سوالات تألیفی

فضای دوبعدی $\mathbb{R}^2$

۱. شکل کلی مربوط به هر رابطه را رسم کنید.

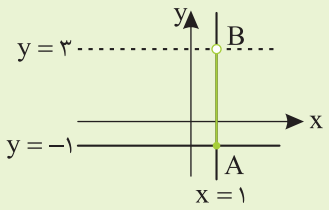
الف) $x=1 \quad , \quad -1 \le y < 3$

ب) $y=x^2 \quad , \quad -1 < x \le 2$

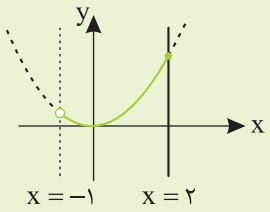
ج) $-1 \le x \le 1 \quad , \quad -2 \le y \le 1$

د) $y=3 \quad , \quad -2 \le x \le 1$

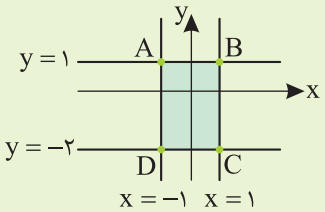
پاسخ: الف) شکل این رابطه پاره‌خط AB است که از طرف $y=-1$ توپر و از طرف $y=3$ توخالی است. یعنی A روی این شکل قرار دارد ولی B قرار ندارد.



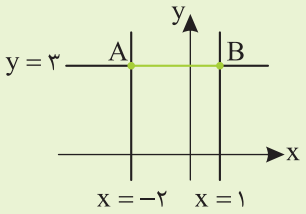
ب) شکل این رابطه قسمتی از سهمی است که یک طرف سهمی روی خط $x=2$ توپر و طرف دیگر روی خط $x=-1$ توخالی است.



ج) شکل این رابطه مستطیل ABCD به ابعاد ۲ و ۳ است.



د) شکل این رابطه پاره‌خط AB به طول ۳ است.



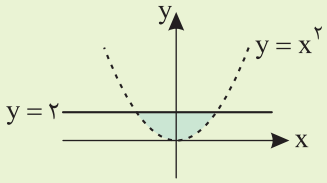
۲. شکل کلی مربوط به هر رابطه را رسم کنید.

الف) $x^2 < y \le 2$

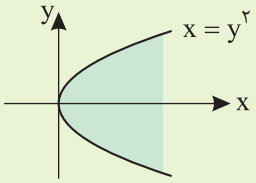
ب) $x \ge y^2$

ج) $y^2 + x \le 0 \, , \, x > -2$

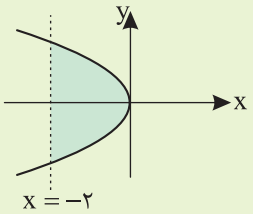
پاسخ: الف) شکل این رابطه نقاط درون سهمی قائم است که پایین‌تر از خط $y=2$ می‌باشد به‌جز نقاط خود سهمی.



ب) شکل این رابطه نقاط درون و روی سهمی افقی است.

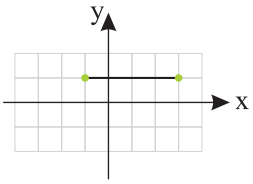


ج) شکل این رابطه نقاط روی و درون سهمی افقی رو به چپ است که در قسمت راست خط $x=-2$ قرار دارند.

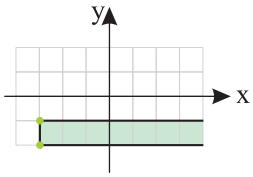


۳. **رابطهٔ مربوط به هر شکل را بنویسید.**

الف



ب



پاسخ: الف) این شکل پاره‌خطی روی خط $y=1$ است که xهای روی این پاره‌خط بین -1 و ۳ قرار دارند، پس رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$y=1 \quad , \quad -1\le x\le 3$$

ب) این شکل سمت راست خط $x=-3$ قرار دارد و بین خطوط $y=-1$ و $y=-2$ است، پس رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$x\ge -3 \quad , \quad -2\le y\le -1$$

۴. **مساحت مربوط به ناحیهٔ $S=\{(x\,,\,y)\,|\,1\le x^2+y^2+2x-4y\le 11\}$ را به دست آورید.**

پاسخ: ناحیه مربوط به $1\le x^2+y^2+2x-4y\le 11$ سطح بین دو دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y=11$ و $x^2+y^2+2x-4y=1$ است. کافی است مساحت دو دایره را از هم کم کنیم:

$$x^2+y^2+2x-4y-11=0 \Rightarrow R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4+16+44}}{2}=\frac{\sqrt{64}}{2}=4$$

$$x^2+y^2+2x-4y-1=0 \Rightarrow R'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4+16+4}}{2}=\frac{\sqrt{24}}{2}=\sqrt{6}$$

بنابراین:

$S_{\text{مساحت مجموعه}} = \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۱۶\pi - ۶\pi = ۱۰\pi$

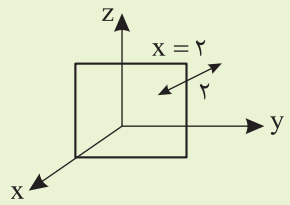
فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^۳$

۵. نقطهٔ $(۳ , ۲- , ۱-)$ در کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات فضایی قرار دارد؟

پاسخ: نقطهٔ $(۳ , ۲- , ۱-)$ در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات فضایی قرار دارد.

۶. معادلهٔ $x = ۲$ در فضای سه‌بعدی $R^۳$ مشخص کننده چه شکلی است؟

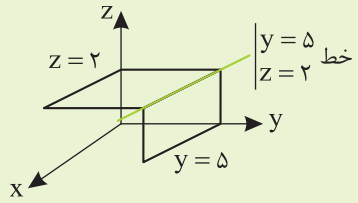
پاسخ: نقاطی که در معادلهٔ $x = ۲$ صدق می‌کنند به صورت $A(۲ , ۱ , -۱)$ و $B(۲ , ۳ , ۰)$ و $C(۲ , ۵ , ۷)$ و ... هستند. همهٔ این نقاط دارای طول‌های مساوی ۲ هستند پس این نقاط از صفحهٔ yoz به فاصلهٔ ۲ قرار دارند. بنابراین $x = ۲$ مشخص‌کنندهٔ صفحه‌ای موازی yoz و به فاصلهٔ ۲ از آن است.



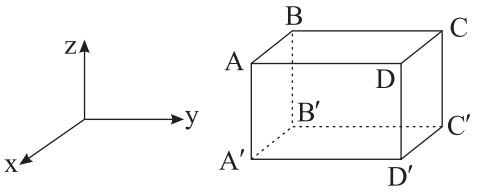
۷. نمودار مربوط به $\begin{cases} y = ۵ \\ z = ۲ \end{cases}$ مشخص کنندهٔ چه شکلی است؟ آن را رسم کنید. این خط با کدام محور موازی است؟

پاسخ: می‌دانیم $y = ۵$ معادلهٔ صفحهٔ موازی با صفحهٔ مختصات xz به فاصلهٔ ۵ از آن و $z = ۲$ معادلهٔ صفحهٔ موازی با صفحهٔ مختصات xy به فاصلهٔ ۲ از آن است. پس فصل مشترک این دو صفحه یعنی $\begin{cases} y = ۵ \\ z = ۲ \end{cases}$ یک خط است.

و این خط عمود بر صفحه yz، پس موازی با محور xها است.



۸. وجه‌های مکعب‌مستطیل زیر قسمت‌هایی از صفحات $x = ۱$ ، $x = ۴$ ، $y = ۲$ ، $y = ۶$ ، $z = -۱$ و $z = ۲$ است. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) روابط مشخص‌کنندهٔ وجه $ADD'A'$ را بنویسید.

ب) طول پاره‌خط $B'D$ را به دست آورید.

ج) معادلات یال $B'C'$ را بنویسید.

پاسخ:

الف) دقت کنید وجه $ADD'A'$ قسمتی از صفحه $x=۴$ است.

وجه $ADD'A'$: $\begin{cases} x=۴ \\ ۲\le y\le ۶ \\ -۱\le z\le ۲ \end{cases}$

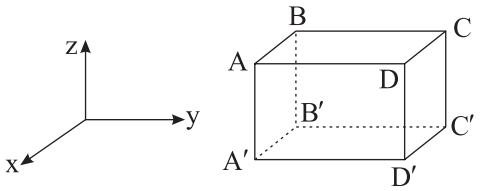
ب) نقطهٔ B' به مختصات $(۱,۲,-۱)$ و نقطهٔ D به مختصات $(۴,۶,۲)$ است.

پس: $B'D=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۶-۲)^۲+(۲+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱۶+۹}=\sqrt{۳۴}$

ج) دقت کنید یال $B'C'$ قسمتی از تلاقی دو صفحه $x=۱$ و $z=-۱$ است.

یال $B'C'$: $\begin{cases} x=۱ \\ ۲\le y\le ۶ \\ z=-۱ \end{cases}$

۹. وجه‌های مکعب‌مستطیل مقابل قسمت‌هایی از صفحات $x=۱$، $x=۴$، $y=۲$، $y=۷$، $z=۲$ و $z=۵$ هستند. به سؤالات زیر جواب دهید.



الف) نقطه‌ای روی وجه ABCD مثال بزنید که روی هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) روابطی بنویسید که مشخص‌کننده حجم محدودشده به درون و روی سطح مکعب‌مستطیل را نشان دهد.

ج) معادلات یال DD' را بنویسید.

پاسخ: الف) نقاط روی وجه ABCD دارای $z=۵$ و $۱\le x\le ۴$ و $۲\le y\le ۷$ هستند. پس به عنوان مثال نقطهٔ $P(۲,۳,۵)$ روی فقط این وجه قرار دارد.

ب) حجم و سطح مکعب‌مستطیل: $\begin{cases} ۱\le x\le ۴ \\ ۲\le y\le ۷ \\ ۲\le z\le ۵ \end{cases}$

ج) یال DD' قسمتی از تلاقی دو صفحه $x=۴$ و $y=۷$ است.

یال DD': $\begin{cases} x=۴ \\ y=۷ \\ ۲\le z\le ۵ \end{cases}$

۱۰. وجه‌های مکعب مستطیل با صفحات $x=-۱$ و $x=۴$ و $y=۲$ و $y=۷$ و $z=۰$ و $z=۴$ مشخص شده‌اند. نقطه‌ای با کدام مختصات بر روی یک یال آن قرار دارد؟

۱) $(۴,۳,۷)$ ۲) $(-۱,۷,۴)$ ۳) $(۰,۲,۴)$ ۴) $(۳,۵,۴)$

پاسخ: نقطه‌ای بر روی یال قرار دارد که در دو وجه غیرموازی آن واقع بوده و خارج از محدودهٔ مکعب مستطیل نباشد.

نقطهٔ $(۴,۳,۷)$ ارتفاعش خارج از محدودهٔ $۰\le z\le ۴$ قرار دارد. پس بیرون مکعب مستطیل است.

نقطهٔ $(-۱,۷,۴)$ رأس مکعب مستطیل است پس روی سه یال آن قرار دارد.

نقطهٔ $(۰,۲,۴)$ روی صفحات غیرموازی $y=۲$ و $z=۴$ قرار دارند و طول آن در بازهٔ $-۱\le x\le ۴$ است پس روی یال مکعب مستطیل قرار دارد.

و نقطهٔ $(۳,۵,۴)$ روی وجه بالایی مکعب مستطیل که قسمتی از صفحهٔ $z=۴$ است قرار دارد.

پس گزینهٔ ۳ درست است.

(دانش‌آموزان عزیز در این نوع سؤال در امتحان نهایی فقط ذکر گزینه درست کافی است. ما کامل توضیح داده‌ایم بـرای درک بیشـتر مفهوم این سؤال)

۱۱. وجه‌های مکعب مستطیلی روی صفحات $z = ۴$ و $z = -۲$ و $y = ۵$ و $y = ۱$ و $x = ۲$ و $x = -۱$ قرار دارد.

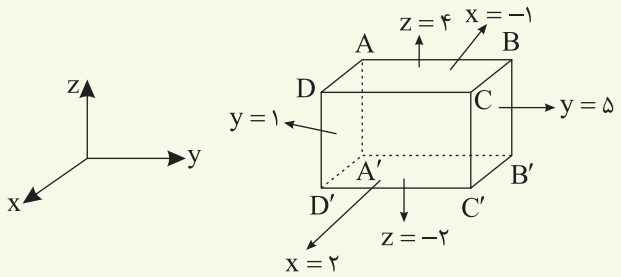
الف) حدود طول و عرض و ارتفاع نقاط روی وجه بالایی این مکعب مستطیل را مشخص کنید.

ب) فاصلهٔ مرکز این مکعب مستطیل تا مبدأ مختصات را بیابید.

ج) معادلات وجه موازی صفحهٔ xz و غیرواقع بر آن را بنویسید.

د) معادلات یالی از وجه بالا را بنویسید که موازی صفحهٔ yz و غیرواقع بر آن باشد.

پاسخ: شکل مکعب مستطیل به صورت زیر است.



الف) وجه بالایی ایـن مکعـب مسـتطیل روی صـفحهٔ $z = ۴$ قرار دارد و روی این وجه xها در بازهٔ $-۱ \le x \le ۲$ و yها در بازهٔ $۱ \le y \le ۵$ هستند.

ب) مرکز این مکعب مستطیل نقطهٔ M وسط قطر AC' قرار دارد.

$$\left.\begin{array}{l} A = (-۱ , ۱ , ۴) \\ C' = (۲ , ۵ , -۲) \end{array}\right\} \Rightarrow M = \frac{A + C'}{۲} = (\frac{۱}{۲} , ۳ , ۱)$$

$$OM = \sqrt{\frac{۱}{۴} + ۹ + ۱} = \frac{\sqrt{۴۱}}{۲}$$

ج) در شکل وجه‌های موازی صفحهٔ xz صفحهٔ $BCC'B'$ و صفحهٔ $ADD'A'$ است.

$$ADD'A' \text{ معادلهٔ } : \begin{cases} -۱ \le x \le ۲ \\ y = ۱ \\ -۲ \le z \le ۴ \end{cases} \qquad BCC'B' \text{ معادلهٔ } : \begin{cases} -۱ \le x \le ۲ \\ y = ۵ \\ -۲ \le z \le ۴ \end{cases}$$

د) یالی از وجه بالایی که موازی صفحهٔ yz است یال DC و یال AB است.

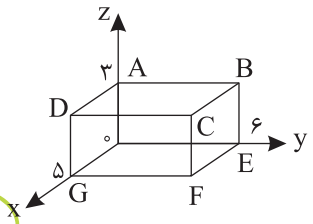
$$AB \text{ یال } : \begin{cases} x = -۱ \\ ۱ \le y \le ۵ \\ z = ۴ \end{cases} \qquad DC \text{ یال } : \begin{cases} x = ۲ \\ ۱ \le y \le ۵ \\ z = ۴ \end{cases}$$

۱۲. فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲ , ۰ , ۴)$ تا محور xها چند برابر فاصلهٔ آن تا محور zها می‌باشد؟

پاسخ: فاصـلهٔ نقطـهٔ $A(x , y , z)$ از محـور xهـا برابـر $\sqrt{y^۲ + z^۲}$ و از محـور yهـا برابـر $\sqrt{x^۲ + z^۲}$ و از محـور zهـا برابـر $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ است. پس

$$\frac{\text{فاصلهٔ A تا محور xها}}{\text{فاصلهٔ A تا محور zها}} = \frac{\sqrt{y^۲ + z^۲}}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} = \frac{\sqrt{۰ + ۴^۲}}{\sqrt{(-۲)^۲ + ۰}} = \frac{\sqrt{۱۶}}{\sqrt{۴}} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

۱۳. با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) معادلات مربوط به یال BC را بنویسید.

ب) نام وجهی که معادلهٔ آن به صورت $۰ \le z \le ۳$ و $۰ \le y \le ۶$ و $x = ۵$ می‌باشد را بنویسید.

ج) نسبت $\frac{AF}{EG}$ را بیابید.

د) معادلات حجم این معکب مستطیل را بنویسید.

پاسخ: الف)

$$BC \text{ یال}: \begin{cases} ۰ \le x \le ۵ \\ y = ۶ \\ z = ۳ \end{cases}$$

ب) معادله وجه DCFG است.

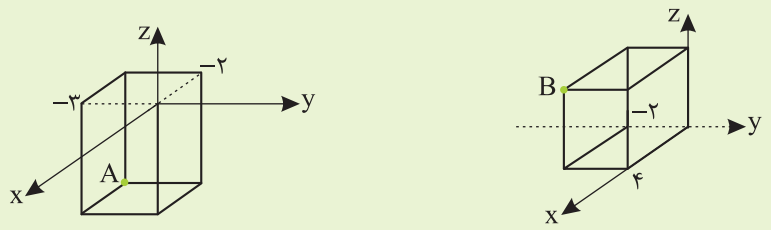
ج) با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A = (۰ , ۰ , ۳) , F = (۵ , ۶ , ۰) \Rightarrow AF = \sqrt{۲۵+۳۶+۹} = \sqrt{۷۰} \\ E = (۰ , ۶ , ۰) , G = (۵ , ۰ , ۰) \Rightarrow EG = \sqrt{۲۵+۳۶} = \sqrt{۶۱} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{EG} = \frac{\sqrt{۷۰}}{\sqrt{۶۱}}$$

د) $$\text{معادلات حجم مکعب مستطیل}: \begin{cases} ۰ < x < ۵ \\ ۰ < y < ۶ \\ ۰ < z < ۳ \end{cases}$$

۱۴. نقاط با مختصات $A(-۲ , -۳ , -۴)$ و $B(۴ , -۲ , ۲)$ را در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^۳$ نمایش دهید.

پاسخ:



۱۵. چند نقطه روی محور zها وجود دارد به طوری‌که از نقطهٔ $A(-۱ , ۲ , ۳)$ به فاصلهٔ ۲ هستند؟ چرا؟

پاسخ: فرض کنیم نقطهٔ $M(۰ , ۰ , z)$ روی محور zها باشد بنا بر فرض سؤال داریم:

$$AM = ۲ \Rightarrow \sqrt{(۰+۱)^۲ + (۰-۲)^۲ + (z-۳)^۲} = ۲ \Rightarrow \sqrt{۱+۴+(z-۳)^۲} = ۲ \Rightarrow ۵+(z-۳)^۲ = ۴ \Rightarrow (z-۳)^۲ = -۱$$

این معادله جواب ندارد، پس نقطه‌ای با این ویژگی وجود ندارد.

۱۶. چند نقطه روی صفحهٔ xoy وجود دارد به طوری‌که از نقطهٔ $A(۲ , -۱ , ۱)$ به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ: فرض کنیم $M(x , y , ۰)$ نقطه‌ای روی صفحهٔ xoy باشد بنا بر فرض سؤال داریم:

$$MA = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ + (۰-۱)^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱$$

معادلهٔ به دست آمده معادلهٔ یک دایره در صفحهٔ xoy است. پس بی‌شمار نقطه در صفحهٔ xoy وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ است.

۱۷. نقاط $A(2, 3, 3m+2)$ و $B(-4, 1, m+6)$ دو رأس مجاور یک مربع هستند. کمترین مساحت این مربع را به دست آورید.

پاسخ: فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B برابر طول ضلع مربع است.

$$AB=\sqrt{(2+4)^2+(3-1)^2+(3m+2-m-6)^2}=\sqrt{40+(2m-4)^2}$$

چون $(2m-4)^2\geq 0$ است پس کمترین مقدار AB هنگامی ایجاد می‌شود که عبارت $2m-4$ برابر صفر باشد. یعنی $m=2$ بنابراین مینیمم طول ضلع مربع مساوی $\sqrt{40}$ و در نتیجه مینیمم مساحت این مربع برابر ۴۰ است.

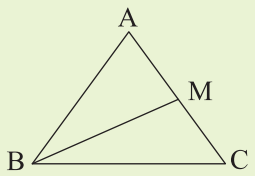
۱۸. چهار نقطهٔ $A(2, 1, 3)$، $B(-1, 1, 3)$، $C(2, -1, 3)$ و $D(-1, -1, 3)$ در دستگاه $\mathbb{R}^3$ مفروض‌اند. معادلات مشخص‌کنندهٔ سطح محدود به چهارضلعی ABCD را بنویسید.

پاسخ: نقطه‌های A، B، C و D دارای ارتفاع برابر ۳ هستند. پس این نقاط روی صفحهٔ $z=3$ قرار دارند. از طرف دیگر دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ $y=1$ و دو نقطهٔ C و D در صفحهٔ $y=-1$ قرار دارند و نقاط A و C در صفحهٔ $x=2$ و نقاط B و D در صفحهٔ $x=-1$ واقع‌اند، در نتیجه معادلات مشخص کنندهٔ سطح محدود به چهارضلعی ABCD به صورت زیر است:

$$\begin{cases}-1\leq x\leq 2\\ -1\leq y\leq 1\\ z=3\end{cases}$$

۱۹. در مثلث ABC با رأس‌های $A(1, -2, 3)$، $B(2, 0, 1)$ و $C(-3, 2, 1)$ طول میانه وارد بر ضلع AC را بیابید.

پاسخ: اگر نقطهٔ M وسط ضلع AC باشد، آنگاه طول میانهٔ وارد بر ضلع AC فاصلهٔ رأس B تا وسط ضلع AC یعنی طول پاره‌خط BM است.



$$M=\frac{A+C}{2}=(-1, 0, 2)$$

$$BM=\sqrt{(2+1)^2+(0-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

۲۰. نقطهٔ $A(2m-19, 3, -2)$ در ناحیهٔ ششم و نقطهٔ $B(-5, 7-4m, 2)$ در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات فضایی $\mathbb{R}^3$ هستند. بزرگ‌ترین مقدار صحیح m را بیابید.

پاسخ: در دستگاه $\mathbb{R}^3$ در ناحیهٔ ششم $x<0$، $y>0$ و $z<0$ و در ناحیهٔ سوم از نظر علامت $x<0$، $y<0$ و $z>0$ می‌باشد. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}x_A<0\Rightarrow 2m-19<0\Rightarrow m<\frac{19}{2}\\ y_B<0\Rightarrow 7-4m<0\Rightarrow m>\frac{7}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{7}{4}<m<\frac{19}{2}$$

چون $\frac{7}{4} < m < \frac{19}{2}$ یا $1/75 < m < 9/5$ پس بزرگ‌ترین مقدار صحیح m برابر ۹ است.

بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$

۲۱. مقادیر K را به گونه‌ای تعیین کنید که نقطهٔ $M(K^2-4\ ,\ K+1\ ,\ -7)$ در ناحیهٔ ششم فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ قرار گیرد.

پاسخ: در ناحیهٔ ششم دستگاه مختصات فضایی نقطه به صورت $(-\ ,\ +\ ,\ -)$ است. بنابراین:

$x_M < 0 \Rightarrow K^2-4<0 \Rightarrow K^2<4 \Rightarrow -2<K<2 \quad (1)$

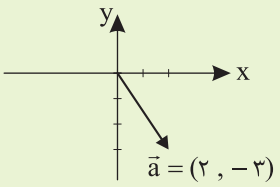
$y_M > 0 \Rightarrow K+1>0 \Rightarrow K>-1 \quad (2)$

$Z_M < 0 \Rightarrow -7<0$ همواره برقرار

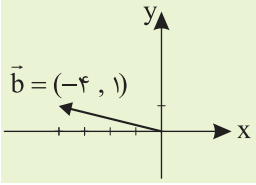
پس حدود تغییرات K اشتراک روابط (۱) و (۲) یعنی $-1<K<2$ است.

۲۲. بردارهای $\vec{a}(2\ ,\ -3)$ و $\vec{b}(-4\ ,\ 1)$ را در دستگاه $\mathbb{R}^2$ رسم کنید.

پاسخ: برای رسم بردار $\vec{a}$ ابتدا نقطهٔ $(2\ ,\ -3)$ را رسم کرده سپس از مبدأ مختصات به نقطهٔ $(2\ ,\ -3)$ وصل می‌کنیم.

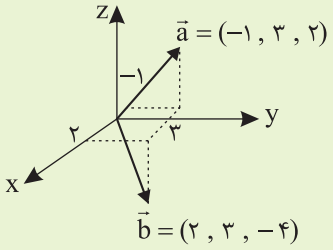


همچنین برای بردار $\vec{b}$ ابتدا نقطهٔ $(-4\ ,\ 1)$ را رسم کرده، سپس از مبدأ مختصات به نقطهٔ $(-4\ ,\ 1)$ وصل می‌کنیم.



۲۳. بردارهای $\vec{a}(-1\ ,\ 3\ ,\ 2)$ و $\vec{b}(2\ ,\ 3\ ,\ -4)$ را در دستگاه $\mathbb{R}^3$ رسم کنید.

پاسخ: کافی است نقطهٔ انتهایی هر بردار را در دستگاه $\mathbb{R}^3$ مشخص کرده و از مبدأ مختصات به آن نقطه وصل کنیم.



۲۴. اگر $\vec{a}=3i+2j-k$ و $\vec{b}(2\ ,\ 1\ ,\ 1)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه مطلوب است محاسبهٔ:

الف) مختصات $2\vec{a}-3\vec{b}$ ب) طول بردار $-\vec{a}+2\vec{b}$ ج) طول بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

پاسخ: الف) $2\vec{a}-3\vec{b}=2(3,2,-1)-3(2,1,1)=(0,1,-5)=j-5k$

ب) $-\vec{a}+2\vec{b}=-(3,2,-1)+2(2,1,1)=(1,0,3)$

$|-\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$

ج) $|\vec{a}|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,-1)\Rightarrow\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{9+4+1}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=1$$

پس بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ یک بردار یکه است.

۲۵. اگر $\vec{U}=2i-3j$ و $\vec{V}=-5i+7j$ آنگاه مقدار $|\vec{U}+\vec{V}|-|\vec{U}-\vec{V}|^2$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا مختصات بردارهای $\vec{U}+\vec{V}$ و $\vec{U}-\vec{V}$ را پیدا می‌کنیم.

$\vec{U}+\vec{V}=(2i-3j)+(-5i+7j)=-3i+4j\Rightarrow|\vec{U}+\vec{V}|=\sqrt{9+16}=5$

$\vec{U}-\vec{V}=(2i-3j)-(-5i+7j)=7i-10j\Rightarrow|\vec{U}-\vec{V}|=\sqrt{49+100}=\sqrt{149}$

$|\vec{U}+\vec{V}|-|\vec{U}-\vec{V}|^2=5-149=-144$

۲۶. اگر $2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ آنگاه $\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: از تساوی $2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ نتیجه می‌گیریم $\vec{b}=-2\vec{a}$. بنابراین:

$$\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}\right|=\left|\frac{-2\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{a}}{|-2\vec{a}|}\right|=\left|\frac{-2\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{a}}{2|\vec{a}|}\right|=\left|\frac{-4\vec{a}+\vec{a}}{2|\vec{a}|}\right|=\left|\frac{-3\vec{a}}{2|\vec{a}|}\right|=\frac{3}{2}\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|}=\frac{3}{2}$$

پس گزینهٔ ۴ درست است.

۲۷. نقاط $A(1,2,-1)$ و $B(3,-2,4)$ در رابطهٔ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ صدق می‌کنند. مجموع مختصات نقطهٔ M را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم مختصات $\overrightarrow{AB}$ برابر $B-A$ است، داریم:

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}\Rightarrow M-A=\frac{1}{2}(B-M)\Rightarrow 2M-2A=B-M$

$\Rightarrow 3M=2A+B\Rightarrow 3M=2(1,2,-1)+(3,-2,4)\Rightarrow 3M=(5,2,2)\Rightarrow M(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

بنابراین: $x_M+y_M+z_M=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}=3$

۲۸. قرینهٔ نقطهٔ $A(1,-2,4)$ نسبت به نقطهٔ $B(2,3,-1)$ نقطهٔ A' است. مختصات بردار $\overrightarrow{AA'}$ را بیابید.

پاسخ: چون A' قرینهٔ A نسبت به B است پس B وسط AA' قرار دارد.

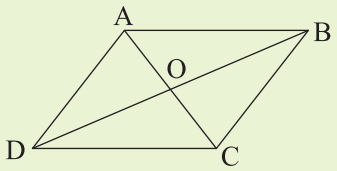
$$B=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow A'=2B-A\Rightarrow A'=2(2,3,-1)-(1,-2,4)\Rightarrow A'=(3,8,-6)$$

پس:

$$\overrightarrow{AA'}=A'-A=(3,8,-6)-(1,-2,4)=(2,10,-10)$$

۲۹. نقاط $A(2,1,0)$، $B(3,-1,1)$ و $C(2,3,-2)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مختصات نقطهٔ D را بیابید. سپس مختصات بردار $\overrightarrow{DB}$ را به دست آورید.

پاسخ: اگر O نقطهٔ تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD باشد آنگاه O وسط دو قطر AC و BD است. پس $O=\frac{A+C}{2}$ و $O=\frac{B+D}{2}$ بنابراین:



$$\frac{A+C}{2}=\frac{B+D}{2}\Rightarrow A+C=B+D\Rightarrow D=A+C-B\Rightarrow$$

$$D=(2,1,0)+(2,3,-2)-(3,-1,1)=(1,5,-3)$$

بنابراین:

$$\overrightarrow{DB}=B-D=(3,-1,1)-(1,5,-3)=(2,-6,4)$$

۳۰. نقطهٔ $A(2m,-3m,6m)$ مفروض است. اگر بردار $\overrightarrow{OA}$ بردار یکه باشد آنگاه مقدار m را بیابید.

پاسخ: چون بردار $\overrightarrow{OA}$ یکه است پس اندازهٔ $\overrightarrow{OA}$ برابر یک است.

$$\overrightarrow{OA}=(2m,-3m,6m)\xrightarrow{|\overrightarrow{OA}|=1}\sqrt{4m^2+9m^2+36m^2}=1\Rightarrow\sqrt{49m^2}=1\Rightarrow 7m=\pm1\Rightarrow m=\pm\frac{1}{7}$$

۳۱. اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ و $|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$ و $|\vec{a}+\vec{b}|=6$ باشند، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

پاسخ: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

$$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|}6^2+(2\sqrt{3})^2=4|\vec{a}|^2\Rightarrow 48=4|\vec{a}|^2\Rightarrow|\vec{a}|^2=12\Rightarrow|\vec{a}|=2\sqrt{3}\Rightarrow|\vec{b}|=2\sqrt{3}$$

بنابراین:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2(2\sqrt{3})(2\sqrt{3})\cos\theta$$

$$\Rightarrow-12=-24\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

۳۲. برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ پس مشخص کنید در چه صورتی تساوی برقرار است؟

پاسخ: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\cos\theta\le ۱\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\le|\vec{a}||\vec{b}|\ (I)$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\xrightarrow{\text{از }(I)}|\vec{a}+\vec{b}|^۲\le|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^۲\le(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^۲\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

در صورتی که $\theta=۰$ باشد آنگاه رابطهٔ (I) به تساوی $|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$ تبدیل می‌شود و $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ می‌شود.

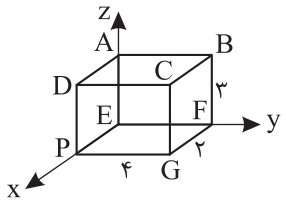
۳۳. درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) نقطه با مختصات $(-۳\ ,\ ۷\ ,\ -۵)$ درناحیهٔ پنجم دستگاه مختصات فضایی واقع است. درست ◯ نادرست ◯

ب) بردار $\vec{a}=۲j-k$ در فضای سه‌بعدی بر صفحهٔ مختصات yoz منطبق است. درست ◯ نادرست ◯

ج) نقاط $A(-۱\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$، $B(۲\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$ و $C(۵\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$ روی خط $\begin{cases}y=۲\\z=۱\end{cases}$ قرار دارند. درست ◯ نادرست ◯

د) در شکل زیر معادلات $\begin{cases}۰\le x\le ۲\\y=۲\\z=۰\end{cases}$ مربوط به یال FG است. درست ◯ نادرست ◯



هـ) معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقطهٔ $A(۳\ ,\ -۱\ ,\ ۲)$ و موازی با صفحهٔ xoy به صورت $x=۳$ است. درست ◯ نادرست ◯

و) بردار $\vec{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}i-\frac{۱}{\sqrt{۳}}j+\frac{\sqrt{۳}}{۳}k$ بردار یکه است. درست ◯ نادرست ◯

ز) اگر نقاط $M(۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳)$ و $E(-۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱)$ و $N(۲\ ,\ ۳\ ,\ -۱)$ رئوس متوازی‌الاضلاع MNEF باشند مختصات نقطهٔ F به صورت $(-۲\ ,\ -۱\ ,\ ۵)$ است. درست ◯ نادرست ◯

پاسخ:

الف) نادرست ب) درست ج) درست د) نادرست

هـ) نادرست و) درست ز) درست

سوالات طبقه‌بندی شده

۳۴. به سؤالات زیر پاسخ دهید. *(شهریور ۱۴۰۱)*

الف) در فضای سه‌بعدی نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ معادلهٔ محور ..... است.

ب) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\vec{b}=r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$. ◯ درست ◯ نادرست

ج) شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $-1<x\leq 2$ و $y=x^2$ را در فضای ۲ بعدی رسم کنید.

د) طول بردار $\vec{a}(0\,,\,-2\,,\,4)$ را به دست آورید.

۳۵. نقطهٔ A به طول ۲ روی محور xها و نقطهٔ B روی صفحهٔ xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه‌بعدی مفروض‌اند. *(شهریور ۱۴۰۰)*

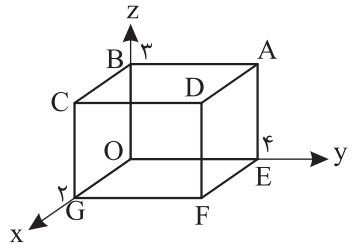
الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.

ب) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

ج) مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

۳۶. نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ در فضای $\mathbb{R}^3$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار $x=0$ دارد؟ و اگر $a=(2\,,\,-1\,,\,3)$ و $\vec{b}=i+2j$ باشد اندازهٔ بردار $\vec{a}+2\vec{b}$ را به دست آورید. *(شهریور ۱۳۹۹)*

۳۷. وجه‌های مکعب‌مستطیل در شکل زیر قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=2$، $x=0$ و $y=4$، $y=0$ و $z=3$، $z=0$ هستند. *(دی ۱۳۹۸)*



الف) مختصات نقطهٔ A را مشخص کنید.

ب) معادلهٔ مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.

۳۸. دو بردار $\vec{a}=(1\,,\,2\,,\,-1)$ و $\vec{b}=(0\,,\,2\,,\,-1)$ را در نظر بگیرید. *(دی ۱۳۹۹)*

الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^3$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)

ب) طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

۳۹. نقاط $A(1\,,\,2\,,\,1)$، $B(2\,,\,2\,,\,1)$ و $C(3\,,\,2\,,\,-1)$ را در فضا در نظر بگیرید. کدام‌ها روی خط $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟ *(دی ۱۳۹۹)*

۴۰. در فضای سه‌بعدی نقطهٔ A روی محور xها به طول ۲ و نقطهٔ B در صفحهٔ yoz با عرض ۳− و ارتفاع ۴ مفروض است. فاصلهٔ وسط پاره‌خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

سوالات تألیفی

ضرب داخلی

۴۱. اگر $\vec{a}=(a_1 , a_2 , a_3)$ و $\vec{b}=(b_1 , b_2 , b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند و $0\le\theta\le\pi$ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. آنگاه ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

پاسخ: می‌دانیم $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ داریم:

$$\begin{matrix}\vec{a}=(a_1 , a_2 , a_3)\\ \vec{b}=(b_1 , b_2 , b_3)\end{matrix}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1 , a_2+b_2 , a_3+b_3)$$

در صورتی‌که θ زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد آنگاه بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+2|a||b|\cos\theta$$

$$\Rightarrow a_1^2+b_1^2+2a_1b_1+a_2^2+b_2^2+2a_2b_2+a_3^2+b_3^2+2a_3b_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3=2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

۴۲. زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=2i-j+k$ و $\vec{b}(-2 , 1 , -1)$ را بیابید.

پاسخ: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{(2 , -1 , 1).(-2 , 1 , -1)}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{4+1+1}}=\frac{-4-1-1}{6}=-1\Rightarrow\theta=180^\circ$$

۴۳. مثلث ABC با رئوس $A(1 , 2 , -1)$ و $B(-1 , 0 , 1)$ و $C(2 , 1 , 0)$ مفروض است. کسینوس زاویهٔ B را پیدا کنید.

پاسخ: باید زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را به دست آوریم:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{BA}=A-B=(2 , 2 , -2)\\ \overrightarrow{BC}=C-B=(3 , 1 , -1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{(2 , 2 , -2).(3 , 1 , -1)}{\sqrt{4+4+4}\sqrt{9+1+1}}=\frac{6+2+2}{2\sqrt{3}\sqrt{11}}=\frac{5}{\sqrt{33}}$$

۴۴. سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید به طوری‌که $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$. ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

پاسخ: بردارهای $\vec{a}=(1 , -2 , 3)$، $\vec{b}=(2 , 1 , 1)$ و $\vec{c}=(0 , 0 , 1)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=(1 , -2 , 3).(2 , 1 , 1)=2-2+3=3$$

$$\vec{a}.\vec{c}=(1 , -2 , 3).(0 , 0 , 1)=0+0+3=3$$

دیده می‌شود $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۴۵. ثابت کنید $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ داریم:

$$\vec{a}.\vec{a}=(x\ ,y\ ,\ z).(x\ ,\ y\ ,\ z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=|\vec{a}|^{۲}$$

۴۶. فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب با اندازه‌های ۱، ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{۰}$ باشد. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$ را بیابید.

پاسخ: طرفین فرض $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{۰}$ را در هم ضرب داخلی می‌کنیم، داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{۰}\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{۰}.\vec{۰}$$

$$\Rightarrow|\vec{a}|^{۲}+|\vec{b}|^{۲}+|\vec{c}|^{۲}+۲\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{a}.\vec{c}+۲\vec{b}.\vec{c}=۰\Rightarrow ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})=۰$$

$$\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=\frac{-۱۴}{۲}=-۷$$

۴۷. نشان دهید دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد و برعکس.

پاسخ: در صورتی‌که θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=۰\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۰\xleftrightarrow{|\vec{a}|\neq۰\ ,\ |\vec{b}|\neq۰}\cos\theta=۰\xleftrightarrow{۰\leq\theta\leq\pi}\theta=۹۰^{\circ}$$

(توجه کنید وقتی بین رابطه‌ها علامت دوشرطی ($\Leftrightarrow$) قرار می‌دهیم یعنی قضیه و عکس قضیه با هم ثابت شده است.)

۴۸. نقاط $A(۱\ ,\ ۲\ ,\ -۱)$، $B(۲\ ,\ m\ ,\ ۰)$ و $C(-۱\ ,\ ۱\ ,\ ۲)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر این مثلث در رأس C قائم‌الزاویه باشد آنگاه فاصلهٔ نقطهٔ B از مبدأ مختصات را به دست آورید.

پاسخ: مثلث ABC در رأس C قائمه است پس بردارهای $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ بر هم عمودند.

$$\overrightarrow{CB}=B-C=(۳\ ,\ m-۱\ ,\ -۲)$$

$$\overrightarrow{CA}=A-C=(۲\ ,\ ۱\ ,\ -۳)$$

$$\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CA}\Rightarrow\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=۰\Rightarrow(۳\ ,\ m-۱\ ,\ -۲).(۲\ ,\ ۱\ ,\ -۳)=۰$$

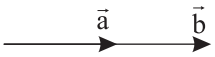
$$\Rightarrow ۶+m-۱+۶=۰\Rightarrow m=-۱۱$$

بنابراین $B=(۲\ ,\ -۱۱\ ,\ ۰)$ پس:

$$OB=\sqrt{۴+۱۲۱}=\sqrt{۱۲۵}=۵\sqrt{۵}$$

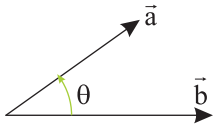
۴۹. هریک از حالات زیر را با شکل‌های داده‌شده نظیر کنید.

الف) $\vec{a}.\vec{b}>۰$



شکل (۱)

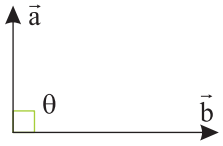
ب $\vec{a}.\vec{b}=0$



$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

شکل (۲)

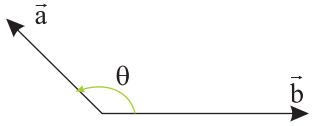
ج $\vec{a}.\vec{b}<0$



$\theta=\frac{\pi}{2}$

شکل (۳)

د $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$



$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

شکل (۴)

هـ $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

$\theta=\pi$

شکل (۵)

پاسخ:

الف) با شکل (۲) و ب) با شکل (۳) و ج) با شکل (۴) و د) با شکل (۱) و هـ) با شکل (۵) در تناظر هستند.

۵۰. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض‌اند. نشان دهید: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$، $\vec{b}=(x'\ ,\ y'\ ,\ z')$ و $\vec{c}=(x''\ ,\ y''\ ,\ z'')$ داریم:

$$\vec{b}+\vec{c}=(x'+x''\ ,\ y'+y''\ ,\ z'+z'')$$

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=(x\ ,\ y\ ,\ z).(x'+x''\ ,\ y'+y''\ ,\ z'+z'')=$$

$$xx'+xx''+yy'+yy''+zz'+zz''=(xx'+yy'+zz')+(xx''+yy''+zz'')=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

۵۱. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، ثابت کنید: (نامساوی‌کشی ـ شوارتز) $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$.

پاسخ: اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$|\cos\theta|\le 1\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

۵۲. اگر $x^2+y^2+z^2=9$ آنگاه ماکزیمم عبارت $|x+2y-z|$ را به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ و $\vec{b}=(۱\ ,\ ۲\ ,\ -۱)$ آنگاه بنابر نامساوی‌کشی - شوارتز داریم:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow|x+۲y-z|\le\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\sqrt{۱+۴+۱}$$

$$\Rightarrow|x+۲y-z|\le\sqrt{۹}\sqrt{۶}\Rightarrow|x+۲y-z|\le۳\sqrt{۶}$$

پس ماکزیمم عبارت $|x+۲y-z|$ برابر $۳\sqrt{۶}$ است.

۵۳. اگر $۲x-y+z=۴$ آنگاه مینیمم عبارت $۴x^۲+y^۲+z^۲$ را تعیین کنید.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a}=(۲x\ ,\ y\ ,\ z)$ و $\vec{b}=(۱\ ,\ -۱\ ,\ ۱)$ آنگاه با استفاده از نامساوی‌کشی ـ شوارتز می‌نویسیم:

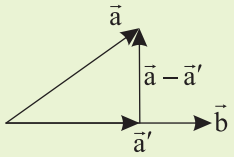
$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow|۲x-y+z|\le\sqrt{۴x^۲+y^۲+z^۲}\sqrt{۱+۱+۱}$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{\sqrt{۳}}\le\sqrt{۴x^۲+y^۲+z^۲}\Rightarrow\frac{۱۶}{۳}\le۴x^۲+y^۲+z^۲$$

پس مینیمم عبارت $۴x^۲+y^۲+z^۲$ برابر $\frac{۱۶}{۳}$ است.

۵۴. دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر بردار $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، نشان دهید: $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$.

پاسخ: در شکل $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ است و بردار $\vec{a}-\vec{a}'$ بر b عمود است پس داریم:



$$(\vec{a}-\vec{a}')\perp\vec{b}\Rightarrow(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=۰\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}'.\vec{b}=۰\quad(۱)$$

از طرف دیگر $\vec{a}'$ در امتداد $\vec{b}$ است پس $\vec{a}'\parallel\vec{b}$ پس $\vec{a}'=m\vec{b}$ در نتیجه:

$$(۱)\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}-m\vec{b}.\vec{b}=۰\xrightarrow{\vec{b}.\vec{b}=|\vec{b}|^۲}m=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\quad(۲)$$

بنابراین:

$$\vec{a}'=m\vec{b}\xrightarrow{\text{از }(۲)}\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

۵۵. تصویر قائم بردار $\vec{a}=۲i-j+۳k$ بر امتداد بردار $\vec{b}=i-k$ را به دست آورید.

پاسخ: اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{(۲\ ,\ -۱\ ,\ ۳).(۱\ ,\ ۰\ ,\ -۱)}{۱+۱}(۱\ ,\ ۰\ ,\ -۱)$$

$$=\frac{۲+۰-۳}{۲}(۱\ ,\ ۰\ ,\ -۱)=\frac{-۱}{۲}(۱\ ,\ ۰\ ,\ -۱)=(-\frac{۱}{۲}\ ,\ ۰\ ,\ \frac{۱}{۲})$$

۵۶. سه بردار $\vec{a}=i-j+۲k$ و $\vec{b}=۲i-k$ و $\vec{c}=i+j-۳k$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ روی بردار $۲\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $۲\vec{b}-\vec{c}$ را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{a}+\vec{b}=(۱,-۱,۲)+(۲,۰,-۱)=(۳,-۱,۱)$$

$$۲\vec{b}-\vec{c}=۲(۲,۰,-۱)-(۱,۱,-۳)=(۳,-۱,۱)$$

بنابراین:

$$(\vec{a}+\vec{b})'=\frac{(\vec{a}+\vec{b}).(۲\vec{b}-\vec{c})}{|۲\vec{b}-\vec{c}|^۲}(۲\vec{b}-\vec{c})=\frac{(۳,-۱,۱).(۳,-۱,۱)}{۹+۱+۱}(۳,-۱,۱)$$

$$=\frac{۹+۱+۱}{۱۱}(۳,-۱,۱)=(۳,-۱,۱)$$

۵۷. نشان دهید اگر دو بردار $\vec{a}$ و b بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر قائم یکی از آنها بر امتداد دیگری بردار صفر است.

پاسخ: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند پس $\vec{a}.\vec{b}=۰$ بنابراین:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{۰}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\vec{۰}$$

۵۸. تصویر قائم بردار $\vec{a}=۲i+۳j+k$ بر امتداد بردار $\vec{b}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}i+\sqrt{۲}j+\frac{۱}{\sqrt{۲}}k$ را به دست آورید.

پاسخ: برای پیدا کردن تصویر $\vec{a}=۲i+۳j+k$ بر امتداد $\vec{b}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}i+\sqrt{۲}j+\frac{۱}{\sqrt{۲}}k$ برای سادگی محاسبات به جای بردار $\vec{b}$ از مضرب بردار $\vec{b}$ استفاده می‌کنیم. زیرا مضرب بردار $\vec{b}$ در راستای همین بردار است و روی تصویر بردار $\vec{a}$ تأثیری ندارد. بنابراین به جای بردار $\vec{b}$ از بردار $\vec{c}=\sqrt{۲}\vec{b}=(۳,۲,۱)$ استفاده می‌کنیم.

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{c}|^۲}\vec{c}=\frac{(۲,۳,۱).(۳,۲,۱)}{۹+۴+۱}(۳,۲,۱)=\frac{۱۳}{۱۴}(۳,۲,۱)$$

۵۹. نشان دهید اگر $\vec{a}\parallel\vec{b}$ آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ خود بردار $\vec{a}$ است.

پاسخ: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی‌اند پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مضرب یکدیگرند. فرض کنیم $\vec{a}=m\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{m\vec{b}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{m|\vec{b}|^۲}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=m\vec{b}=\vec{a}$$

پس $\vec{a}'=\vec{a}$.

۶۰. بردارهای $\vec{a}(۱,-۳,۴)$، $\vec{b}(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}(-۱,۱,۴)$ مفروض‌اند. تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

پاسخ: بردار $\vec{b}+\vec{c}$ به مختصات $(۲ , -۳ , ۶)$ است داریم:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{b}+\vec{c}|^۲}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{(۱ , -۳ , ۴).(۲ , -۳ , ۶)}{۴+۹+۳۶}(۲ , -۳ , ۶) =$$

$$\frac{۲+۹+۲۴}{۴۹}(۲ , -۳ , ۶) = \frac{۳۵}{۴۹}(۲ , -۳ , ۶) = \frac{۵}{۷}(۲ , -۳ , ۶) = (\frac{۱۰}{۷} , \frac{-۱۵}{۷} , \frac{۳۰}{۷})$$

۶۱. بردارهای $\vec{a}=(۱ , ۲ , -۳)$ و $\vec{b}=۵\vec{i}-۲\vec{j}$ و $\vec{c}=۳\vec{i}-۲\vec{k}$ مفروضند. اندازهٔ تصویر قائم بـردار $\vec{a}+\vec{b}$ بـر $\vec{a}-\vec{c}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\vec{a}+\vec{b} = (۱ , ۲ , -۳)+(۵ , -۲ , ۰) = (۶ , ۰ , -۳)$$

$$\vec{a}-\vec{c} = (۱ , ۲ , -۳)-(۳ , ۰ , -۲) = (-۲ , ۲ , -۱)$$

$$|(\vec{a}+\vec{b})'| = \frac{|(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{c})|}{|\vec{a}-\vec{c}|} = \frac{|-۱۲+۰+۳|}{\sqrt{۴+۴+۱}} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

۶۲. اگر $\vec{a}=(۲ , -۱ , ۱)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+m\vec{k}$ و زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$ باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $m<۲$ ۳) $m\geq ۲$ ۴) $m\leq ۲$

پاسخ: در صورتی که $\frac{\pi}{۲}<\theta<\theta$ باشد آنگاه $\vec{a}.\vec{b}<۰$ داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}<۰ \Rightarrow (۲ , -۱ , ۱).(۰ , ۲ , m)<۰ \Rightarrow -۲+m<۰ \Rightarrow m<۲$$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

۶۳. حدود m را طوری پیدا کنید که زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=i-j+۲mk$ و $\vec{b}=۲i+j-k$ حاده باشد.

پاسخ: زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است هرگاه $\vec{a}.\vec{b}>۰$ داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}>۰ \Rightarrow ۲-۱-۲m>۰ \Rightarrow -۲m>-۱ \Rightarrow m<\frac{۱}{۲}$$

۶۴. اگر $\vec{a}(۱ , -۱ , ۰)$ و $\vec{b}(۰ , ۱ , -۱)$ دو بردار باشند.

الف) زاویهٔ بین دو بردار a و b را پیدا کنید.

ب) اندازهٔ تصویر بردار $a+۲b$ را روی بردار $\vec{a}$ بیابید.

پاسخ: الف) اگر θ زاویهٔ بین a و b باشد داریم:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{۰-۱+۰}{\sqrt{۲}\sqrt{۲}} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۱۲۰^\circ$$

ب) مختصات بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ برابر است با:

$$\vec{a}+۲\vec{b} = (۱ , -۱ , ۰)+۲(۰ , ۱ , -۱) = (۱ , ۱ , -۲)$$

$$\text{اندازهٔ تصویر } \vec{a}+۲\vec{b} \text{ روی } a = |(\vec{a}+۲\vec{b})'| = \frac{|(\vec{a}+۲b).\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|(۱ , ۱ , -۲).(۱ , -۱ , ۰)|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۰}{\sqrt{۲}} = ۰$$

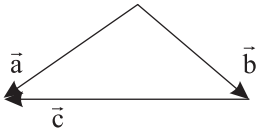
۶۵. اگر $\vec{a}(۲ , ۱ , ۲)$ و $|\vec{b}|=۲$ و زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد. حاصل $(۲\vec{a}-۳\vec{b}).(\vec{a}-۲\vec{b})$ را تعیین کنید.

پاسخ: اندازهٔ بردار $\vec{a}=(۲ , ۱ , ۲)$ برابر $|\vec{a}|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$ است اکنون از خاصیت پخشی ضرب داخلی روی جمع و تفریق بردارها استفاده می‌کنیم:

$$(۲\vec{a}-۳\vec{b}).(\vec{a}-۲\vec{b})=۲\vec{a}.\vec{a}-۴\vec{a}.\vec{b}-۳\vec{b}.\vec{a}+۶\vec{b}.\vec{b}=۲|\vec{a}|^۲-۷\vec{a}.\vec{b}+۶|\vec{b}|^۲$$

$$=۲(۳)^۲-۷|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{۳}+۶(۲)^۲=۱۸-۷(۳)(۲)(\frac{۱}{۲})+۲۴=۱۸-۲۱+۲۴=۲۱$$

۶۶. در شکل زیر اندازهٔ بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب ۳، ۵ و ۶ است. حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید.

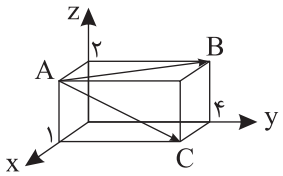


پاسخ: با توجه به شکل $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ است. داریم:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{c}.\vec{c}\Rightarrow\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{c}|^۲$$

$$\Rightarrow|\vec{a}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲=|\vec{c}|^۲\Rightarrow ۳^۲-۲\vec{a}.\vec{b}+۵^۲=۶^۲\Rightarrow-۲\vec{a}.\vec{b}=۲\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=-۱$$

۶۷. در مکعب مستطیل شکل زیر حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ را به دست آورید.



پاسخ: مطابق شکل مختصات نقاط A و B و C به صورت زیر است.

$$A=(۱ , ۰ , ۲) , B=(۰ , ۴ , ۲) , C=(۱ , ۴ , ۰)$$

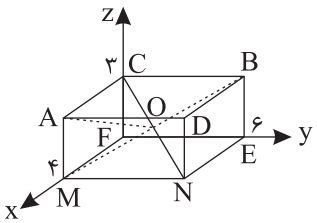
بنابراین:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(۰ , ۴ , ۲)-(۱ , ۰ , ۲)=(-۱ , ۴ , ۰)$$

$$\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}=(۱ , ۴ , ۰)-(۱ , ۰ , ۲)=(۰ , ۴ , -۲)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-۱ , ۴ , ۰).(۰ , ۴ , -۲)=۰+۱۶+۰=۱۶$$

۶۸. در مکعب مستطیل شکل زیر اگر O نقطهٔ تلاقی قطرهای مکعب مستطیل باشد، آنگاه مقدار $\cos(A\hat{O}B)$ را بیابید.



پاسخ: مرکز O وسط قطر CN قرار دارد. مطابق شکل داریم:

$$C=(۰ , ۰ , ۳) , N=(۴ , ۶ , ۰)$$

$$O=\frac{C+N}{۲}=(۲\,,\,۳\,,\,\frac{۳}{۲})$$

و زاویهٔ $A\hat{O}B$ زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است.

$$\overrightarrow{OA}=\vec{A}-\vec{O}=(۴\,,\,۰\,,\,۳)-(۲\,,\,۳\,,\,\frac{۳}{۲})=(۲\,,\,-۳\,,\,\frac{۳}{۲})$$

$$\overrightarrow{OB}=\vec{B}-\vec{O}=(۰\,,\,۶\,,\,۳)-(۲\,,\,۳\,,\,\frac{۳}{۲})=(-۲\,,\,۳\,,\,\frac{۳}{۲})$$

$$\cos(A\hat{O}B)=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{-۴-۹+\frac{۹}{۴}}{\sqrt{۴+۹+\frac{۹}{۴}}\sqrt{۴+۹+\frac{۹}{۴}}}=\frac{-\frac{۴۳}{۴}}{\frac{۶۱}{۴}}=\frac{-۴۳}{۶۱}$$

۶۹. درستی و نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در صورتی‌که $\vec{a}\parallel\vec{b}$ آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ خود $\vec{a}$ است. ◯ درست ◯ نادرست

ب) در مربع ABCD به ضلع ۲ حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ برابر ۴ است. ◯ درست ◯ نادرست

ج) زاویهٔ بین دو بردار $۲i-۳j$ و $۵i-j$ مساوی ۴۵° است. ◯ درست ◯ نادرست

د) اگر $A(۱\,,\,۱\,,\,۲)$، $B(۳\,,\,۲\,,\,۵)$ و $C(۲\,,\,۲\,,\,۳)$ سه نقطه در فضا باشند آنگاه اندازهٔ تصویر قائم $\overrightarrow{AB}$ روی $\overrightarrow{AC}$ برابر $۲\sqrt{۳}$ است. ◯ درست ◯ نادرست

هـ) دو بردار $\vec{a}=-i+۲j+۲k$ و $\vec{b}=-i+k$ بر هم عمودند. ◯ درست ◯ نادرست

و) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=i-j-۳k$ و $\vec{b}=-۲i+j$ منفرجه است. ◯ درست ◯ نادرست

ز) بردار $\vec{a}=mi+j-۲k$ در رابطهٔ $\vec{a}.\vec{i}=-۲$ صدق می‌کند پس $|\vec{a}|=\sqrt{۳}$. ◯ درست ◯ نادرست

ح) در صورتی‌که زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر π باشد، آنگاه $\vec{a}.\vec{b}$ کمترین مقدار را دارد. ◯ درست ◯ نادرست

پاسخ:

الف) درست	ب) نادرست	ج) درست	د) درست
هـ) نادرست	و) درست	ز) نادرست	ح) درست

ضرب خارجی

۷۰. اگر $\vec{a}=(x\,,\,y\,,\,z)$ و $\vec{b}=(x'\,,\,y'\,,\,z')$ دو بردار غیر صفر و θ زاویهٔ بین آنها باشد آنگاه نشان دهید: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$.

پاسخ: ابتدا مختصات بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\vec{a}=(x\,,\,y\,,\,z)\\ \vec{b}=(x'\,,\,t'\,,\,z')\end{matrix}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}=(yz'-y'z)i-(xz'-x'z)j+(xy'-x'y)k$$

اکنون اندازهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=(yz'-y'z)^۲+(xz'-x'z)^۲+(xy'-x'y)^۲=$$

$$y^۲z'^۲+y'^۲z^۲-۲yz'y'z+x^۲z'^۲+x'^۲z^۲-۲xz'x'z+x^۲y'^۲+x'^۲y^۲-۲xx'yy'\underset{\text{را اضافه و کم می‌کنیم}}{\overset{\text{حال عبارت}\ x^۲x'^۲+y^۲y'^۲+z^۲z'^۲}{=\!=\!=}}$$

$$(x^2x'^2+y^2y'^2+z^2z'^2+y^2z'^2+y'^2z^2+x^2z'^2+x'^2z^2+x^2y'^2+x'^2y^2)-(x^2x'^2+y^2y'^2+z^2z'^2$$
$$+2yz'y'z+2xz'x'z+2xx'yy')=$$
$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2=$$
$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|a|^2|b|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\Rightarrow$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

۷۱. دو بردار $\vec{a}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ و $\vec{b}=(x'\ ,\ y'\ ,\ z')$ مفروض‌اند. ثابت کنید: $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$.

پاسخ: ابتدا بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=(yz'-y'z)i-(xz'-x'z)j+(xy'-x'y)k$$

اکنون:

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=(x\ ,\ y\ ,\ z).(yz'-y'z\ ,\ -xz'+x'z\ ,\ xy'-x'y)=$$
$$xyz'-xy'z-xyz'+x'yz+xy'z-x'yz=0$$

۷۲. اگر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی باشند ثابت کنید: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ و برعکس.

پاسخ: فرض کنیم θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0\xleftrightarrow{|\vec{a}|\neq0\ ,\ |\vec{b}|\neq0}\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0\ \text{یا}\ \theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۷۳. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=i-3j+2k$ و $\vec{b}=-2i+j-5k$ بیابید.

پاسخ: $\vec{a}\times\vec{b}$ و مضارب غیرصفر آن بردار عمود بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=13i+j-5k$$

۷۴. دو بردار $\vec{a}=(1\ ,\ -1\ ,\ 0)$ و $\vec{b}=i-2k$ مفروضند. برداری عمود بر دو بردار $4\vec{a}-17\vec{b}$ و $11\vec{a}+13\vec{b}$ بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $\vec{a}\times\vec{b}$ و مضارب غیرصفر آن بر ترکیبات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود هستند، پس $\vec{a}\times\vec{b}$ می‌تواند یکی از جواب‌های این سوال باشد.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=2i+2j+k$$

۷۵. چندتا از بردارهای $3\vec{a}\times(-\frac{\sqrt{2}\vec{b}}{2})$ و $(\vec{a}+\vec{b})\times4\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{a}\times2\vec{b}$ بر دو بردار غیرصفر و غیرموازی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود هستند؟

پاسخ: می‌دانیم $\vec{a}\times\vec{b}$ و مضارب غیرصفر آن هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود هستند، پس بردارهای $۳\vec{a}\times(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\vec{b})$ و $(\vec{a}+\vec{b})\times۴\vec{b}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۴}\vec{a}\times۲\vec{b}$ هم بر a و هم بر b عمودند ولی $\vec{a}+\vec{b}$ بر این دو بردار عمود نیست.

۷۶. اگر $\vec{a}=۳\vec{i}-\vec{j}-۲\vec{k}$ و $\vec{b}=۱۱\vec{i}+۷\vec{j}-۵\vec{k}$ آنگاه زاویهٔ بین دو بردار $۴\vec{a}-۷\vec{b}$ و $\frac{۳}{۲}\vec{a}\times۵\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ: بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و مضارب غیرصفر آن بر ترکیبات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. پس بردار $\frac{۳}{۲}\vec{a}\times۵\vec{b}$ بر بردار $۴\vec{a}-۷\vec{b}$ عمود است. بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

۷۷. زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(۱,۲,۰)$ و $\vec{b}=(m,۰,۲)$ منفرجه و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۲\sqrt{۶}$ است. مقدار m را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا $\vec{a}\times\vec{b}$ را به دست می‌آوریم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ m & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=۴\vec{i}-۲\vec{j}-۲m$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=۲\sqrt{۶}\Rightarrow\sqrt{۱۶+۴+۴m^۲}=۲\sqrt{۶}\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲۰+۴m^۲=۲۴\Rightarrow m^۲=۱\Rightarrow m=۱ \text{ یا } m=-۱$$

از طرف دیگر زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه است پس:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}<۰\Rightarrow(۱,۲,۰)\cdot(m,۰,۲)<۰\Rightarrow m<۰$$

بنابراین $m=۱$ قابل قبول نیست و $m=-۱$ است.

۷۸. دو بردار با تصاویر $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=(۲,m,-۱)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقادیر m حاصل $(۳\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر صفر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) هیچ مقدار m ۴) هر مقدار m

پاسخ: بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. پس بر صفحهٔ شامل این دو بردار و در نتیجه بر هر ترکیب خطی آنها عمود است. بنابراین $\vec{a}\times\vec{b}$ بر بردار $۳\vec{a}+\vec{b}$ عمود است. بنابراین $(۳\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ همواره صفر است. یعنی m هر مقداری می‌تواند داشته باشد. پس گزینهٔ ۴ درست است.

۷۹. در صورتی که $\vec{a}\cdot\vec{i}=-۳$ و $\vec{a}\cdot\vec{k}=۴$ باشد، آنگاه اندازهٔ بردار $\vec{j}\times\vec{a}$ را تعیین کنید. ($\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه محورهای مختصات هستند)

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a}=(x,y,z)$ باشد پس:

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=(x,y,z)\cdot(۱,۰,۰)=x\xrightarrow{\vec{a}\cdot\vec{i}=-۳}x=-۳$$

$$\vec{a}\cdot\vec{k}=(x,y,z)\cdot(۰,۰,۱)=z\xrightarrow{\vec{a}\cdot\vec{k}=۴}z=۴$$

بنابراین مختصات بردار $\vec{a}$ به صورت $(-۳ , y , ۴)$ است.

$$\vec{j}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۳ & y & ۴ \end{vmatrix}=۴\vec{i}+۳\vec{k}$$

$$|\vec{j}\times\vec{a}|=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۸۰. بردار $\vec{a}=(۲ , ۰ , -۲\sqrt{۳})$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیرهم‌جهت با $\vec{a}$ به اندازهٔ ۸ را طوری بیابید که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ باشد.

پاسخ: چون $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ پس $\vec{a}\parallel\vec{b}$ بنابراین $\vec{b}=m\vec{a}$ و چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیرهم‌جهت هستند، پس m باید منفی باشد.

$$\vec{b}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{b}=(۲m , ۰ , -۲\sqrt{۳}m)\xrightarrow{|b|=۸}\sqrt{۴m^۲+۱۲m^۲}=۸$$

$$\Rightarrow|۴m|=۸\Rightarrow\begin{cases} m=۲ \text{ غیرقابل قبول} \\ m=-۲\Rightarrow\vec{b}=(-۴ , ۰ , ۴\sqrt{۳}) \end{cases}$$

۸۱. اگر $\vec{a}=۲i-j+k$ و $\vec{b}=-۴i+۲j-۲k$ و $\vec{c}=i+j-k$ آنگاه مختصات بردار $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ و سپس $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۴ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۶j-۶k$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & -۶ & -۶ \end{vmatrix}=۱۲i+۱۲j-۱۲k$$

۸۲. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، نشان دهید: $|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲$.

پاسخ: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\sin^۲\theta \\ \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\cos^۲\theta \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲$$

۸۳. در صورتی‌که $|\vec{a}|=۳$، $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$ مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید.

پاسخ: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۷۲\Rightarrow۳\times۲۶\sin\theta=۷۲\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^۲}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}}=\pm\frac{۵}{۱۳}$$

بنابراین:

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$

۸۴. اگر $\vec{a}\times\vec{b}=i-۲j-k$ و $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{۲}$ آنگاه زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

پاسخ: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$\vec{a}\times\vec{b}=i-۲j-k\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۱+۴+۱}=\sqrt{۶}\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\sqrt{۶}\ (۱)$

از طرف دیگر:

$\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{۲}\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{۲}\quad(۲)$

از تقسیم(۱) بر (۲) $\Rightarrow\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{۳}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$

۸۵. مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط $A(۳\ ,\ ۵\ ,\ ۷)$، $B(۵\ ,\ ۵\ ,\ ۰)$ و $C(-۴\ ,\ ۰\ ,\ ۴)$ باشد را بیابید.

پاسخ: نصف اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}$ در $\overrightarrow{AC}$ برابر مساحت مثلث است.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(۲\ ,\ ۰\ ,\ -۷)$

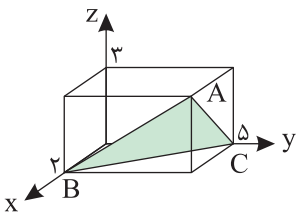
$\overrightarrow{AC}=C-A=(-۷\ ,\ -۵\ ,\ -۳)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & ۰ & -۷\\ -۷ & -۵ & -۳\end{vmatrix}=-۳۵i+۵۵j-۱۰k$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{۳۵^۲+۵۵^۲+۱۰^۲}=\sqrt{۵^۲(۴۹+۱۲۱+۴)}=۵\sqrt{۱۷۴}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۵\sqrt{۱۷۴}}{۲}$$

۸۶. در مکعب مستطیل زیر مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



پاسخ: مختصات رئوس مثلث ABC به صورت زیر هستند:

$A(۲\ ,\ ۵\ ,\ ۳)\ ,\ B(۲\ ,\ ۰\ ,\ ۰)\ ,\ C(۰\ ,\ ۵\ ,\ ۰)$

بنابراین:

$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(۰\ ,\ -۵\ ,\ -۳)$

$\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}=(-۲\ ,\ ۰\ ,\ -۳)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۰ & -۵ & -۳\\ -۲ & ۰ & -۳\end{vmatrix}=۱۵\vec{i}+۶\vec{j}-۱۰\vec{k}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}|۱۵\vec{i}+۶\vec{j}-۱۰\vec{k}|=|\frac{۱۵}{۲}\vec{i}+۳\vec{j}-۵\vec{k}|=\sqrt{\frac{۲۲۵}{۴}+۹+۲۵}=\sqrt{\frac{۱۹}{۲}}$$

۸۷. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع آن بردارهای $\vec{a}(۳\ ,\ -۱\ ,\ ۰)$ و $\vec{b}(-۲\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$ باشد را بیابید.

پاسخ: اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساحت این متوازی‌الاضلاع است.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}=-i-۳j+۴k$$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۱+۹+۱۶}=\sqrt{۲۶}$$

۸۸. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو قطر آن بردارهای $\vec{a}=i-۲j+k$ و $\vec{b}=-۳i+۲k$ باشد را به دست آورید.

پاسخ: نصف اندازهٔ ضرب خارجی دو قطر متوازی‌الاضلاع برابر مساحت آن است.

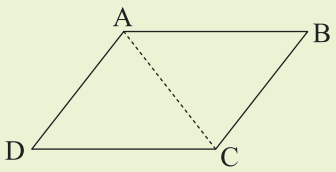
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ -۳ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=-۴i-۵j-۶k$$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۲۵+۳۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۷۷}$$

۸۹. اگر نقاط $A(۱\ ,\ -۲\ ,\ ۳)$، $B(۲\ ,\ ۰\ ,\ ۱)$ و $C(۱\ ,\ ۱\ ,\ ۲)$ سه رأس از متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع را به دست آورید.

پاسخ: دو برابر مساحت مثلث ABC مساوی مساحت متوازی‌الاضلاع است. چون $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ پس

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$



$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۱\ ,\ ۲\ ,\ -۲)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(۰\ ,\ ۳\ ,\ -۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۳ & -۱ \end{vmatrix}=۴i+j+۳k$$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=۲S_{ABC}=۲(\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|)=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{۱۶+۱+۹}=\sqrt{۲۶}$$

۹۰. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های ۵ و ۴ مفروض‌اند. اگر زاویهٔ بین این دو بردار $\frac{\pi}{۴}$ باشد آنگاه مساحت مثلثی که با دو بردار $۴\vec{a}-۳\vec{b}$ و $۲\vec{a}+\vec{b}$ ساخته می‌شود را به دست آورید.

پاسخ: نصف اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی دو ضلع مثلث برابر مساحت آن مثلث است.

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}|(۴\vec{a}-۳\vec{b})\times(۲\vec{a}+\vec{b})|=\frac{۱}{۲}|\underbrace{۸\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}+۴\vec{a}\times\vec{b}\underbrace{-۶\vec{b}\times\vec{a}}_{۶\vec{a}\times\vec{b}}-\underbrace{۳\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}|$$

$$=\frac{۱}{۲}|۱۰\vec{a}\times\vec{b}|=۵|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{۴}=۵\times۵\times۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۵۰\sqrt{۲}$$

۹۱. اندازهٔ بردار $j\times(i-۳j-k)+۲i\times(i-j+۲k)-(i-۲j-k)\times k$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا با استفاده از خاصیت پخشی ضرب خارجی روی جمع بردارها، بردار داده‌شده را ساده می‌کنیم.

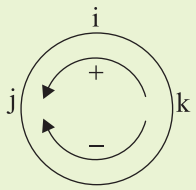
$$j\times(i-۳j-k)+۲i\times(i-j+۲k)-(i-۲j-k)\times k=$$

$$j\times i-\underbrace{۳j\times j}_{\vec{0}}-j\times k+\underbrace{۲i\times i}_{\vec{0}}-۲i\times j+۴i\times k-i\times k+۲j\times k+\underbrace{k\times k}_{\vec{0}}=$$

$$j\times i-j\times k-۲i\times j+۴i\times k-i\times k+۲j\times k=j\times k+۳i\times k-۳i\times j\quad(۱)$$

اکنون حاصل‌ضرب خارجی بردارهای i و j و k را با نمودار چرخشی زیر به دست می‌آوریم:

$$j\times k=i\ ,\ i\times k=-j\ ,\ i\times j=k$$



از (۱) $\Rightarrow$ ساده شده بردار $=i-۳j-۳k\Rightarrow$ اندازه بردار $=\sqrt{۱+۹+۹}=\sqrt{۱۹}$

۹۲. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو قطر آن روی بردارهای $۳\vec{a}+۴\vec{b}$ و $۲\vec{a}-۴\vec{b}$ قرار دارند، چند برابر مساحت مثلثی است که دو ضلع آن روی بردارهای $\vec{a}+۳\vec{b}$ و $۳\vec{a}-\vec{b}$ قرار دارند؟

پاسخ: مساحت متوازی‌الاضلاع نصف اندازهٔ ضرب خارجی دو قطر آن است. داریم:

$$\frac{S_{\square}}{S_{\triangle}}=\frac{\frac{۱}{۲}|(۳\vec{a}+۴\vec{b})\times(۲\vec{a}-۴\vec{b})|}{\frac{۱}{۲}|(\vec{a}+۳\vec{b})\times(۳\vec{a}-\vec{b})|}=\frac{|\cancel{۶\vec{a}\times\vec{a}}-۱۲\vec{a}\times\vec{b}+۸\vec{b}\times\vec{a}-\cancel{۱۶\vec{b}\times\vec{b}}|}{|\cancel{۳\vec{a}\times\vec{a}}-\vec{a}\times\vec{b}+۹\vec{b}\times\vec{a}-\cancel{۳\vec{b}\times\vec{b}}|}$$

$$=\frac{|-۲۰\vec{a}\times\vec{b}|}{|-۱۰\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{۲۰|\vec{a}\times\vec{b}|}{۱۰|\vec{a}\times\vec{b}|}=۲$$

۹۳. اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ آنگاه ثابت کنید: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

پاسخ: طرفین فرض را یکبار در بردار $\vec{a}$ و بار دیگر در بردار $\vec{b}$ ضرب خارجی می‌کنیم.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\xrightarrow{\vec{a}\times}\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{0}\Rightarrow\vec{0}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}\quad(۱)$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\xrightarrow{\vec{b}\times}\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{0}\Rightarrow\vec{b}\times\vec{a}+\vec{0}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{b}\times\vec{a}\Rightarrow\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\quad(۲)$$

از (۱) , (۲) $\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

۹۴. دو بردار $\vec{a}=2i-j-k$ و $\vec{b}=i+k$ مفروض‌اند. حاصل $|(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\underbrace{2\vec{a}\times\vec{a}}_{0}-2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{0}=-3\vec{a}\times\vec{b}\ (1)$$

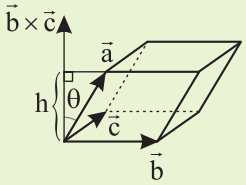
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-i-3j+k\ (2)$$

از (۱) , (۲) $\Rightarrow |(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=|-3\vec{a}\times\vec{b}|=3|\vec{a}\times\vec{b}|=3\sqrt{1+9+1}=3\sqrt{11}$

ضرب مختلط

۹۵. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه یال همرس یک متوازی‌السطوح باشند، ثابت کنید: $|a.(b\times c)|=$ حجم متوازی‌السطوح.

پاسخ: متوازی‌السطوح نوعی منشور است پس حجم آن مساوی حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است. در شکل بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ که عمود بر صفحهٔ $\vec{b}$ و $\vec{c}$ رسم شده و ارتفاع h اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}\times\vec{c}$ است. اگر θ زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ باشد داریم:



$$\cos\theta=\frac{h}{|\vec{a}|}\Rightarrow h=|\vec{a}|\cos\theta\ ,\ \text{مساحت قاعده}=|\vec{b}\times\vec{c}|$$

اکنون می‌نویسیم:

$$|a.(b\times c)|=|b\times c||a|\cos\theta=(\text{مساحت قاعده})(\text{ارتفاع})=\text{حجم}$$

۹۶. بردارهای $(m\ ,-1\ ,2)$، $(3\ ,2\ ,-1)$ و $(-2\ ,1\ ,1)$ هم‌صفحه هستند. مقدار m را بیابید.

پاسخ: ضرب مختلط سه بردار $\vec{a}=(m\ ,-1\ ,2)$، $\vec{b}=(3\ ,2\ ,-1)$ و $\vec{c}=(-2\ ,1\ ,1)$ باید صفر باشد.

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3i-j+7k$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(m\ ,-1\ ,2).(3\ ,-1\ ,7)=3m+1+14=3m+15$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0\Rightarrow 3m+15=0\Rightarrow m=-5$$

۹۷. اگر بردارهای $\vec{a}=3i+j+mk$، $\vec{b}=-i+2k$ و $\vec{c}=-2i+j+k$ هم‌صفحه باشند، آنگاه $|a\times b|$ را به دست آورید.

پاسخ: ضرب مختلط بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ صفر است.

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-۲i-۳j-k$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۳\,,۱\,,m).(-۲\,,-۳\,,-۱)=-۶-۳-m=-m-۹$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰\Rightarrow -m-۹=۰\Rightarrow m=-۹$$

بنابراین $\vec{a}=۳i+j-۹k$ داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۱ & -۹ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=۲i+۳j+k$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۴+۹+۱}=\sqrt{۱۴}$$

۹۸. حجم متوازی‌السطوحی که سه یال همرس آن بردارهای $(۲\,,-۱\,,m)$، $(۳\,,۰\,,۱)$ و $(m\,,۱\,,۲)$ است برابر ۱۶ می‌باشد. کوچک‌ترین مقدار m را بیابید.

پاسخ: قدرمطلق ضرب مختلط سه بردار $\vec{a}(۲\,,-۱\,,m)$، $\vec{b}(۳\,,۰\,,۱)$ و $\vec{c}(m\,,۱\,,۲)$ برابر حجم متوازی‌السطوح است.

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ m & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=-i-(۶-m)j+۳k$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۲\,,-۱\,,m).(-۱\,,-۶+m\,,۳)=-۲+۶-m+۳m=۲m+۴$$

$$|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=۱۶\Rightarrow|۲m+۴|=۱۶\Rightarrow\begin{cases}۲m+۴=۱۶\Rightarrow ۲m=۱۲\Rightarrow m=۶\\ ۲m+۴=-۱۶\Rightarrow ۲m=-۲۰\Rightarrow m=-۱۰\end{cases}$$

پس کوچک‌ترین مقدار m برابر -۱۰ است.

۹۹. حجم متوازی‌السطوحی که با بردار یکه محور xها و $\vec{a}=i-j+k$ و $\vec{b}=(۱\,,۰\,,-۲)$ ساخته می‌شود را بیابید.

پاسخ: قدرمطلق ضرب مختلط بردارهای $\vec{i}$، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی حجم متوازی‌السطوح است.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۲ \end{vmatrix}=۲i+۳j+k$$

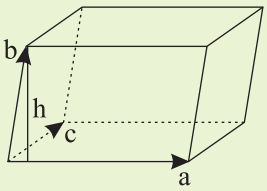
$$\vec{i}.(\vec{a}\times\vec{b})=(۱\,,۰\,,۰).(۲\,,۳\,,۱)=۲$$

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=|\vec{i}.(\vec{a}\times\vec{b})|=|۲|=۲$$

۱۰۰. با سه بردار $\vec{a}=(۱\,,۱\,,۰)$، $\vec{b}=j+k$ و $\vec{c}=i+k$ متوازی‌السطوحی ساخته‌ایم. در این متوازی‌السطوح طول ارتفاع وارد بر قاعده‌ای که با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود را بیابید.

پاسخ: در شکل h ارتفاع وارد بر قاعده‌ای است که با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود. می‌دانیم حجم متوازی‌السطوح برابر حاصل ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است.

ابتدا حجم متوازی‌السطوح را به دست می‌آوریم:



$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=i-j-k$$

حجم متوازی‌السطوح $=|\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})|=|(۰,۱,۱).(۱,-۱,-۱)|=|۰-۱+-۱|=۲$

اکنون مساحت قاعده که $\vec{a}$ و $\vec{c}$ دو ضلع آن هستند را پیدا می‌کنیم.

مساحت قاعده $=|a\times c|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$

حجم $=$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $\Rightarrow h=\dfrac{\text{حجم}}{\text{مساحت قاعده}}=\dfrac{۲}{\sqrt{۳}}=\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۱۰۱. اگر $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۴$ و $\vec{a}-۲\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ آنگاه کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را تعیین کنید.

پاسخ: طرفین تساوی $\vec{a}-۲\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ را در $\vec{a}$ ضرب داخلی می‌کنیم. چون می‌دانیم $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=۰$ است.

$$\vec{a}-۲\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\cdot(\vec{a}-۲\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{a}-۲\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Rightarrow|\vec{a}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۰\Rightarrow\cos\theta=\frac{|\vec{a}|^۲}{۲|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|}{۲|\vec{b}|}=\frac{۳}{۲\times۴}\Rightarrow\cos\theta=\frac{۳}{۸}$$

۱۰۲. مقدار m را به گونه‌ای پیدا کنید که چهار نقطهٔ $A(۲,۱,m)$ و $B(۱,۰,۰)$ و $C(۰,۱,۱)$ و $D(۱,۱,-۱)$ در یک صفحه باشند.

پاسخ: با این چهار نقطه سه بردار $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ را تشکیل می‌دهیم. باید حجم متوازی‌السطوح بنا شده با این سه بردار صفر باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA}=\vec{A}-\vec{B}=(۱,۱,m)\\ \overrightarrow{BC}=\vec{C}-\vec{B}=(-۱,۱,۱)\\ \overrightarrow{BD}=\vec{D}-\vec{B}=(۰,۱,-۱)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})=۰$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۲\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})=۰\Rightarrow(۱,۱,m)\cdot(-۲,-۱,-۱)=۰\Rightarrow-۲-۱-m=۰\Rightarrow m=-۳$$

(دقت کنید سه یال متوازی‌السطوح باید همرس باشند. دلیل آنکه رأس مشترک سه یال را B در نظر گرفتیم آن است که مختصات B صفر بیشتری دارد و محاسبه با آن ساده‌تر است.)

۱۰۳. بردارهای $\vec{a}=۲\vec{i}-۳\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=۲\vec{j}-۴\vec{k}+\vec{i}$ را در نظر بگیرید. حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}$ بنا می‌شود را بیابید.

پاسخ: حجم این متوازی‌السطوح برابر اندازهٔ ضرب مختلط این سه بردار یعنی $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$ پس مساوی $|\vec{a}\times\vec{b}|^۲$ است.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۴ \end{vmatrix}=۱۰\vec{i}+۹\vec{j}+۷\vec{k}$$

حجم $=|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=۱۰^{۲}+۹^{۲}+۷^{۲}=۱۰۰+۸۱+۴۹=۲۳۰$

(دقت کنید مختصات بردار $\vec{b}=۲\vec{j}-۴\vec{k}+\vec{i}$ را به صورت مرتب‌شده $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}-۴\vec{k}$ بنویسید.)

۱۰۴. جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) نمودار مربوط به معادلهٔ $\begin{cases} x=-۳ \\ z=۲ \end{cases}$ در دستگاه $\mathbb{R}^{۳}$ خطی عمود بر صفحهٔ ..... و موازی محور ..... است.

ب) اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}=۴\vec{i}-۳\vec{k}+۲\vec{j}$ بر صفحهٔ xz برابر ..... است.

ج) تصویر قائم بردار $\vec{i}$ بر امتداد $\vec{j}$ بردار ..... است.

د) بردارهای $\vec{a}(۱\ ,\ ۹\ ,\ -۱)$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+۳\vec{k}$ و $\vec{c}=(۲\ ,\ ۳\ ,\ -۱)$ در یک صفحه ..... .

هـ) تساوی $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ همواره برقرار ..... .

و) مقدار $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ..... $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ است.

ز) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه‌های ۳ و ۴ واحد و زاویهٔ بین ۶۰° مفروضند. اندازهٔ بردار $(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{a})$ برابر ..... است.

پاسخ:

الف) xz و y	ب) ۵	ج) صفر	د) قرار ندارند
ه) نیست	و) مساوی	ز) صفر	

سوالات طبقه‌بندی شده

۱۰۵. مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}(2, m, -1)$ و $\vec{b}(m+1, 3, 2)$ بر هم عمود باشند. (شهریور ۱۴۰۱)

۱۰۶. تصویر قائم بردار $\vec{a}(2, -1, 2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}(1, -1, 0)$ بیابید. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۰۷. بردارهای $\vec{a}(1, 2, 3)$ و $\vec{b}(-2, 0, 2)$ مفروض‌اند: (دی ۱۳۹۸)

الف) تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۱۰۸. نشان دهید دو بردار غیرصفر $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمودند هرگاه $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ و برعکس.

۱۰۹. اگر $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=5$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود چقدر است؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۱۱۰. بردارهای a و b به طول‌های $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=26$ و اندازهٔ ضرب خارجی $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$ مفروض‌اند. اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بیشتر از 90° باشد، مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۱۱. بردارهای $\vec{a}(2, -1, 2)$ و $\vec{b}(1, -1, 0)$ را در نظر بگیرید. (شهریور ۱۳۹۹)

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۱۱۲. اگر $A(-1, 2, 0)$، $B(1, 0, -1)$ و $C(0, -1, 1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی به دست آورید. (دی ۱۳۹۸)

۱۱۳. مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}=(3, 2, 1)$ و $\vec{b}=(2, 0, 1)$ به وجود می‌آید. (دی ۱۳۹۹)

۱۱۴. بردارهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه فضای $\mathbb{R}^3$ هستند. حاصل عبارت $2i.(j\times k)+3j.(i\times k)+4k.(i\times j)$ را بیابید.

۱۱۵. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض‌اند. اگر $\vec{a}\parallel\vec{c}$ ثابت کنید: $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}$.

۱۱۶. حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a}(1, 0, -1)$، $\vec{b}(0, 2, 2)$ و $\vec{c}(2, -3, 0)$ تولید می‌شود. (شهریور ۱۴۰۱)

۱۱۷. مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}(۲,-۱,۳)$، $\vec{b}(۰,m,-۱)$ و $\vec{c}(۱,-۲,۳)$ در یک صفحه باشند.

(شهریور ۱۴۰۰)

۱۱۸. سه بردار $\vec{a}(۲,۳,۱)$، $\vec{b}(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند. *(شهریور ۹۸)*

الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

۱۱۹. درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. *(؟؟؟)*

الف) اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشند حاصل $\vec{k}.(\vec{j}\times\vec{i})$ برابر یک است. درست ◯ نادرست ◯

ب) اگر برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ در این صورت $\theta=\frac{\pi}{۲}$ است. (θ زاویهٔ بین دو بـردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است) درست ◯ نادرست ◯

ج) همواره $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{۰}$. درست ◯ نادرست ◯

د) برای دو بردار غیرصفر a و b همواره تساوی $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})$ برقرار است. درست ◯ نادرست ◯

هـ) اگر $۴x^۲+۹y^۲+z^۲=۶۴$ آنگاه بیشترین مقدار $|۴x+۶y-z|$ برابر ۱۲ است. درست ◯ نادرست ◯

و) اگر $\vec{a}.\vec{b}=-۱$ آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{۰}$. درست ◯ نادرست ◯

ز) اگر $\vec{a}\parallel\vec{b}$ آنگاه تصویر قائم $\vec{b}$ روی $\vec{a}$ بردار $\vec{b}$ است. درست ◯ نادرست ◯

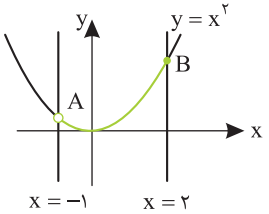
پاسخ سوالات طبقه‌بندی شده

درس اول

پاسخ ۳۴ الف) معادله محور yها است.

ب) درست

ج) $y=x^2$ سهمی قائم رو به بالا است و رابطهٔ فوق قسمتی از سهمی از A به B است که نقطهٔ A روی شکل نیست ولی نقطهٔ B روی شکل قرار دارد.



د) $|\vec{a}|=\sqrt{0+4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

پاسخ ۳۵ الف) نقطهٔ A به طول ۲ روی محور xها به مختصات $A=(2,0,0)$ است و نقطهٔ B روی صفحهٔ xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ به مختصات $B=(1,0,3)$ است.

ب) $AB=\sqrt{(2-1)^2+0+(0-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

ج) اگر M وسط AB باشد داریم:

$$M=\frac{A+B}{2}=(\frac{2+1}{2},\frac{0+0}{2},\frac{0+3}{2})=(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$$

پاسخ ۳۶ نمودار معادلات $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$ محور yها است و محور yها بر صفحهٔ $x=0$ یعنی صفحهٔ yoz منطبق است.

$$\vec{a}+2\vec{b}=(2,-1,3)+2(1,2,0)=(4,3,3)$$

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{16+9+9}=\sqrt{34}$$

پاسخ ۳۷

الف) $A(0,4,3)$ ب) $CDFG:\begin{cases}x=2\\0\le y\le 4\\0\le z\le 3\end{cases}$ $AD:\begin{cases}0\le x\le 2\\y=4\\z=3\end{cases}$

پاسخ ۳۸ الف) بردار $\vec{a}$ در ناحیهٔ ۵ قرار دارد.

ب) $2\vec{a}-\vec{b}=2(1,2,-1)-(0,2,-1)=(2,2,-1)$

$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{4+4+1}=3$$

پاسخ ۳۹ نقاط A و B روی خط فوق قرار دارند. زیرا در این دو نقطه $y=2$ و $z=1$ است.

پاسخ ۴۰ مختصات A برابر $(2,0,0)$ و نقطهٔ B به مختصات $(0,-3,4)$ است. اگر M وسط AB باشد داریم:

$$M=\frac{A+B}{2}=(1,-\frac{3}{2},2)$$

$$OM=\sqrt{1+\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{29}{4}}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

درس دوم

پاسخ ۱۰۵ ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفر است.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow(2,m,-1).(m+1,3,2)=0\Rightarrow$$

$$2m+2+3m-2=0\Rightarrow 5m=0\Rightarrow m=0$$

پاسخ ۱۰۶ اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{(2,-1,2).(1,-1,0)}{1+1+0}(1,-1,0)=\frac{2+1+0}{2}(1,-1,0)$$

$$=\frac{3}{2}(1,-1,0)=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0)$$

پاسخ ۱۰۷ الف)

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{(1,2,3).(-2,0,2)}{4+0+4}(-2,0,2)=\frac{-2+6}{8}(-2,0,2)$$

$$=\frac{4}{8}(-2,0,2)=(-1,0,1)$$

ب) $2\vec{a}-\vec{b}=2(1,2,3)-(-2,0,2)=(4,4,4)$

$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{16+16+16}=\sqrt{48}$$

پاسخ ۱۰۸ ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفر است.

$$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})\Leftrightarrow(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{a}-\cancel{\vec{a}.\vec{b}}+\cancel{\vec{a}.\vec{b}}-\vec{b}.\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0\Leftrightarrow|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2\Leftrightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|$$

پاسخ ۱۰۹ اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=10\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=10\Rightarrow 3\times5\cos\theta=10\Rightarrow\cos\theta=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

بنابراین: $S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}(3)(5)(\frac{\sqrt{5}}{3})=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

پاسخ ۱۱۰ اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=72\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=72\Rightarrow 26\times3\sin\theta=72\Rightarrow\sin\theta=\frac{12}{13}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}\xrightarrow{\theta>90}\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}$$

$$=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=-\frac{5}{13}$$

بنابراین: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\times26\times\frac{-5}{13}=-30$

پاسخ ۱۱۱ الف) اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{(2,-1,2).(1,-1,0)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+1}}=\frac{2+1+0}{3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=45^\circ$$

ب) حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هر دو بردار عمود است.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&-1&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=2i+2j-k$$

پاسخ ۱۱۲ نصف اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ برابر مساحت مثلث ABC است.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۲ , -۲ , -۱)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (۱ , -۳ , ۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۲ & -۱ \\ ۱ & -۳ & ۱ \end{vmatrix} = -۵i - ۳j - ۴k$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰}$$

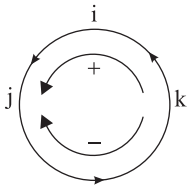
پاسخ ۱۱۳ اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی بردارهای a و b برابر مساحت متوازی‌الاضلاع است.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲i - j - ۴k$$

$$S_{\square} = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{۴+۱+۱۶} = \sqrt{۲۱}$$

پاسخ ۱۱۴ حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را از نمودار چرخشی زیر به دست می‌آوریم.

$$j\times k = i , i\times k = -j , i\times j = k$$



بنابراین:

$$۲i.(j\times k) + ۳j.(i\times k) + ۴k.(i\times j) = ۲i.i + ۳j.(-j) + ۴k.k$$

$$= ۲|i|^۲ - ۳|j|^۲ + ۴|k|^۲ = ۲ - ۳ + ۴ = ۳$$

پاسخ ۱۱۵ می‌دانیم ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارها خاصیت پخشی دارد.

$$(۲\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a}) + (\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b}) = ۲\vec{a}\times\vec{c} - \underbrace{۲\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}} + \vec{b}\times\vec{c} -$$

$$\vec{b}\times\vec{a} + \vec{b}\times\vec{a} + \underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}} + \vec{c}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{b} = ۲\vec{a}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$$

$$= ۲\vec{a}\times\vec{c} - \vec{a}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}$$

چون $\vec{a} \parallel \vec{c}$ پس $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{0}$ پس حکم ثابت است.

پاسخ ۱۱۶ قدرمطلق ضرب مختلط این سه بردار برابر حجم متوازی‌السطوح است.

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۶i + ۴j - ۴k$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (۱ , ۰ , -۱).(۶ , ۴ , -۴) = ۶ + ۰ + ۴ = ۱۰$$

$$\text{حجم} = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| = ۱۰$$

پاسخ ۱۱۷ سه بردار در یک صفحه هستند هرگاه ضرب مختلط آنها صفر باشد.

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & m & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{vmatrix} = (۳m-۲)i - j - mk$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (۲ , -۱ , ۳).(۳m-۲ , -۱ , -m)$$

$$= ۶m - ۴ + ۱ - ۳m = ۳m - ۳$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰ \Rightarrow ۳m - ۳ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

پاسخ ۱۱۸ الف) بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ حاصل‌ضرب خارجی آنها است.

$$\vec{a}+\vec{b} = (۱ , ۴ , ۱)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۹i + ۴j - ۷k$$

ب) حجم متوازی‌السطوح برابر $|a.(b\times c)|$ است.

$$b\times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۲i - ۲j - ۳k$$

$$a.(b\times c) = (۲ , ۳ , ۱).(-۲ , -۲ , -۳) = -۴ - ۶ - ۳ = -۱۳$$

$$\text{حجم} = |a.(b\times c)| = ۱۳$$

پاسخ ۱۱۹

الف) نادرست — ب) نادرست

ج) درست — د) درست

ه) نادرست — و) نادرست

ز) درست