بام نهایی

((سؤالات موضوعی نهایی هندسه ۳))

پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

آخرین نسخه: مرداد ۱۴۰۳

(جلد دوم؛ خرداد ۱۴۰۱ به بعد)

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

باسمه تعالی

معرفی کتاب

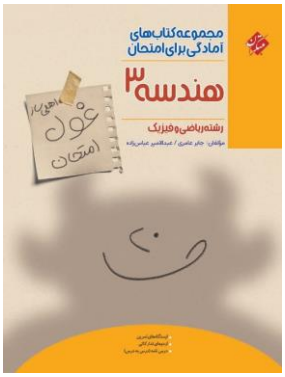
ریاضی و آمار۲

ریاضی و آمار۳

ریاضیات گسسته

آمار و احتمال

حسابان۱



هندسه۳

هندسه۲

کتاب های زیر برای آموزش مفهومی و کسب نمره بالا در امتحانات نهایی بسیار مفید هستند.

مطالعه این کتاب ها به دانش آموزان و علاقه مندان به یادگیری ریاضی دبیرستانی و کسب نمره ی بالا در امتحانات نهایی توصیه می شود.

برای تهیه می توانید از لینک زیر استفاده نمایید.

https://zil.ink/ameri.math

فصل اوّل

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

۱	عبارت زیر را کامل کنید اگر ماتریس $\begin{bmatrix} n & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+n$ برابر با ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	ماتریس A مربعی مرتبه‌ی۳ به صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، به صورت زیر $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ تعریف شده است، این ماتریس را با درایه هایش (آرایش مستطیلی) بنویسید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) ماتریس $A_{۳\times۴}$ دارای ۱۲ درایه است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	ماتریس مربعی I_n که آن را ماتریس واحد مرتبه‌ی n می نامیم، عضو خنثی برای عمل..... ماتریس های مربعی مرتبه‌ی n است. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد، به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی توان نتیجه گرفت $B=C$ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	الف) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲x-۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با .... است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه‌ی m و n ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه‌ی دو است).	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره

عابد عامری

۸	اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A=[۳i-۲j]_{۳\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند. الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس $B^۲$ را محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۹	اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید : $(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۰	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) ماتریس مربعی که تمام درایه های واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند،ماتریس قطری نامیده می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۱	اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i\times j & i>j \\ i^۲ & i=j \\ i+j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد. ماتریس $۳A-۴I$ را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس های $A^۳$ و $A\times B$ را با درایه هایشان مشخص کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۳	اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۰ \\ m-۲ & n \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید.	دی ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۱۴	الف) اگر $b_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس $B^۲+۲I$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه۳ است)	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۱۵	با استفاده از ویژگی های ضرب ماتریس ها و ماتریس همانی I درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید. $(A-۳I)^۲=A^۲-۶A+۹I$	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۶	ماتریس های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+۱ & y+۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر y و x را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۱۷	جای خالی را کامل کنید.	شهریور	۰/۲۵

	اگر در ماتریس قطری تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس ..... می نامند.	۱۴۰۲	نمره
۱۸	در تساوی $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$، مقدار x را بیابید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۹	جای خالی را با عبارات مناسب پرکنید. در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۲k-۱ & ۲ \end{bmatrix}$، مقدار k ، برابر ..... است.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۲۰	اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A = B$ باشند، حاصل را به $x^۲ - ۲y + z$ دست آورید.	دی ۱۴۰۲	۱ نمره
۲۱	**درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** الف) اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم مرتبه‌ی A باشد. آنگاه حاصلضرب آنها تعویض پذیر است. ب) اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱۰ & -۴ \end{bmatrix}$، آنگاه $A^{۱۴۰۳} = I$	خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
۲۲	اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -۱ & \lvert i-j \rvert > ۱ \\ ۰ & \lvert i-j \rvert = ۱ \\ ۱ & \lvert i-j \rvert < ۱ \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^۲ - ۲I$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۲۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای هر دو ماتریس مربعی هم مرتبه‌ی A و B، در حالت کلی رابطه‌ی $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$ برقرار است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۲۴	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} -۱ & m \\ -۲ & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ چنان هستند که $C = ۳A + ۲B$، ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۲۵	با فرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^۵$ را محاسبه کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل اوّل

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۲ : وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان و وارون ماتریس

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۵$ باشد، آنگاه $|۲A|=۴۰$ است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.(خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۵	اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۲ \\ -۴ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت عدد حقیقی m را چنان بیابید که تساوی زیر برقرار باشد. $|A|^۲-۵|A|+۶=۰$ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۲۲}=۵$، در این صورت $|A|$ برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۸	اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه‌ی دو است.)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره

۹	اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\|A\|A\|\|$ را بیابید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۱۰	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) الف) وارون هر ماتریس مربعی، در صورت وجود ..... است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۸ \\ -۳ & -۶ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۱۱	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲\|A\| & \|A\| \\ ۷ & \|A\|^۲ \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $\|A\|$ را بیابید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره
۱۲	با توجه به ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{۵}A^{-۱}$	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۱۳	اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، حاصل $\|-\frac{۱}{۲}A^۴\|$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۴	ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه‌ی $k\|kA\|=۶۲۵$ برقرار باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۵	در تساوی ماتریسی $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۶	اگر $A=\begin{bmatrix} \|A\| & ۰ & ۱ \\ ۱ & \|A\| & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\|A\|$ را بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۱۷	در مورد«الف»، جای خالی را کامل و در مورد «ب» درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص کنید. الف) اگر $A=\begin{bmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر ..... است. ب) هر ماتریس مربعی وارون پذیر است. (درست / نادرست)	شهریور ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۱۸	ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-j & i>j \\ i+j & i\leq j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۹	اگر $۳A=\begin{bmatrix} \|A\| & -۵ \\ ۱ & ۴\|A\| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\|A^{-۱}\|$ را محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

۲۰	ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} j-۱ & i>j \\ i^{۲}-j & i=j \\ ۱-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. الف) حاصل $A\times B$ را به دست آورید. ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید. (با روش دلخواه)	دی ۱۴۰۲	۲ نمره
۲۱	اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $\|A\|=-۲$، حاصل $\|۲A\|+\|A^{-۱}\|^{۳}$ را محاسبه کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۲۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه و I_n ماتریس همانی و $A^{۲}-A=I$ باشد، وارون ماتریس A، برابر $(I-A)$ است.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۲۳	اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $\|A^{۳}\|=-۸$ باشد، حاصل $\dfrac{\|A^{-۱}\|}{\|۳A\|}$ را بیابید.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۲۴	**جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.** الف) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ برابر ..... است. ب) از تساوی ماتریسی $A\times B=A\times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط ..... نتیجه می شود؛ $B=C$	خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
۲۵	الف) اگر A ماتریس ۲×۲ و اسکالر باشد و $a_{۲۲}=۳$، در این صورت A و $\|A\|$ را بیابید. ب) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}$ (k عددی حقیقی است.) را در نظر بگیرید. با محاسبه‌ی $\|A\|$ و $\|B\|$ نشان دهید که : $\|B\|=k\|A\|$	مرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره
۲۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

دستگاه معادلات خطی

۱	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۲	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۰ \\ x+۳y=۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

	در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آنگاه دستگاه بی شمار جواب دارد.		
۴	دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۰ \\ ۳y+x=۵ \end{cases}$ را به روش ماتریس معکوس حل کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۵	مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۹y=m+۱ \\ ۴x+my=-۴ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۶	دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ ۲y-x=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۷	دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x+۷y=-۴ \\ -۵x+۲y=-۷ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۸	به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -۴x+(m-۳)y=۳ \\ ۲x-\frac{m-۳}{۲}y=۱ \end{cases}$ ، یک جواب منحصر به فرد دارد.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۹	دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل دوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۱ : مقاطع مخروطی و مکان هندسی

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک هذلولی است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از C به فاصله‌ی۳ سانتی باشد. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی گزاره زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) فصل مشترک یک صفحه و یک کره، همواره یک دایره است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	نقاط A و B و خط d در صفحه مفروض اند، نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی یک سانتی باشد. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.) (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	**جای خالی را کامل کنید.** اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه-ی سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک ..... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماسند، دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می شود. اگر صفحه‌ی P بر خط L عمود باشد. سطح مقطع صفحه‌ی P و سطح ایجاد شده بیضی است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	در مورد الف، جای خالی را کامل کنید و در مورد ب، درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص	خرداد	۰/۵

	کنید. الف : مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، ..... آن زاویه است. ب : بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.	۱۴۰۲	نمره
۱۱	**جای خالی را کامل کنید.** اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آن‌گاه سطح مقطع حاصل یک ..... است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۲	نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به فاصله باشند. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.)	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۱۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره های با شعاع ثابت R بر دایره $C(O,R)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج هستند، دایره‌ی $C(O,۲R)$ است.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۴	**جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.** هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروط، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل ..... است.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۵	نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۳ سانتی متر و از d به فاصله‌ی ۴ سانتی متر باشد. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.)	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۶	دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و d از به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۷	برای هر یک از عبارت های (الف) و (ب) مورد مناسب را از بین کلمات (سهمی ، بیضی ، نقطه) انتخاب کرده و در پاسخ برگ وارد کنید. (یک مورد اضافی است.) الف) فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی در حالتی که صفحه بر محور سطح مخروطی عمود بوده و از رأس آن بگذرد. ب) مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۸	نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر و از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. (درباره‌ی تعداد جواب های مسأله بحث کنید.)	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل دوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۲ : دایره

۱	عبارت زیر را با یکی از کلمات داخل پرانتز کامل کنید. نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ در..... دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. (خارج/ داخل)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(۱,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	وضعیت خط $۳x-۴y=۱۳$ را نسبت به دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۳$ مشخص کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	الف) حدود k را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۴x+۶y+k=۰$ معادله‌ی یک دایره باشد. ب) وضعیت خط $x+y=۱$ و دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۵	حدود k را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۶x+۸y+k=۰$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	در نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	وضعیت دو دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۸	جای خالی را با یک عدد مناسب تکمیل کنید. مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایره‌ی $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$ مماس خارج باشند، دایره‌های به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع ..... است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۹	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(۲,-۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x-۴y+۱۰=۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

جواد علوی

۱۰	در دایره به معادله‌ی ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ با استفاده از روش مربع کامل کردن، ثابت کنید شعاع دایره برابر $R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$ است.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۱	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(۱,۰)$ مرکز آن بوده و از خط $x=-۳$ مماس باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۲	مقدار c را چنان بیابید که دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۲y+c=۰$ بر دایره‌ی $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ مماس بیرون باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۷۵ نمره
۱۳	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و روی خط $۳x+۴y+۶=۰$ ، وتری به طول $۲\sqrt{۵}$ جدا کند. سپس محل تلاقی آن دایره با محور y ها را بیابید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۴	وضعیت دو دایره به معادلات $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+۶x+۲y-۶=۰$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه‌ی راه حل)	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۵	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایره به معادله‌ی $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶$ ، مماس داخل باشد.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۶	وضعیت خط $x+y=۳$ و دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ را تعیین کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۷	وضعیت دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۶x+۱۲y+۲۰=۰$ ، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۸	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که خط‌های $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادله‌ی $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ ایجاد می کند.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۹	مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲+۲x-۲y+m=۰$ با دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۳)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۲۰	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $۴x-۳y=۲$ وتری به طول ۶ جدا کند.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

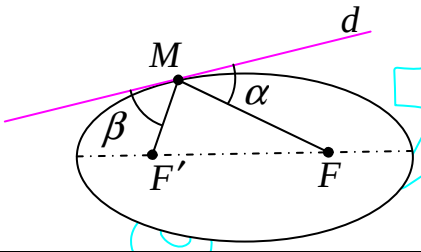
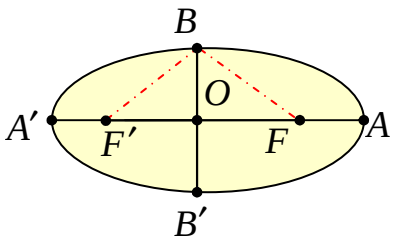
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

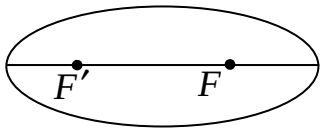
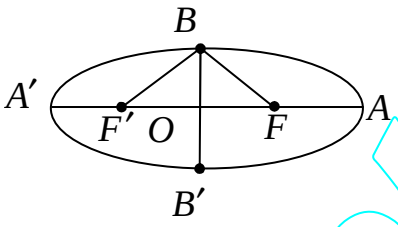
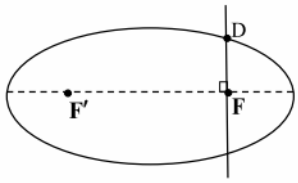
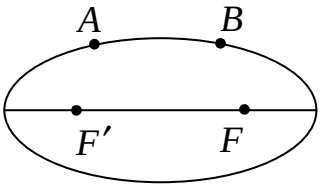
فصل دوّم

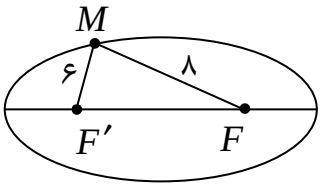
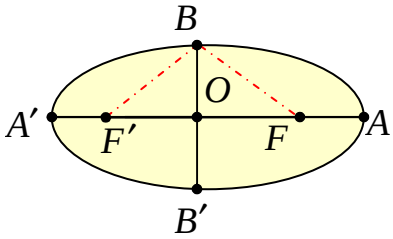
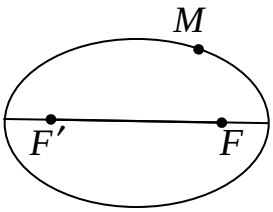
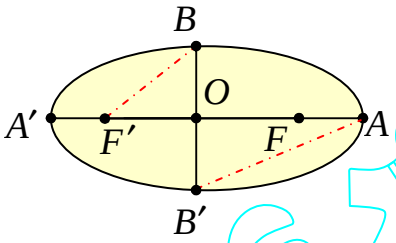
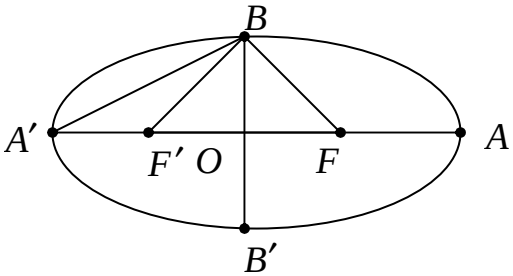
((هندسه۳))

❋❋❋

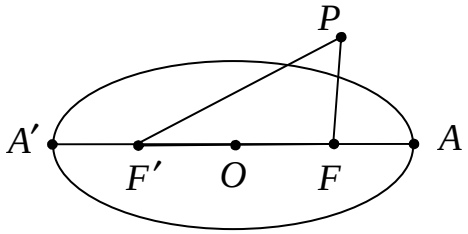
درس ۲ : بیضی

۱	عبارت زیر را کامل کنید. اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به ..... نزدیکتر می شود.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در شکل روبرو اگر خط d در نقطه‌ی M بر بیضی مماس بوده و زاویه‌ی FMF' برابر ۵۰ درجه باشد، آنگاه $\alpha = \beta = ۶۰^\circ$ است.  	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۳	در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است. الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید. ب) مختصات کانون ها (F' و F) و مختصات دو سر قطر بزرگ (A' و A) و مختصات دو سرقطر کوچک (B' و B) را به دست آورید. پ) بیضی را در دستگاه محور های مختصات رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (خارج کشور) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر ..... باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	در یک بیضی اندازه‌ی قطر بزرگ برابر ۲۰ و خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه‌ی کانونی آن را بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶	اگر در بیضی زیر، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید. (خارج کشور)  	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره

۷	اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید، مجموع فواصل نقطه‌ی M از کانون های F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است. 	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۸	اگر در یک بیضی طول قطر بزرگ(AA') برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد، فاصله‌ی رأس A تا نزدیکترین کانون را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر شود، شکل بیضی به ..... نزدیکتر می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۳}{۵}$ و اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر۱۶ باشد: (خارج کشور) الف : طول قطر بزرگ بیضی را تعیین کنید. ب : فاصله‌ی کانونی را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۱۱	در یک بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید. (خارج کشور) 	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	در یک بیضی مختصات کانون ها $F(۴,۰)$ و $F'(-۲,۰)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه‌ی $P(۱,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۳	بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون های F و F' مطابق شکل روبرو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه‌ی D قطع کند، ثابت کنید:  $DF=\frac{b^۲}{a}$	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۴	در شکل روبرو دو نقطه‌ی A و B روی بیضی با کانون های F و F' قرار دارند. اگر $AF'=BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه ای مانند M قطع کنند. نشان دهید FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد. 	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

۱۵	در شکل روبرو نقطه‌ی M روی بیضی با کانون های F و F' قرار دارد. به طوری که $MF = ۸$ و $MF' = ۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد. اندازه‌ی نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید. 	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۶	در یک بیضی با کانون های F و F' ، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را به دست آورید. 	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۷	در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$ 	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۸	در یک بیضی زیر با کانون های F و F'، خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید. 	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۹	نقاط $B(-۱,۲)$ و $B'(-۱,-۴)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله‌ی کانونی $۲\sqrt{۳}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۲۰	یک بیضی به مرکز و کانون های F و F' مطابق شکل روبرو مفروض است. اگر $۴S(\Delta FBF') = S(\Delta BA'O)$ باشد. خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. 	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۲۱	الف) خروج از مرکز یک بیضی با اندازه‌ی قطرهای ۴ و ۶ را بیابید. ب) نقطه‌ی P بیرون بیضی با قطر بزرگ $AA' = ۲a$ و کانونهای F و F' مفروض است.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره

ثابت کنید: $PF + PF' > ۲a$ (رسم شکل در پاسخ برگ الزامی است.)



تهیه کننده : جابرعامری

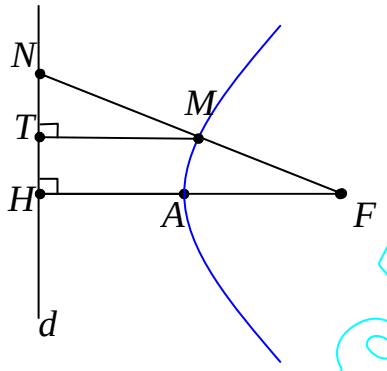
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

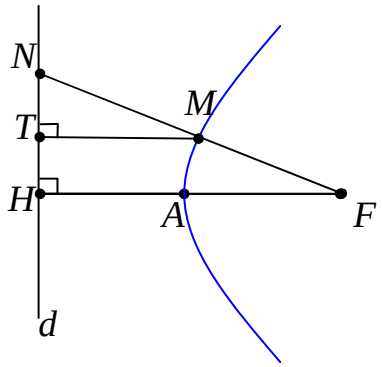
فصل دوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۲ : سهمی

۱	سهمی به معادله‌ی $y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$ را در نظر بگیرید. الف) معادله‌ی متعارف و فاصله‌ی کانونی را بیابید. ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M ، پاره خط MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید؛ $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$  	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۳	سهمی به معادله‌ی $y^۲ + ۸x + ۲y + ۹ = ۰$ مفروض است. معادله‌ی استاندارد سهمی را نوشته، نوع سهمی، مختصات رأس، مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آورید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	الف) معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۲,۳)$ رأس آن بوده و معادله‌ی خط هادی آن $x = ۳$ باشد. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید. پ) مختصات نقطه‌ی برخورد سهمی با محور طول‌ها را حساب کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۵	معادله‌ی سهمی $x^۲ - ۴ = ۸y + ۴x$ را به حالت استاندارد تبدیل، مختصات کانون و رأس آن را تعیین کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶	معادله‌ی سهمی را بنویسید که $F(-۳,۲)$ مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی آن $x = ۱$ باشد.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۷	مختصات نقاط برخورد سهمی $y^۲ + ۷x + ۵ = ۰$ و دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۸	سهمی با رأس $A(۱,۲)$ و کانون $F(۱,-۲)$ مفروض است. معادلات سهمی و خط هادی آن را بنویسید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

۹	اگر اندازه‌ی گودی (عمق) یک دیش مخابراتی سهمی شکل، دو برابر شود، فاصله‌ی کانونی این دیش چه تغییری می کند؟ (با ارائه‌ی راه حل)	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۰	معادله‌ی سهمی با کانون $F(۱,۲)$ و خط هادی $x=-۳$ را بنویسید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص کنید. در هر سهمی، هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۲	در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M ، پاره خط MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید؛ $\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$  	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۳	معادله‌ی سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y=-۲$ و کانون آن $F(۱,-۴)$ باشد.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۴	یک شعاع نورانی در امتداد خط $x=۴$ بر سهمی $x^۲=۸y$ می تابد. معادله‌ی خط بازتاب را بنویسید.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۵	دایره هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله‌ی $(y-۱)^۲=-۸(x+۱)$ واقع است و از کانون سهمی می گذرند، بر خط به معادله‌ی ..... مماس هستند.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۶	سهمی به معادله‌ی $y^۲-۴x=۴y$ داده شده است. مختصات رأس و کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آورید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

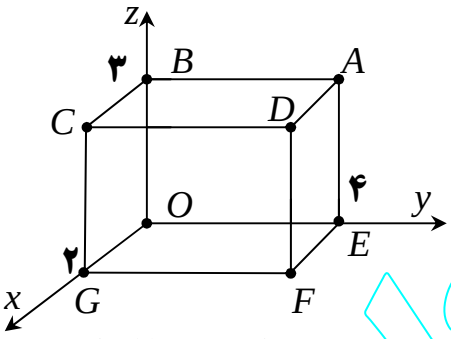
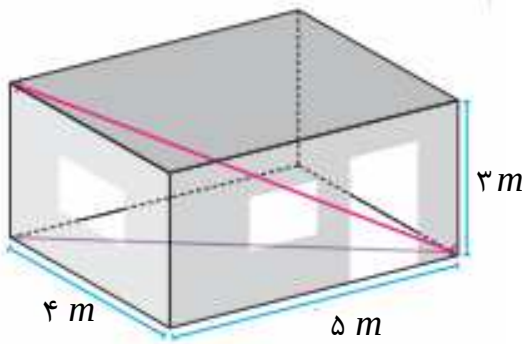
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

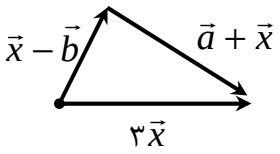
فصل سوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۱ : فضای سه بعدی و بردار

۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه‌ی $x^{۲} \le y \le ۲$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	با توجه به شکل مقابل، به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) نام وجهی از شکل که معادله‌ی آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید. ($x = ۲$ و $۰ \le y \le ۴$ و $۰ \le z \le ۳$) ب) معادلات مربوط به پاره خط(یال) AD را بنویسید. پ) مختصات نقطه‌ی D را بنویسید.  ت) معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که موازی با صفحه‌ی xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	در شکل مقابل، اتاقی به طول ۵ و عرض ۴ و ارتفاع ۳ متر مشاهده می شود. طول قطر کف اتاق و طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه‌ی مقابلش چقدر است؟ (خارج کشور)  	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (خارج کشور) نمودار مربوط به معادله‌ی $x = ۰$ در $R^{۳}$ ، تمام نقاط ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	جای خالی را کامل کنید. در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ ، معادله‌ی محور ..... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره

۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه ، r عدد حقیقی و $\vec{b}=r\vec{a}$،آنگاه $\|\vec{b}\|=\|r\|\times\|\vec{a}\|$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه‌ی $-۱<x\leq ۲$ و $y=x^۲$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۸	طول بردار $\vec{a}=(۰,-۳,۴)$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) نقطه‌ی $(۰,۰,-۳)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	در مورد الف، جای خالی را کامل کنید و در مورد ب ، نمودار رسم نمایید. الف) معادله‌ی صفحه‌ای که بر محور z ها در نقطه‌ی $A(۰,۰,۳)$ عمود باشد، به صورت ..... است. ب) شکل کلی(نمودار) مربوط به روابط $-۲<y\leq -۱$ و $y<-x^۲+۱$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $x>-۲$ و $y^۲+x\leq ۰$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۲	جای خالی را کامل کنید. در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=۲ \\ y=۱ \end{cases}$، خطی موازی محور ..... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۳	نقطه‌ی A به ارتفاع ۳ روی محور z ها و نقطه‌ی $B(۱,۰,۱)$ در فضا مفروض‌اند. فاصله‌ی مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۴	درستی یا نادرستی عبارت داده شده را مشخص کنید. نقطه‌ی $(-۲,۳,-۱)$ در ناحیه‌ی ششم مختصاتی قرار دارد.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بردار $\vec{a}=(۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}})$، یک بردار یکه است.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۶	**درستی یا نادرستی مورد الف ، در موارد ب وج جای خالی را کامل کنید.** الف) خط به معادله $\begin{cases} x=۲ \\ y=۳ \end{cases}$ بر صفحه xoz عمود است. (درست و نادرست) ب) معادله صفحه‌ای که موازی صفحه‌ی yoz است و از نقطه‌ی $A(۲,-۱,۳)$ می گذرد. برابر با ..... است. ج) در شکل زیر بردار $\vec{x}$ بر حسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ..... است.  	خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
۱۷	جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید. الف) معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $A(۲,۳,-۱)$ و عمود بر محور x ها به صورت ..... می	مرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره

	باشد. ب) اگر $A(-۱,۰,۳)$ و $B(۵,۲,-۳)$، مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB به صورت ..... است.		

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

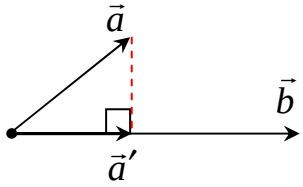
فصل سوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۲ : ضرب داخلی دو بردار و کاربرد

۱	سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را در نظر بگیرید. الف) کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}-\vec{c}$ را بدست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره
۲	برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بر هم عمودند،اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	اگر $\vec{a}=۴\vec{k}-۲\vec{j}-\vec{i}$ و $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}$ و $r=\frac{۱}{۴}$ (خارج کشور) الف) بردار $r(۳\vec{a}-\vec{b})$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را بدست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۲ نمره
۴	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ را پیدا کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۵	مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(۲,m,-۱)$ و $\vec{b}=(m+۱,۳,۲)$ بر هم عمود باشند.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۶	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $\|\vec{a}.\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردار هایی باشند که به ترتیب به طول های ۲ و ۳ و ۴ باشند. اگر این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند، طول بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ را تعیین کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۸	اگر $\vec{a}=(۲,-۶,۴)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد قائم بردار $\vec{b}$ را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ..... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ برابر با ۱۳۵ درجه باشد، مقدار n را بیابید.	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره

۱۱	ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می شود.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید. زاویه‌ی بین بردارهای غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، برابر θ است. در کدامیک از موارد زیرحاصل ضرب داخلی آنها بیشترین مقدار را دارد؟ ۱) $\theta=\circ$ ۲) $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\theta=\frac{\pi}{۳}$	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۱۳	نشان دهید، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ ، برداری به شکل $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\vec{b}$ است.  	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۴	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,\circ)$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۵	مقدار m را طوری بیابید که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(m,\circ,۲)$ و $\vec{b}=(۲,-۲,\circ)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۶	اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۱)$ ، $\vec{b}=(-۱,۲,\circ)$ و $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$ باشند، تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر امتداد بردار $۲\vec{c}-\vec{b}$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۷	اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=۳\vec{i}-۴\vec{j}+۲\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{a}-\vec{b}$ بیابید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۸	اگر $\vec{a}=-\vec{i}-\sqrt{۳}\vec{k}$ و $\vec{b}=(\sqrt{۳},۲,۱)$ باشد. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر امتداد $\vec{a}$ و اندازه‌ی بردار تصویر را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۹	برای هر دو غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید؛ $\|\vec{a}.\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$. (منظور از $\|\vec{a}.\vec{b}\|$ قدرمطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ می باشد.)	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۲۰	فرض کنید $\vec{a}=(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $\vec{b}=(۱,۰,۱)$، تصویر قائم بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

فصل سوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۳ : ضرب خارجی دو بردار و کاربرد

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل ضرب خارجی ($\vec{i}\times\vec{j}=\vec{o}$) برابر صفر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر $\|\vec{a}\|=۶$ و $\|\vec{b}\|$ و زاویه‌ی بین دو بردار ۳۰ درجه باشد. مقدار $\|۲\vec{a}\times\vec{b}\|$ را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	عبارت زیر را کامل کنید. اگر سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	اگر $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(۳,۱,۴)$ و $C=(-۱,۱,۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را معلوم کنید. حاصل ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر بردار صفر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۷	اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۵$ و حاصل ضرب داخلی دو بردار برابر ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می شود، چقدر است؟	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۸	حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{b}=(۰,۲,۲)$ و $\vec{c}=(۲,-۳,۰)$ تولید می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۹	دو بردار $\vec{a}=-\vec{k}-\vec{j}$ و $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$ را در نظر بگیرید. (خارج کشور) الف) زاویه‌ی بین دو بردار را تعیین کنید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۱۰	آیا سه بردار $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{c}=(۳,۱,۲)$ در یک صفحه قرار دارند؟چرا؟ (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۱	سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را در نظر بگیرید.	دی ۱۴۰۱	۲ نمره

		الف) طول بردار $۲\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید. ب) مساحت متوازی الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ ایجاد می شود را به دست آورید.	
۱۲	خرداد ۱۴۰۲	متوازی السطوحی توسط برادرهای $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}$ ایجاد می شود. اگر قاعده‌ی این متوازی السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود. اندازه‌ی ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.	۱/۲۵ نمره
۱۳	خرداد ۱۴۰۲	بردار $\vec{a}=(۴,-۴,۲)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیر همجهت با $\vec{a}$ و به اندازه‌ی ۱۲ واحد را طوری بیابید که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ باشد.	۱/۲۵ نمره
۱۴	خرداد ۱۴۰۲	گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید. الف : حاصل عبارت $(\vec{i}\times\vec{j}).\vec{i}$ برابر صفر است. (درست – نادرست) ب : کدام یک از بردار های زیر، بر راستای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست؟ ۱) $\sqrt{۳}\vec{a}\times(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{b})$ ۲) $\vec{a}\times\vec{b}$ ۳) $۲\vec{a}+۳\vec{b}$ ۴) $\vec{b}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\vec{a}$	۰/۷۵ نمره
۱۵	شهریور ۱۴۰۲	جای خالی را کامل کنید. حاصل $((\vec{i}\times\vec{k})\times\vec{i}).\vec{j}$ برابر ..... است.	۰/۲۵ نمره
۱۶	شهریور ۱۴۰۲	اگر $\vec{a}=(-۲,۰,۱)$ و $\vec{b}=\vec{i}-۲\vec{j}+۳\vec{k}$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-\vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می شود را حساب کنید.	۱ نمره
۱۷	شهریور ۱۴۰۲	اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-۱,۱)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,m,-۱)$ در یک صفحه باشند، مقدار m را بیابید.	۱/۵ نمره
۱۸	دی ۱۴۰۲	برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(۳,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,۲,-۱)$ بیابید.	۱ نمره
۱۹	دی ۱۴۰۲	اگر $\|\vec{a}\|=۱۰$ و $\|\vec{b}\|=۲$ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشند و زاویه‌ی بین دو بردار حاده باشد، مقدار $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ را محاسبه کنید.	۱/۵ نمره
۲۰	دی ۱۴۰۲	فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار هایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ می سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $۲\vec{a}$ تولید می شود را بیابید.	۱/۵ نمره
۲۱	دی ۱۴۰۲	جای خالی را با عبارات مناسب پرکنید. حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می شود، برابر ..... است.	۰/۲۵ نمره
۲۲	خرداد ۱۴۰۳	دو بردار $\vec{a}=(-m,-۱,-۲)$ و $\vec{b}=(۰,-۳,m+۲)$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ بر هم عمود باشند. آنگاه حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته می شود را به دست آورید.	۱/۵ نمره
۲۳	خرداد ۱۴۰۳	جای خالی را با عبارات مناسب پرکنید. حاصل عبارت $\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})$ برابر ..... است.	۰/۲۵ نمره

۲۴	اگر مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود، $۶\sqrt{۳}$ باشد و $\|\vec{a}\|=۴$ و $\|\vec{b}\|=۳$ ، حاصل $\vec{a}\,.\,(\vec{a}-\vec{b})$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره
۲۵	جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید. الف) برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$، حاصل $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر ..... می باشد. ب) حاصل $(\vec{j}\times\vec{i})-۲\vec{k}$ برابر ..... است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۲۶	نقاط $A(۱,۰,۰)$ و $B(۰,-۲,۰)$ و $C(۰,۰,۳)$ داده شده‌اند. ابتدا حاصل $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ را محاسبه کرده و سپس به کمک آن مساحت مثلث ABC را به دست آورید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۲۷	حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{a}=(۰,-۱,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{c}=(۰,-۱,-۱)$ را بیابید.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

فصل اوّل

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

۱

می دانیم که در ماتریس همانی درایه های روی قطر اصل برابر یک و درایه های خارج قطر اصلی صفر هستند. لذا در ماتریس همانی $\begin{bmatrix} n & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم $n=۱$ و $m-۱=۰$ یعنی $m=۱$ که نتیجه می شود $m+n=۲$

۲

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

و چون در ماتریس قطری درایه های خارج از قطر اصلی برابر صفر می باشند، لذا :

$-۸+۲a=۰\rightarrow a=۴$ و $b-۳=۰\rightarrow b=۳$

۳

با توجه به تعریف $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ می توان به شکل زیر عمل کرد :

ستون / سطر	۱	۲	۳
۱	۱+۱=۲	۰	۰
۲	۱	۲+۲=٤	۰
۳	۱	۲	۳+۳=٦

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

۴

درست ، وقتی گفته می شود، ماتریس $A_{۳\times۴}$ ، یعنی اینکه این ماتریس دارای ۳ سطر و۴ ستون می باشد. در نتیجه این ماتریس دارای $۳\times۴=۱۲$ درایه می باشد.

۵

می دانیم که برابر هر ماتریس مربعی I_n داریم $AI=IA=A$ ، لذا در اصطلاح گفته می شود که I_n عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس های مربعی مرتبه‌ی n است.

۶

اگر $C=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

یعنی $AB=AC$. این در حالی است که $B\neq C$

۷

الف) $۲x-۱=۵\rightarrow x=۳$

ب) $m+۱=۰\rightarrow m=-۱$ و $۲n+۴=۰\rightarrow n=-۲$

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$$

۸

الف) ابتدا هر یک از درایه های ماتریس A را محاسبه می کنیم.

$۳i-۲j$	۱	۲	۳
۱	$۳(۱)-۲(۱)=۱$	$۳(۱)-۲(۲)=-۱$	$۳(۱)-۲(۳)=-۳$
۲	$۳(۲)-۲(۱)=۴$	$۳(۲)-۲(۲)=۲$	$۳(۲)-۲(۳)=۰$
۳	$۳(۳)-۲(۱)=۷$	$۳(۳)-۲(۲)=۵$	$۳(۳)-۲(۳)=۳$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

ب)

$$B^۲=B\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۶\\ -۳ & ۷ & ۶\\ -۲ & ۲ & ۷\end{bmatrix}$$

۹

$$(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲\overset{AB=BA}{=}A^۲-۲AB+B^۲$$

۱۰

نادرست، در ماتریس قطری تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن برابر صفر می باشند.

۱۱

ابتدا هر یک از درایه های ماتریس A را محاسبه می کنیم.

	۱	۲	۳
۱	$(۱)^۲=۱$	$(۱)+(۲)=۳$	$(۱)+(۳)=۴$
۲	$(۲)(۱)=۲$	$(۲)^۲=۴$	$(۲)+(۳)=۵$
۳	$(۳)(۱)=۳$	$(۳)(۲)=۶$	$(۳)^۲=۹$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۴\\ ۲ & ۴ & ۵\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}$$

$$۳A-۴I=۳\begin{bmatrix}۱&۳&۴\\۲&۴&۵\\۳&۶&۹\end{bmatrix}-۴\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۹&۱۲\\۶&۱۲&۱۵\\۹&۱۸&۲۷\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴&۰&۰\\۰&-۴&۰\\۰&۰&-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۹&۱۲\\۶&۸&۱۵\\۹&۱۸&۲۳\end{bmatrix}$$

۱۲

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}\rightarrow A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۹&۰\\۰&۰&۴\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۹&۰\\۰&۰&۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۲۷&۰\\۰&۰&-۸\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰&-۲\\-۱&۳&۰\\۲&۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&-۲\\-۳&۹&۰\\-۴&-۲&۰\end{bmatrix}$$

۱۳

$$m-۲=\circ\rightarrow m=۲\xrightarrow{m=n}n=۲$$

۱۴

الف : ابتدا هر یک از درایه ها را تعیین می کنیم.

	$j=۱$	$j=۲$	$j=۳$
$i=۱$	۲	۰	۱
$i=۲$	۱	۳	۱
$i=۳$	۱	۱	۴

$$\rightarrow B=\begin{bmatrix}۲&۰&۱\\۱&۳&۱\\۱&۱&۴\end{bmatrix}$$

ب :

$$B^۲=B\times B=\begin{bmatrix}۲&۰&۱\\۱&۳&۱\\۱&۱&۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&۰&۱\\۱&۳&۱\\۱&۱&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۱&۶\\۶&۱۰&۸\\۷&۷&۱۸\end{bmatrix}$$

$$B^۲+۲I=\begin{bmatrix}۵&۱&۶\\۶&۱۰&۸\\۷&۷&۱۸\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۱&۶\\۶&۱۲&۸\\۷&۷&۲۰\end{bmatrix}$$

۱۵

$$(A-۳I)^۲=(A-۳I)(A-۳I)=A^۲-۳AI-۳IA+۹I^۲$$

$$=A^۲-۳A-۳A+۹I=A^۲-۶A+۹I$$

توجه کنید که $IA=AI=A$ و $I^۲=I$

۱۶

$$A+B=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۸ & ۳\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۵ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x+۱ & y+۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۸ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}۲+(x+۱)=۵\rightarrow x=۲\\ ۳+(y+۲)=۴\rightarrow y=-۱\end{cases}$$

۱۷

اسکالر

۱۸

ابتدا ماتریس های سمت چپ معادله را ضرب می کنیم.

$$\begin{bmatrix}x-۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\rightarrow x=-۱\ ,\ \ x=۳$$

۱۹

$\frac{۱}{۲}$ زیرا ، $۲k-۱=۰\rightarrow k=\frac{۱}{۲}$

۲۰

$$A=B\rightarrow\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۳ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow z=-۳\ ,\ \begin{cases}۲x-y=۳\\ ۲x+y=۵\end{cases}\rightarrow x=۲\ ,\ y=۱$$

$$x^۲-۲y+z=(۲)^۲-۲(۱)+(-۳)=۴-۲-۳=-۱$$

۲۱

الف) درست ؛ چون A ماتریس اسکالر است، پس $A\times B=B\times A$

ب) نادرست ؛ انجام چند مرتبه ضرب ماتریس A در خودش، معلوم می شود که $A^{۱۴۰۳}\neq I$

بلکه ؛

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ ۱۰ & -۴\end{bmatrix}\rightarrow A^{۱۴۰۳}=A$$

۲۲

$$a_{ij}=\begin{cases}-۱ & |i-j|>۱\\ ۰ & |i-j|=۱\\ ۱ & |i-j|<۱\end{cases}\rightarrow a_{ij}=\begin{cases}-۱ & i-j>۱\ \ or\ \ i-j<-۱\\ ۰ & i-j=\pm۱\\ ۱ & -۱<i-j<۱\end{cases}$$

اکنون هر یک از درایه ها را تعیین می کنیم.

	$j=۱$	$j=۲$	$j=۳$
$i=۱$	۱	۰	-۱
$i=۲$	۰	۱	۰
$i=۳$	-۱	۰	۱

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

$A^{۲}-۲I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$	
نادرست ؛ مگر اینکه ضرب این دو ماتریس خاصیت جابجایی داشته باشد.	۲۳
$C=۳A+۲B=۳\begin{bmatrix} -۱ & m \\ -۲ & m \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & ۳m \\ -۶ & ۳m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix} ۱ & ۳m-۶ \\ ۰ & ۳m+۲ \end{bmatrix}$ حال چون ماتریس C، قطری است، پس $۳m-۶=۰ \rightarrow m=۲$ برای تعیین مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C نیز داریم: $۱+(۳m+۲)=۳m+۳=۳(۲)+۳=۹$	۲۴
$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=۲I$ $A^{۵}=A^{۴}\times A=(A^{۲})^{۲}\times A=(۲I)^{۲}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ $=۴I^{۲}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=۴I\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=۴\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=۴A$	۲۵

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل اوّل

((هندسه۳))

***

درس ۲ : وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان و وارون ماتریس

۱	درست : بنابر ویژگی های دترمینان می توان نوشت: $\|۲A\|=۲^{۳}\|A\|=۸\times۵=۴۰$
۲	برای محاسبه‌ی دترمینان، چون در صورت سئوال اشاره ای به روش خاصی نشده است، می توان به دلخواه عمل کرد. در اینجا از روش ساروس استفاده می کنیم. $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ $\rightarrow\|B\|=(۳۰+۴+۰)-(۰-۵+۰)=۳۴+۵=۳۹$
۳	می دانیم که دو ماتریس B و A وارون همدیگرند، هرگاه $A\times B=B\times A=I$ در اینجا چون $A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و چون حاصل ضرب ماتریس همانی نشد، پس دو ماتریس وارون یکدیگر نیستند و لذا عبارت داده شده نادرست است.
۴	کافی است ماتریس را دو بار کنار هم بنویسیم و سپس دستور ساروس را بکار بگیریم. $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ $\|A\|=(۲-۶-۲)-(-۲-۲-۶)=۴$
۵	ابتدا $\|A\|$ را به روش دلخواه محاسبه می کنیم. در اینجا از روش بسط نسبت به سطر اول استفاده می کنیم. $\|A\|=(-۱)(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۲ & -۲ \\ -۴ & ۱ \end{vmatrix}=(-۱)(۱)(۲-۸)=+۶$ ماتریس A یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ است و به کمک ویژگی های دترمینان می توان نوشت: $\|\|A\|A\|=\|A\|^{۳}\|A\|=(۶)^{۳}(۶)=۶^{۴}=۱۲۹۶$

۶	ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم. $A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow \lvert A\rvert=(۲)(۳)-(۱)(m)=۶-m$ $\lvert A\rvert^{۲}-۵\lvert A\rvert+۶=۰ \rightarrow (۶-m)^{۲}-۵(۶-m)+۶=۰$ $\rightarrow ۳۶-۱۲m+m^{۲}-۳۰+۵m+۶=۰ \rightarrow m^{۲}-۷m+۱۲=۰$ $\rightarrow (m-۳)(m-۴)=۰ \rightarrow m=۳ \quad , \quad m=۴$
۷	می دانیم که ماتریس اسکالر، یک ماتریس قطری است که در آن تمام درایه های روی قطر اصلی برابر می باشند. در اینجا چون $a_{۲۲}=۵$ و این درایه روی قطر اصلی قرار دارد، لذا تمام درایه های روی قطر اصلی ماتریس A برابر ۵ می باشند. از طرفی ماتریس A یک ماتریس قطری است و دترمینان ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است. پس : $\lvert A\rvert=۵\times۵\times۵=۱۲۵$
۸	$A-۲I=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $\lvert A-۲I\rvert=(۲)(۱)-(۱)(۰)=۲$ $(A-۲I)^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A-۲I\rvert}(A-۲I)^{*}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$
۹	$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \lvert A\rvert=۱(-۱)^{۱+۳}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=۲$ $\lVert A\rvert A\rvert=\lvert ۲A\rvert=۲^{۳}\lvert A\rvert=۸\times۲=۱۶$
۱۰	الف) منحصر به فرد ب) چون ماتریس داده شده وارون پذیر نیست. پس : $\lvert A\rvert=۰ \rightarrow (-۶)(a)-(۸)(-۳)=۰ \rightarrow -۶a=-۲۴ \rightarrow a=۴$
۱۱	فرض کنیم که $\lvert A\rvert=d$ در این صورت : $A=\begin{bmatrix} ۲\lvert A\rvert & \lvert A\rvert \\ ۷ & \lvert A\rvert^{۲} \end{bmatrix} \rightarrow \lvert A\rvert=\begin{vmatrix} ۲\lvert A\rvert & \lvert A\rvert \\ ۷ & \lvert A\rvert^{۲} \end{vmatrix} \rightarrow d=\begin{vmatrix} ۲d & d \\ ۷ & d^{۲} \end{vmatrix} \rightarrow d=۲d^{۳}-۷d$ $\rightarrow ۲d^{۳}-۸d=۰ \rightarrow ۲d(d^{۲}-۴)=۰ \rightarrow d=۰ \ , \ d=۲ \ , \ d=-۲$
۱۲	کافی است که $\frac{۱}{۵}A^{-۱}$ و $(۵A)^{-۱}$ را جداگانه محاسبه و نشان دهیم که حاصل ها برابرند. $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{5}} \frac{1}{5}A^{-1} = (\frac{1}{5})(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \to (5A)^{-1} = \frac{1}{|5A|}(5A)^{*} = -\frac{1}{50}\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

در نتیجه : $(5A)^{-1} = \frac{1}{5}A^{-1}$

۱۳

$$|A| = 1(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to |A| = 14 - 4 - 8 = 2$$

$$|-\frac{1}{2}A^{4}| = (-\frac{1}{2})^{3}|A|^{4} = (-\frac{1}{8})(-2)^{4} = -2$$

۱۴

ابتدا دترمینان ماتریس A را تشکیل می دهیم و سپس در تساوی داده شده جایگزین می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to |A| = 1$$

$$k|kA| = k(k^{3}|A|) = k^{4}|A| = k^{4} \times 1 = k^{4}$$

$$k^{4} = 625 \to k = \pm 5$$

۱۵

قرار می دهیم $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. پس $BA = C$

برای تعیین ماتریس A در ابتدا معکوس ماتریس B را محاسبه می کنیم.

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}B^{*} = \frac{1}{(5)(3)-(2)(7)}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$$

۱۶

قرار می دهیم $d = |A|$ پس

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 & 1 \\ 1 & d & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to |A| = \begin{vmatrix} d & 0 & 1 \\ 1 & d & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\to d = d(d-2) - 0(1-0) + 1(2-0)$$

$\rightarrow d = d^{۲} - ۲d + ۲ \rightarrow d^{۲} - ۳d + ۲ = ۰ \rightarrow d = ۱ \ , \ \ d = ۲$

۱۷

الف) ۱-

$$A = \begin{bmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-\sin x)(\sin x) + (\cos x)(\cos x)$$

$$\rightarrow |A| = -\sin^{۲} x - \cos^{۲} x = -(\sin^{۲} x + \cos^{۲} x) = -۱$$

ب) نادرست، هر ماتریس مربعی که دترمینان آن غیر صفر باشد، وارون پذیر است.

۱۸

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (۲)(۴) - (۳)(۳) = -۱$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} A^{*} = \frac{۱}{-۱} \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

۱۹

فرض کنیم که $|A| = d$ باشد. در این صورت :

$$|۳A| = \begin{vmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{vmatrix} \rightarrow ۳^{۲} |A| = \begin{vmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{vmatrix} \rightarrow ۹d = \begin{vmatrix} d & -۵ \\ ۱ & ۴d \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow ۹d = (d)(۴d) - (-۵)(۱)$$

$$\rightarrow ۴d^{۲} - ۹d + ۵ = ۰ \rightarrow \frac{۱}{۴}(۲d - ۴)(۲d - ۵) = ۰ \rightarrow \begin{cases} d = ۲ \rightarrow |A^{-۱}| = ۱ \\ d = \frac{۵}{۴} \rightarrow |A^{-۱}| = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

۲۰

الف) با توجه به تعریف $a_{ij} = \begin{cases} j - ۱ & i > j \\ i^{۲} - j & i = j \\ ۱ - i & i < j \end{cases}$ می توان به شکل زیر عمل کرد :

ستون / سطر	۱	۲	۳
۱	$(۱)^{۲} - ۱$	$۱ - ۱$	$۱ - ۱$
۲	$۱ - ۱$	$(۲)^{۲} - ۲$	$۱ - ۲$
۳	$۱ - ۱$	$۲ - ۱$	$(۳)^{۲} - ۳$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ -۵ & -۴ & ۳ \\ ۴ & ۱۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

ب) برای محاسبه‌ی دترمینان، چون در صورت سئوال اشاره ای به روش خاصی نشده است، می توان به دلخواه عمل کرد. در اینجا از روش ساروس استفاده می کنیم.

$\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ $\rightarrow \lvert B \rvert = (-۱+۱-۸)-(-۲-۲+۲) = -۸+۲ = -۶$	
به کمک ویژگی های دترمینان می توان نوشت. $\lvert ۲A \rvert + \lvert A^{-۱} \rvert^{۳} = ۲^{۳} \lvert A \rvert + \frac{۱}{\lvert A \rvert^{۳}} = ۸(-۲) + \frac{۱}{(-۲)^{۳}} = -۱۶ - \frac{۱}{۸} = -\frac{۱۲۹}{۸}$	۲۱
نادرست؛ ماتریس $A-I$ وارون A است. زیرا $A^{۲} - A = I \rightarrow A \times (A-I) = I$	۲۲
$\lvert A^{۳} \rvert = -۸ \rightarrow \lvert A \rvert^{۳} = (-۲)^{۳} \rightarrow \lvert A \rvert = -۲$ $\frac{\lvert A^{-۱} \rvert}{\lvert ۳A \rvert} = \frac{\frac{۱}{\lvert A \rvert}}{۳^{۲} \lvert A \rvert} = \frac{۱}{۹ \lvert A \rvert^{۲}} = \frac{۱}{۹(-۲)^{۲}} = \frac{۱}{۳۶}$	۲۳
الف) ۱۴؛ با کمک روش بسط یا روش ساروس معلوم می شود که $\lvert A \rvert = ۱۴$ $\lvert A \rvert = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{bmatrix} = ۱۶+۰+۶-۰+۴-۱۲ = ۱۴$ ب) وارون پذیری ماتریس A ($\lvert A \rvert \neq ۰$)	۲۴
الف) $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow \lvert A \rvert = ۳ \times ۳ = ۹$ ب) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}$ $\rightarrow \lvert A \rvert = (adf+۰+۰)-(edu+۰+۰) = adf - edc$ $\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}$ $\rightarrow \lvert B \rvert = (kadf+۰+۰)-(kedu+۰+۰) = k(adf-edc) = k \lvert A \rvert$	۲۵
درست	۲۶

دستگاه معادلات خطی

۱	$\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases} \to A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \to \lvert A\rvert=(۲)(۴)-(۱)(۷)=۸-۷=۱$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۱}\times\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$ $X=A^{-۱}D \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \to \begin{cases} x=۱ \\ y=۲ \end{cases}$
۲	$\begin{cases} ۲x+y=۰ \\ x+۳y=۵ \end{cases} \to A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \to \lvert A\rvert=(۲)(۳)-(۱)(۱)=۶-۱=۵$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۵}\times\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵} \\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$ $X=A^{-۱}D \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵} \\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \to \begin{cases} x=-۱ \\ y=۲ \end{cases}$
۳	نادرست
۴	$\begin{cases} ۲x+y=۰ \\ ۳y+x=۵ \end{cases} \to A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \to \lvert A\rvert=(۲)(۳)-(۱)(۱)=۵$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} -۵ \\ ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \to \begin{cases} x=-۱ \\ y=-۲ \end{cases}$
۵	یک دستگاه دو معادله‌ی ، دو مجهولی وقتی دارای جواب نیست که دترمینان ضرایب آن صفر باشد. $\begin{vmatrix} m & ۹ \\ ۴ & m \end{vmatrix}=۰ \to m^{۲}-۳۶=۰ \to m=\pm ۶$ و چون هر دو جواب در نامساوی $\frac{m}{۴}=\frac{۹}{m}\neq\frac{m+۱}{-۴}$ صدق می کنند، پس هر دو جواب، قابل قبولند.
۶	$\begin{matrix} ۳x-۴y=۱ \\ ۲y-x=۱ \end{matrix} \to A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \to \lvert A\rvert=(۳)(۲)-(-۱)(-۴)=۶-۴=۲$

$A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$ $X=A^{-۱}D\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۲}+\frac{۴}{۲}\\ \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۳\\ y=۲\end{cases}$	
$A=\begin{bmatrix}۳ & ۷\\ -۵ & ۲\end{bmatrix}\rightarrow\lvert A\rvert=(۳)(۲)-(۷)(-۵)=۶+۳۵=۴۱$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۴۱}\begin{bmatrix}۲ & -۷\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۴۱}\begin{bmatrix}۲ & -۷\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴\\ -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}$	۷
به ازای هیچ m ای دترمینان زیر مخالف صفر نمی شود. $\begin{vmatrix}-۴ & m-۳\\ ۲ & -\frac{m-۳}{۲}\end{vmatrix}=-۴(-\frac{m-۳}{۲})-۲(m-۳)=۰$	۸
$\begin{cases}۳x-۴y=۱\\ -x+۲y=۱\end{cases}\rightarrow A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\rightarrow\lvert A\rvert=(۳)(۲)-(-۴)(-۱)=۶-۴=۲$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$ $X=A^{-۱}D\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۳\\ y=۲\end{cases}$	۹

تهیه کننده : جابرعامری

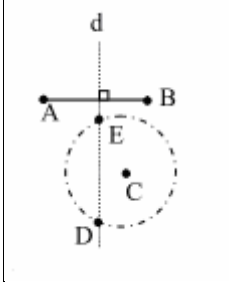
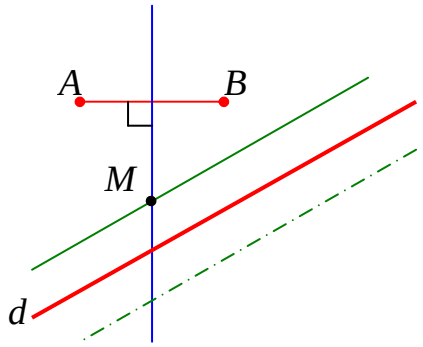
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

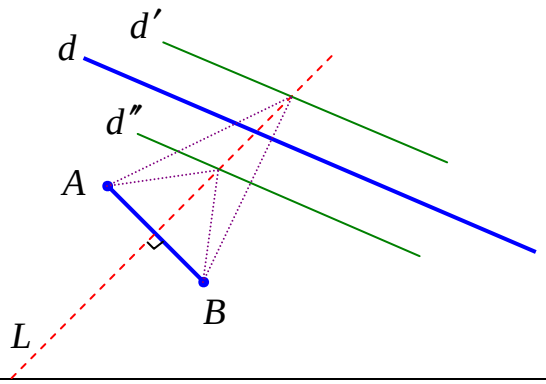
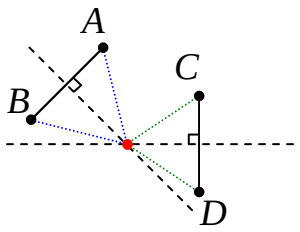
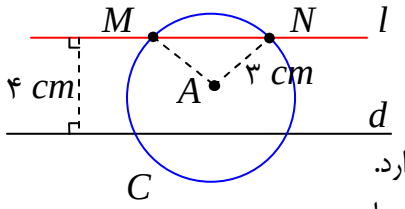
فصل دوّم

((هندسه۳))

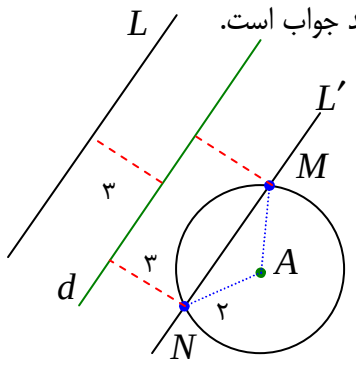
❋❋❋

درس ۱ : مقاطع مخروطی و مکان هندسی

۱	درست : بنابر تعریف مقاطع مخروطی، سطح مخروطی حاصل یک هذلولی است.
۲	مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است و مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی ۳ واحد باشند. دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط عمود منصف (d) و دایره جواب مسأله است.(نقاط D و E) الف) اگر خط عمود منصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، مسأله دو جواب دارد. ب) اگر مماس شوند، مسأله یک جواب دارد. پ) در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند، مسأله جواب ندارد. 
۳	در حالتی که صفحه بر کره مماس باشد، فصل مشترک صفحه و کره ، یک نقطه است. لذا این عبارت نادرست است.
۴	ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم. سپس خطی موازی خط d و به فاصله‌ی یک سانتی از آن رسم می کنیم. محل تقاطع عمود منصف AB با این خط جواب مسأله است. چون دو خط در دو طرف خط d به فاصله‌ی یک سانتی متر از آن می توان رسم کرد، لذا مسأله جواب دیگری دارد. اگر AB عمود بر d باشد، چون در این حالت عمود منصف AB، خط d را قطع نمی کند، مسأله جواب ندارد و اگر عمود منصف AB، منطبق بر خط d باشد، مسأله دو جواب دارد. 
۵	بیضی
۶	درست
۷	مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را رسم می کنیم و آن را L می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر هستند دو خط d' و d'' می باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط L جواب مسأله است. الف) اگر خط L دو خط d' و d'' را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

	ب) اگر خط L بر دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسأله بی شمار جواب دارد. ج) اگر خط L هیچ یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند، مسأله جواب ندارد. 
۸	درست
۹	نادرست
۱۰	الف : نیمساز ب : نادرست. این تعریف سهمی می باشد و نه بیضی
۱۱	مقطع مخروطی حاصل با این شرایط یک **بیضی** است.
۱۲	مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره خط AB است. مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره خط CD است. محل برخورد دو عمود منصف، جواب مسأله است. بستگی به حالت های دو پاره خط AB و CD، مسأله ممکن این یک جواب، بدون جواب، یا بی شمار جواب داشته باشد. 
۱۳	درست؛ مکان هندسی، مرکز همه‌ی دایره های به مرکز O و شعاع $R+R=۲R$ است.
۱۴	در چنین حالتی، فصل مشترک **دو خط متقاطع** خواهد بود.
۱۵	ابتدا به مرکز A دایره‌ای (دایره‌ی C) به شعاع ۳ سانتی متر رسم می کنیم. سپس خط l را طوری رسم می کنیم که موازی d و فاصله‌ی آن تا خط d برابر ۴ سانتی متر باشد. نقاط برخورد خط l و دایره‌ی C (یعنی نقاط N و M) جواب مسئله است. تعداد جواب های مسئله به فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط d بستگی دارد. اگر دایره‌ی C دو خط موازی d و l را قطع نکند، مسئله جواب ندارد. اگر دایره‌ی C بر یکی از دو خط موازی d و l مماس باشد، مسئله یک جواب دارد. اگر دایره‌ی C حداقل یکی از دو خط موازی d و l را قطع کند، مسئله دو جواب دارد. 
۱۶	مراجعه شود به جواب سئوال ۷
۱۷	الف) نقطه ب) سهمی
۱۸	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر باشند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۲ سانتی متر می باشد و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشند. دو خط L و L' موازی با d و به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از آن هستند. نقطه‌ی برخورد آن دایره با این دو خط موازی (L و L') جواب مسأله است. بحث در وجود جواب : حالت اول : دایره یکی از خطوط L یا L' را در دو نقطه قطع می کند. در این حالت مسأله دو جواب دارد. حالت دوم : دایره بر یکی از خطوط L یا L' مماس باشد. در این حالت مسأله فقط یک جواب دارد.

حالت سوم : هیچ یک از خطوط L و L' را قطع نمی کند. در این حالت مسأله فاقد جواب است.



تهیه کننده : جابرعامری

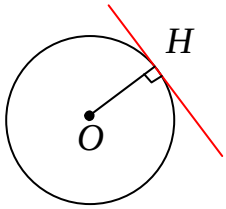
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

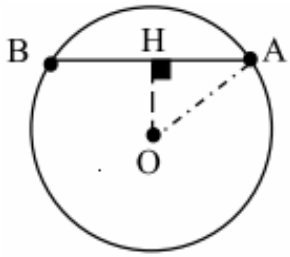
فصل دوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۲ : دایره

۱	اگر مختصات نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ را در عبارت $x^۲+y^۲-۲x+۲y$ جایگزین کنیم، بدست می آید، $(۱)^۲+(-۲)^۲-۲(۱)+۲(-۲)=۱+۴-۲-۴=-۱$ و چون حاصل منفی شد، نتیجه می شود که نقطه داخل دایره است. توجه داشته باشید که اگر ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را به دست آورده و با فاصله‌ی این نقطه تا مرکز مقایسه کنیم، همین نتیجه بدست می آید.
۲	فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده برابر شعاع دایره است. $R=OH=\frac{\lvert a\alpha+b\beta+c\rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\lvert ۳(۱)-۴(-۱)+۳\rvert}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$  لذا معادله‌ی دایره را می توان به شکل زیر نیز نوشت: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ $\rightarrow(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$
۳	کافی است که فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده $(d: ۳x-۴y-۱۳=۰)$ را تعیین و با اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه کنیم. $x^۲+y^۲-۲x=۳\rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲=۲$ $\rightarrow(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=۲$ $R=\sqrt{۲}$ اندازه‌ی شعاع دایره $O(۱,۰)$ مختصات مرکز دایره فاصله مرکز دایره تا خط d $OH=\frac{\lvert a\alpha+b\beta+c\rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\lvert ۳(۱)-۴(۰)-۱۳\rvert}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{\lvert -۱۰\rvert}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$ اکنون چون $OH>R$ ، پس خط داده شده، دایره را قطع نمی کند.
۴	الف) $a^۲+b^۲>۴c\rightarrow ۱۶+۳۶>۴k\rightarrow k<۱۳$

ب) کافی است فاصله‌ی خط داده شده، تا مرکز دایره را تعیین و با اندازه‌ی شعاع دایره ، مقایسه کنیم. $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰ \to x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۴$ $\to (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴ \to \begin{cases} O(۱,۱) \\ R=۲ \end{cases}$ $d=\frac{\lvert a\alpha+b\beta+c\rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\lvert (۱)(۱)+(۱)(۱)+(-۱)\rvert}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\Rightarrow d<R$ خط و دایره متقاطع هستند.	
$a^۲+b^۲>۴c \to ۳۶+۶۴>۴k \to k<۲۵$	۵
اگر مختصات نقطه‌ی $A(۲,۳)$ را در معادله‌ی دایره جایگزین کنیم. معلوم می شود که مختصات این نقطه در معادله‌ی داده شده صدق می کنند. این یعنی اینکه نقطه روی دایره واقع است. پس معادله‌ی خط مماس را می توان بدین شکل نوشت: $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰ \to x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۵$ $\to (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵ \to (x-۱)(x-۱)+(y-۱)(y-۱)=۵$ معادله‌ی خط مماس $(۲-۱)(x-۱)+(۳-۱)(y-۱)=۵ \to x-۱+۲y-۲=۵ \to x+۲y=۸$	۶
کافی است طول خط المرکزین را با مجموع یا تفاضل اندازه‌ی شعاع های دو دایره مقایسه کنیم. $x^۲+y^۲=۴ \to \begin{cases} O_۱(۰,۰) \\ R_۱=۲ \end{cases}$ $x^۲+y^۲-۲x=۴ \to \begin{cases} O_۲(۱,۰) \\ R_۲=\sqrt{۵} \end{cases}$ $d=O_۱O_۲=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۰-۰)^۲}=۱$ طول خط المرکزین $\left.\begin{array}{l} R_۲+R_۱=۲+\sqrt{۵} \\ R_۲-R_۱=\sqrt{۵}-۲ \end{array}\right\} \to R_۲-R_۱<d<R_۲+R_۱$ لذا دو دایره متقاطع هستند.	۷
۵ ، در واقع این دایره باید شعاعی به اندازه‌ی $R_۱+R_۲$ داشته باشد. حال چون $R_۱=۱$ و $R_۲=\sqrt{۱۶}=۴$ پس $R_۱+R_۲=۱+۴=۵$	۸
می دانیم که خط گذرا بر مرکز دایره و عمود بر یک وتر از دایره، آن وتر را نصف می کند. $AH=\frac{۱}{۲}AB=۳$ $OH=\frac{\lvert a\alpha+b\beta+c\rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\lvert ۳(۲)+(-۴)(-۱)+(۱۰)\rvert}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$  	۹

$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \to R^۲ = (۴)^۲ + (۳)^۲ = ۲۵$

$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \to (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

۱۰

$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$

$\to x^۲ + ax + (\frac{a}{۲})^۲ + y^۲ + by + (\frac{b}{۲})^۲ = -c + (\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲$

$\to (x+\frac{a}{۲})^۲ + (y+\frac{b}{۲})^۲ = \frac{-۴c + a^۲ + b^۲}{۴}$

$\to R^۲ = \frac{-۴c + a^۲ + b^۲}{۴} \to R = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$

۱۱

می دانیم فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس برابر اندازه‌ی شعاع دایره است. پس :

$x = -۳ \to ۱x + ۰y + ۳ = ۰$

$R = OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱(۱) + ۰(۰) + ۳|}{\sqrt{(۱)^۲ + (۰)^۲}} = \frac{۴}{۱} = ۴$

و در نهایت معادله‌ی دایره را می توان به شکل زیر نوشت:

$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \to (x-۱)^۲ + (y-۰)^۲ = ۱۶$

توجه : اگر مختصات مرکز دایره را در صفحه تعیین و سپس نمودار خط داده شده را رسم کنیم، به سادگی معلوم می شود که فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده برابر ۴ واحد می باشد.

۱۲

ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع هر دو دایره را تعیین می کنیم.

$(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲ \Rightarrow O(-۱,۱) \quad , \quad R = \sqrt{۲}$

$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + c = ۰ \to O'(۱,-۱) \quad , \quad R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ - ۴c} = \sqrt{۲ - c}$

اکنون اندازه‌ی خط المرکزین را تعیین می کنیم.

$OO' = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸}$

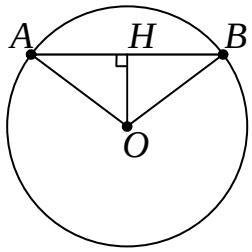
چون دو دایره مماس بیرونی هستند، پس : $OO' = R + R'$ و لذا :

$\sqrt{۸} = \sqrt{۲} + \sqrt{۲-c} \to ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲} + \sqrt{۲-c}$

$\to \sqrt{۲} = \sqrt{۲-c} \to ۲ = ۲ - c \to c = ۰$

۱۳

$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|(۳)(۰) + (۴)(۱) + (۶)|}{\sqrt{(۳)^۲ + (۴)^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$



$AB = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow AH = \sqrt{۵}$

$\Delta(AOH) : OA^۲ = AH^۲ + OH^۲$

$\to R^۲ = (\sqrt{۵})^۲ + (۲)^۲ \to R = ۳$

و لذا معادله‌ی دایره‌ی مطلوب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \rightarrow (x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۳^۲$$

$$\rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۹$$

برای تعیین نقاط تقاطع دایره با محور عرض ها، مقدار x را برابر صفر قرار می دهیم.

$$x^۲+(y-۱)^۲=۹ \xrightarrow{x=۰} (y-۱)^۲=۹ \rightarrow y-۱=\pm ۳$$

$$\rightarrow \begin{cases} y=۴ \\ y=-۲ \end{cases}$$

پس نقاط $(۰,۴)$ و $(۰,-۲)$ ، نقاط تقاطع دایره با محور عرض ها می باشند.

۱۴

برای تعیین وضعیت دو دایره، کافی است اندازه‌ی شعاع های دو دایره را در ابتدا تعیین کنیم و با طول خط المرکزین مقایسه نماییم.

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱ \rightarrow O_۱(۱,-۲)\ ,\quad R_۱=۱$$

$$x^۲+y^۲+۶x+۲y-۶=۰ \rightarrow \begin{cases} O_۲(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-۳,-۱) \\ R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴+۲۴}=۴ \end{cases}$$

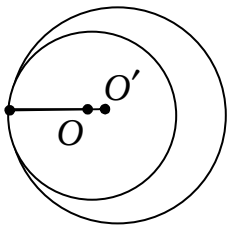
$$d=O_۱O_۲=\sqrt{(-۳-۱)^۲+(-۱+۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷}$$

و چون $۳<\sqrt{۱۷}<۵$، پس دو دایره متقاطع هستند.

۱۵

ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره‌ی داده شده را تعیین می کنیم.

$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶ \rightarrow O'(۲,۳)\ ,\quad R'=۴$$



اکنون اندازه‌ی خط المرکزین دو دایره را محاسبه می کنیم.

$$OO'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}$$

می دانیم که وقتی دو دایره ، مماس داخلی باشند $OO'=|R-R'|$ و لذا می توان نوشت:

$$|R-۴|=\sqrt{۸} \rightarrow R-۴=\pm\sqrt{۸} \rightarrow R=۴\pm\sqrt{۸}$$

در نهایت معادله‌ی دایره‌ی مطلوب بدین شکل خواهد شد.

$$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=(۴\pm\sqrt{۸})^۲$$

۱۶

روش اول : فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده را تعیین و با اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه می کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲y-۳=۰ \rightarrow x^۲+y^۲-۲y+۱=۴ \rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۴$$

$$\rightarrow O(۰,۱)\ ,\quad R=۲$$

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱(۰)+۱(۱)-۳|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

و چون $d < R$ ، پس خط دایره را در دو نقطه قطع می کند.

روش دوم : معادله‌ی خط را به صورت استاندارد نوشته و در معادله‌ی دایره جایگزین می کنیم. در نهایت با توجه به تعداد ریشه های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده ، وضعیت خط و دایره را تعیین می کنیم.

$$x+y=۳ \rightarrow y=۳-x$$

$$x^۲+y^۲-۲y-۳=۰ \xrightarrow{y=۳-x} x^۲+(۳-x)^۲-۲(۳-x)-۳=۰$$

$$\rightarrow x^۲+۹-۶x+x^۲-۶+۲x-۳=۰ \rightarrow ۲x^۲-۴x=۰$$

و چون معادله‌ی بدست آمده دارای دو ریشه است. لذا خط دایره را در دو نقطه قطع می کند.

۱۷ ابتدا باید اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز هر دو دایره را داشته باشیم. با مقایسه‌ی طول خط المرکزین با مجموع یا تفاضل شعاع ها ، وضعیت دو دایره قابل تعیین است.

$$x^۲+y^۲-۶x+۱۲y+۲۰=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} O_۱(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}) \rightarrow O_۱(۳,-۶) \\ R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+(۱۲)^۲-۴(۲۰)}=۵ \end{cases}$$

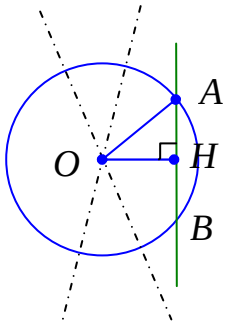
طبق مسئله $O_۲(۰,۰)$ و $R_۲=۳$ لذا

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۳-۰)^۲+(-۶-۰)^۲}=\sqrt{۹+۳۶}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

حال چون $|R_۱-R_۲|<O_۱O_۲<R_۱+R_۲$ ، پس دو دایره متقاطع هستند.

۱۸ محل تلاقی دو خط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ ، مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \rightarrow O(۲,-۱)$$



$$AH=BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|(۱)(۲)+(۱)(-۱)-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$AOH: AH^۲+OH^۲=OA^۲ \rightarrow (\sqrt{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=R^۲$$

$$\rightarrow (\sqrt{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ \rightarrow R^۲=۲+\frac{۱}{۲} \rightarrow R^۲=\frac{۵}{۲}$$

در نهایت معادله‌ی دایره‌ی مطلوب به صورت زیر به دست می آید.

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=\frac{۵}{۲}$$

۱۹ چون دو دایره مماس بیرونی هستند لذا $OO'=R+R'$

دایره‌ی اول :

$O(۲,-۳)$ و $R=۳$

دایره‌ی دوم :

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x-۲y+m=۰ \rightarrow O'\begin{cases}\alpha=-\frac{۲}{۲}=-۱\\ \beta=-\frac{-۲}{۲}=۱\end{cases} \rightarrow O'(-۱,۱)$$

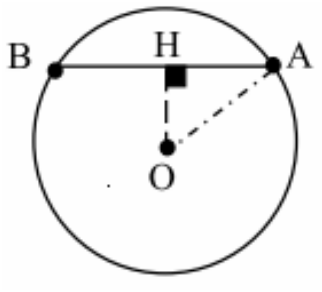
$$R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴m}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸-۴m}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴(۲-m)}=\sqrt{۲-m}$$

$$OO'=\sqrt{(-۱-۲)^{۲}+(۱+۳)^{۲}}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$ اندازه‌ی خط المرکزین

حال بنابر اینکه $OO'=R+R'$ پس :

$$۵=۳+\sqrt{۲-m} \rightarrow \sqrt{۲-m}=۲ \rightarrow ۲-m=۴ \rightarrow m=-۲$$

۲۰ می دانیم که خط گذرا بر مرکز دایره و عمود بر یک وتر از دایره، آن وتر را نصف می کند.



$$AH=\frac{۱}{۲}AB=۳$$

$$OH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|۴(۱)+(-۳)(-۱)+(-۲)|}{\sqrt{(۴)^{۲}+(-۳)^{۲}}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

$$OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲} \rightarrow R^{۲}=(۱)^{۲}+(۳)^{۲}=۱۰$$

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲} \rightarrow (x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱۰$$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

تهیه کننده : جابرعامری

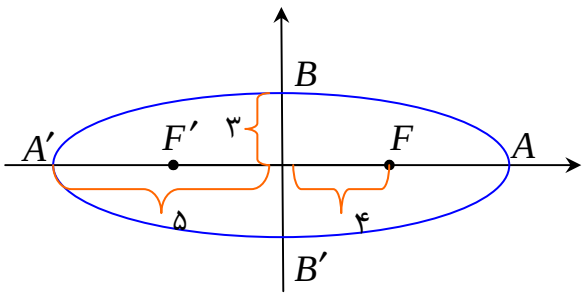
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل دوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

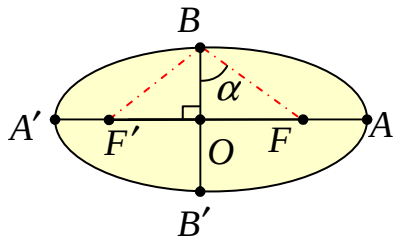
درس ۲ : بیضی

۱	بنابر مفهوم خروج از مرکز بیضی، در این حالت بیضی به دایره نزدیکتر می شود.
۲	نادرست : زیرا $\angle\alpha+\angle\beta+\angle(F'MF)=۱۸۰\xrightarrow{\angle\alpha=\angle\beta}۲\alpha+۵۰=۱۸۰$ $\rightarrow ۲\alpha=۱۳۰\rightarrow\alpha=۶۵^\circ$
۳	می دانیم که $AA'=۲a$ و $BB'=۲b$ پس : $۲a=۱۰\rightarrow a=۵$ $۲b=۶\rightarrow b=۳$ $a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow ۲۵=۹+c^۲\rightarrow c^۲=۱۶\rightarrow c=۴$ $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$ خروج از مرکز بیضی مختصات رئوس واقع روی قطر بزرگ $\begin{cases}A(۵,۰)\\A'(-۵,۰)\end{cases}$ مختصات کانون ها $\begin{cases}F(۴,۰)\\F'(-۴,۰)\end{cases}$ مختصات رئوس واقع روی قطر کوچک $\begin{cases}B(۰,۳)\\B'(۰,-۳)\end{cases}$ 
۴	در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. توجه : داشته باشید که در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.
۵	$AA'=۲a=۲۰\rightarrow a=۱۰$ $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{a=۱۰}\frac{c}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\rightarrow c=۸$ $a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow ۱۰۰=b^۲+۶۴\rightarrow b^۲=۳۶\rightarrow b=۶$ $BB'=۲b=۲(۶)=۱۲$ طول قطر کوچک $FF'=۲c=۲(۸)=۱۶$ طول فاصله‌ی کانونی

۶

بنابر اطلاعات مسأله می توان نوشت :

$$AA' = ۲BB' \to ۲a = ۲(۲b) \to a = ۲b$$



از طرفی مثلث FBF' متساوی الساقین است، پس $BF' = BF$

و چون نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، لذا

$$BF + BF' = ۲a \to ۲BF = ۲a \to BF = a$$

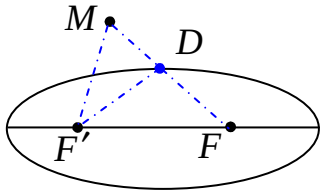
مثلث FBO مثلث قائم الزاویه است. پس :

$$\cos\alpha = \frac{OB}{BF} \to \cos\alpha = \frac{b}{a} \to \cos\alpha = \frac{b}{۲b} \to \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $\alpha = ۶۰^\circ$. حال چون BB' میانه‌ی وارده بر قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین FBF' است. پس نیمساز زاویه-ی رأس نیز می باشد. در نهایت می توان نوشت:

$$\angle FBF' = ۲\alpha = ۲(۶۰) = ۱۲۰^\circ$$

۷



از نقطه‌ی M به کانون های بیضی وصل می کنیم تا بیضی را در نقطه‌ی D قطع کند. نقطه‌ی D روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:

$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF} DF + MD + MF' > DF + DF'$$

$$\to MF + MF' > ۲a$$

۸

$$e = \frac{۳}{۴} \to \frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{۲a=۱۶ \to a=۸} \frac{c}{۸} = \frac{۳}{۴} \to c = ۶$$

$$AF = a - c = ۸ - ۶ = ۲$$

۹

در این حالت شکل بیضی به دایره نزدیکتر می شود.

۱۰

$$e = \frac{۳}{۵} \to \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \to c = \frac{۳}{۵}a$$

$$b^۲ + c^۲ = a^۲ \xrightarrow{۲b=۱۶ \to b=۸} ۶۴ + (\frac{۳}{۵}a)^۲ = a^۲ \to ۶۴ + \frac{۹}{۲۵}a^۲ = a^۲$$

$$\to \frac{۱۶}{۲۵}a^۲ = ۶۴ \to a^۲ = ۶۴ \times \frac{۲۵}{۱۶} = ۱۰۰ \to a = ۱۰ \to AA' = ۲a = ۲۰$$

$$c = \frac{۳}{۵}a = \frac{۳}{۵}(۱۰) = ۶ \to FF' = ۲c = ۱۲$$

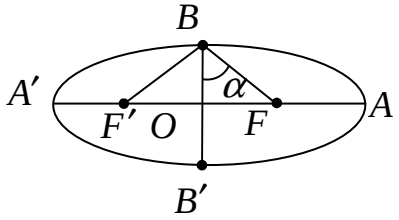
۱۱

$AA' = ۲BB' \to a = ۲b$

$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF = BF'} ۲BF = ۲a \to BF = a$

$\cos\alpha = \frac{BO}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{۲b} = \frac{۱}{۲} \to \alpha = ۶۰^\circ$

$\to \angle FBF' = ۲\alpha = ۱۲۰^\circ$



۱۲

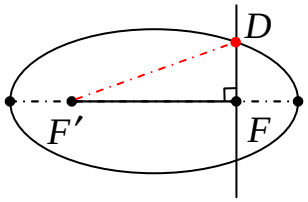
$MF = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۰-m)^۲} = \sqrt{۹+m^۲}$

$MF' = \sqrt{(-۲-۱)^۲ + (۰-m)^۲} = \sqrt{۹+m^۲}$

$PF + PF' = ۲a \to \sqrt{۹+m^۲} + \sqrt{۹+m^۲} = ۱۰ \to m = \pm ۴$

۱۳

نقطه‌ی D روی بیضی قرار دارد. پس بنا به تعریف بیضی $DF + DF' = ۲a$ است. از طرفی مثلث DFF' قائم الزاویه است. پس :



$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \xrightarrow{DF' = ۲a - DF} DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$

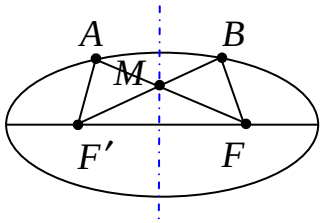
$\to DF^۲ + ۴c^۲ = ۴a^۲ - ۴a.DF + DF^۲$

$\to ۴c^۲ = ۴a^۲ - ۴a.DF \xrightarrow{\div ۴} c^۲ = a^۲ - a.DF \to a.DF = a^۲ - c^۲$

$\xrightarrow{a^۲ - c^۲ = b^۲} a.DF = b^۲ \to DF = \frac{b^۲}{a}$

۱۴

چون دو نقطه‌ی A و B روی بیضی قرار ارند، پس :



$\left.\begin{array}{l} AF + AF' = ۲a \\ BF + BF' = ۲a \end{array}\right\} \to AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{AF' = BF} AF = BF'$

و از اینجا نتیجه می شود که چون ($FF' = FF'$ و $AF' = BF$ و $AF = BF'$) ، لذا دو مثلث AFF' و BFF' به حالت برابر سه ضلع همنهشت هستند. در نتیجه $\angle AFF' = \angle BF'F$. این یعنی مثلث MFF' متساوی الساقین است و $MF = MF'$ ، پس نقطه‌ی M روی عمود منصف پاه خط AFF' (قطر کوچک بیضی) است.

۱۵

نقطه‌ی M روی بیضی قرار دارد. پس بنا به تعریف بیضی داریم:

$MF + MF' = ۲a \to ۸ + ۶ = ۲a \to a = ۷$

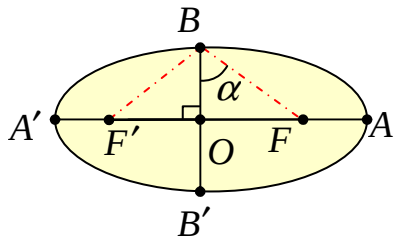
$e = \frac{۱}{۷} \to \frac{c}{a} = \frac{۱}{۷} \xrightarrow{a = ۷} c = ۱$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۴۹ = ۱ + b^۲ \to b = ۴\sqrt{۳}$

۱۶

بنابر اطلاعات مسأله می توان نوشت :

$$AA' = ۲BB' \to ۲a = ۲(۲b) \to a = ۲b$$



از طرفی مثلث FBF' متساوی الساقین است، پس $BF' = BF$

و چون نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، لذا

$$BF + BF' = ۲a \to ۲BF = ۲a \to BF = a$$

مثلث FBO مثلث قائم الزاویه است. پس :

$$\cos\alpha = \frac{OB}{BF} \to \cos\alpha = \frac{b}{a} \to \cos\alpha = \frac{b}{۲b} \to \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$$

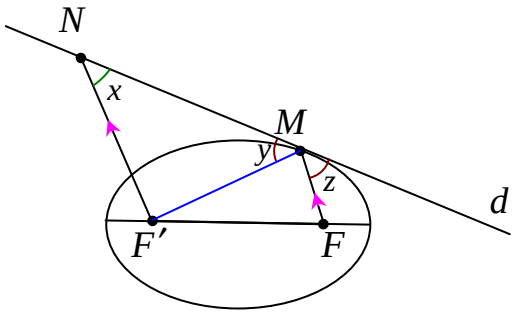
در نتیجه $\alpha = ۶۰^\circ$. حال چون BB' میانه‌ی وارده بر قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین FBF' است. پس نیمساز زاویه-ی رأس نیز می باشد. در نهایت می توان نوشت:

$$\angle FBF' = ۲\alpha = ۲(۶۰) = ۱۲۰^\circ$$

توجه : برای حل مسأله می توان از تانژانت زاویه‌ی FBO نیز استفاده کرد.

۱۷

طبق ویژگی خط مماس بر بیضی داریم، $\angle y = \angle z$ و



چون $NF' \parallel MF$

پس $\angle x = \angle z$. لذا $\angle x = \angle y$

یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد،

در نتیجه متساوی الساقین بوده و $NF' = MF'$

۱۸

$$\frac{S_{\Delta(OBF')}}{S_{\Delta(OAB')}} = \frac{\frac{۱}{۲}(OB)(OF')}{\frac{۱}{۲}(OB')(OA)} = \frac{\frac{۱}{۲}(b)(c)}{\frac{۱}{۲}(b)(a)} = \frac{c}{a} = e = \frac{۴}{۵}$$

۱۹

$$BB' = |۲-(-۴)| = ۶ \xrightarrow{BB'=۲b} ۲b = ۶ \to b = ۳$$

$$FF' = ۲\sqrt{۳} \xrightarrow{FF'=۲c} ۲c = ۲\sqrt{۳} \to c = \sqrt{۳}$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۳^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۱۲ \to a = ۲\sqrt{۳} \to ۲a = ۴\sqrt{۳} \to AA' = ۴\sqrt{۳}$$

۲۰

$$\frac{S(\Delta FBF')}{S(\Delta BA'O)} = \frac{\frac{۱}{۲}\times FF'\times OB}{\frac{۱}{۲}\times A'O\times OB} = \frac{FF'}{A'O} = \frac{۲c}{a}$$

$$\xrightarrow{\frac{S(\Delta FBF')}{S(\Delta BA'O)}=\frac{۱}{۴}} \frac{۲c}{a}=\frac{۱}{۴} \to \frac{c}{a}=\frac{۱}{۸} \to e=\frac{۱}{۸}$$

۲۱

الف)

$$AA'=۲a \xrightarrow{AA'=۶} ۲a=۶ \to a=۳$$

$$BB'=۲b \xrightarrow{BB'=۴} ۲b=۶ \to b=۲$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \to ۹=۴+c^۲ \to c^۲=۵ \to c=\sqrt{۵}$$

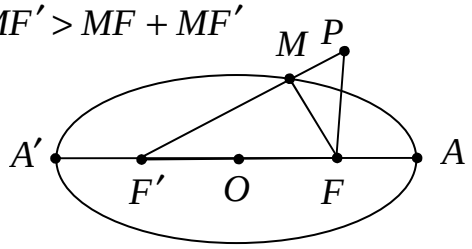
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$ خروج از مرکز بیضی

ب)

از نقطه‌ی P به کانون های بیضی وصل می کنیم تا بیضی را در نقطه‌ی M قطع کند. نقطه‌ی M روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی: $MF+MF'=۲a$ بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MPF داریم:

$$PM+PF>MF \xrightarrow{MF'} PM+PF+MF'>MF+MF'$$

$$\to PF+PF'>۲a$$



تهیه کننده : جابرعامری

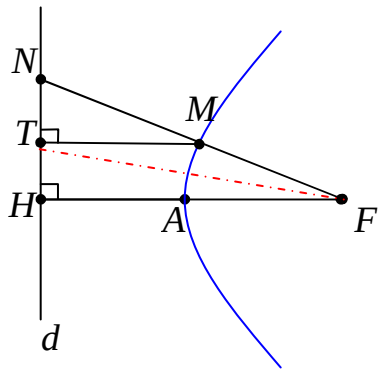
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل دوّم

((هندسه۳))

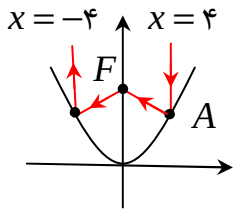
❋❋❋

درس ۲ : سهمی

۱	ابتدا معادله‌ی سهمی را به شکل زیر می نویسیم. $y^{۲}-۲y-۸x+۹=۰ \to y^{۲}-۲y+۱=۸x-۸ \to (y-۱)^{۲}=۸(x-۱)$ لذا با مقایسه با معادله‌ی استاندارد $(y+\beta)^{۲}=۴p(x+\alpha)$ معلوم می شود که سهمی افقی رو به راست است. پس می توان نوشت: $۴p=۸ \to p=۲$ پارامتر سهمی $۲p=۲(۲)=۴$ فاصله‌ی کانونی $S(۱,۱)$ مختصات رأس سهمی $x=\alpha-p \to x=-۱$ معادله‌ی خط هادی $F(\alpha+p,\beta) \to F(۳,۱)$ مختصات کانون
۲	 بنابر تعریف سهمی $MT=MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است. از اینجا نتیجه می شود که : $\angle MTF=\angle MFT$ از طرفی $FH \parallel MT$ و FT خط مورب می باشد. پس بنا بـه قـضیه‌ی خطوط موازی: $\angle MTF=\angle TFH$ از این دو نتیجه معلوم می شود که TF نیمساز زاویه‌ی NFH می باشد. اکنون بنابر قضیه‌ی نیمساز در مثلث FHN داریم: $\frac{NF}{NT}=\frac{FH}{TH} \to \frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{\div ۲} \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$
۳	$y^{۲}+۸x+۲y+۹=۰ \to y^{۲}+۲y+۱=-۸x-۸ \to (y+۱)^{۲}=-۸(x+۱)$ با مقایسه با معادله‌ی استاندارد $(y+\beta)^{۲}=-۴p(x+\alpha)$ معلوم است که سهمی افقی و رو به سـمت چـپ محـور طول ها است. لذا : $-۴p=-۸ \to p=۲$ پارامتر سهمی

	مختصات رأس سهمی $S(-۱,-۱)$ مختصات کانون سهمی $F(\alpha-p,\beta)\to F(-۱-۲,-۱)\to F(-۳,-۱)$ معادله خط هادی $y=\alpha+p\to y=-۱+۲\to y=۱$
۴	الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله‌ی خط هادی، به سادگی معلوم می شود که سهمی افقی و دهانه‌ی آن به سمت چپ می باشد. در این سهمی $p=۱$ و معادله‌ی آن برابر است با : $$(y-۳)^۲=-۴(x-۲)$$ ب) مختصات کانون سهمی $F(-p+h,k)=(-۱+۲,۳)=(۱,۳)$ پ) مختصات محل برخورد با محور طول ها برابر است با : $y=۰\to x=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow(-\frac{۱}{۴},۰)$
۵	$x^۲-۴=۸y+۴x\to x^۲-۴x+۴=۸y+۸\to(x-۲)^۲=۸(y+۱)$ با مشاهده‌ی معادله‌ی سهمی معلوم می شود که سهمی قائم رو به بالا است. پارامتر سهمی $۴p=۸\to p=۲$ رأس سهمی $S(\alpha,\beta)\to S(۲,-۱)$ مختصات کانون $F(\alpha,\beta+p)\to F(۲,-۱+۲)\to F(۲,۱)$
۶	با توجه به جایگاه کانون و معادله‌ی خط هادی، سهمی افقی رو به سمت چپ می باشد. مختصات رأس سهمی $A(-۱,۲)$، در این سهمی $p=AF=۲$. لذا معادله‌ی آن می شود: $(y-۲)^۲=-۸(x+۱)$
۷	$\begin{cases}y^۲+۷x+۵=۰\\x^۲+y^۲=۲۵\end{cases}\to x^۲+(-۷x-۵)=۲۵\to x^۲-۷x-۳۰=۰$ $\to(x+۳)(x-۱۰)=۰$ $\to\begin{cases}x=-۳\to y^۲=۱۶\to y=\pm۴\Rightarrow A(-۳,۴)\ ,\ B(-۳,-۴)\\x=۱۰\to y^۲=-۷۵\quad \text{غ م}\end{cases}$
۸	با توجه به جایگاه کانون و معادله‌ی خط هادی، سهمی قائم رو به سمت پایین می باشد. مختصات رأس سهمی $A(۱,۲)$، در این سهمی $p=AF=۴$. لذا معادله‌ی آن می شود: $(x-\alpha)^۲=-۴p(y-\beta)\to(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$ و همچنین خط هادی سهمی $y=۶$ است.
۹	می دانیم که اگر دهانه‌ی دیش $۲b$ و عمق دیش h باشد، داریم : $p=\frac{b^۲}{۴h}$ اکنون با توجه صورت مسأله می توان نوشت: $b'=b$ و $h'=۲h$ و لذا

$\frac{p'}{p}=\frac{\frac{b'^{۲}}{۴h'}}{\frac{b^{۲}}{۴h}}=\frac{\frac{b^{۲}}{۴(۲h)}}{\frac{b^{۲}}{۴h}}=\frac{۴h}{۸h}=\frac{۱}{۲}$ فاصله‌ی کانونی این دیش، نصف می شود.	
با در نظر گرفتن موقعیت نقطه، نسبت به خط هادی و اینکه کانون سهمی، درون سهمی است، نتیجه می شود که، سهمی افقی رو به راست می باشد. پس : کانون سهمی $F(\alpha+p,\beta)=F(۱,۲)\rightarrow\begin{cases}\alpha+p=۱\\ \beta=۲\end{cases}$ خط هادی سهمی $\begin{cases}x=\alpha-p\\ x=-۳\end{cases}\rightarrow\alpha-p=-۳$ $\rightarrow\begin{cases}\alpha+p=۱\\ \alpha-p=-۳\end{cases}\rightarrow\alpha=-۱\ ,\quad p=۲$ و لذا معادله‌ی سهمی مورد نظر بدین شکل خواهد شد. $(y-\beta)^{۲}=۴p(x-\alpha)\rightarrow(y-۲)^{۲}=۸(x+۱)$	۱۰
طبق ویژگی بازتابندگی سهمی، این گزاره **درست** است.	۱۱
مراجعه شود به پاسخ تمرین ۲ همین قسمت (خرداد ۱۴۰۱)	۱۲
با توجه به معادله‌ی خط هادی و مختصات کانون، به سادگی معلوم است که سهمی قائم رو به پایین است. لذا بـه کمـک مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی می توان نوشت: $y=-۲\xrightarrow{y=\beta+p}\beta+p=-۲$ $F(\alpha,\beta-p)\rightarrow\begin{cases}\alpha=۱\\ \beta-p=-۴\end{cases}$ $\rightarrow\begin{cases}\beta+p=-۲\\ \beta-p=-۴\end{cases}\rightarrow۲\beta=-۶\rightarrow\beta=-۳\ ,\quad p=۱$ در نهایت می توان معادله‌ی سهمی را به شکل زیر نوشت: $(x-\alpha)^{۲}=-۴p(y-\beta)\rightarrow(x-۱)^{۲}=-۴(y+۳)$	۱۳
$x^{۲}=۸y\xrightarrow{x=۴}y=۲\rightarrow A(۴,۲)$ محل برخورد شعاع نورانی با سهمی با توجه به معادله‌ی سهمی ($x^{۲}=۸y$) به سادگی معلوم است که سهمی قائم رو به بالا است. $S(۰,۰)$ مختصات رأس سهمی $۴p=۸\rightarrow p=۲$ پارامتر سهمی $F(\alpha,\beta+p)\rightarrow F(۰,۲)$ کانون سهمی $x=\alpha\rightarrow x=۰$ محور سهمی اکنون بنابر ویژگی سهمی می دانیم که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن بـا محـور سـهمی	۱۴

	بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. با این فرض در این مسئله چون خط بازتاب موازی محور سهمی است و چون شعاع نورانی از کانون یعنی $(۰,۲)$ می گذرد، در نتیجه از دو نقطه‌ی $(۰,۲)$ و $(۴,۲)$ گذر می کند، این یعنی معادله‌ی خط بازتاب می شود $y=۲$. توجه داشته باشد که در ادامه شعاع نورانی، بعد از گذر از کانون و با برخورد با سهمی در راستای خط $x=-۴$ بازتابش دارد. 
۱۵	می دانیم که سهمی مکان هندسی مرکز دایره هایی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت (کانون) روی آن صفحه گذشته و بر یک خط ثابت (خط هادی) از آن صفحه مماس باشند. لذا در اینجا کافی است **معادله‌ی خط هادی سهمی** را تعیین کنیم. واضح است که سهمی افقی رو به چپ است. لذا : $S(\alpha,\beta)=(-۱,۱)$ مختصات رأس سهمی $-۴p=-۸ \to p=۲$ پارامتر سهمی $x=\alpha-p=-۱+۲=۱$ معادله‌ی خط هادی
۱۶	ابتدا معادله‌ی سهمی را به شکل زیر می نویسیم. $y^۲-۴x=۴y \to y^۲-۴y=۴x \xrightarrow{+۴} y^۲-۴y+۴=۴x+۴$ $\to (y-۲)^۲=۴(x+۱)$ لذا با مقایسه با معادله‌ی استاندارد $(y+\beta)^۲=۴p(x+\alpha)$ معلوم می شود که سهمی افقی رو به راست است. پس می توان نوشت: $۴p=۴ \to p=۱$ پارامتر سهمی $۲p=۲(۱)=۲$ فاصله‌ی کانونی $S(-۱,۲)$ مختصات رأس سهمی $x=\alpha-p \to x=-۲$ معادله‌ی خط هادی $F(\alpha+p,\beta) \to F(۰,۲)$ مختصات کانون

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل سوّم

((هندسه۳))

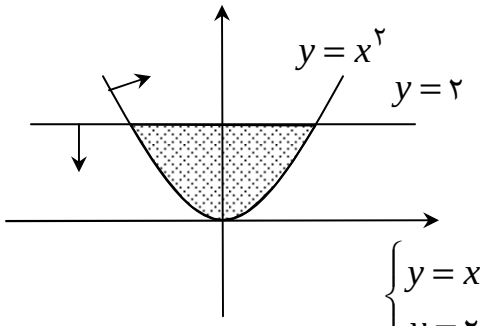
❋❋❋

درس ۱ : فضای سه بعدی و بردار

۱

نمودار معادلات $y = x^{۲}$ و $y = ۲$ را رسم می کنیم.

سپس ناحیه‌ی مشترک نامعادلات $x^{۲} \le y$ و $y \le ۲$ را تعیین می کنیم.



$$\begin{cases} y = x^{۲} \\ y = ۲ \end{cases} \to x^{۲} = ۲ \to x = \pm\sqrt{۲}$$

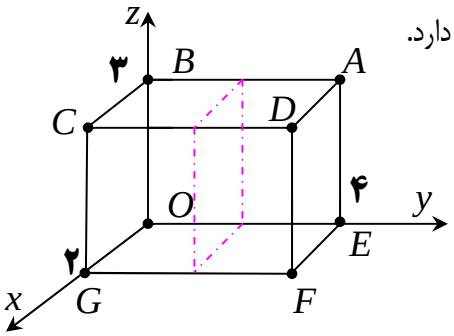
۲

الف) وجه $CDFG$ شرایط ($۰ \le z \le ۳$ و $۰ \le y \le ۴$ و $x = ۲$) را دارد.

ب) معادلات $\begin{cases} ۰ \le x \le ۲ \\ y = ۴ \\ z = ۳ \end{cases}$ یال AD را مشخص می کنند.

پ) مختصات نقطه‌ی D به صورت $D(۲,۴,۳)$ می باشد.

ت) صفحه به معادله‌ی $y = ۲$ هم موازی با صفحه‌ی xoz باشد و هم مکعب مستطیل را نصف کند.

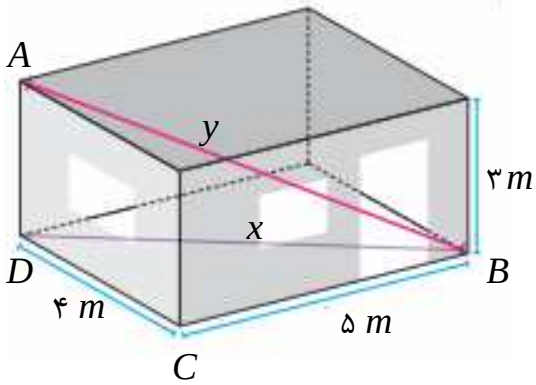


۳

با دو بار استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث های قائم الزاویه‌ی BCD و ABD، می توان نوشت:

$$x^{۲} = (۴)^{۲} + (۵)^{۲} \to x^{۲} = ۱۶ + ۲۵$$
$$\to x^{۲} = ۴۱ \to x = \sqrt{۴۱}$$

$$y^{۲} = (\sqrt{۴۱})^{۲} + (۳)^{۲} \to y^{۲} = ۴۱ + ۹$$
$$\to y^{۲} = ۵۰ \to y = ۵\sqrt{۲}$$



۴

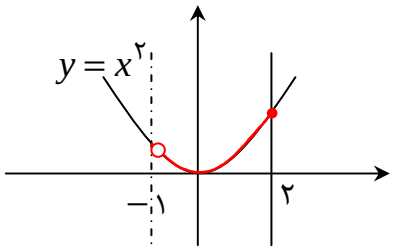
نمودار مربوط به معادله‌ی $x = ۰$ در $R^{۳}$ ، تمام نقاط صفحه‌ی yz است.

توجه : نمودار مربوط به معادله‌ی $y=0$ در R^3 ، تمام نقاط صفحه‌ی xz است و همچنین نمودار مربوط به معادله‌ی $z=0$ در R^3 ، تمام نقاط صفحه‌ی xy است.

۵ محور عرض ها

۶ درست

۷

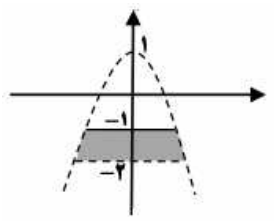


۸ $\|\vec{a}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(4)^2}=\sqrt{0+9+16}=5$

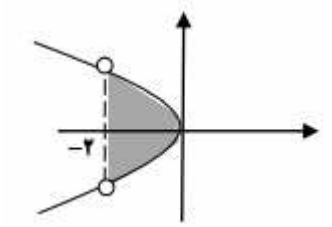
۹ نادرست، نقطه روی محور z قرار دارد.

۱۰ الف) با توجه به مختصات نقطه‌ی $A(0,0,3)$ ، واضح است که صفحه‌ی مورد نظر $z=0$ می باشد.

ب) ابتدا نمودار خطوط $y=-2$ (به شکل نقطه چین)و $y=-1$ (به صورت کامل) و منحنی $y=-x^2+1$ (به شکل نقطه چین) را در فضای دو بعدی رسم می کنیم.



۱۱ ابتدا نمودار های معادلات $x=-2$ و $y^2+x=0$ را رسم می کنیم. (خط چین را مورد توجه قرار می دهیم.) سپس ناحیه‌ی مورد نظر را با توجه به نامساوی ها تعیین می کنیم. در این صورت نمودار زیر به دست می آید.



۱۲ محور z ها ، این معادلات نشان دهنده‌ی صفحه ای موازی محور z ها می باشد.

۱۳ چون نقطه‌ی A روی محور ارتفاع ها قرار دارد، لذا مختصات آن به صورت $A(0,0,3)$ می باشد.

اکنون مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط AB را به شکل زیر می توان به دست آورد.

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+0}{2}=0$$

	$z_M = \frac{z_A + z_B}{۲} = \frac{۳+۱}{۲} = ۲$ لذا فاصله‌ی نقطه‌ی $M(\frac{۱}{۲},۰,۲)$ تا مبدأ مختصات به صورت زیر است. $OM = \sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲ + (۰)^۲ + (۲)^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۴} + ۴} = \sqrt{\frac{۱۷}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$
۱۴	درست ، با توجه به علامت مولفه های این نقطه، به سادگی معلوم می شود که این نقطه، در ناحیه‌ی ششم واقع است.
۱۵	درست؛ زیرا ، $\|\vec{a}\| = \sqrt{(۰)^۲ + (\frac{۱}{\sqrt{۵}})^۲ + (\frac{۲}{\sqrt{۵}})^۲} = \sqrt{۰ + \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۵}} = \sqrt{\frac{۵}{۵}} = ۱$
۱۶	الف) نادرست ب) $x = ۲$ ؛ زیرا تمام صفحات مورد نظر لزوماً عمود بر محور طول‌ها باشند. ج) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ ؛ زیرا $۳\vec{x} = (\vec{x} - \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{x}) \to ۳\vec{x} - ۲\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} \to \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$
۱۷	الف) $x = ۲$ ، زیرا به دلیل عمود بودن بر محور x ها ، طول تمام نقاط صفحه یکسان و برابر ۲ است. اکنون چون صفحه، از نقطه‌ی $A(۲,۳,-۱)$ می گذرد، پس معادله‌ی صفحه می شود $x = ۲$ ب) $M(۲,۱,۰)$ زیرا : $x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{-۱+۵}{۲} = ۲$ $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۲+۰}{۲} = ۱$ $z_M = \frac{z_A + z_B}{۲} = \frac{-۳+۳}{۲} = ۰$

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل سوّم

((هندسه۳))

***

درس ۲ : ضرب داخلی دو بردار و کاربرد

۱	الف) $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}=(۲,۳,-۱)$ $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}=(۱,۰,۱)$ $\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(۳)(۰)+(-۱)(۱)=۲+۰-۱=۱$ $\|\vec{a}\|=\sqrt{۴+۹+۱}=\sqrt{۱۴}$ $\|\vec{b}\|=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\dfrac{۱}{\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۲}}=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۷}}$ ب) $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ $\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}=(۱,۰,۱)-(۰,۲,۱)=(۱,-۲,۰)$ $\vec{a}.\vec{d}=(۲)(۱)+(۳)(-۲)+(-۱)(۰)=۲-۶+۰=-۴$ $\|\vec{d}\|=\sqrt{۱+۴+۰}=\sqrt{۵}$ $\vec{a}'=\dfrac{\vec{a}.\vec{d}}{\|\vec{d}\|^{۲}}\vec{d}=\dfrac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰)$
۲	اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، پس زاویه‌ی بین آنها برابر $\dfrac{\pi}{۲}$ است. لذا : $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos(\dfrac{\pi}{۲})=۰$ حال اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$ پس $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=۰$ و چون $\|\vec{b}\|\neq۰$ و $\|\vec{a}\|\neq۰$ لذا $\cos\theta=۰$ یعنی $\theta=\dfrac{\pi}{۲}$ یعنی دو بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ بر هم عمودند.
۳	الف) $\vec{a}=۴\vec{k}-۲\vec{j}-\vec{i}=(-۱,-۲,۴)$

$\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}=(۱,۲,۰)$ $۳\vec{a}-\vec{b}=۳(-۱,-۲,۴)-(۱,۲,۰)=(-۳,-۶,۱۲)+(-۱,-۲,۰)=(-۴,-۸,۱۲)$ $r(۳\vec{a}-\vec{b})=\frac{۱}{۴}(-۴,-۸,۱۲)=(-۱,-۲,۳)$ ب) اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، در این صورت، می توان نوشت: $\vec{a}.\vec{b}=(-۱)(۱)+(-۲)(۲)+(۴)(۰)=-۵$ $\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱+۴+۰}=\sqrt{۵}$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{-۵}{(\sqrt{۵})^۲}(۱,۲,۰)=-(۱,۲,۰)=(-۱,-۲,۰)$	
فرض کنید که θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در این صورت: $\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(۲)(۰)+(-۱)(-۱)=۲+۰+۱=۳$ $\|\vec{a}\|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$ $\|\vec{b}\|=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\to\theta=\frac{\pi}{۴}$	۴
$\vec{a}\perp\vec{b}\to\vec{a}.\vec{b}=۰\to(۲)(m+۱)+(m)(۳)+(-۱)(۲)=۰$ $\to ۲m+۲+۳m-۲=۰\to m=۰$	۵
درست (نامساوی کشی شوارتز)	۶
$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^۲=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ $=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}$ $=\|\vec{a}\|^۲+۰+۰+۰+\|\vec{b}\|^۲+۰+۰+۰+\|\vec{c}\|^۲=(۲)^۲+(۳)^۲+(۴)^۲$ $=۴+۹+۱۶=۲۹$	۷
$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(-۲)+(-۶)(۱)+(۴)(-۵)=-۴-۶-۲۰=-۳۰$ $\|\vec{b}\|=\sqrt{(-۲)^۲+(۱)^۲+(-۵)^۲}=\sqrt{۴+۱+۲۵}=\sqrt{۳۰}$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{-۳۰}{۳۰}(-۲,۱,-۵)=(۲,-۱,۵)$	۸
می دانیم که برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم. $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta$ حال با توجه به اینکه $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ نتیجه گرفته می شود که $\cos\theta=۱$ یعنی $\angle\theta=۰^\circ$	۹
$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}\to-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲-n}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۴+۱+n^۲}}\to\frac{n-۲}{\sqrt{n^۲+۵}}=۱$	۱۰

$\rightarrow n^{۲}+۵=n^{۲}-۴n+۴ \rightarrow ۵=-۴n+۴ \rightarrow n=-\frac{۱}{۴}$	
$\vec{a}=r\vec{b} \rightarrow \vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{(r\vec{b}).\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{r(\vec{b}.\vec{b})}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{r\|\vec{b}\|^{۲}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=r\vec{b}=\vec{a}$	۱۱
گزینه‌ی ۱، زیرا بنابر اینکه $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta$. این تساوی وقتی بیشترین مقدار را دارد که $\cos\theta=۱$ یعنی $\theta=۰$ باشد.	۱۲
روش اول : بردار $\vec{a}'$ با برادر $\vec{b}$ موازی است. $\vec{a}'\parallel\vec{b} \rightarrow \vec{a}'=k\vec{b}$ $(\vec{a}-\vec{a}')\perp\vec{b} \rightarrow (\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=۰ \rightarrow \vec{a}.\vec{b}-(k\vec{b}).\vec{b}=۰$ $\rightarrow \vec{a}.\vec{b}-k(\vec{b}.\vec{b})=۰ \rightarrow \vec{a}.\vec{b}-k\|\vec{b}\|^{۲}=۰ \rightarrow k=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}$ $\rightarrow \vec{a}'=k\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}$ روش دوم : در مثلث قائم الزاویه، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را θ می نامیم. $\cos\theta=\frac{\|\vec{a}'\|}{\|\vec{a}\|} \rightarrow \|\vec{a}'\|=\|\vec{a}\|\cos\theta$ $\vec{a}'=k\vec{b} \rightarrow \|\vec{a}'\|=\|k\vec{b}\| \rightarrow \|\vec{a}'\|=k\|\vec{b}\|$ $k=\frac{\|\vec{a}'\|}{\|\vec{b}\|}=\frac{\|\vec{a}\|\cos\theta}{\|\vec{b}\|}=\frac{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta}{\|\vec{b}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}$ $\rightarrow \vec{a}'=k\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}$	۱۳
فرض کنید که θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در این صورت: $\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۲+۱+۰=۳$ $\|\vec{a}\|=\sqrt{۴+۱+۴}=\sqrt{۹}=۳$ $\|\vec{b}\|=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{۴}$	۱۴
$\vec{a}.\vec{b}=a_{۱}b_{۱}+a_{۲}b_{۲}+a_{۳}b_{۳}=(m)(۲)+(۰)(-۲)+(۲)(۰)=۲m$ $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|} \rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۲m}{(\sqrt{m^{۲}+۴})(۲\sqrt{۲})} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{m}{\sqrt{m^{۲}+۴}}$ $\rightarrow \sqrt{۲}\times\sqrt{m^{۲}+۴}=۲m \rightarrow ۲(m^{۲}+۴)=۴m^{۲} \rightarrow ۲m^{۲}=۸$ $\rightarrow m^{۲}=۴ \rightarrow m=۲ \quad , \quad m=-۲$ جواب $m=-۲$ قابل قبول نیست.	۱۵

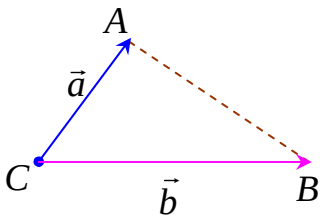
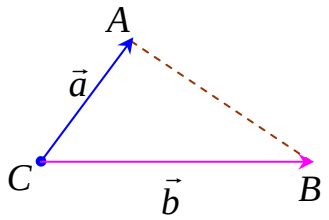
$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}=(۱,۱,۱)$ $\vec{v}=۲\vec{c}-\vec{b}=(۳,-۴,۰)\rightarrow\|\vec{v}\|=\sqrt{۹+۱۶+۰}=۵$ $\vec{u}.\vec{v}=(۱)(۳)+(۱)(-۴)+(۱)(۰)=۳-۴+۰=-۱$ $\vec{u}'=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^۲}\vec{v}=\frac{-۱}{۲۵}\times(۳,-۴,۰)=(-\frac{۳}{۲۵},\frac{۴}{۲۵},۰)$	۱۶
$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=(۱,-۳,۴)-(۳,-۴,۲)=(-۲,۱,۲)$ $\vec{a}.\vec{d}=(۱)(-۲)+(-۳)(۱)+(۴)(۲)=-۲-۳+۸=۳$ $\|\vec{d}\|=\sqrt{(-۲)^۲+(۱)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=\sqrt{۹}=۳$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{d}}{\|\vec{d}\|^۲}\vec{d}=\frac{۳}{۹}(-۲,۱,۲)=\frac{۱}{۳}(-۲,۱,۲)=(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$	۱۷
$\vec{a}=-\vec{i}-\sqrt{۳}\vec{k}=(-۱,۰,-\sqrt{۳})\rightarrow\|\vec{a}\|=\sqrt{(-۱)^۲+(۰)^۲+(-\sqrt{۳})^۲}=۲$ $\vec{b}=(\sqrt{۳},۲,۱)$ $\vec{a}.\vec{b}=(-۱)(\sqrt{۳})+(۰)(۲)+(-\sqrt{۳})(۱)=-۲\sqrt{۳}$ $\vec{b}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|^۲}\vec{a}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۴}(-۱,۰,-\sqrt{۳})=(\frac{\sqrt{۳}}{۲},۰,\frac{۳}{۲})$ $\|\vec{b}'\|=\sqrt{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲+(۰)^۲+(\frac{۳}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{۳}$	۱۸
برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می توان نوشت، $\|\vec{a}\|\geq۰$ و $\|\vec{b}\|\geq۰$ و لذا $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\geq۰$ از طرفی برای زاویه‌ی θ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $-۱\leq\cos\theta\leq۱$ برقرار است. این نامساوی را می‌توان به صورت $\|\cos\theta\|\leq۱$ نیز نوشت. اکنون دو طرف این نامساوی را در عدد نامنفی $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ ضرب می کنیم. پس خواهیم داشت: $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\|\cos\theta\|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times۱$ $\rightarrow\|\vec{a}.\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$	۱۹
$\vec{u}=۲\vec{a}-\vec{b}=۲(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})-(۱,۰,۱)=(۳,-۱,۱)+(-۱,۰,-۱)=(۲,-۱,۰)$ $\vec{u}.\vec{b}=(۲)(۱)+(-۱)(۰)+(۰)(۱)=۲$ $\vec{u}'=\frac{\vec{u}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{۲}{(\sqrt{۲})^۲}(۱,۰,۱)=(۱,۰,۱)=\vec{b}$	۲۰

فصل سوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۳ : ضرب خارجی دو بردار و کاربرد

۱	نادرست : برای دو بردار واحد $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ $\vec{i}\times\vec{j}=(\begin{vmatrix}۰ & ۰\\ ۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{vmatrix})=(۰,۰,۱)=\vec{k}$
۲	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همان زاویه‌ی بین دو بردار $۲\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض می باشد. پس : $\|۲\vec{a}\times\vec{b}\|=\|۲\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos(۳۰^\circ)=۲(۶)(۴)(\frac{۱}{۲})=۲۴$
۳	چون هر سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه واقعند، پس حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر صفر است. زیرا کلاً با سه بردار واقع بر یک صفحه، متوازی السطوحی ایجاد نمی شود.
۴	با معلوم بودن مختصات سه رأس مثلث ABC، مساحت مثلث را می توان با استفاده از ضرب خارجی به شکل زیر به دست آورد. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(۲,-۱,۳)-(-۱,۱,۰)=(۳,-۲,۳)$ $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(۳,۱,۴)-(-۱,۱,۰)=(۴,۰,۴)$ $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۲ & ۳\\ ۰ & ۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۳\\ ۴ & ۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & -۲\\ ۴ & ۰\end{vmatrix})=(-۸,۰,۸)$  پس مساحت مثلث مورد نظر به صورت زیر است. $S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۸)^۲+(۰)^۲+(۸)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴+۰+۶۴}=\frac{۱}{۲}\times۸\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$
۵	درست، برابر هر بردار مانند $\vec{a}$ ثابت می شود که $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$
۶	اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به شکل زیر به دست می آید. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(-۱,۲,۰)-(۰,-۱,۱)=(-۱,۳,-۱)$ $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(۱,۰,-۱)-(۰,-۱,۱)=(۱,۱,-۲)$ $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ ۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & -۱\\ -۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & ۱\end{vmatrix})=(-۵,-۳,-۴)$ 

پس مساحت مثلث مورد نظر به صورت زیر است. $S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۵)^۲+(-۳)^۲+(-۴)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۵۰}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$	
$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta\to ۱۰=۳\times۵\times\cos\theta\to\cos\theta=\frac{۲}{۳}$ $\xrightarrow{\sin^۲\theta=۱-\cos\theta}\sin^۲\theta=۱-(\frac{۲}{۳})^۲\to\sin\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta=۳\times۵\times\frac{\sqrt{۵}}{۳}=۵\sqrt{۵}$ $S_\Delta=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\times۵\sqrt{۵}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۵}$	۷
$\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۲&۲\\-۳&۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰&۲\\۲&-۳\end{vmatrix})=(۶,۴,-۴)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(۶)+(۰)(۴)+(-۱)(-۴)=۶+۰+۴=۱۰$ $v=\|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\|=۱۰$	۸
$\vec{a}=-\vec{k}-\vec{j}=(۰,-۱,-۱)$ $\|\vec{a}\|=\sqrt{(۰)^۲+(-۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$ $\|\vec{b}\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$ $\vec{a}.\vec{b}=(۰)(۲)+(-۱)(-۱)+(-۱)(-۲)=۰+۱+۲=۳$ $\cos\alpha=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\alpha=۴۵^\circ$ ب) کافی است، بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را تعیین کنید. $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۱&-۱\\-۱&-۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱&۰\\-۲&۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰&-۱\\۲&-۱\end{vmatrix})=(۱,-۲,۲)$	۹
$\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۱&۲\\۱&۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲&۲\\۲&۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲&-۱\\۳&۱\end{vmatrix})=(-۴,۲,۵)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(-۴)+(۱)(۲)+(۰)(۵)=-۴+۲+۰=-۲$ چون حاصل $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر صفر نیست، پس سه بردار داده شده روی یک صفحه نیستند.	۱۰
الف : $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}\to\vec{b}=(۱,۰,۱)\to۲\vec{b}=(۲,۰,۲)$ $۲\vec{b}-\vec{c}=(۲,۰,۲)-(۰,۲,۱)=(۲,۰,۲)+(۰,-۲,-۱)=(۲,-۲,۱)$ $\|۲\vec{b}-\vec{c}\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۲)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$ ب :	۱۱

$\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}=(۲,۳,-۱)$ $\vec{b}+\vec{c}=(۱,۰,۱)+(۰,۲,۱)=(۱,۲,۲)$ $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ ۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{vmatrix})=(۸,-۵,۱)$ اکنون مساحت مثلث مورد نظر را به شکل زیر به دست می آوریم. $S=\|\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\|=\sqrt{(۸)^۲+(-۵)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۶۴+۲۵+۱}=\sqrt{۹۰}=۳\sqrt{۱۰}$	
$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}=(۱,۰,۱)$ $\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix})=(۱,۱,-۱)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(۱)+(۱)(۱)+(۰)(-۱)=۲$ $\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix})=(۱,۱,-۱)\rightarrow\|\vec{b}\times\vec{c}\|=\sqrt{۱+۱+۱}=۳$ $h=\dfrac{\|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\|}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}=\dfrac{۲}{\sqrt{۳}}$ اندازه‌ی ارتفاع متوازی السطوح	۱۲
وقتی گفته می شود که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$، نتیجه می شود که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند. لذا وجود دارد یک عدد حقیقی و غیر صفر مانند k که $\vec{b}=\vec{a}k$ یعنی : $\vec{b}=k(۴,-۴,۲)=(۴k,-۴k,۲k)$ پس : $\|\vec{b}\|=\sqrt{(۴k)^۲+(-۴k)^۲+(۲k)^۲}=\sqrt{۱۶k^۲+۱۶k^۲+۴k^۲}=\sqrt{۳۶k^۲}=۶\|k\|$ از طرفی چون $\|\vec{b}\|=۱۲$ ، پس نتیجه می شود: $۶\|k\|=۱۲\rightarrow\|k\|=۲\rightarrow k=\pm۲$ و بنابر صورت مساله باید حالت $k=-۲$ قابل قبول باشد. در نهایت بردار b بدین شکل خواهد بود: $\vec{b}=(-۸,۸,-۴)$	۱۳
الف: درست. در واقع $\vec{i}\times\vec{j}$ بر $\vec{i}$ عمود است. ب : گزینه‌ی۳ ، چون حاصل ضرب خارجی دو برادر بر هر دو بردار عمود است، لذا فقط بردار مورد ۳ عمود بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیست؟	۱۴
صفر ، زیرا: $((\vec{i}\times\vec{k})\times\vec{i}).\vec{j}=(\vec{j}\times\vec{i}).\vec{j}=-\vec{k}.\vec{j}=۰$	۱۵
$\vec{u}=\vec{a}-\vec{j}=(-۲,-۱,۱)$ $\vec{u}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & -۲ & ۳\end{vmatrix}=-\vec{i}+۷\vec{j}+۵\vec{k}=(-۱,۷,۵)$	۱۶

$$\|\vec{u}\times\vec{b}\| = \sqrt{۱+۴۹+۲۵} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

$$S = \frac{۱}{۲}\|\vec{u}\times\vec{b}\| = \frac{۱}{۲}(۵\sqrt{۳})$$

۱۷ چون سه بردار داده شده، روی یک صفحه قرار دارند، پس $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰$ ، لذا برای تعیین مقدار m ، به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\vec{b}\times\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ m & -۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & m \end{vmatrix}\right) = (۱-m, ۲, m+۱)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (m)(۱-m) + (-۱)(۲) + (۱)(m+۱)$$

$$= m - m^۲ - ۲ + m + ۱ = -m^۲ + ۲m - ۱$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰ \to -m^۲ + ۲m - ۱ = ۰ \to m^۲ - ۲m + ۱ = ۰$$

$$\to (m-۱)^۲ = ۰ \to m = ۱$$

روش دوم :

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} m & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & m & -۱ \end{vmatrix} = m^۲ - ۲m + ۱ = (m-۱)^۲$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰ \to (m-۱)^۲ = ۰ \to m = ۱$$

۱۸ بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار غیر صفر بر هر دو برادر عمود است. لذا کافی است ، حاصل ضرب خارجی دو بردار داده شده را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}\vec{k} = -۳\vec{i} + ۵\vec{j} + ۷\vec{k} = (-۳,۵,۷)$$

۱۹

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲ + (\vec{a}.\vec{b})^۲ = \|\vec{a}\|^۲\|\vec{b}\|^۲ \to \|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲ + (۱۲)^۲ = (۱۰)^۲(۲)^۲$$

$$\to \|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲ + ۱۴۴ = ۴۰۰ \to \|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲ = ۲۵۶ \to \|\vec{a}\times\vec{b}\| = ۱۶$$

۲۰

$$S = \frac{۱}{۲}\|۲\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})\| = \frac{۱}{۲}\|۲\vec{a}\times\vec{a} + ۲\vec{a}\times\vec{b}\| = \frac{۱}{۲}\|\vec{o} + ۲\vec{a}\times\vec{b}\| = \frac{۱}{۲}\|۲\vec{a}\times\vec{b}\|$$

$$= \frac{۱}{۲}\times ۲\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta = ۵\times۵\times\sin(\frac{\pi}{۴})$$

$$= ۲۵\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲}$$ واحد سطح

۲۱ حجم چنین متوازی السطوحی برابر **یک** می باشد. زیرا:

$V=\|(\vec{i}\times\vec{j}).\vec{k}\|=\|\vec{k}.\vec{k}\|=\|\vec{k}\|^{۲}=(۱)^{۲}=۱$	
$\vec{a}-\vec{b}=(-m\,,-۱\,,-۲)-(۰\,,-۳\,,m+۲)=(-m\,,۲\,,-m-۴)$ $\vec{a}+\vec{b}=(-m\,,-۱\,,-۲)+(۰\,,-۳\,,m+۲)=(-m\,,-۴\,,m)$ $(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})\rightarrow(\vec{a}-\vec{b})\,.\,(\vec{a}+\vec{b})=۰$ $\rightarrow(-m)(-m)+(۲)(-۴)+(-m-۴)(m)=۰$ $\rightarrow m^{۲}-۸-m^{۲}-۴m=۰\rightarrow m=-۲$ اکنون به ازای $m=-۲$ داریم : $\vec{a}=(۲\,,-۱\,,-۲)$ و $\vec{b}=(۰\,,-۳\,,۰)$ و لذا: $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ -۳ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۲ & ۲\\ ۰ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ ۰ & -۳\end{vmatrix})=(-۶,۰,-۶)$ حال حجم متوازی السطوحی که با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته می شود، به صورت زیر می توان به دست آورید. $V=(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,(\vec{a}\times\vec{b})=(-۶)(-۶)+(۰)(۰)+(-۶)(-۶)=۳۶+۳۶=۷۲$	۲۲
بردار $\vec{o}$ ؛ زیرا دو بردار $(\vec{j}\times\vec{k})$ و $\vec{i}$ موازی‌اند.	۲۳
$S=۶\sqrt{۳}\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۶\sqrt{۳}\rightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta=۶\sqrt{۳}$ $\rightarrow ۴\times۳\times\sin\theta=۶\sqrt{۳}\rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۱}{۲}$ $\vec{a}\,.\,(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\,.\,\vec{a}-\vec{a}\,.\,\vec{b}=\|\vec{a}\|^{۲}-\vec{a}\,.\,\vec{b}=\|\vec{a}\|^{۲}-\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta$ $=(۴)^{۲}-(۴)(۳)(\pm\frac{۱}{۲})=۱۶\pm۶$	۲۴
الف) صفر ؛ زیرا بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است. ب) $-۳\vec{k}$ یا $(۰,۰,-۳)$ ؛ زیرا $(\vec{j}\times\vec{i})-۲\vec{k}=-(\vec{i}\times\vec{j})-۲\vec{k}=-\vec{k}-۲\vec{k}=-۳\vec{k}$	۲۵
$\vec{b}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۰,-۲,۰)-(۱,۰,۰)=(-۱,-۲,۰)$ $\vec{c}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۰,۰,۳)-(۱,۰,۰)=(-۱,۰,۳)$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ ۳ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ -۱ & ۰\end{vmatrix})=(-۶,۳,-۲)$ $S(ABC)=\frac{۱}{۲}\|\vec{b}\times\vec{c}\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^{۲}+(۳)^{۲}+(-۲)^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۹+۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۹}=\frac{۷}{۲}$	۲۶
$\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{vmatrix})=(-۱,۱,-۱)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۰)(-۱)+(-۱)(۱)+(۱)(-۱)=-۲$ $V=\|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\|=\|-۲\|=۲$ حجم متوازی السطوح روش دوم :	۲۷

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۲\rightarrow V=\lvert\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\rvert=۲$	

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان