، پس $AF \parallel BF'$.

۸۶. در بیضی شکل زیر $AF' = BF$، نشان دهید $MF = MF'$. (F و F' دو کانون بیضی هستند.)



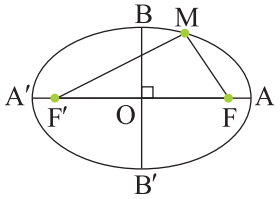
پاسخ: می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون بیضی برابر $2a$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \\ B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{AF'=BF} AF = BF'$$

پس:

$$\left.\begin{array}{l} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AFF'} \cong \overset{\Delta}{BFF'} \Rightarrow A\hat{F}F' = B\hat{F'}F \Rightarrow MF = MF'$$

۸۷. در بیضی شکل زیر طول قطر بزرگ $۲\sqrt{۳}$ و طول قطر کوچک $۲\sqrt{۲}$ است. اگر نقطهٔ M روی بیضی حرکت کند و F و F' کانون‌های بیضی باشند، بیشترین مقدار مساحت مثلث MFF' را بیابید.



پاسخ: در مثلث MFF' با تغییر وضعیت نقطهٔ M همواره قاعدهٔ FF' ثابت است، ولی ارتفاع رسم‌شده از M تغییر می‌کند. در صورتی‌که M روی رأس B قرار گیرد، آنگاه بزرگ‌ترین ارتفاع و در نتیجه بیشترین مساحت ایجاد می‌شود. در این حالت ارتفاع برابر $OM = OB = b$ است. داریم:

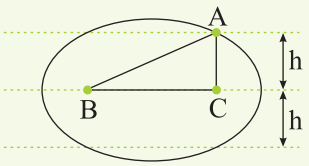
$$\text{Max } S_{MFF'} = \frac{۱}{۲} OB \times FF' = \frac{۱}{۲}(b)(۲c) = bc$$

از طرف دیگر بنابر فرض $۲a = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = \sqrt{۳}$ و $۲b = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow b = \sqrt{۲}$ در نتیجه:

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow c = ۱$$
$$\text{Max } S_{MFF'} = bc = (\sqrt{۲})(۱) = \sqrt{۲}$$

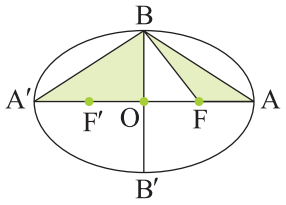
۸۸. فرض کنید از مثلث ABC اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث داده شده باشد با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

پاسخ: فرض کنیم $AH = h$ و $BC = a$ و P مساوی محیط مثلث باشد. بنابر فرض $AB + AC + BC = P \Rightarrow AB + AC = P - a$.



چون P و a ثابت هستند، پس $AB + AC$ ثابت است و چون نقاط B و C ثابت هستند، پس مجموع فواصل نقطهٔ A از دو نقطهٔ ثابت B و C مقدار ثابت $P - a$ است، در نتیجه مکان هندسی رأس A روی یک بیضی به کانون‌های B و C و مقدار ثابت $P - a$ است. از طرف دیگر رأس A روی دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ h از آن قرار دارد، بنابراین برای رسم مثلث ابتدا بیضی با کانون‌های B و C و مقدار ثابت $P - a$ را رسم می‌کنیم. سپس دو خط موازی با خط BC و به فاصلهٔ h از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط با بیضی رأس A است و $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث مطلوب است.

۸۹. در بیضی زیر با کانون‌های F و F' نسبت مساحت مثلث $A'BO$ به مساحت مثلث ABF برابر ۳ است. خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



پاسخ: ارتفاع دو مثلث $A'BO$ و ABF مساوی $OB = b$ است. در ضمن $OA' = a$ و $AF = a - c$ است. داریم:

$$\frac{S_{A'BO}}{S_{ABF}} = ۳ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}OB\times OA'}{\frac{۱}{۲}OB\times AF} = ۳ \Rightarrow \frac{a}{a-c} = ۳ \Rightarrow a = ۳a - ۳c \Rightarrow ۳c = ۲a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳}$$

پس خروج از مرکز این بیضی برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

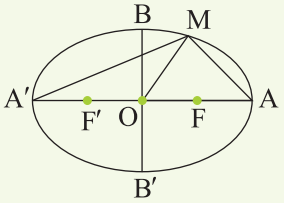
۹۰. نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۸ و $۲\sqrt{۷}$ قرار دارد. اگر فاصلهٔ M تا مرکز بیضی برابر ۳ و F و F' کانون‌های بیضی باشند آنگاه حاصل $|MF - MF'|$ را به دست آورید.

پاسخ: بنا بر فرض سؤال $۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$ و $۲b = ۲\sqrt{۷} \Rightarrow b = \sqrt{۷}$ پس:

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴^۲ - (\sqrt{۷})^۲ = ۹ \Rightarrow c = ۳$$

مطابق شکل $FF' = ۲c = ۶$ و $OM = ۳$ پس میانهٔ OM نصف FF' است. پس مثلث MFF' قائم‌الزاویه است و $F\hat{M}F' = ۹۰^\circ$

بنابراین:



$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = ۳۶ \quad (۱)$$

از طرف دیگر M روی بیضی قرار دارد پس $MF + MF' = ۲a = ۸$ در نتیجه اگر $MF' = x$ آنگاه $MF = ۸ - x$ داریم:

$$\text{از } (۱) \Rightarrow (۸-x)^۲ + x^۲ = ۳۶ \Rightarrow ۶۴ + x^۲ - ۱۶x + x^۲ = ۳۶ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۶x + ۲۸ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ - ۸x + ۱۴ = ۰$$

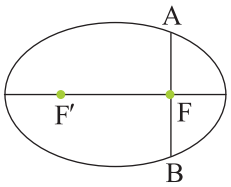
از دستور b' این معادله را حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۱۴}}{۱} = ۴ \pm \sqrt{۲}$$

بنابراین $MF = ۴ - \sqrt{۲}$ و $MF' = ۴ + \sqrt{۲}$ پس:

$$|MF - MF'| = |۴ + \sqrt{۲} - ۴ + \sqrt{۲}| = ۲\sqrt{۲}$$

۹۱. در بیضی با کانون‌های F و F' و طول قطرهای ۱۸ و ۱۲ اندازهٔ پاره‌خط AB را بیابید.



پاسخ: بنا بر فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۱۸ \Rightarrow a = ۹ \\ ۲b = ۱۲ \Rightarrow b = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۹^۲ - ۶^۲ = ۴۵$$

از طرف دیگر اگر از A به کانون F' وصل کنیم خواهیم داشت:

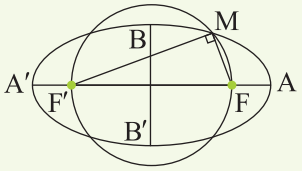
$$\overset{\Delta}{AFF'}: AF'^{۲} = AF^{۲} + FF'^{۲} \xrightarrow[AF'=۲a-AF]{AF+AF'=۲a} (۲a - AF)^{۲} = AF^{۲} + (۲c)^{۲}$$

$$۴a^{۲} + AF^{۲} - ۴a.AF = AF^{۲} + ۴c^{۲} \ , \ a.AF = a^{۲} - c^{۲} \Rightarrow AF = \frac{a^{۲} - c^{۲}}{a} = \frac{۸۱ - ۴۵}{۹} = \frac{۳۶}{۹} = ۴$$

بنابراین: $AB = ۲AF = ۸$

۹۲. در بیضی با قطرهای ۲۰ و ۱۲ واحد وکانون‌های F و F′ دایره‌ای به قطر FF′ بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین کانون را پیدا کنید.

پاسخ: دایره به قطر FF′ بیضی را در نقطهٔ M قطع کرده است. پس زاویهٔ M محاطی رو به قطر FF′ است. پس $F\hat{M}F' = ۹۰^\circ$ یعنی مثلث $\overset{\Delta}{MFF'}$ قائم‌الزاویه است.



$$\overset{\Delta}{MFF'}: MF^{۲} + MF'^{۲} = FF'^{۲} \Rightarrow MF^{۲} + MF'^{۲} = ۴c^{۲}$$

از طرف دیگر بنابر فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۰ \\ ۲b = ۱۲ \Rightarrow b = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow c^{۲} = a^{۲} - b^{۲} = ۱۰^{۲} - ۶^{۲} = ۶۴ \Rightarrow c = ۸$$

$$M \in \text{بیضی} \Rightarrow MF + MF' = ۲a \Rightarrow MF + MF' = ۲۰ \xrightarrow{MF'=x} MF = ۲۰ - x$$

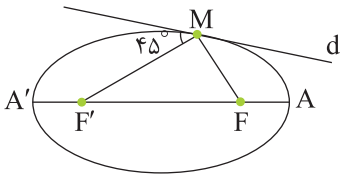
از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$(۲۰ - x)^{۲} + x^{۲} = ۴(۸)^{۲} \Rightarrow ۴۰۰ + x^{۲} - ۴۰x = ۲۵۶ \Rightarrow x^{۲} - ۴۰x + ۱۴۴ = ۰$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^{۲} - ac}}{a} = \frac{۲۰ \pm \sqrt{۴۰۰ - ۱۴۴}}{۱} = ۲۰ \pm \sqrt{۲۵۶} = ۲۰ \pm ۱۶$$

بنابراین $MF = ۲۰ - ۱۶ = ۴$ و $MF' = ۲۰ + ۱۶ = ۳۶$ پس نزدیک‌ترین فاصلهٔ M تا کانون بیضی برابر ۴ است.

۹۳. خط d در نقطهٔ M بر بیضی با قطر بزرگ $AA' = ۱۲$ مماس است. اگر $MF' - MF = ۴$ باشد، آنگاه خروج از مرکز این بیضی را بیابید.



پاسخ: بنا بر خاصیت بازتابندگی بیضی نتیجه می‌گیریم $F\hat{M}d = ۴۵^\circ$ پس $F\hat{M}F' = ۱۸۰^\circ - (۴۵^\circ + ۴۵^\circ) = ۹۰^\circ$.

از طرف دیگر $AA' = ۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶$ پس $MF + MF' = ۲a = ۱۲$ داریم:

$$\begin{cases} MF + MF' = ۱۲ \\ MF' - MF = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۲MF' = ۱۶ \Rightarrow MF' = ۸ \ , \ MF = ۴$$

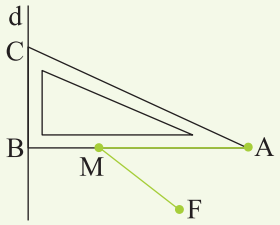
بنابراین:

$$\overset{\Delta}{MFF'}: MF^{۲} + MF'^{۲} = FF'^{۲} \Rightarrow ۴^{۲} + ۸^{۲} = (۲c)^{۲} \Rightarrow ۱۶ + ۶۴ = ۴c^{۲} \Rightarrow c^{۲} = ۲۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۵}$$

$$\text{خروج از مرکز بیضی} = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۶} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

سهمی

۹۴. به کمک یک گونیا سهمی با کانون F و خط هادی d را رسم کنید. طریقهٔ رسم را توضیح دهید.



پاسخ: یک گونیا انتخاب کرده و ضلع قائم BC را در راستای خط هادی d قرار می‌دهیم. نخی به طول ضلع قائم بعدی (یعنی AB) انتخاب کرده یک سر نخ را به کانون F و سر دیگر را به نقطهٔ A می‌بندیم و با یک مداد نخ را به صورت کشیده درمی‌آوریم تا نخ به ضلع AB بچسبد. در این صورت نقطهٔ M نوک مداد روی سهمی است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\text{طول نخ} = AB = MA + MB \\ \text{طول نخ} = MA + MF\end{array}\right\} \Rightarrow MF = MB \Rightarrow \text{M روی سهمی است}$$

اکنون با حرکت گونیا در راستای خط هادی به طوری‌که نخ همواره کشیده بوده و به ضلع AB چسبیده باشد، سهمی رسم می‌شود.

۹۵. معادلهٔ یک سهمی به صورت $y = x^{۲} + ۳x + ۵$ است. کانون و خط هادی و محور سهمی را پیدا کنید.

پاسخ: معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y = x^{۲} + ۳x + ۵ \Rightarrow y = (x + \frac{۳}{۲})^{۲} - \frac{۹}{۴} + ۵ \Rightarrow y = (x + \frac{۳}{۲})^{۲} + \frac{۱۱}{۴}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{۳}{۲})^{۲} = y - \frac{۱۱}{۴}$$

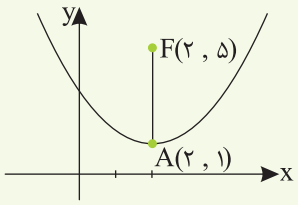
پس سهمی قائم رو به بالاست و رأس آن $S(-\frac{۳}{۲}, \frac{۱۱}{۴})$ و $۴a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$.

کانون سهمی $F = (\alpha, a + \beta) = (-\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۴} + \frac{۱۱}{۴}) = (-\frac{۳}{۲}, ۳)$

خط هادی سهمی: $y = -a + \beta \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴} + \frac{۱۱}{۴} \Rightarrow y = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$

محور سهمی: $x = \alpha \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$

۹۶. معادلهٔ سهمی به رأس $A(۲,۱)$ و کانون $F(۲,۵)$ را بیابید.

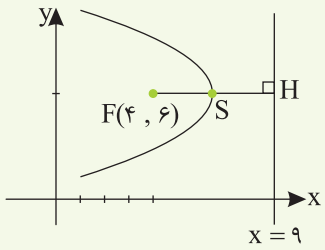


پاسخ: با توجه به جایگاه رأس و کانون سهمی قائم و رو به بالا است.

در ضمن $a = AF = ۴$. بنابراین:

معادلهٔ سهمی قائم رو به بالا: $(x - \alpha)^{۲} = ۴a(y - \beta) \Rightarrow (x - ۲)^{۲} = ۱۶(y - ۱)$

۹۷. معادلهٔ سهمی به کانون $F(۴,۶)$ و خط هادی $x = ۹$ را بنویسید.

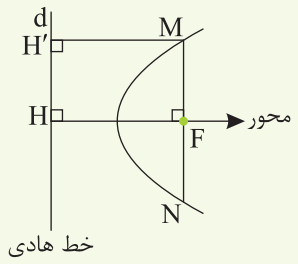


پاسخ: با توجه به جایگاه کانون و خط هادی، سهمی افقی رو به چپ است و اگر عمود FH را بر خط هادی وارد کنیم، آنگاه $H(۹,۶)$ و رأس S وسط FH است. پس:

$$S = \frac{F + H}{۲} = (\frac{۱۳}{۲}, ۶)\ ,\ a = FS = \frac{۱۳}{۲} - ۴ = \frac{۵}{۲}$$

معادلهٔ سهمی افقی رو به چپ: $(y-\beta)^2=-4a(x-\alpha)\Rightarrow (y-6)^2=-10(x-\frac{13}{2})$

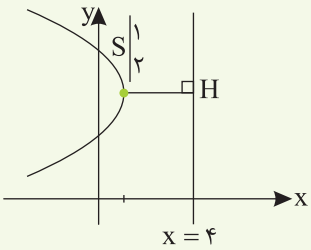
۹۸. خطی از کانون یک سهمی موازی با خط هادی آن رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط M و N قطع کند. نشان دهید طول وتر MN برابر ۴a است.



پاسخ: از M عمود MH' را بر خط هادی d رسم می‌کنیم. در این صورت چهارضلعی $MH'HF$ مستطیل است. از طرف دیگر M روی سهمی است، پس $MF=MH'$ بنابراین چهارضلعی $MH'HF$ مربع است در نتیجه $MF=FH=2a$ پس:

$$MN=2MF=4a$$

۹۹. نقاط تلاقی سهمی که $S(1,2)$ رأس و خط $x=4$ خط هادی آن باشد را با محورهای مختصات به دست آورید.



پاسخ: با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی افقی رو به چپ است و $a=SH=3$ داریم.

معادلهٔ سهمی افقی رو به چپ: $(y-\beta)^2=-4a(x-\alpha)\Rightarrow (y-2)^2=-12(x-1)$

اکنون سهمی را با محورهای مختصات تلاقی می‌دهیم.

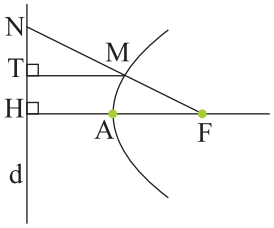
$$(y-2)^2=-12(x-1)\xrightarrow[y=0]{\text{برخورد با محور x}}4=-12(x-1)\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

پس نقطهٔ تلاقی سهمی با محور xها $(\frac{2}{3},0)$ است.

$$(y-2)^2=-12(x-1)\xrightarrow[x=0]{\text{برخورد با محور y}}(y-2)^2=12\Rightarrow y-2=\pm 2\sqrt{3}\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{3}+2$$

پس نقطه‌های تلاقی سهمی با محور yها $(0,2\sqrt{3}+2)$ و $(0,-2\sqrt{3}+2)$ است.

۱۰۰. در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا d را در N قطع کند و عمود MT را بر d رسم می‌کنیم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$.



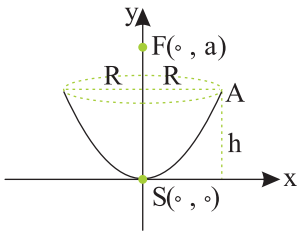
پاسخ: می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی برابر است.

$$M\in \text{سهمی}\Rightarrow MF=MT\ ,\ A\in \text{سهمی}\Rightarrow AF=AH$$

چون MT و FH بر خط d عمودند، پس $MT\parallel FH$ با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} MT\parallel FH\Rightarrow \frac{NT}{TH}=\frac{MN}{MF}\xrightarrow{MF=MT}\frac{NT}{TH}=\frac{MN}{MT} \\ MT\parallel FH\Rightarrow \frac{MT}{FH}=\frac{MN}{FN}\xrightarrow{FH=2AF}\frac{FN}{2AF}=\frac{MN}{MT}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{FN}{2AF}=\frac{NT}{TH}\Rightarrow \frac{FN}{AF}=\frac{2NT}{TH}$$

۱۰۱. شکل زیر یک دیش مخابراتی است. ثابت کنید $a = \frac{R^2}{4h}$.

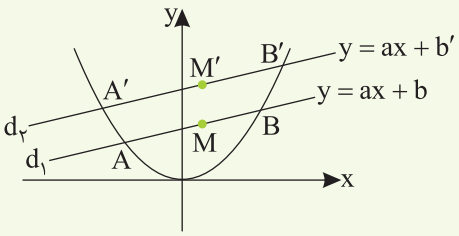


پاسخ: با توجه به شکل نقطهٔ A به مختصات (R,h) است. در ضمن از مقابل این دیش یک سهمی قائم با رأس $S(0,0)$ است و معادلهٔ این سهمی به صورت زیر است.

$$x^2 = 4ay \xrightarrow{A\in \text{سهمی}} R^2 = 4ah \Rightarrow a = \frac{R^2}{4h}$$

۱۰۲. سهمی $y = x^2$ را خطوط موازی $y = ax + b$ (a ثابت و b متغیر) قطع می‌کند. ثابت کنید وسط وترهای ایجادشده روی خطی موازی محور سهمی قرار دارند.

پاسخ: سهمی را با خطوط موازی $y = ax + b$ قطع می‌دهیم.



$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$$

در صورتی‌که A و B نقاط برخورد خط با سهمی باشند و M نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \xrightarrow{x_A + x_B = S = \frac{a}{2}} x_M = \frac{a}{2}$$

اکنون اگر خطها موازی $y = ax + b$ را با سهمی قطع دهیم دیده می‌شود طول نقطهٔ وسط وترهای ایجادشده روی سهمی همگی برابر $\frac{a}{2}$ است، پس مکان هندسی این نقاط خط $x = \frac{a}{2}$ است که خطی موازی با محور سهمی است.

۱۰۳. نمودار سهمی $2y^2 - 4y + 8x - 6 = 0$ را به کمک نقاط کمکی رسم کنید.

پاسخ: طرفین معادلهٔ سهمی را به ۲ ساده می‌کنیم.

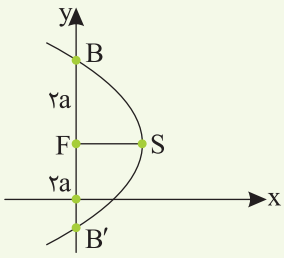
$$y^2 - 2y + 4x - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 - 1 + 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -4x + 4 \Rightarrow (y-1)^2 = -4(x-1)$$

پس این سهمی افقی رو به چپ با رأس $S(1,1)$ و $4a = 4 \Rightarrow a = 1$ است.

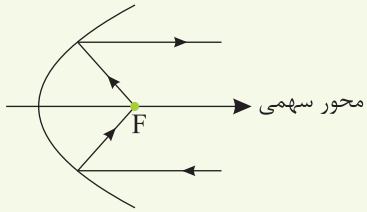
کانون $F = (-a + \alpha, \beta) = (-1+1, 1) = (0,1)$

نقاط کمکی $B(0,3)$ و $B'(0,-1)$ هستند و سهمی با رأس S و گذرنده از نقاط B و B' را رسم می‌کنیم.



۱۰۴. ویژگی بازتابندگی سهمی را بیان کنید.

پاسخ: هر شعاع نوری که از کانون سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی است و برعکس، اگر شعاع نوری موازی محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی عبور می‌کند.



۱۰۵. در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانهٔ دایره‌ای به قطر ۳۰ واحد و گودی (عمق) ۱۰ واحد، فاصلهٔ کانونی دیش را به‌دست آورید.

پاسخ: در دیش با شعاع قاعدهٔ R و عمق h داریم.

$$a=\frac{R^{۲}}{۴h}\xrightarrow{R=۱۵}a=\frac{۱۵^{۲}}{۴\times ۱۰}=\frac{۱۵\times ۱۵}{۴\times ۱۰}=\frac{۴۵}{۸}$$

پس فاصلهٔ کانونی دیش $\frac{۴۵}{۸}$ است.

۱۰۶. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $S(-۱,۲)$ رأس سهمی $x=y^{۲}+my+n$ باشد.

پاسخ: معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x=y^{۲}+my+n\Rightarrow x=(y+\frac{m}{۲})^{۲}-\frac{m^{۲}}{۴}+n\Rightarrow (y+\frac{m}{۲})^{۲}=x+\frac{m^{۲}}{۴}-n$$

پس این سهمی افقی رو به راست با رأس $S(-\frac{m^{۲}}{۴}+n,-\frac{m}{۲})$ است. داریم:

$$(-۱,۲)=(-\frac{m^{۲}}{۴}+n,-\frac{m}{۲})\Rightarrow\begin{cases}-۱=-\frac{m^{۲}}{۴}+n\Rightarrow -۱=-\frac{۱۶}{۴}+n\Rightarrow n=۳\\ -\frac{m}{۲}=۲\Rightarrow m=-۴\end{cases}$$

۱۰۷. سهمی $y^{۲}=۲x-۴y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

پاسخ: معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

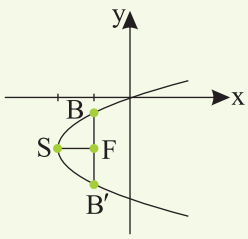
$$y^{۲}=۲x-۴y\Rightarrow y^{۲}+۴y=۲x\Rightarrow (y+۲)^{۲}-۴=۲x$$

$$\Rightarrow (y+۲)^{۲}=۲x+۴\Rightarrow (y+۲)^{۲}=۲(x+۲)$$

این سهمی افقی رو به راست با رأس $S(-۲,-۲)$ و $۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$ است.

کانون سهمی افقی رو به راست $F=(a+\alpha\ ,\ \beta)=(\frac{۱}{۲}-۲\ ,\ -۲)=(-\frac{۳}{۲}\ ,\ -۲)$

برای رسم سهمی رأس S و کانون F را در دستگاه مختصات مشخص کرده، خطی در F بر SF عمود می‌کنیم و نقاط $B(-\frac{۳}{۲},-۱)$ و $B'(-\frac{۳}{۲},-۳)$ را روی آن به ترتیب به اندازهٔ $۲a=۱$ بالا و پایین F جدا می‌کنیم، سپس سهمی را با رأس S و گذر از نقاط B و B' رسم می‌کنیم.



(توجه کنید در سؤال امتحان نهایی معمولاً مطرح می‌شود سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید. منظور مشخص کردن نقاط B و B' است که از کانون F به اندازهٔ ۲a فاصله دارند. اینجا توضیح کامل داده شده برای درک بیشتر، ولی شما کافی است بـه نقـاط B و B' اشاره کنید.)

۱۰۸. سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقـاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

پاسخ:

$y^۲ = ۴x - ۴ \Rightarrow y^۲ = ۴(x - ۱)$

این سهمی افقی رو به راست با رأس $S(۱,۰)$ و $۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱$ است.

کانون سهمی $F = (a + \alpha, \beta) = (۲,۰)$

پس مرکز دایره $O(۲,۰)$ و شعاع آن ۳ است.

معادلهٔ دایره: $(x - ۲)^۲ + (y - ۰)^۲ = ۹$

برخورد دایره و سهمی $\begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ (x - ۲)^۲ + y^۲ = ۹ \end{cases} \Rightarrow (x - ۲)^۲ + ۴x - ۴ = ۹ \Rightarrow x^۲ + ۴ - ۴x + ۴x - ۴ = ۹$

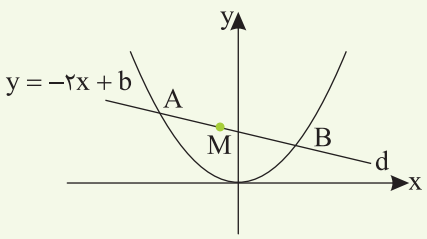
$\Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$

$x = ۳ \Rightarrow y^۲ = ۱۲ - ۴ = ۸ \Rightarrow y = \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} A(۳, ۲\sqrt{۲}) \\ B(۳, -۲\sqrt{۲}) \end{cases}$

$x = -۳ \Rightarrow y^۲ = -۱۲ - ۴ = -۱۶$ غیرقابل قبول

۱۰۹. معادلهٔ مکان هندسی وسط وترهای ایجادشده توسط خطوط موازی $y = -۲x + b$ (b متغیر) از سهمی $y = x^۲$ را به دست آورید.

پاسخ:



خط‌های موازی با هم $y = -۲x + b$ را با سهمی قطع می‌دهـیم. تـا وترهـای مثـل AB به دست آید.

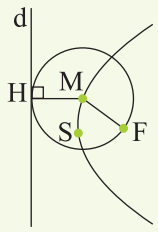
$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = -۲x + b \end{cases} \Rightarrow x^۲ = -۲x + b \Rightarrow x^۲ + ۲x - b = ۰ \quad (۱)$

پس طول نقاط A و B ریشه‌های معادلهٔ (۱) می‌باشند در صورتی‌که M وسط وتر AB باشد، آنگاه طول نقطهٔ M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{S}{۲} = \frac{-\frac{b}{a}}{۲} = -\frac{b}{۲a} = -۱$$

بنابراین طول نقاط وسط وترهای ایجادشده همواره برابر ۱− است، پس مکان هندسی وسط این وترها خط $x = -۱$ است.

۱۱۰. سهمی با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F عبور کند و بر خط d مماس باشـد روی سهمی است و برعکس.

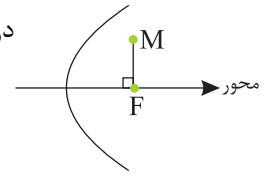


پاسخ: فرض کنیم M نقطه‌ای روی سهمی باشد. دایره‌ای به مرکز M گذرا از F رسم می‌کنیم. درواقع MF شعاع این دایره است. چون M روی سهمی است، پس $MF = MH$، در نتیجه فاصلهٔ M تا خط d برابر شعاع دایره است. پس دایره به مرکز M و شعاع MF بر خط هادی d مماس است.

برعکس فرض کنیم دایره‌ای از کانون F گذشته و بر خط هادی d مماس است. پس مرکز دایره از کانون و خط هادی به یک فاصله است؛ در نتیجه بنابر تعریف سهمی مرکز دایره روی سهمی قرار دارد.

۱۱۱. درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در سهمی زیر با کانون F از نقطهٔ M که MF بر محور سهمی عمود است، شعاع نوری بر سهمی بتابد بازتابش آن موازی هم به سمت پایین خواهد بود. ◯ درست ◯ نادرست



ب) دهانهٔ سهمی $2x - 5y^2 - 3y = 3$ رو به چپ است. ◯ درست ◯ نادرست

ج) در سهمی با رأس $A(1, 2)$ و کانون $F(-1, 2)$ معادله خط هادی $x = 3$ است. ◯ درست ◯ نادرست

د) اگر خطوط موازی هم یک سهمی را قطع کنند آنگاه مکان هندسی وسط وترهای ایجادشده، محور سهمی است. ◯ درست ◯ نادرست

پاسخ:

الف) درست ب) نادرست ج) درست د) نادرست

(با توجه به آخرین مسئله کتاب درسی در بحث سهمی در قسمت (د) مکان هندسی وسط وترهای ایجادشده خطی موازی با محور سهمی است.)

۱۱۲. یک پرتوی نوری موازی محور تقارن سهمی $y^2 + 8x + 4 = 0$ که سطح داخلی آن خاصیت آینه‌ای دارد به سطح داخلی آن تابانده می‌شود، پرتو نور بازتابیده شده از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(1, 0)$ ۲) $(\frac{5}{2}, 0)$ ۳) $(1, 2)$ ۴) $(\frac{-5}{2}, 0)$

پاسخ: بنا بر خاصیت بازتابندگی سهمی بازتابش چنین پرتوی نوری که موازی محور تقارن سهمی است از کانون سهمی می‌گذرد. پس باید کانون سهمی را پیدا کنیم.

$$y^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow y^2 = -8x - 4 \Rightarrow y^2 = -8(x + \frac{1}{2})$$

این سهمی افقی رو به چپ با رأس $S(-\frac{1}{2}, 0)$ و $4a = 8 \Rightarrow a = 2$ است.

$$F(-a + \alpha, \beta) = (-2 - \frac{1}{2}, 0) = (-\frac{5}{2}, 0)$$

پس گزینهٔ ۴ درست است.

۱۱۳. معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + 2ax + a$ کدام است؟ $(a > 0)$

۱) $y = \frac{-1}{2a}$ ۲) $y = \frac{-1}{4a}$ ۳) $y = \frac{-1}{a}$ ۴) $y = \frac{-1}{3a}$

پاسخ: در معادلهٔ این سهمی از حرف a استفاده شده است و مسلماً این a همان پارامتر سهمی نیست پس در اینجا پارامتر سهمی را با P نمایش می‌دهیم تا اشتباهی صورت نگیرد.

$$y = ax^{۲} + ۲ax + a \Rightarrow y = a(x^{۲} + ۲x + ۱) \Rightarrow \frac{y}{a} = (x+۱)^{۲}$$

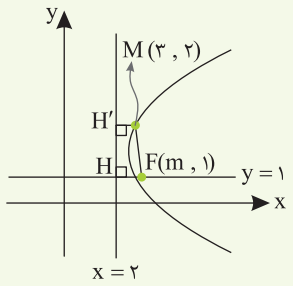
پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $S(-۱ , ۰)$ و $۴P = \frac{۱}{a} \Rightarrow P = \frac{۱}{۴a}$ است.

$$\text{معادلهٔ خط هادی} : y = -P + \beta \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴a} + ۰ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴a}$$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

۱۱۴. خط به معادلهٔ $y = ۱$ محور تقارن و خط $x = ۲$ خط هادی یک سهمی‌اند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۲ , ۳)$ بگذرد، آنگاه معادلهٔ سهمی را به دست آورید.

پاسخ: چون $x = ۲$ خط هادی این سهمی است. پس سهمی افقی است. در ضمن نقطهٔ $M(۳ , ۲)$ روی سهمی است پس دهانهٔ سهمی رو به راست است و کانون F روی محور $y = ۱$ است. پس $F(m , ۱)$ می‌باشد.



$$M \in \text{سهمی} \Rightarrow MF = MH' \Rightarrow \sqrt{(m-۳)^{۲} + ۱} = |۳ - ۲| \Rightarrow (m-۳)^{۲} = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

در ضمن $H(۲ , ۱)$ و رأس سهمی وسط FH است.

$$S = \frac{F+H}{۲} = (\frac{۵}{۲} , ۱) , a = SF = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\text{معادلهٔ سهمی افقی رو به راست} \Rightarrow (y-\beta)^{۲} = ۴a(x-\alpha) \Rightarrow (y-۱)^{۲} = ۲(x - \frac{۵}{۲})$$

۱۱۵. خط $y = -۱$ خط هادی سهمی $x^{۲} - ۶x + m = -۲y$ است. مقدار m را بیابید.

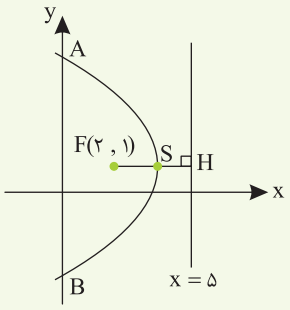
پاسخ: ابتدا معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^{۲} - ۶x + m = -۲y \Rightarrow (x-۳)^{۲} - ۹ + m = -۲y \Rightarrow (x-۳)^{۲} = -۲y + ۹ - m \Rightarrow (x-۳)^{۲} = -۲(y - \frac{۹}{۲} + \frac{m}{۲})$$

پس این سهمی قائم رو به پایین است و رأس آن $S(۳ , \frac{۹}{۲} - \frac{m}{۲})$ و $۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$ است.

$$\text{خط هادی سهمی قائم رو به پایین} \Rightarrow y = a + \beta \xrightarrow{y=-۱} -۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۲} - \frac{m}{۲} \Rightarrow m = ۱۲$$

۱۱۶. سهمی با کانون $F(۲ , ۱)$ و خط هادی $x = ۵$ محور yها را در نقاط A و B قطع کرده است. طول پاره‌خط AB را بیابید.



پاسخ: با توجه به جایگاه کانون و خط هادی این سهمی افقی رو به چپ است و اگر عمود FH را بر خط هادی وارد کنیم، آنگاه مختصات نقطهٔ H به صورت (۱ , ۵) است. پس رأس سهمی به صورت زیر است:

$$S=\frac{F+H}{۲}=(\frac{۷}{۲}\ ,\ ۱)\ ,\ a=SF=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ سهمی افقی رو به چپ $\Rightarrow (y-\beta)^۲=-۴a(x-\alpha)\Rightarrow (y-۱)^۲=-۶(x-\frac{۷}{۲})$

برخورد سهمی با محور yها $\xrightarrow{x=۰}(y-۱)^۲=۲۱\Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{۲۱}+۱ \\ y=-\sqrt{۲۱}+۱ \end{cases}$

بنابراین مختصات نقاط A و B به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{matrix} A(۰\ ,\ \sqrt{۲۱}+۱) \\ B(۰\ ,\ -\sqrt{۲۱}+۱) \end{matrix} \Rightarrow AB=۲\sqrt{۲۱}$$

۱۱۷. در یک تلسکوپ انعکاسی که دارای آینهٔ سهموی است اگر فاصلهٔ رأس آن تا کانون ۷۵ واحد و قطر قاعدهٔ آینه ۱۶۰ واحد باشد، آنگاه عمق (گودی) این تلسکوپ را بیابید.

پاسخ: در صورتی که h عمق تلسکوپ و R شعاع قاعده و a فاصلهٔ رأس تا کانون باشد آنگاه داریم:

$$a=\frac{R^۲}{۴h}\xrightarrow[۲R=۱۶۰\Rightarrow R=۸۰]{a=۷۵}۷۵=\frac{۸۰\times ۸۰}{۴h}\Rightarrow h=\frac{۸۰\times ۸۰}{۴\times ۷۵}=\frac{۶۴}{۳}$$

۱۱۸. سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. دایره به مرکز کانون سهمی یعنی F و شعاع ۳ واحد، سهمی را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث AFB را تعیین کنید.

پاسخ: با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی کانون F را پیدا می‌کنیم.

$$y^۲=۴x-۴\Rightarrow y^۲=۴(x-۱)$$

پس سهمی افقی رو به راست با رأس S(۱ , ۰) و $۴a=۴\Rightarrow a=۱$ است.

$$F=(a+\alpha\ ,\ \beta)=(۱+۱\ ,\ ۰)=(۲\ ,\ ۰)$$

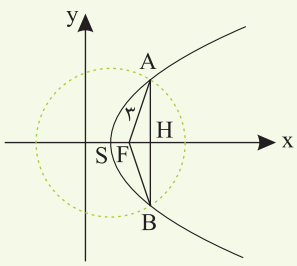
معادلهٔ دایره به مرکز F(۲ , ۰) و شعاع ۳ به صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲+y^۲=۹$$

اکنون سهمی و دایره را قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} (x-۲)^۲+y^۲=۹ \\ y^۲=۴x-۴ \end{cases}\Rightarrow (x-۲)^۲+۴x-۴=۹\Rightarrow x^۲=۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۳\xrightarrow{\text{در سهمی قرار می‌دهیم}}y^۲=۱۲-۴=۸\Rightarrow y=\pm ۲\sqrt{۲} \\ x=-۳\xrightarrow{\text{در سهمی قرار می‌دهیم}}y^۲=-۱۲-۴=-۱۶\ \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

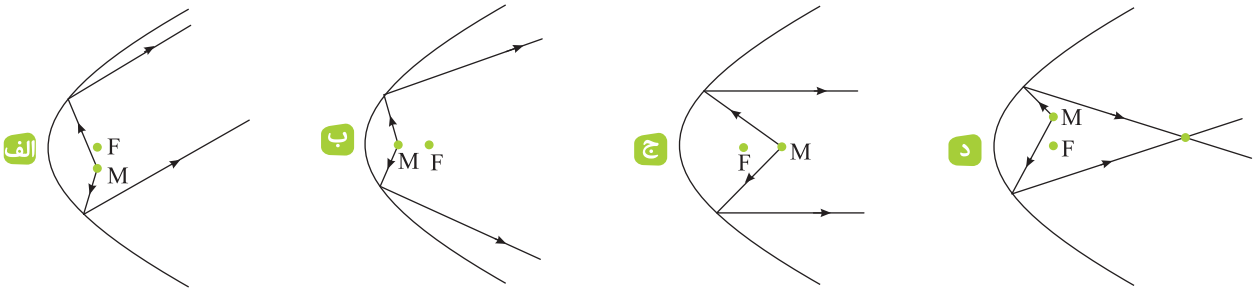


بنابراین A(۳ , ۲√۲) و B = (۳ , −۲√۲) پس AB = ۴√۲ در نتیجه AH = ۲√۲ پس:

$$\overset{\Delta}{AFH}: AF^۲=AH^۲+FH^۲\Rightarrow ۹=۸+FH^۲\Rightarrow FH=۱$$

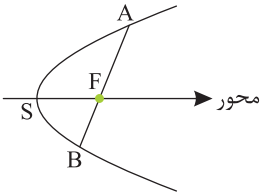
$$S_{\overset{\Delta}{AFB}} = \frac{۱}{۲}FH \times AB = \frac{۱}{۲}(۱)(۴\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}$$

۱۱۹. در شکل‌های زیر F کانون سهمی و M محل قرار گرفتن لامپ است. در کدام شکل بازتابش نور درست و در کدام شکل بازتابش نور نادرست رسم شده است؟

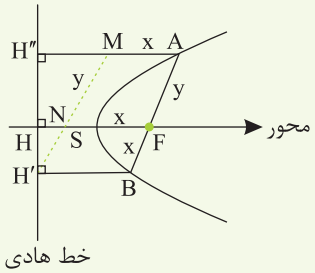


پاسخ: با توجه به مطالب کتاب درسی در صفحات ۵۶ و ۵۷ شکل‌های (الف) و (ب) درست رسم شده‌اند و شکل‌های (ج) و (د) نادرست هستند.

۱۲۰. در سهمی شکل زیر از کانون F خطی رسم کرده‌ایم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. اگر فاصلهٔ کانون تا خط هادی سهمی برابر واحد باشد، حاصل $\frac{۱}{AF} + \frac{۱}{BF}$ را به دست آورید.



پاسخ: از نقاط A و B و F عمودهای AH'' و BH' و FH را بر خط هادی رسم می‌کنیم. بنا بر فرض $FH = ۱$ و رسم خطی موازی AB از نقطهٔ H' داریم:



$$AH'' = y \xrightarrow{AF=AH''} AF = y \Rightarrow MN = y$$

$$BH' = x \xrightarrow{BH'=BF} BF = x \Rightarrow H'N = FN = x \Rightarrow HN = ۱ - x$$

$$HN \parallel MH'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{HN}{MH''} = \frac{H'N}{H'M} \Rightarrow \frac{۱-x}{y-x} = \frac{x}{x+y}$$

$$\Rightarrow x + y - x^۲ - xy = xy - x^۲$$

$$\Rightarrow x + y = ۲xy \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = ۲ \Rightarrow \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{y} + \frac{۱}{x} = ۲ \xrightarrow[y=AF]{x=BF} \frac{۱}{BF} + \frac{۱}{AF} = ۲$$

سوالات طبقه‌بندی شده

۱۲۱. خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ و مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. (دی ۱۴۰۰)

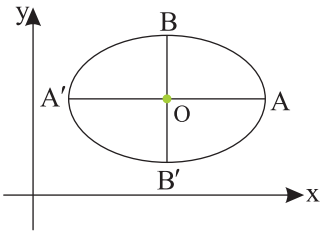
الف) فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر این بیضی را پیدا کنید.

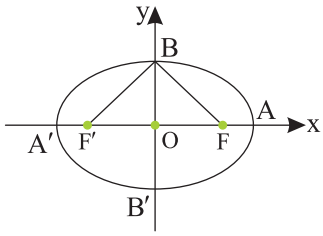
۱۲۲. در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴,۵)$ باشد. (شهریور ۱۴۰۰)

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.

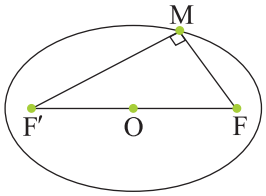


۱۲۳. در بیضی شکل زیر طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول قطر بزرگ است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰)



۱۲۴. کانون‌های یک بیضی نقاط $(۲,۵)$ و $(۲,-۳)$ و $a = ۵$ است. مختصات مرکز و اندازهٔ قطر کوچک بیضی را پیدا کنید. (شهریور ۹۹)

۱۲۵. نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی‌که بدانیم مثلث MFF' قائم‌الزاویه است طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.) (دی ۹۸)



۱۲۶. سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را در نظر بگیرید. (شهریور ۱۴۰۰)

الف) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب) نمودار سهمی را به کمک نقاط کمکی رسم کنید.

۱۲۷. معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد، سپس معادلهٔ خط هادی آن را بیابید. (دی ۹۹)

۱۲۸. معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(۴,۶)$ رأس و $y = ۳$ معادلهٔ خط هادی آن باشد. *(شهریور ۹۹)*

۱۲۹. مختصات کانون، رأس و معادلهٔ خط هادی سهمی $y^۲ - ۶y + ۱۶x + ۲۵ = ۰$ را تعیین کنید. *(شهریور ۹۹)*

۱۳۰. اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y = ۷$ معادلهٔ خط هادی سهمی باشد. *(شهریور ۹۸)*

الف) معادلهٔ سهمی را بنویسید.

ب) مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

۱۳۱. معادلهٔ سهمی را بنویسید که $S(۱,-۲)$ کانون و $F(۱,۲)$ رأس آن باشد. سپس معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید. *(دی ۹۷)*

۱۳۲. درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود. درست ◯ نادرست ◯

ب) دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۲ = ۰$ محور y را قطع می‌کند، اما محور x را قطع نمی‌کند. درست ◯ نادرست ◯

ج) اگر مجموع فواصل نقطهٔ A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطهٔ A درون بیضی است. درست ◯ نادرست ◯

د) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است. درست ◯ نادرست ◯

هـ) در یک سهمی هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از رأس سهمی خواهد گذشت. درست ◯ نادرست ◯

و) اگر نوری در راستای عمودی با کانون سهمی افقی اما کمی بالاتر بر سهمی بتابد، بازتابش نور موازی با هم و رو به پایین خارج می‌شود. درست ◯ نادرست ◯

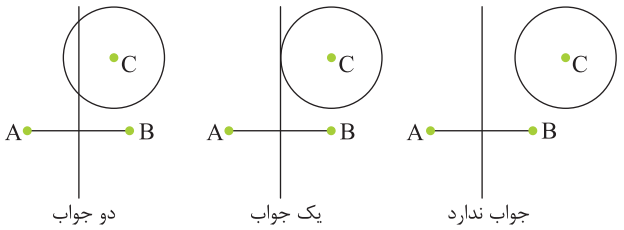
۱۳۳. بدنهٔ داخلی یک بیضی با مختصات دو سر قطر بزرگ $(۱۴,-۲)$ و $(-۱۲,-۲)$ صیقلی شده است. اگر یک سر قطر دیگر بیضی $(۱,۱۰)$ باشد و شعاع نوری از نقطهٔ $(۶,-۲)$ بر بدنهٔ بیضی بتابد، بازتابش نور از کدام نقطه می‌گذرد؟ مختصات این نقطه را بیابید.

پاسخ سوالات طبقه‌بندی شده

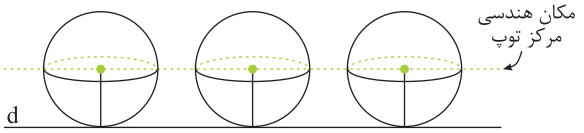
درس اول

پاسخ ۲۵ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است و مکان هندسی نقاطی که از C به فاصلهٔ ۳سانتی‌متر هستند، دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است، تلاقی عمودمنصف AB و دایره جواب این مسئله است.

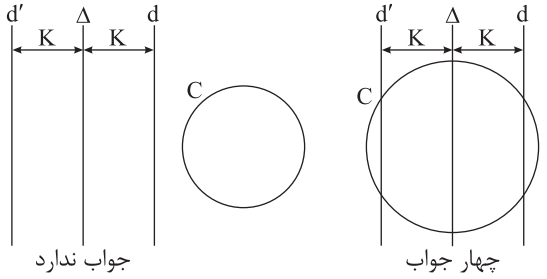
بحث در تعداد جواب‌ها: اگر عمودمنصف AB دایره را قطع کند، مسئله دو جواب دارد و اگر مماس بر دایره باشد، مسئله یک جواب دارد و اگر قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



پاسخ ۲۶ مرکز توپ همواره از خط مستقیم d به فاصلهٔ شعاع توپ است. پس مکان هندسی مرکز توپ خطی موازی با خط d به فاصلهٔ برابر با شعاع توپ است.

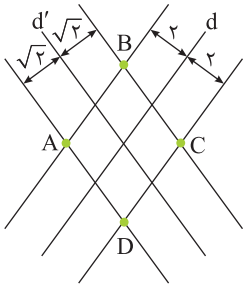


پاسخ ۲۷ مکان هندسی نقطه‌ای که از خط Δ به فاصلهٔ معلوم k است، دو خط موازی d و d′، موازی با Δ است. نقاط تلاقی دو خط موازی d و d′ با دایرهٔ c جواب مسئله است.



بحث در تعداد جواب‌ها: هر کدام از خط‌های d و d′ حداکثر دو نقطهٔ تلاقی با دایرهٔ c می‌توانند داشته باشند. پس تعداد جواب‌های این مسئله حداکثر چهار نقطه است.

پاسخ ۲۸ مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر هستند، دو خط موازی d در طرفین آن است و مکان هندسی نقاطی که از d′ به فاصلهٔ $\sqrt{2}$ سانتی‌متر هستند، دو خط موازی d′ در طرفین آن است. نقاط تلاقی این خطوط موازی با هم چهار نقطه است که جواب‌های این مسئله است. (در شکل نقاط A، B، C و D)



درس دوم

پاسخ ۵۷ طول خط‌المرکزین دو دایره را با مجموع و تفاضل شعاع‌های دو دایره مقایسه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow O(1,0)\,,\,R=1\\ x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow O'(0,1)\,,\,R'=1\end{array}\right\}\Rightarrow OO'=\sqrt{2}$$

چون $|R-R'|<OO'<R+R'$ پس دو دایره متقاطع هستند.

پاسخ ۵۸ فاصلهٔ مرکز تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$R=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=4$

پاسخ ۵۹ دو دایره مماس داخل هستند هرگاه $OO'=|R-R'|$ باشد.

$$C':x^2+y^2-8x+4y+16=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}O'=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(4,-2)\\ R'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{64+16-64}}{2}=2\end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{16+9}=5$$

$$OO'=|R-R'|\Rightarrow 5=|R-2|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}R-2=5\Rightarrow R=7\\ R-2=-5\Rightarrow R=-3\ \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

بنابراین:

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\Rightarrow(x-0)^2+(y-1)^2=49$

پاسخ ۶۰ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $y=-1$ را پیدا کرده با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4\Rightarrow O(2,-3)\,,\,R=2$$

فاصلهٔ O تا خط $y=-1$ $=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|0-3+1|}{\sqrt{0+1}}=2$

چون فاصلهٔ O تا خط $y=-1$ با شعاع دایره برابر است، پس خط بر دایره مماس است.

راه‌حل دوم: خط $y=-1$ را با دایره قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=4\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow(x-2)^2+(-1+3)^2=4$$

$$\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$$

از دستگاه فقط یک جواب به دست آمده است، پس خط بر دایره مماس است.

پاسخ ۶۱ طول پاره‌خط AB برابر قطر دایره و وسط پاره‌خط AB مرکز دایره است.

$$2R=AB=\sqrt{(4+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{36+4}$$

$$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\Rightarrow R=\sqrt{10}$$

$$O=\frac{A+B}{2}=(1,0)$$

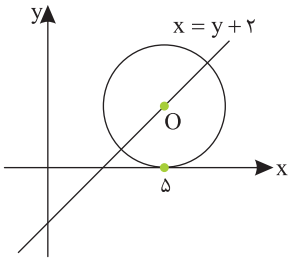
معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\Rightarrow(x-1)^2+(y-0)^2=10$

پاسخ ۶۲ فرض کنیم $M(x,y)$ نقطه‌ای از مکان هندسی باشد، داریم:

$$MA^2+MB^2=4 \Rightarrow (x+1)^2+(y-0)^2+(x-1)^2+(y-0)^2=4$$
$$\Rightarrow x^2+1+\cancel{2x}+y^2+x^2+1-\cancel{2x}+y^2=4$$
$$\Rightarrow 2x^2+2y^2=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

پس مکان هندسی موردنظر دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است.

پاسخ ۶۳ بنابر فرض مسئله شکل مقابل را خواهیم داشت، چون دایره در نقطه به طول ۵ بر محور xها مماس است، پس طول مرکز دایره برابر ۵ و عرض آن برابر R شعاع دایره است.



یعنی مرکز دایره $O(5,R)$ است. چون مرکز دایره روی خط $x=y+2$ قرار دارد، نتیجه می‌گیریم:

$$5=R+2 \Rightarrow R=3 \Rightarrow O(5,3)$$

معادلهٔ دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=9$

درس سوم

پاسخ ۱۲۱ الف)

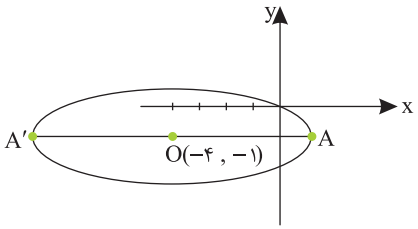
طول قطر کوچک $=2b=6 \Rightarrow b=3$

خروج از مرکز $=\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}=\frac{16}{25}$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{b^2+c^2}=\frac{16}{25} \Rightarrow \frac{c^2}{9+c^2}=\frac{16}{25}$$
$$\Rightarrow 25c^2=144+16c^2 \Rightarrow 9c^2=144 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$$

پس فاصلهٔ کانونی FF' برابر $2c=8$ است. در ضمن $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ و $c=4$، پس $a=5$ است.

ب) چون بیضی افقی است، پس قطر بزرگ AA' موازی محور xها است و نقاط A و A' به فاصلهٔ $a=5$ از مرکز $O(-4,-1)$ است، پس $A=(1,-1)$ و $A'=(-9,-1)$ است.



پاسخ ۱۲۲ الف) بنابر فرض سؤال داریم:

قطر بزرگ $=AA'=6 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$

قطر کوچک $=BB'=4 \Rightarrow 2b=4 \Rightarrow b=2$

$$c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی FF' برابر $2c=2\sqrt{5}$ است.

ب) با توجه به شکل قطر بزرگ AA' موازی محور xها است؛ پس نقاط A و A' از مرکز O به فاصلهٔ $a=3$ است، بنابراین $A(7,5)$ و $A'(1,5)$ مختصات دو سر قطر بزرگ بیضی است.

پاسخ ۱۲۳ بنابر فرض سؤال داریم:

$$BB'=\frac{\sqrt{3}}{2}AA' \Rightarrow 2b=\frac{\sqrt{3}}{2}(2a) \Rightarrow 2b=\sqrt{3}a \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{OBF}$ می‌دانیم $OB=b$ و $OF=c$، پس $BF=a$. داریم:

$$\cos O\hat{B}F=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow O\hat{B}F=30^\circ$$

بنابراین $F'\hat{B}F=60^\circ$.

پاسخ ۱۲۴ وسط دو کانون $F(2,5)$ و $F'(2,-3)$ مرکز بیضی است.

$$O=\frac{F+F'}{2}=(2,1)$$

در ضمن:

$$2c=FF'=8 \Rightarrow c=4, a=5$$
$$b^2=a^2-c^2=25-16=9 \Rightarrow b=3$$
$$\Rightarrow \text{قطر کوچک}=2b=6$$

پاسخ ۱۲۵ بنابر فرض سؤال داریم:

$$2a=10 \Rightarrow a=5\ ,\ 2b=6 \Rightarrow b=3$$

پس:

$$c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow c=4 \Rightarrow FF'=8$$
$$M\in \text{بیضی} \Rightarrow MF+MF'=2a=10$$

پس اگر $MF=x$ باشد، آنگاه $MF'=10-x$؛ بنابراین:

$$\overset{\Delta}{MFF'}: FF'^2=MF^2+MF'^2 \Rightarrow 8^2=x^2+(10-x)^2$$
$$\Rightarrow 64=x^2+100+x^2-20x$$
$$\Rightarrow 2x^2-20x+36=0 \Rightarrow x^2-10x+18=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-4\times18}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{28}}{2}=\frac{10\pm2\sqrt{7}}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} MF=5-\sqrt{7} \\ MF'=5+\sqrt{7} \end{cases}$$

توجه کنید با توجه به شکل MF از MF' کوچک‌تر است.

پاسخ ۱۲۶ الف) معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

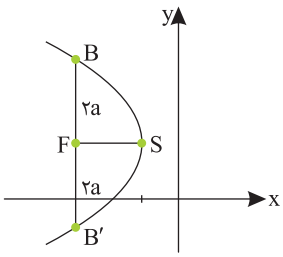
$$y^2-2y+8x+9=0 \Rightarrow (y-1)^2-1+8x+9=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8x-8 \Rightarrow (y-1)^2=-8(x+1)$$

این سهمی افقی رو به چپ است و رأس $S(-1,1)$ و $4a=8 \Rightarrow a=2$ است.

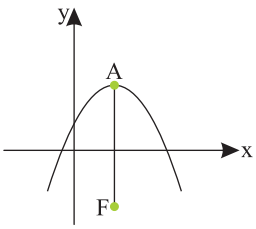
کانون $F=(-a+\alpha,\beta)=(-2-1,1)=(-3,1)$

خط هادی: $x=a+\alpha \Rightarrow x=2-1 \Rightarrow x=1$

ب) نقاط کمکی $B(-3,5)$ و $B'(-3,-3)$ روی سهمی هستند. سهمی با رأس S و گذرنده از نقاط B و B' را مطابق شکل ترسیم می‌کنیم.



پاسخ ۱۲۷ با توجه به جایگاه رأس و کانون سهمی این سهمی قائم رو به پایین است و $a=AF=4$. داریم:

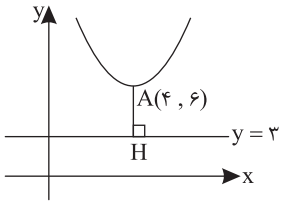


معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین: $(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$

$\Rightarrow (x-1)^2=-16(y-2)$

معادلهٔ خط هادی: $y=a+\beta \Rightarrow y=4+2 \Rightarrow y=6$

پاسخ ۱۲۸ با توجه به جایگاه رأس و خط هادی این سهمی قائم رو به بالا است. مسلماً فاصلهٔ رأس A با خط هادی برابر a است.



$a=AH=3$

معادلهٔ سهمی قائم رو به بالا: $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$

$\Rightarrow (x-4)^2=12(y-6)$

پاسخ ۱۲۹ معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$y^2-6y+16x+25=0 \Rightarrow (y-3)^2-9+16x+25=0$

$(y-3)^2=-16x-16 \Rightarrow (y-3)^2=-16(x+1)$

پس سهمی افقی رو به چپ با رأس $S(-1,3)$ و $4a=16 \Rightarrow a=4$ است.

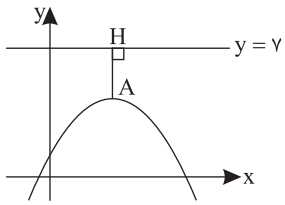
کانون $F=(-a+\alpha,\beta)=(-4-1,3)=(-5,3)$

خط هادی: $x=a+\alpha \Rightarrow x=4-1 \Rightarrow x=3$

پاسخ ۱۳۰ الف) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی این سهمی قائم رو به پایین است.

و فاصلهٔ A تا خط هادی یعنی عمود AH برابر a است، یعنی $a=AH=4$.

داریم:



معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین: $(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$

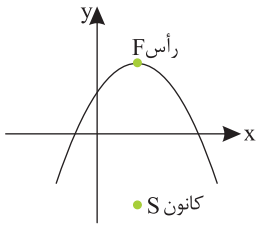
$\Rightarrow (x-2)^2=-16(y-3)$

ب)

کانون $F=(\alpha,-a+\beta)=(2,-4+3)=(2,-1)$

پاسخ ۱۳۱ دقت کنید $S(1,-2)$ کانون سهمی است و $F(1,2)$ رأس آن. با توجه به جایگاه کانون و رأس نتیجه می‌گیریم سهمی قائم رو به پایین است و $a=SF=4$.

می‌دانیم معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین با رأس (α,β) به صورت زیر است:



$$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta) \xrightarrow{\text{رأس } F(1,2)} (x-1)^2=-16(y-2)$$

در ضمن معادلهٔ خط هادی این سهمی به صورت زیر است:

$$y=a+\beta \xrightarrow[\beta=2]{a=4} y=4+2 \Rightarrow y=6$$

نکته: معمولاً رأس را با نماد S و کانون را با نماد F نمایش می‌دهیم که در این سؤال این نمادها جابه‌جا شده است. پس لازم است به این مورد توجه لازم را داشته باشید.

پاسخ ۱۳۲ الف) نادرست

ب) درست

ج) نادرست

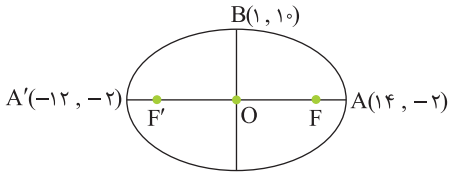
د) نادرست

ه) نادرست

و) درست

پاسخ ۱۳۳ با توجه به مختصات دو سر قطر بزرگ این بیضی افقی است و مرکز بیضی وسط AA' است. پس:

$$O=\frac{A+A'}{2}=(1,-2)$$



بنابراین:

$$OA=a=\sqrt{(14-1)^2+(-2+2)^2}=13$$

$$OB=b=\sqrt{(1-1)^2+(10+2)^2}=12$$

$$c^2=a^2-b^2=13^2-12^2=25 \Rightarrow c=5$$

در نتیجه مختصات دو کانون این بیضی به صورت زیر است:

$$F(c+\alpha,\beta)=(5+1,-2)=(6,-2)$$

$$F'(-c+\alpha,\beta)=(-5+1,-2)=(-4,-2)$$

از طرف دیگر بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی اگر از کانون $F(6,-2)$ نوری بر بدنهٔ بیضی بتابد، بازتابش نور از کانون بعدی یعنی $F'(-4,-2)$ عبور می‌کند.