



۱. اگر  $f(x) = \sqrt{x+2}|x|$  مقدار  $f(f(-144))$  کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۴

۲. در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$  مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۴

۳. اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  باشد حاصل  $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

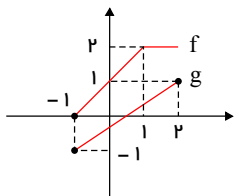
- (۱) ۴ (۲)  $4(\sqrt{2} - 1)$  (۳)  $4(1 - \sqrt{2})$  (۴)  $4\sqrt{2}$

۴. اگر  $f(x) = x + 1$  و  $g(x) = (4 - 2a)x^2 - 6$  و  $(f - g)(-1) = -3$  باشد آن گاه  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{5}{2}$

۵. اگر توابع  $f$  و  $g$  به صورت  $f = \{(2, 5)\}$  و  $g = \{(2, 7)\}$  باشند آن گاه تابع  $f \times g$  برابر است با:

- (۱)  $\{(10, 14)\}$  (۲)  $\{(4, 35)\}$  (۳)  $\{(4, 12)\}$  (۴)  $\{(2, 35)\}$



۶. نمودار تابع  $f$  و  $g$  در شکل مقابل داده شده است حاصل  $\frac{(f+g)(-1) + (f-g)(2)}{(f+g)(1)}$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۰

۷. اگر  $f(x) = x^2 + x + 1$  و  $f \circ g(x) = x^2 - 3x + 3$  باشد ضابطه  $g(x)$  کدام است؟

- (۱)  $-x + 2$  (۲)  $x + 2$  (۳)  $-x + 1$  (۴)  $-x - 2$

۸. اگر  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$  باشد ضابطه  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $x^3 + 3x$  (۲)  $x^3 - 3x$  (۳)  $(x-1)^3$  (۴)  $(x+1)^3$

۹. اگر  $f(x) = 2x + 2a$  و  $g(x) = x^2 + bx + c$  و  $f \circ g(x) = 2x^2 + x + 1$  آن گاه  $a + b + c$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۳



۱۰. اگر  $f(x) = \frac{1}{2}(x) - \frac{1}{2x}$  و  $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  باشد آن‌گاه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

$\sqrt{x^2 + 1}$  (۴)                       $x$  (۳)                       $\frac{1}{x}$  (۲)                       $\frac{1}{\sqrt{x}}$  (۱)

۱۱. اگر  $f(g(x)) = \frac{x}{x-3}$  و  $g(x) = 2x - 1$  مقدار  $f(3)$  کدام است؟

۴ (۴)                      ۲ (۳)                      -۲ (۲)                      -۴ (۱)

۱۲. اگر توابع  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت  $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$  باشند و  $g(x) = 3x + 4$  مقدار  $f(5)$  کدام است؟

۴ (۴)                      ۳ (۳)                      ۲ (۲)                      ۱ (۱)

۱۳. اگر  $f(x + \sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^3$  و  $g(x) = 3\sin^2 x$  آن‌گاه  $f \circ g(\frac{\pi}{6})$  چیست؟

$\frac{1}{2}$  (۴)                       $\frac{1}{128}$  (۳)                       $\frac{1}{32}$  (۲)                       $\frac{1}{64}$  (۱)

۱۴. با توجه به ماشین  $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$  اگر  $f(x) = 3x - 4$  آن‌گاه  $g(2)$  کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۴)                      ۱ (۳)                      ۰ (۲)                      ۲ (۱)

۱۵. اگر  $f(x) = \sqrt{x + |x|}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$  دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$  کدام است؟

$(0, +\infty)$  (۴)                       $\mathbb{R} - \{0\}$  (۳)                       $\mathbb{R} - \{0, 4\}$  (۲)                       $(0, 4) \cup (4, +\infty)$  (۱)

۱۶. اگر  $f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+1} & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$  مقدار  $f \circ f(8)$  کدام است؟

$f(17)$  (۴)                       $f(24)$  (۳)                       $f(35)$  (۲)                       $f(15)$  (۱)

۱۷. اگر در تابع خطی  $f$  با شیب منفی داشته باشیم  $f(f(x+1)) = 9x - 3$  مقدار  $f(3) - f(1)$  کدام است؟

-۱۸ (۴)                      -۱۲ (۳)                      -۹ (۲)                      -۶ (۱)

۱۸. اگر  $f(x) = \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$  باشند، دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g$  کدام است؟

$[-4, -2) \cup (0, 2]$  (۴)                       $[-4, -1] \cup (1, 2]$  (۳)                       $[-2, 0]$  (۲)                       $[-4, 2]$  (۱)

۱۹.  $Df \circ g = (-\infty, 1]$  ضابطه‌ی تابع  $g$ ، کدام یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟

$g(x) = \sin x$  (۴)                       $g(x) = \sqrt[3]{x}$  (۳)                       $g(x) = \sqrt{x}$  (۲)                       $g(x) = 3 \log x$  (۱)



۲۰. اگر  $f(x) = x + 1$  و  $g(2f(x)) = \frac{x^2}{3}$ ، ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  کدام است؟

$$g(x) = \frac{(x-2)^2}{12} \quad (۴) \quad g(x) = \frac{(x-2)^2}{6} \quad (۳) \quad g(x) = \frac{(x-2)^2}{3} \quad (۲) \quad g(x) = \frac{(x-2)^2}{2} \quad (۱)$$

۲۱. اگر  $f(x) = \sqrt{\log_2(x-1)}$  و  $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$  باشند، برد تابع  $g \circ f$  کدام است؟  
(۱)  $\{0, 2\}$  (۲)  $\{0, 1, 2\}$  (۳)  $\{ \}$  (۴)  $\{0\}$

۲۲. اگر  $f(x^2 + 2x) = \frac{x^4 + 4}{x^2 - 2x + 2}$  مقدار  $f(5)$  کدام است؟  
(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۲۳. اگر  $f(x-1) = x + 3$  و  $g(4-x) = 2x$  باشد آن‌گاه مقدار  $(g \circ f)(-3)$  کدام است؟  
(۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۶

۲۴. اگر  $f(x-2) + f(2-x) = 4x + 1$  باشد، آن‌گاه  $f(3)$  کدام است؟  
(۱) ۴ (۲) ۴٫۵ (۳) ۵ (۴) ۵٫۵

۲۵. اگر  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(f(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن‌گاه حاصل  $(f \circ g)(3)$  کدام است؟  
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۳

۲۶. اگر  $f(x) = x - \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sin^4 x$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $f \circ g$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \cos^2 2x \quad (۴) \quad \frac{1}{4} \cos^2 2x \quad (۳) \quad -\frac{1}{2} \sin^2 2x \quad (۲) \quad -\frac{1}{4} \sin^2 2x \quad (۱)$$

۲۷. اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = 1 + \sqrt{x}$  باشند، آن‌گاه برد تابع  $(g - f)(x)$  کدام است؟  
(۱)  $(-\infty, 1]$  (۲)  $R$  (۳)  $[-1, +\infty)$  (۴)  $[0, +\infty)$

۲۸. تابع با ضابطه‌ی  $g(x) = x^3 + 2x$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f(x)$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های ۱۲ و ۳- قطع کند، نمودار تابع  $f \circ g$  محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$(۱) ۲ و -۱ \quad (۲) ۱ و -۲ \quad (۳) ۲ و -۳ \quad (۴) -۲ و ۳$$

۲۹. اگر  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{3}$  و ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت  $x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow 3x + 1$  باشد، مقدار  $g(2)$  کدام است؟

$$(۱) \sqrt[3]{19} \quad (۲) \sqrt[3]{7} \quad (۳) \sqrt[3]{\frac{10}{3}} \quad (۴) 7$$



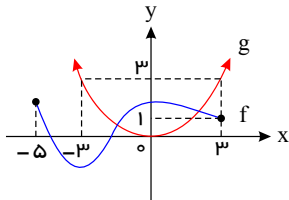
۳۰. اگر  $f(x) = 12x - 2$  و  $f \circ g(x) = \frac{5x}{6} + 1$  ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  کدام است؟

$g(x) = \frac{5}{82}x + \frac{1}{3}$  (۲)

$g(x) = \frac{23}{72}x$  (۱)

$g(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{25}$  (۴)

$g(x) = \frac{5}{72}x + \frac{1}{4}$  (۳)



۳۱. اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  کدام است؟

$[1, 3]$  (۲)

$[-3, 3]$  (۱)

$R$  (۴)

$[-5, 3]$  (۳)

۳۲. اگر  $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$  و  $f(g(x)) = \frac{x^3+2}{2x^3-3}$  مقدار  $f(-4)$  کدام است؟

$-4$  (۴)

$-3$  (۳)

$\frac{10}{3}$  (۲)

$\frac{3}{5}$  (۱)

۳۳. اگر  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$  کدام است؟

$R - (-1, 1)$  (۴)

$R$  (۳)

$[-1, 1]$  (۲)

$[0, 1]$  (۱)

۳۴. اگر  $g(x) = \sqrt{2-x}$  و  $f(x) = \sqrt{x+7}$  و دامنه‌ی تابع  $y = g \circ f(x)$  به صورت  $[a, b]$  باشد،  $b - a$  کدام است؟

$4$  (۴)

$3$  (۳)

$2$  (۲)

$1$  (۱)

۳۵. اگر  $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$  باشد، ضابطه‌ی  $f(x)$  برابر کدام است؟

$x^2 - 2x - 1$  (۲)

$x^2 - x + 3$  (۱)

$x^2 - x + 1$  (۴)

$x^2 - 2x + 1$  (۳)



۱. گزینه ۲

$$f(-144) = \sqrt{-144 + 2 \times 144} = \sqrt{144} = 12 \rightarrow f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + (2 \times 12)} = \sqrt{36} = 6$$

۲. گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} f(f(5)) &= f(5 - \sqrt{5+4}) = f(2) = 2(2) + 3 = 7 \\ f(f(1)) &= f(2(1) + 3) = f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7 + 2 = 9$$

۳. گزینه ۳

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = (x+1)^2$$

$$f \circ g(1 - \sqrt{2}) = f(g(1 - \sqrt{2})) = f((1 - \sqrt{2} + 1)^2) = f((2 - \sqrt{2})^2) = |(2 - \sqrt{2})^2|$$

$$= (2 - \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$g \circ f(1 - \sqrt{2}) = g(f(1 - \sqrt{2})) = g(|1 - \sqrt{2}|) = g(-1 + \sqrt{2}) = (-1 + \sqrt{2} + 1)^2 = 2$$

$$\text{پس داریم: } f \circ g(1 - \sqrt{2}) - g \circ f(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

$$(f-g)(-1) = f(-1) - g(-1)$$

۴. گزینه ۳ میدانیم که:

$$f(-1) = 0$$

$$g(-1) = (4 - 2a)(-1)^2 - 6 = 4 - 2a - 6 = -2a - 2$$

$$(f-g)(-1) = 0 + 2a + 2 = -3 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

۵. گزینه ۴

توجه: اعمال روی توابع، در دامنه‌های مشترک انجام می‌شود. بنابراین باید ابتدا اشتراک دامنه‌ها را بیابیم و میدانیم:

$$(f \times g)(a) = f(a) \times g(a)$$

$$\left. \begin{aligned} Df \cap Dg &= \{2\} \\ (f \times g)(2) &= f(2) \times g(2) = 5 \times 7 = 35 \end{aligned} \right\} f \times g = (2, 35)$$

۶. گزینه ۴

$$(f \pm g)(a) = f(a) \pm g(a)$$

میدانیم:

$$\frac{f(-1) + g(-1) + f(2) - g(2)}{f(1) + g(1)} = \frac{0 + (-1) + 2 - 1}{2 + g(1)} = 0$$

۷. گزینه ۳ ابتدا  $f \circ g(x)$  را تشکیل می‌دهیم و با عبارت  $f \circ g$  صورت سوال مساوی قرار می‌دهیم.

$$f(g(x)) = g^2(x) + g(x) + 1 \xrightarrow{f(g(x)) = x^2 - 3x + 3} g^2(x) + g(x) + 1 = x^2 - 3x + 3$$

$$g^2(x) + g(x) - (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1) \cdot (-x^2 - 3x + 2)$$

حل معادله درجه دوم:

$$g(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(x^2 - 3x + 2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(2x - 3)^2}}{2} = \begin{cases} x - 2 \\ -x + 1 \end{cases}$$



۸. گزینه ۲

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \quad \text{می‌دانیم:}$$

می‌توانیم در طرف دوم تساوی جمله  $x + \frac{1}{x}$  را ظاهر کنیم.

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x \times \frac{1}{x}\right)$$

$$f(t) = t^3 - 3t \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x$$

۹. گزینه ۱

$$f(g(x)) = 2g(x) + 2a = 2(x^2 + bx + c) + 2a$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 2x^2 + 2bx + 2(c+a)$$

$$x \text{ ضریب: } 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \text{عدد ثابت: } 1 = 2c + 2a \Rightarrow a + c = \frac{1}{2}$$

پس  $a + b + c = 1$  است.

۱۰. گزینه ۳

$$f(g(x)) = \frac{1}{2} \left( g(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 1} + x - \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{2} (2x) = x$$

۱۱. گزینه ۲

$$f(g(x)) = f(2x - 1) \xrightarrow{f(g(x)) = \frac{x}{x-3}} f(2x - 1) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{2x-1=3 \rightarrow x=2} f(2) = \frac{2}{2-3} = -2$$

۱۲. گزینه ۲

اگر توابع  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت  $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$  باشند، نتیجه می‌گیریم که:

$$g(f(x)) = 2x \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = 3f(x) + 4 \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{2x-4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{6}{3} = 2$$

۱۳. گزینه ۳

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin^2 \frac{\pi}{6} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow f \circ g\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{x + \sqrt{x} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{128}$$

۱۴. گزینه ۱ ماشین داده شده تعریف  $g(f(x))$  می‌باشد.

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g(3x - 4) = x \xrightarrow{3x-4=2 \Rightarrow x=2} g(2) = 2$$

۱۵. گزینه ۱ برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$  ابتدا باید دامنه‌های تعریف  $f$  و  $g$  را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} \rightarrow x + |x| \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 & \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x \geq 0 \\ x < 0 : x - x \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 & \xrightarrow{\text{همواره برقرار}} x < 0 \end{cases}$$

اجتماع

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x \in \mathbb{R} \Rightarrow Df = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow Dg = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حال با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع مرکب، می‌نویسیم:

$$Dg \circ f = \{x \in Df \mid f(x) \in Dg\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x + |x|} \in (\mathbb{R} - \{0, 4\})\}$$

باید مقادیری از  $x$  که به ازای آن‌ها  $f(x) = \sqrt{x + |x|}$  برابر  $0$  یا  $4$  می‌شوند را از  $\mathbb{R}$  کنار بگذاریم. داریم:



$$\sqrt{x+|x|} = 0 \Rightarrow x+|x| = 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0, \quad \sqrt{x+|x|} = 4 \Rightarrow x+|x| = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \\ x < 0 : x - x = 16 \Rightarrow 0 = 16 \text{ ق ق } \end{cases}$$

بنابراین اگر از  $\mathbb{R}$   $x \leq 0$  و  $x = 8$  را کنار بگذاریم، دامنه‌ی تعریف  $g \circ f$  به دست می‌آید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} | x \not\leq 0, x \neq 8\} = \mathbb{R}^{>0} - \{8\} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

۱۶. گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+1} & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(8) \stackrel{\text{ضابطه ی بالا}}{=} 2 - \sqrt{8+1} = 2 - 3 = -1$$

$$f \circ f(8) = f(f(8)) = f(-1) \stackrel{\text{ضابطه ی پایین}}{=} 2(-1) - 1 = -3 = f(24)$$

دقت کنید:

$$f(15) = 2 - \sqrt{16} = -2, \quad f(35) = 2 - \sqrt{36} = -4$$

$$f(24) = 2 - \sqrt{25} = -3, \quad f(17) = 2 - \sqrt{18}$$

۱۷. گزینه ۱ تابع مورد نظر را به فرم  $f(x) = ax + b$  در نظر می‌گیریم، اکنون می‌توان نوشت:

$$f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b \Rightarrow f(f(x+1)) = a(ax + a + b) + b = a^2x + a^2 + ab + b$$

اکنون از تساوی  $a^2x + a^2 + ab + b = 9x - 3$  می‌توان دریافت:

$$a^2 = 9 \xrightarrow{a < 0} a = -3 \Rightarrow f(x) = -3x + b \Rightarrow f(3) - f(1) = (-9 + b) - (-3 + b) = -6$$

۱۸. گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f, g$  را به دست می‌آوریم:

$$D_f : 3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$D_g : x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, \log_2^{x^2+2x} \leq 3\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x \leq 2^3\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, (x+4)(x-2) \leq 0\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, -4 \leq x \leq 2\}$$

$$= 4 \leq x < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 2 \rightarrow [-4, -2) \cup (0, 2]$$

البته می‌توانیم  $f \circ g(x)$  را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به دست آورید.

روش دوم:

$x = -1$  در دامنه‌ی تعریف  $g$  قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف  $f \circ g$  هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که  $x = -1$  دارد

نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

۱۹. گزینه ۳ ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$D_f : 1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$$

و با توجه به این که  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$  به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{نادرست} \rightarrow D_{f \circ g} = \{x > 0, \log x^3 \leq 1\} = \{x > 0, x^3 \leq 10\} = \{x > 0, x \leq \sqrt[3]{10}\} = (0, \sqrt[3]{10}]$$

$$\text{نادرست} \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \geq 0, \sqrt{x} \leq 1\} = \{x \geq 0, x \leq 1\} = [0, 1]$$

$$\text{درست} \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{x} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 1\} = (-\infty, 1]$$



نادرست  $Df \circ g = \{x \in R, \sin x \leq 1\} = R \rightarrow$  گزینه‌ی چهارم

۲۰. گزینه ۴

$$f(x) = x + 1 \rightarrow 2f(x) = 2x + 2$$

$$g(2f(x)) = \frac{x^2}{3} \rightarrow g(2x + 2) = \frac{x^2}{3} \quad 2x + 2 = t \rightarrow x = \frac{t-2}{2}$$

$$\rightarrow g(t) = \frac{1}{3} \left( \frac{t-2}{2} \right)^2 = \frac{(t-2)^2}{12} \rightarrow g(x) = \frac{(x-2)^2}{12}$$

۲۱. گزینه ۴

$$g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4} = \sqrt{-(x^2 - 4x + 4)} = \sqrt{-(x-2)^2} \rightarrow Dg = \{2\}$$

تابع  $g \circ f(x)$  یعنی  $g(f(x))$  و چون دامنه‌ی تابع  $g(x)$  فقط  $x = 2$  می‌باشد، پس فقط مقادیری را قبول می‌کند که به ازای آن  $f(x) = 2$  شود از طرفی چون  $g(2) = 0$  است پس برد تابع  $g \circ f(x)$  برابر  $\{0\}$  خواهد شد.

۲۲. گزینه ۳

اگر  $x^2 + 2x$  را مساوی ۵ قرار دهیم پیدا کردن  $x$  به روش دلتا منجر به بدست آوردن  $x$  های رادیکالی می‌شود که محاسبه، سخت می‌شود پس سعی می‌کنیم با توجه به ورودی تابع  $f$  که برابر  $x^2 + 2x$  است، در طرف دوم تساوی نیز عبارت  $x^2 + 2x$  را ایجاد کنیم.

$$\frac{x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2}{x^2 - 2x + 2} = \frac{(x^2 + 2)^2 - 4x^2}{(x^2 - 2x + 2)} = \frac{(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)}{(x^2 - 2x + 2)} = x^2 + 2x + 2$$

$$\rightarrow f(x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow f(t) = t + 2 \rightarrow f(5) = 5 + 2 = 7$$

۲۳. گزینه ۴

$g \circ f(-3) = g(f(-3))$  برای محاسبه‌ی  $f(-3)$  کافی است در عبارت  $f(x-1) = x+3$  به جای  $x$ ، عدد  $-2$  را قرار دهیم  
 $f(x-1) = x+3 \xrightarrow{x=-2} f(-3) = 1 \quad (x-1 = -3 \rightarrow x = -2)$

$$\text{پس: } g(f(-3)) = g(1) \xrightarrow{4-x=1 \rightarrow x=3} 2(3) = 6$$

۲۴. گزینه ۲ چون در صورت سؤال  $f(3)$  را خواسته، ابتدا هر یک از عبارت‌های  $x-2$  و  $2-x$  را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:  
 $x-2 = 3 \rightarrow x = 5$  ,  $2-x = 3 \rightarrow x = -1$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \rightarrow 5f(3) + f(-3) = 21 \\ x = -1 \rightarrow 5f(-3) + f(3) = -3 \end{array} \right\} \times (-5) \rightarrow -24f(3) = -108 \rightarrow f(3) = 4,5$$

۲۵. گزینه ۲

$$g(f(x)) = x^2 + x - 2 \rightarrow g(2x+1) = x^2 + x - 2$$

$$f \circ g(3) = f(g(3)) \xrightarrow{2x+1=3 \rightarrow x=1} \xrightarrow{g(3)=0} f(0) = 1$$

$$1 - \sin^2 a = \cos^2 a, \quad \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a \quad \text{می‌دانیم:} \quad \text{گزینه ۱}$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\sin^2 x) = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x \\ &= \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = -\sin^2 x (1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= -(\sin x \cdot \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$





۲۷. گزینه ۱

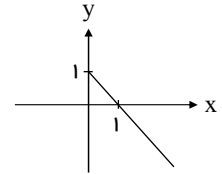
$$f(x) = x + \sqrt{x} \rightarrow Df : x \geq 0 \rightarrow D_{g-f} = Df \cap Dg = x \geq 0$$

$$g(x) = 1 + \sqrt{x} \rightarrow Dg : x \geq 0$$

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 1 + \sqrt{x} - (x + \sqrt{x}) = 1 - x$$

کافی است که تابع  $y = 1 - x$  را با شرط  $x \geq 0$  رسم کنیم.

$$x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. , \quad x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.$$



واضح است که برد تابع (حدود  $y$ ) برابر  $1$  یا  $y \in (-\infty, 1]$  می‌باشد.

۲۸. گزینه ۱

کافی است که معادله  $f \circ g(x) = 0$  را حل کنیم.

$$f(g(x)) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه های معادله ی } f(x)=12} \begin{cases} x^3 + 2x = 12 \rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \\ x^3 + 2x = -3 \rightarrow x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

برابر ۱۲، ۳- هستند

اکنون هر یک از این معادلات را حل می‌کنیم.

$$x^3 + 2x - 12 = 0 \rightarrow x^3 - 8 + 2x - 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 + 4 + 2x) + 2(x-2) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(x-2)}_{\text{فاکتور}} (x^2 + 4 + 2x + 2) = 0 \rightarrow (x-2) \underbrace{(x^2 + 2x + 6)}_{\Delta < 0} = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x^3 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x^3 + 1 + 2x + 2 = 0 \rightarrow (x+1)(x^2 + 1 - x) + 2(x+1) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(x+1)}_{\text{فاکتور}} (x^2 + 1 - x + 2) = 0 \rightarrow (x+1) \underbrace{(x^2 - x + 3)}_{\Delta < 0} = 0 \rightarrow x = -1$$

البته می‌توانستیم معادلات را حل نکنیم و با جایگذاری گزینه‌ها در معادلات به جواب برسیم.

۲۹. گزینه ۱ از نمودار داده شده نتیجه می‌شود که  $f(g(x)) = 3x + 1$  است.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{3} \rightarrow f(g(x)) = \frac{g^3(x) + 2}{3}$$

$$\text{پس: } \frac{g^3(x) + 2}{3} = 3x + 1 \xrightarrow{x=2} \frac{g^3(2) + 2}{3} = 6 + 1 \rightarrow g^3(2) + 2 = 21 \Rightarrow g^3(2) = 19 \rightarrow g(2) = \sqrt[3]{19}$$

۳۰. گزینه ۳

$$f \circ g(x) = \frac{5x}{6} + 1 \rightarrow f(g(x)) = \frac{5x}{6} + 1$$

$$f(x) = 12x - 2 \rightarrow f(g(x)) = 12g(x) - 2$$

$$\text{پس: } 12g(x) - 2 = \frac{5x}{6} + 1 \rightarrow 12g(x) = \frac{5x}{6} + 3 \rightarrow g(x) = \frac{5}{72}x + \frac{1}{4}$$

۳۱. گزینه ۱ با توجه به نمودار داده شده دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را مشخص می‌کنیم.

$$Df = [-5, 3], \quad Dg = R$$

$$Df \circ g = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in R, g(x) \in [-5, 3]\} = \{x \in R, x \in [-3, 3]\} = [-3, 3]$$



۳۲. گزینه ۳

$$f(g(x)) = \frac{x^3 + 2}{2x^3 - 3} \rightarrow f\left(\frac{x+3}{x-2}\right) = \frac{x^3 + 2}{2x^3 - 3}$$

برای محاسبه‌ی  $f(-4)$  کافی است که  $\frac{x+3}{x-2}$  را برابر  $-4$  قرار دهیم.

$$\frac{x+3}{x-2} = -4 \rightarrow x+3 = -4x+8 \rightarrow 5x = 5 \rightarrow x = 1$$

$$f\left(\frac{x+3}{x-2}\right) = \frac{x^3 + 2}{2x^3 - 3} \xrightarrow{x=1} f(-4) = \frac{3}{-1} = -3$$

۳۳. گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f$  و  $g$  را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \rightarrow Df = R$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow Dg: x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$Dg \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \left\{ \underbrace{x \in R}, 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \right\}$$

$$\underbrace{\frac{1-x^2}{1+x^2}}_{+} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 : II$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{\underbrace{-2x^2}_{\text{منفی یا صفر}}}{\underbrace{1+x^2}_{+}} \leq 0 \quad III : \text{همواره برقرار است}$$

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب  $-1 \leq x \leq 1$  می‌رسیم.  $(x \in [-1, 1])$

۳۴. گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt{x+7} \rightarrow Df: x+7 \geq 0 \rightarrow x \geq -7$$

$$g(x) = \sqrt{2-x} \rightarrow Dg: 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$$

$$Dg \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \{x \geq -7, \sqrt{x+7} \leq 2\}$$

$$= \{x \geq -7, x+7 \leq 4\} = \{x \geq -7, x \leq -3\} = \{-7 \leq x \leq -3\}$$

یعنی  $x \in [-7, -3]$  است یعنی  $a = -7$  و  $b = -3$  می‌باشند پس  $b - a = 4$  است

۳۵. گزینه ۴ روش اول:

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند  $x = 2$  را انتخاب می‌کنیم.



$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای  $x$  آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.



پاسخنامه کلیدی آزمون

۴ - ۵	۳ - ۴	۳ - ۳	۱ - ۲	۲ - ۱
۳ - ۱۰	۱ - ۹	۲ - ۸	۳ - ۷	۴ - ۶
۱ - ۱۵	۱ - ۱۴	۳ - ۱۳	۲ - ۱۲	۲ - ۱۱
۴ - ۲۰	۳ - ۱۹	۴ - ۱۸	۱ - ۱۷	۳ - ۱۶
۲ - ۲۵	۲ - ۲۴	۴ - ۲۳	۳ - ۲۲	۴ - ۲۱
۳ - ۳۰	۱ - ۲۹	۱ - ۲۸	۱ - ۲۷	۱ - ۲۶
۴ - ۳۵	۴ - ۳۴	۲ - ۳۳	۳ - ۳۲	۱ - ۳۱