بام نهایی

«سؤالات موضوعی نهایی حسابان ۲»

پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

آخرین نسخه: شهریور ۱۴۰۳

(جلد دوم؛ خرداد ۱۴۰۱ به بعد)

تهیه کننده: جابر عامری

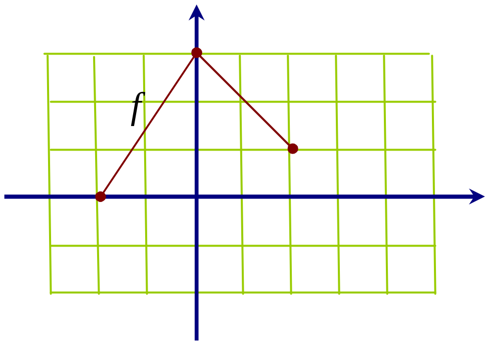
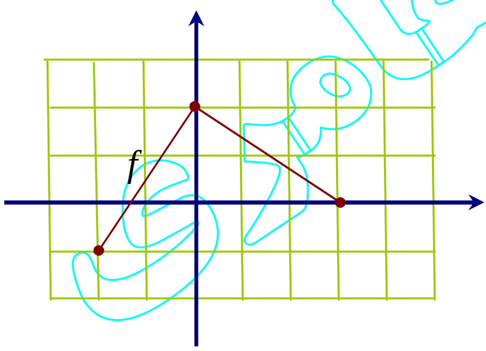
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

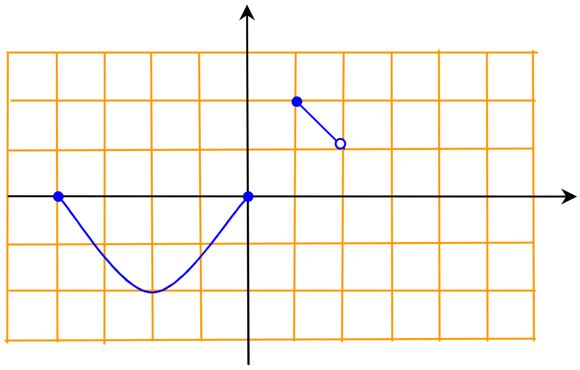
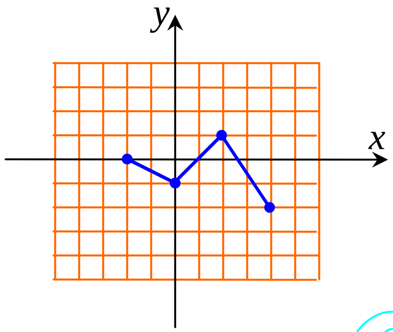
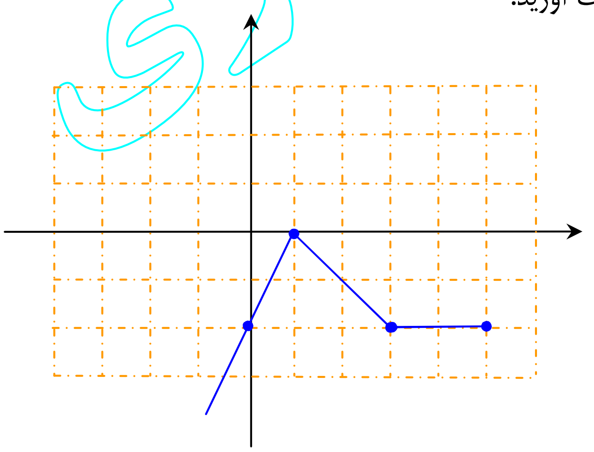
فصل اوّل

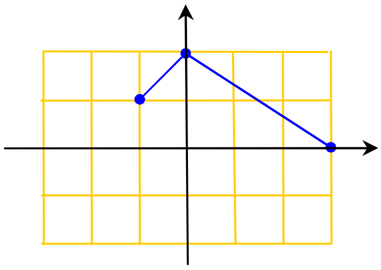
((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۱ : تبدیل نمودار توابع

۱	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید. 	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید. (خارج کشور) 	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازه‌ی $[۰,۴]$ رسم کنید. ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. الف) نقطه‌ی $(-۸,۶)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطه‌ی $(-۸,۱۲)$ روی نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ متناظر است. ب) نمودار تابع $y=-(x-۳)^۳$ را می توان با ۳ واحد انتقال نمودار $y=-x^۳$ به سمت راست رسم کرد.	دی ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

۵	جای خالی را با عدد یک کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر برد تابع $y=\sqrt{x}$ بازه‌ی $[۰,۲]$ باشد، برد تابع $y=۲+\sqrt{x-۲}$ برابر ..... است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۶	نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(۱-x)+۱$ را رسم کنید. 	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۷	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=-۳f(\frac{x}{۲})+۲$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید. 	دی ۱۴۰۲	۱ نمره
۸	نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(۲x-۱)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید. 	خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۹	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ را در راستای محور xها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم. آن‌گاه نمودار تابع $g^{-۱}(x)$ از ناحیه‌ی .... محورهای مختصات نمی گذرد.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

<table>
<tr>
<td>۱۰</td>
<td>الف) اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(2x+1)$ را به کمک آن رسم کنید.
ب) اگر دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[-2,4]$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $k(x) = 3g(-2x)$ را به دست آورید.</td>
<td></td>
<td>مرداد ۱۴۰۳</td>
<td>۱/۵ نمره</td>
</tr>
</table>

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل اوّل

((حسابان ۲))

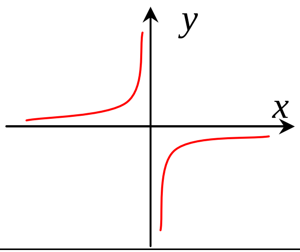
❀❀❀

درس ۱ : توابع چند جمله‌ای

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. تابع $f(x)=(x-۲)^۳+۱$ را در نظر بگیرید. نمودار $f^{-۱}$ از ناحیه‌ی .... محورهای مختصات عبور نمی کند.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

توابع یکنوا (توابع صعودی و نزولی)

۱	ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x$ را رسم نمایید. سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه ای اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است؟	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) تابع $y=-\log_۵^x+۲$ در دامنه‌ی خود یک تابع اکیداً یکنوا است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۳	نمودار $f(x)=(x-۱)^۳+۱$ را رسم کنید. سپس نزولی یا صعودی بودن تابع را در دامنه‌ی آن بررسی کنید. (خارج از کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۴	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر تابع در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله .... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	اگر $\frac{۱}{۲۷}\leq(\frac{۱}{۳})^{۲x+۱}$ باشد. حدود x را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x)=x^۲-۴x$ روی بازه‌ی $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر مقدار a برابر ..... باشد، تابع $f(x)=ax+b$ هم صعودی و هم نزولی است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۸	نمودار تابع $g(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ را به کمک انتقال نمودار تابع $f(x)=x^۳$ رسم کنید. سپس یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه‌ی خود، بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۹	اگر $\frac{۱}{۱۲۵}\leq(\frac{۱}{۵})^{۲x+۱}$ باشد، حدود x را بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره

۱۰	با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید: الف) تابع f در چه بازه هایی اکیداً یکنوا است. ب) آیا تابع در کل دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است؟ 	شهریور ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۱	ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۲)^۳ & x\geq ۱\\ -۲ & ۰\leq x<۱\\ \|x+۱\| & x<۰\end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f+g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۳	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & x<۰\\ x^۲ & x>۰\end{cases}$ را رسم کنید. بزرگترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره

تقسیم و بخش پذیری چند جمله‌ای

۱	باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله ای $P(x)=۸x^۳-۴x^۲+۲$ را بر $۲x+۱$ به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله ای های $p(x)=x^۳+ax+۱$ و $q(x)=۲x^۲-x+۱$ بر $x+۱$ یکسان می باشد، مقدار a را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	اگر باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله ای $P(x)=x^۴+kx^۲-۳$ بر $x+۱$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۴	در چند جمله ای $P(x)=x^۳+ax^۲+b$، مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر -۱ و $P(x)$ بر $x-۱$ بخش پذیر باشد.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۵	اگر چند جمله ای $x^۲+ax-۸$ بر $x-a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۶	مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x)=x^۳-ax+b$ بر $x-۲$ بخش پذیر باشد و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x+۱$ برابر ۳ باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۷	اگر باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله ای $P(x)=۳x^۲+mx+۲m+۱$ بر $x-۲$ برابر ۳ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله ای $f(x)=mx^۲-mx+۳$ بر $x+۲$ را تعیین کنید.	دی ۱۴۰۲	۱ نمره
۸	اگر چند جمله‌ای $P(x)=x^۳+mx+۲$ بر $x-۲$ بخش پذیر باشد، آنگاه باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره

۹	اگر چندجمله‌ای $p(x)=x^{3}+kx^{2}+2$ بر $x-k$ بخش پذیر باشد، مقدار k را بیابید.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره

اتحادهای جبری تکمیلی و کاربرد

۱	چندجمله‌ای $x^{5}+32$ را بر حسب عامل $x+2$ تجزیه کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	عبارت $\dfrac{x^{5}+1}{x+1}$ را ساده کنید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. عبارت $x^{16}+1$ بر $x+1$ بخش پذیر است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۴	چند جمله‌ای $x^{5}-1$ را طوری تجزیه کنید که $x-1$ یک عامل آن باشد.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر n عدد طبیعی زوج و a عدد حقیقی باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای $x^{n}+a^{n}$ بر $x+a$ بخش پذیر است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

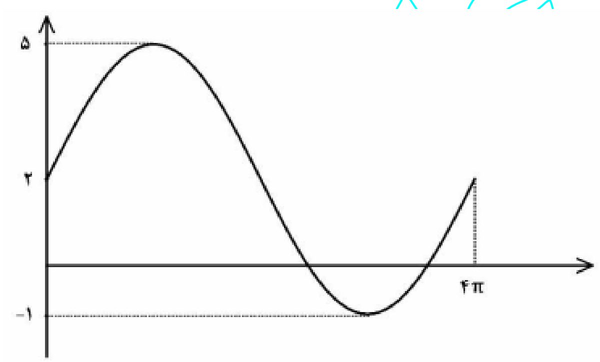
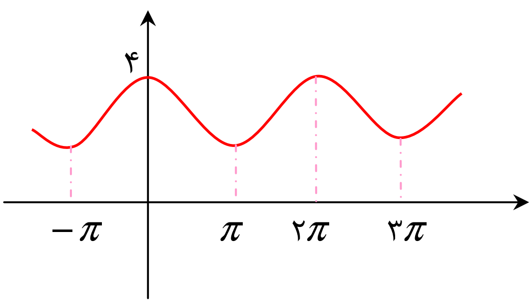
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

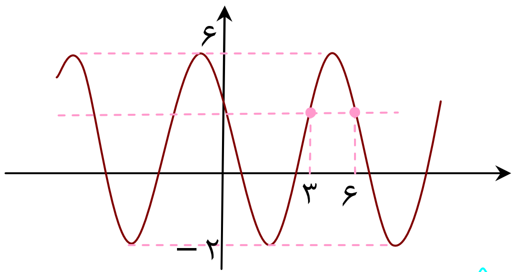
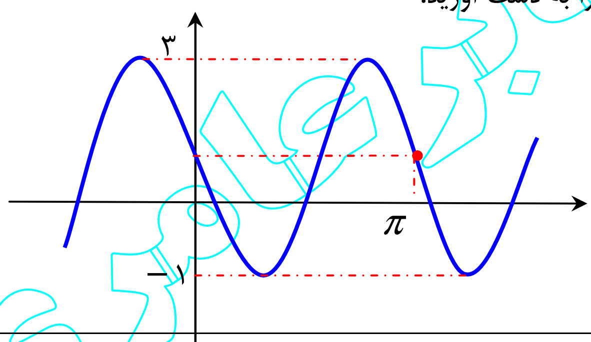
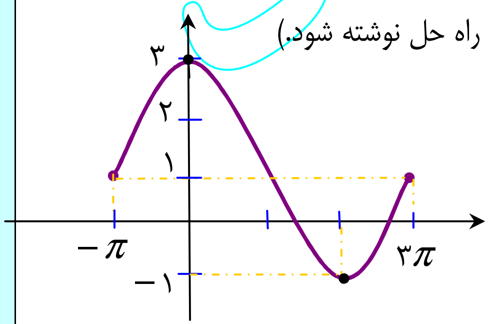
فصل دوم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : تناوب و توابع متناوب

۱	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب تابع $y=۷\sin(\frac{-\pi}{۲}x)+۲$ برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	ضابطه‌ی تابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن ۳ ، مقدار ماکزیمم آن ۹ و مقدار مینیمم آن ۳ باشد. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه‌ی $y=a\sin bx+c$ است. مقادیر a و b و c و ضابطه‌ی آن را مشخص نمایید.  	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	نمودار تابع $f(x)=a+\cos bx$ به صورت زیر است. حاصل $a+b$ را به دست آورید. $(b>۰)$  	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۵	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=۳\sin ۲x$ ، به ترتیب برابر ..... و ..... است.	دی ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

۶	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin bx$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد، مقدار b برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۷	ضابطه‌ی تابعی به صورت $y=a\cos bx+c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن ۲ ، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن ۱− باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. دوره تناوب تابع $f(x)=۵\cos\frac{x}{۲}+۱$ برابر با ۴π است	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۹	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=a\sin(bx)+c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه‌ی آن را بنویسید. 	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۰	نمودار داده شده در شکل زیر مربوط به تابع با ضابطه‌ی $y=a\sin b+c$ است. با فرض $a>۰$ ، مقادیر a و b و c را به دست آورید. 	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۱	نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع با ضابطه‌ی $y=a\cos(bx)+c$ است. اگر $b<۰$ باشد، مقادیر a و b و c را به دست آورید. (راه حل نوشته شود.) 	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره

معرفی تابع تانژانت

۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) در بازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}<\theta<۲\pi$ ، مقدار $\tan\theta$ از مقدار $\sin\theta$ کوچکتر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. (خارج کشور) برد تابع تانژانت ($y=\tan x$) برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع تانژانت در هر بازه ای که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. دامنه‌ی تابع $y=\tan(۳x)$ برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع تانژانت ($f(x)=\tan x$)، در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ تابعی صعودی است.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y=\tan x$ در مجموعه‌ی $[۰,۲\pi]-\{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\}$ ، اکیداً صعودی است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل دوم

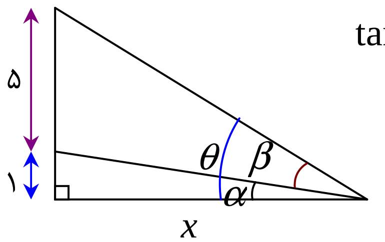
((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۲ : معادلات مثلثاتی

۱	معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۳	معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x - \cos x = 0$ را حل کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۴	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را در بازه‌ی $0 \le x \le \pi$ حل کنید.	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	معادله‌ی $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۶	جواب معادله‌ی مثلثاتی $4\sin x + 2\sqrt{3} = 0$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۷	معادله‌ی مثلثاتی $\sqrt{3}\tan 3x - 1 = 0$ را حل کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۸	معادله‌ی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۹	معادله‌ی مثلثاتی $\tan 5x = \tan x$ را حل کنید. سپس جواب هایی از آن را که در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ قرار دارند، مشخص کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره

روابط مثلثاتی

۱	نشان دهید در شکل زیر رابطه‌ی بین زاویه‌ی β و x به صورت زیر است. $\tan\beta = \frac{5x}{x^2+6}$ 	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل سوم

((حسابان ۲))

❁❁❁

درس ۱ : حدهای نامتناهی

۱	حد زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲}$	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	حد زیر را در صورت وجود بیابید.(خارج کشور) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} \frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۳	حدود زیر را بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{[x]-۲}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{۲}{\tan x}$	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \left(\frac{x+۱}{\tan x}\right)$ برابر ...... است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{(۲-x)^۳}=+\infty$ باشد، حدود a را تعیین کنید.	دی ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۶	حدود توابع زیر در صورت وجود بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^-} \frac{۵x}{\|۲x-۱\|}$ ب) $\lim\limits_{x\to (-۳)^-} \frac{x+۳}{x^۲+۶x+۹}$	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۷	حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{[x]-۱}{(x-۱)^۲}$	شهریور ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره

	حاصل حد $\lim_{x\to\pi^+}\frac{۱}{\sin x}$ برابر با $-\infty$ است.			
۹	حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $$\lim_{x\to(-۵)^-}\frac{x^۲+۲x-۱۵}{x^۲+۱۰x+۲۵}$$	دی ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۰	حد زیر را محاسبه کنید. (نماد [ ] علامت جزء صحیح است.) $$\lim_{x\to۱^+}\frac{[۲x]-۱}{x-۱}$$	خرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\tan x$ برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{x+۱}{\tan x}$ برابر .... است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۳	حد زیر را محاسبه کنید. $$\lim_{x\to۳}\frac{x+۱}{(x-۳)^۲}$$	مرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

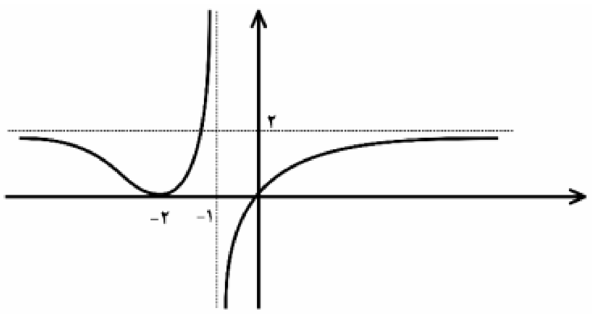
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل سوم

((حسابان ۲))

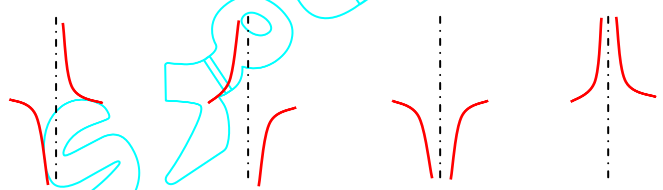
❋❋❋

درس ۲ : حد در بی نهایت

۱	حد زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x-x^{۳}}{۲x-۱}$	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(۵-۳x-۴x^{۳})$ برابر .... است. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۳	حد زیر را به دست آورید. (خارج کشور) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۵x^{۳}+۲x-۱}{-۲x^{۳}+۴}$	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	حد زیر را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^{۲}+۲x+۱}{۴x-۱}$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۵	با توجه به نمودار تابع f ، موارد زیر را به دست آورید.  الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}f(x)\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}f(x)\end{cases}$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^{۲}+x}{۲x^{۲}+۳}=۷$ آنگاه m برابر عدد .... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۷	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{۴}+۳x-۱}{۲+x-x^{۴}}$	شهریور ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره

۸	حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4-x+x^2}{5-2x^2}$	دی ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۹	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x}{1-x^2}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2x+1)$	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۰	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-4x^2}{-x^3\lvert x\rvert-2}$	مرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره

خطوط مجانب نمودار تابع (مجانب های افقی و قائم)

۱	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ را بنویسید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	اگر خط $y=2$ مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{2x^2-3x}$ باشد. مقدار a را بیابید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{x-4x^3}{x^3+5}$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۵	کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2[x]}{4-x}$، در نزدیکی مجانب قائم آن است؟ دلیل خود را بنویسید.  (ت) (پ) (ب) (الف)	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۶	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+2}$ را در صورت وجود بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۷	جای خالی را با عدد یک کلمه‌ی مناسب کامل کنید. مجانب های افقی تابع $y=\dfrac{\lvert x\rvert+1}{2x-1}$ برابر ...... و ...... است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۸	مجانب قائم منحنی تابع $f(x)=\dfrac{1}{x-\lvert x\rvert}$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره

۹	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{۴-۳x-x^{۲}}$ را در صورت وجود بیابید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۰	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x^{۳}+۲x}$ را به دست آورده و سپس وضعیت نمودار تابع را در نزدیکی مجانب قائم آن نمایش دهید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۱	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{x-۳}{x^{۲}-۹}$ را در صورت وجود به دست آورید. سپس وضعیت نمودار تابع f را در همسایگی مجانب قائم آن نمایش دهید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره

تهیه کننده : جابر عامری

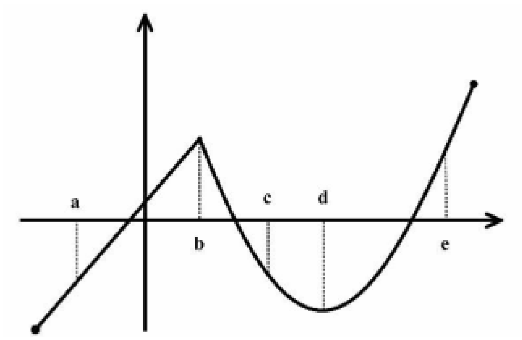
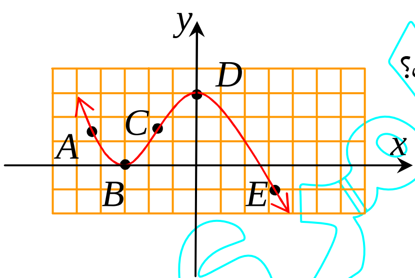
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

۱	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است، طول نقطه‌ای که: الف : تابع در آن مشتق پذیر نیست. ب : مماس در آن موازی محور طول ها است. پ : مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.  	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۲	با توجه به نمودار تابع مقابل : الف) در کدام نقطه، مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟ ب) در کدام نقطه، مقدار تابع و مقدار مشتق تابع صفر است؟ پ) در بین نقاط داده شده،کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟ ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.  	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره

مشتق تابع در یک نقطه

۱	اگر $f(x)=x^{۲}-۳x$ باشد، با استفاده از تعریف، $f'(۱)$ را حساب کنید. (خارج از کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $f'(۱)=۲$ و $g'(۱)=-۳$ باشد، حاصل $(۳f+g)'(۱)$ برابر ۹ است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره

شیب و معادله‌ی خط مماس

۱	معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۰$ واقـع بـر نمـودار تابع را بنویسید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر $f'(۴)=۲$ و $f(۴)=-۱$ ، خط مماس بر نمودار f در $x=۴$، محور y ها را در نقطه‌ای بـه	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

	عرض .... قطع می کند.		
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $x=۲$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ در نقطه‌ی $(۲,۰)$ است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۲ : مشتق پذیری و پیوستگی

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|۲x-۴\|$ را در $x=۲$ بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) اگر خط $x=a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $(a, f(a))$ باشد، آنگاه $f'(x)$ موجود است.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	نشان دهید $x=۰$ ، مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ است. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۵	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ...... ، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر نیست.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x)=[x]$ در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق پذیر است	خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۸	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x-۴ & x<۱ \\ ۲x^{۲}-۳ & x\geq ۱ \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۹	با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی نمایید.	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۱۰	تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+x & x\leq ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق پذیری تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

۱۱	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} \lvert x \rvert & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۲	اگر $f(x)=\lvert x\rvert(x-2)$ باشد. به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع f را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره

تابع مشتق

۱	با استفاده از تعریف مشتق، نشان دهید، اگر $f(x)=\sqrt{x}$ ، آنگاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

محاسبه‌ی مشتق توابع

۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(-3x^2+x)^5(2x)$ ب) $g(x)=5\tan x+\sin x^2$ پ) $h(x)=\frac{2}{x}$	خرداد ۱۴۰۱	۲/۵ نمره
۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خارج کشور) الف) $y=\frac{3x^2}{x^3-5x+2}$ ب) $y=\cos^4(3x-2)$	خرداد ۱۴۰۱	۲ نمره
۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(4x^2-5x)^3(\sqrt{x}+1)$ ب) $g(x)=\frac{9x+1}{x-x^2}$ پ) $h(x)=\sin(3x^2)$	شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره
۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\sqrt{7x}(3x^2+2)$ ب) $g(x)=\cos^3(2x)-\frac{1}{x}$	دی ۱۴۰۱	۲/۲۵ نمره
۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(5x^3-x)^9(\sqrt{2x}+1)$ ب) $g(x)=\frac{4\tan x}{3x^2-1}$	خرداد ۱۴۰۲	۲ نمره
۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(x^4+2x)(\sqrt{x})$ ب) $g(x)=3\tan x-\sin^3(2x)$	شهریور ۱۴۰۲	۲ نمره
۷	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $f(x)=\frac{5\tan x}{1-\sin x}$ ب) $g(x)=\cos^7(x^2)$ پ) $h(x)=(3x+5)^6$	دی ۱۴۰۲	۲/۲۵ نمره
۸	اگر $f(x)=2x^3+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشند، حاصل $(f+g)'(4)+(f\times g)'(1)$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	خرداد	۲

	الف) $f(x)=(x^{۳}+۱)^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$ ب) $g(x)=\sin^{۲}۳x+\tan(x^{۲})$	۱۴۰۳	نمره
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+۱}}{x^{۳}-۶x+۱}$ ب) $g(x)=۲\tan x+\cos^{۵}(۲x^{۳})$	مرداد ۱۴۰۳	۲/۲۵ نمره
۱۱	اگر $f(۲)=۷$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{۲x-۴}=۵$ باشد. مشتق تابع $g(x)=xf(x)$ را در $x=۲$ به دست آورید.	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره

معادله‌ی خط مماس

۱	معادله‌ی مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۸$ ، در نقطه‌ی تقاطع آن با محور x ها ، را بنویسید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره

مشتق تابع مرکب و قاعده‌ی زنجیری

۱	اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ و $f(۱)=۱$ ، مقدار مشتق $(f+g)of$ در $x=۱$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره

مشتق مراتب بالاتر

۱	اگر تابع $f(x)=\cos ۲x$ باشد، مقدار $f''(\frac{\pi}{۸})$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر $f(x)=x^{۳}+۴x^{۲}-۱$ باشد، حاصل $f''(-۱)$ برابر .... است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

مشتق پذیری در یک فاصله

۱	نمودار تابع زیر را رسم کرده و مشتق پذیری f را روی بازه‌ی $[-۲,۰]$ بررسی کنید. (خارج کشور) $f(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x<-۱\\ x+۱ & -۱\le x<۲\end{cases}$	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع f روی بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه‌ی این بازه مشتق پذیر باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۳ : مفهوم آهنگ تغییر و کاربرد آن

۱	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله‌ی متحرک به صورت $f(t)=t^3-t$ بر حسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=4$ چقدر است؟ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۳	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=2t^2-t+3$ بر حسب متر است. (t بر حسب ثانیه است.) الف : سرعت متوسط تابع در بازه‌ی $[0,3]$ را به دست آورید. ب : سرعت لحظه ای تابع را در $t=4$ به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t$ گرم است. در چه لحظه ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی زمانی $0\le t\le 4$ می شود؟	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	در تابعی با ضابطه‌ی $f(t)=\frac{120}{t}+5$ ، مجموع آهنگ لحظه ای تغییر در لحظه‌ی $t=2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه‌ی $[4,6]$ را بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۶	تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{3x-6}{x^2+2}$ را در نظر بگیرید؛ الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی $[-2,0]$ را بدست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه ای در $x=-1$ را بدست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای آن همواره مثبت است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۸	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+5}$ را وقتی متغیر از $x=-1$ به $x=4$ تغییر می کند، به دست آورید.	دی ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره

۹	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله‌ی $h(t)=-۵t^{۲}+۴۰t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانیه) الف) سرعت متوسط جسم در بازه‌ی زمانی $[۳,۴]$ را به دست آورید. ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر ۲۰ (متر بر ثانیه) است.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۰	تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. الف) آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی $[۰,۲۵]$ را به دست آورید. ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک در ۴۹ ماهگی را به دست آورید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

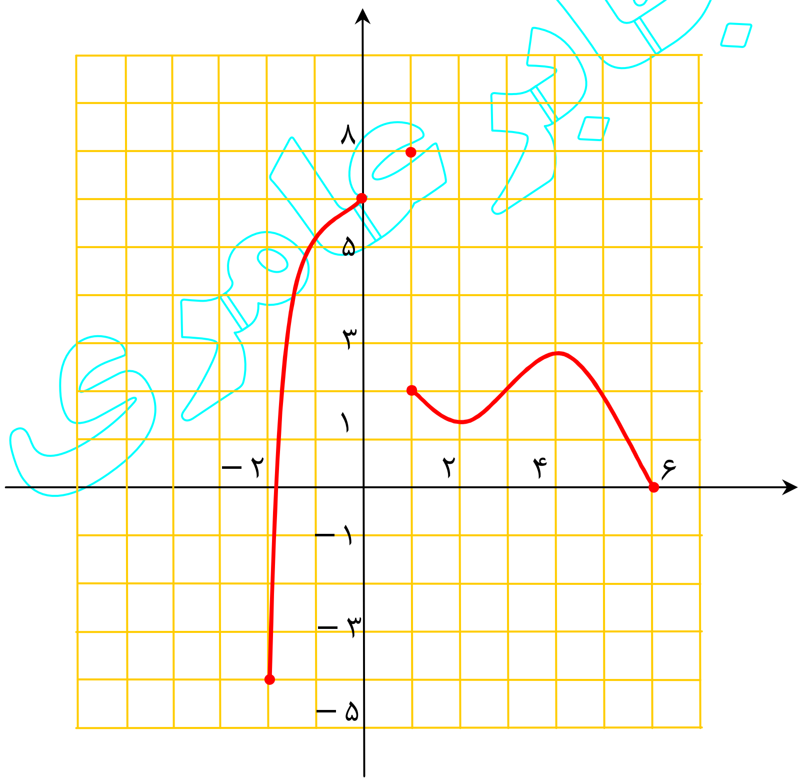
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

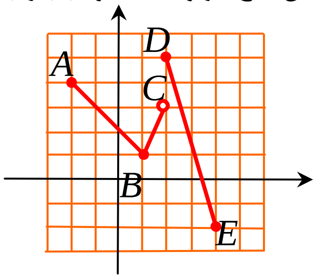
فصل چهارم

((حسابان ۲))

❊❊❊

درس ۱ : اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. هر نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید. ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید. پ) طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی را بنویسید. ت) طول نقطه‌ی مینیمم نسبی را بنویسید.  	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	مقادیر اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه‌ی c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم، $f(x) \le f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک .... تابع f می نامیم.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

۵	طول نقاط اکسترمم های نسبی و مطلق تابع مربوط به نمودار زیر را مشخص کنید. 	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۶	با رسم جدول تغییرات ، تعیین کنید که تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^2+1$ ، در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $f'(c)=0$ باشد، آنگاه $x=c$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۸	اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=x^5-5x$ را در بازه‌ی $[0,2]$ به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۹	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-6x^2$ را روی بازه‌ی $[-2,3]$ بیابید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ برقرار باشد.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $x=c$ طول یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، آنگاه $f'(c)=0$	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۲	مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-12x$ در بازه‌ی $[-1,3]$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۳	نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x)=x^3-6x^2$ را در بازه‌ی $[-1,3]$ در صورت وجود بیابید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره

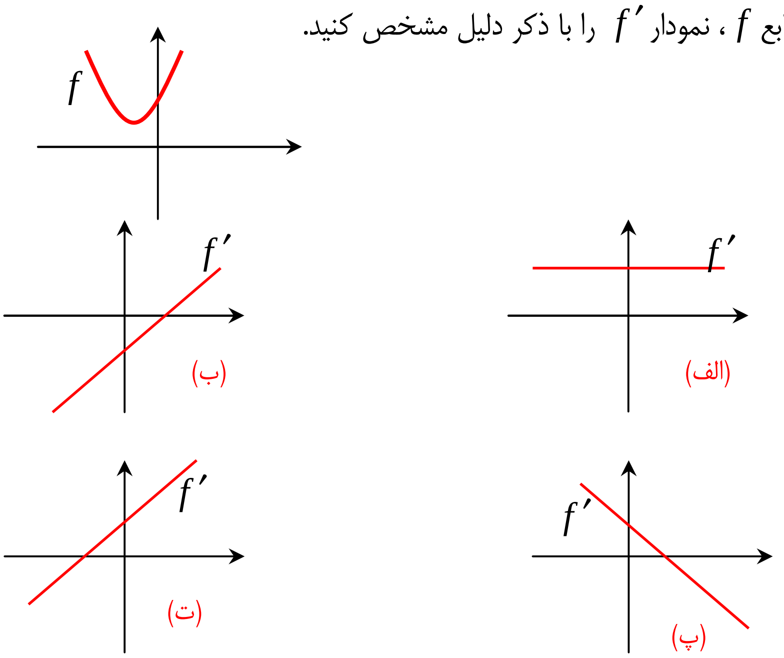
حل مسائل بهینه سازی

۱	یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ، ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

حل مسائل پارامتری

۱	اگر نقطه‌ی $A(-1,1)$ نقطه‌ی عطف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^3+bx^2+2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax-b$ طوری پیدا کنید که نقطه‌ی $(1,2)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره

نمودار تابع مشتق

۱	با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید. 	دی ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل پنجم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۲ : جهت تقعر نمودار یک تابع

۱	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. اگر برای هر x در بازه‌ی I : $f''(x)>0$ ، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به .... دارد.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) در نقطه‌ی عطف، علامت $f''(x)$ تغییر می کند.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر برای تابع f داشته باشید $f''(c)=0$ آنگاه همواره نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی عطف تابع است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	ابتدا تقعر تابع $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ را در دامنه‌ی آن بررسی نمایید و سپس نقطه‌ی عطف آن را در صورت وجود، به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

نقطه‌ی عطف

۱	ضرایب a و b را در تابع $y=x^3+ax^2+b$ ، طوری بیابید که نقطه‌ی $(1,4)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۲	جهت تقعر و مختصات نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=x(x^2-3)+1$ را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ ، طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(0)=1$ و $f(2)=-3$ و $x=1$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۴	نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$ ، نقطه‌ی $(1,-11)$ می باشد، مقدار a و b را بیابید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۵	مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ طوری به دست آورید که در نقطه‌ی $(-1,3)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $x=1$ طول نقطه‌ی عطف آن باشد.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۶	اگر $f(x)=ax^3+3x^2+1$ باشد، مقدار a را طوری بیابید که $x=\frac{1}{2}$ طول نقطه‌ی عطف	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره

	نمودار تابع باشد.		

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل پنجم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۳ : رسم نمودار توابع چندجمله ای

۱	جدول رفتار و نمودار تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را رسم کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۲x^{۲}+۳x$ را رسم کنید.	دی ۱۴۰۱	۲/۲۵ نمره
۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{۲}{۳}x^{۳}-x^{۲}$ را رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۲	۲ نمره
۴	جدول رفتار و نمودار تابع $y=(x+۲)(x-۴)^{۲}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره

توابع هموگرافیک

۱	فرض کنید، محل تقاطع مجانب های تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، نقطه‌ی $(۲,۱)$ باشد. اگر این تابع از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره

رسم توابع هموگرافیک

۱	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۲}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۲/۵ نمره
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۳}{۱-x}$ را رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{-x}{x+۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۷۵ نمره
۴	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ را رسم کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۷۵ نمره
۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ را رسم کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۲ نمره

فصل اوّل

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۱ : تبدیل نمودار توابع

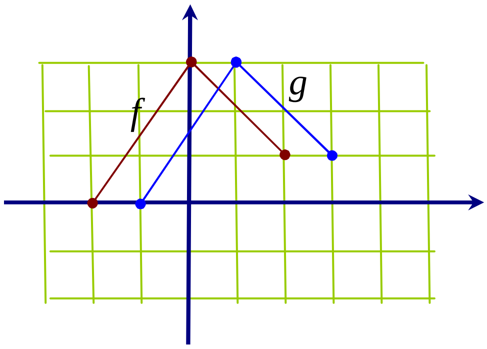
۱

طبق قوانین مربوط به تبدیلات ، برای رسم نمودار تابع g کافی است که طول نقاط نمودار تابع f را یک واحد اضافه کنیم. یعنی نمودار f را یک واحد به سمت راست، در راستای افقی حرکت دهیم.

$f:$	x	-۲	۰	۲
	y	۰	۳	۱

$\Rightarrow$

$g:$	x	-۱	۱	۳
	y	۰	۳	۱



حال بر می توان دامنه‌ی تابع g را نیز به شکل بیان $[-۱,۳]$کرد.

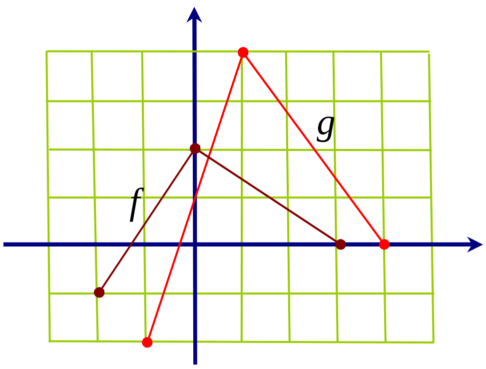
۲

برای رسم نمودار تابع g، طول نقاط نمودار تابع f را یک واحد اضافه می کنیم و عرض نقاط را دو برابر می کنیم.

$f:$	x	-۲	۰	۳
	y	-۱	۲	۰

$\Rightarrow$

$g:$	x	-۱	۱	۴
	y	-۲	۴	۰



اکنون با توجه به نمودار g ، می توان دامنه و برد آن را بدین شکل تعیین کرد.

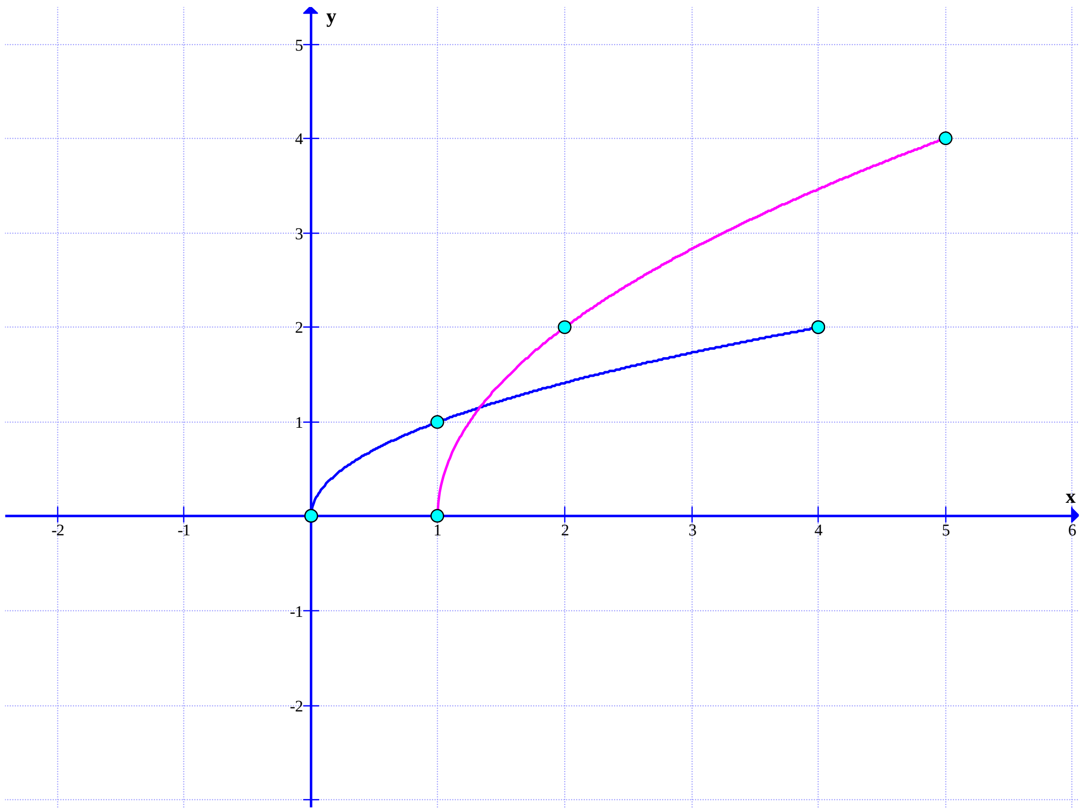
$D_g = [-۱,۴]$ و $R_g = [-۲,۴]$

۳ طول نقاط نمودار تابع f یک واحد اضافه می شوند ولی عرض نقاط دو برابر می شود.

f	x	۰	۱	۴
	y	۰	۱	۲

$\longrightarrow$

g	x	۱	۲	۵
	y	۰	۲	۴



$D_g = [۱,۵]$ و $R_g = [۰,۴]$

۴ الف) نادرست ب) درست

۵ طبق قوانین مربوط به تبدیلات توابع، کافی است به ابتدا و انتهای بازه‌ی داده شده ، دو واحد اضافه کنید. لذا برد تابع جدید می شود: $[۲,۴]$

۶ واضح است که

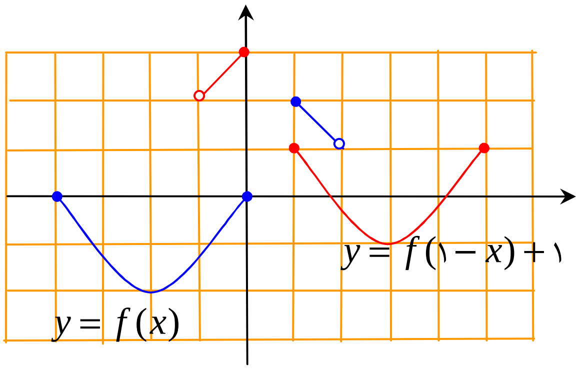
$$y = f(۱-x)+۱ \rightarrow y = f(-(x-۱))+۱$$

حال طبق قوانین مربوط به تبدیلات، می توان چنین نوشت.

نمودار تابع را یک واحد در راستای قائم به بالا منتقل می کنیم. سپس نسبت به محور طول ها قرینه می کنیم و بعد یک واحد سمت راست در راستای افقی منتقل می کنیم.

همچنین به کمک نقاط اصلی نمودار داده شده می توان چنین نوشت.

$y = f(x)$	x	−۴	−۲	۰	۱	۲
	y	۰	−۲	۰	۲	۱
$y = f(۱-x)+۱$	x	۵	۳	۱	۰	−۱
	y	۱	−۱	۱	۳	۲

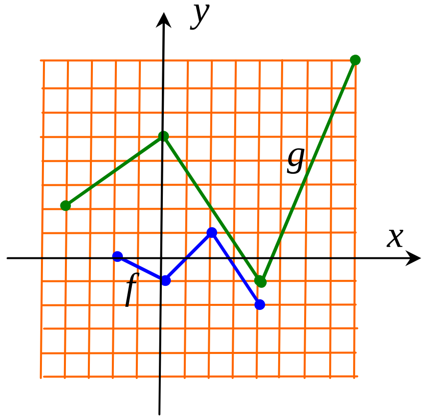


۷ به کمک قوانین مربوط به تبدیلات و با استفاده تنظیم جدول می توان نمودار g رسم می شود.

$f:$	x	-۲	۰	۲	۴
	y	۰	-۱	۱	-۲

طول نقاط را دو برابر می کنیم. عرض نقاط را ابتدا در -۳ ضرب و سپس با ۲ جمع می کنیم.

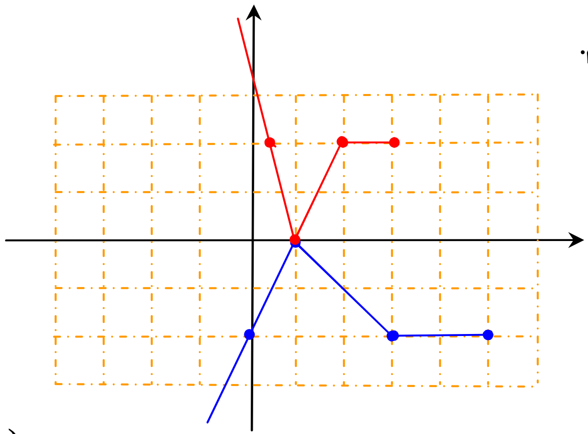
$g:$	x	-۴	۰	۴	۸
	y	۲	۵	-۱	۸



و لذا برد تابع g به صورت زیر خواهد شد. $R_g=[-۱,۸]$

۸ قرار می دهیم : $۲x-۱=t \to x=\frac{t+۱}{۲}$. لذا طول نقاط را با یک جمع کرده و بر دو تقسیم می کنیم. عرض نقاط را فقط قرینه می کنیم.

x	۰	۱	۳	۵
y	-۲	۰	-۲	-۲
$\Downarrow$				
x	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
y	۲	۰	۲	۲



$D=(-\infty,۳]\ ,\ [۰,+\infty)$

۹ دوم ؛ زیرا

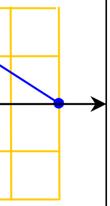
$$f(x)=\sqrt[۳]{x} \to g(x)=\sqrt[۳]{x+۲} \to g^{-۱}(x)=x^{۳}-۲$$

که واضح است نمودار تابع $g^{-۱}(x)=x^{۳}-۲$ از ربع دوم نمی گذرد.

۱۰

طبق قوانین تبدیلات، عرض نقاط اصلی نمودار تابع f را ثابت نگه می داریم. اما طول آنها را ابتدا یک واحد کمک کرده و سپس نصف می کنیم.

$f:$	x	-۱	۰	۳
	y	۱	۲	۰



$y=f(۲x+۱)$	x	-۱	$-۰/۵$	۱
	y	۱	۲	۰

ب) چون طبق قوانین تبدیلات، طول نقاط را در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب می کنیم. پس همین را روی ابتدا و انتهای دامنه انجام مـی دهیم ، لذا :

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل اوّل

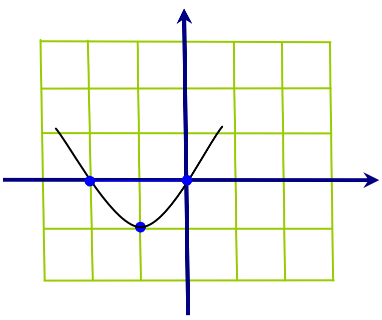
((حسابان ۲))

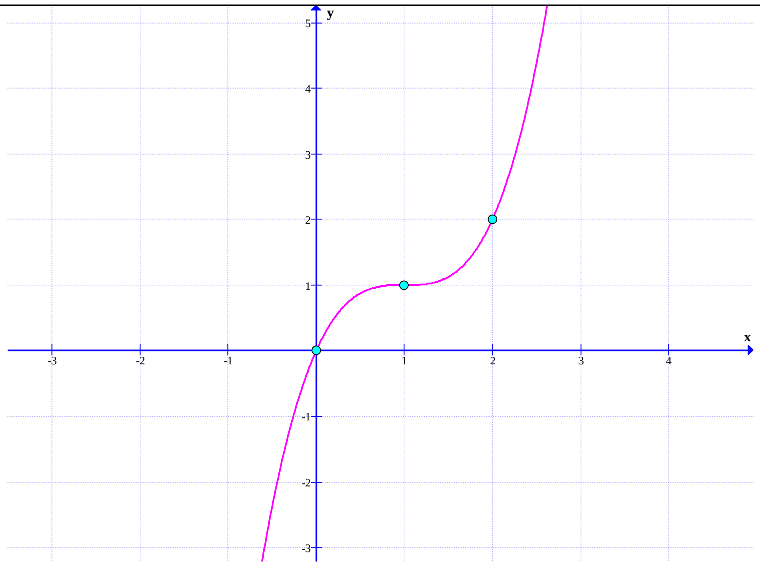
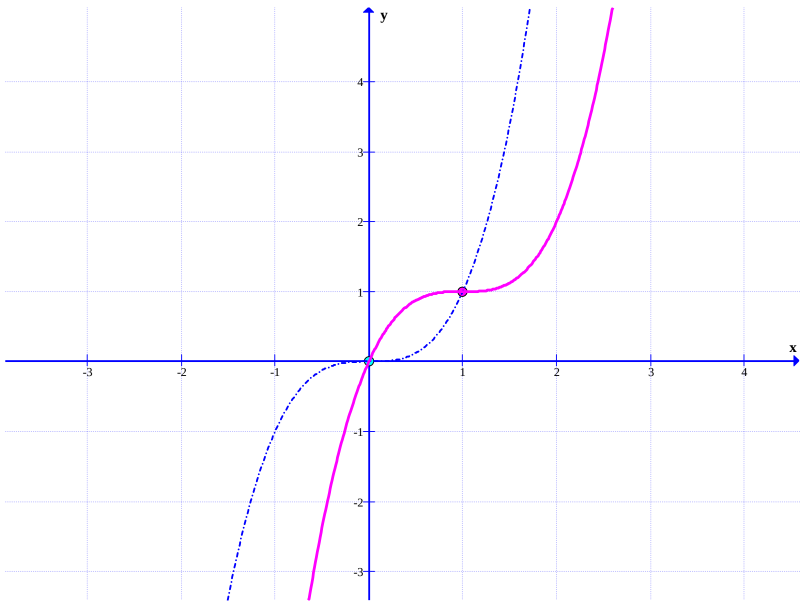
❋❋❋

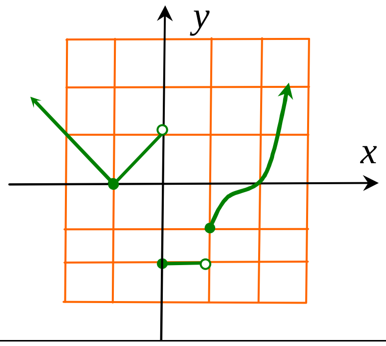
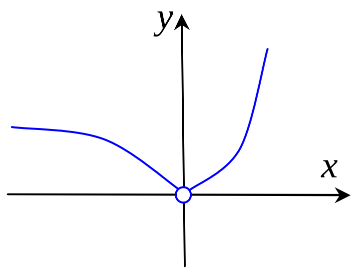
درس ۱ : توابع چند جمله ای

چهارم ؛ زیرا اگر نمودار تابع $y=x^{۳}$ را دو واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، بـه سـادگی معلوم می شود که $f(x)=(x-۲)^{۳}+۱$ از ناحیه‌ی چهارم نمی گذرد.	۱

توابع یکنوا (توابع صعودی و نزولی)

<table>
<tr><td>تابع $f(x)=x^{۲}+۲x$ یک تابع درجه‌ی دوم است (سهمی). برای رسم نمودار تابع ابتدا مختصات رأس سهمی را تعیین می کنیم.
$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{۲(۱)}=-۱ \to f(-۱)=(-۱)^{۲}+۲(-۱)=-۱ \to S(-۱,-۱)$
<table><tr><td rowspan="2">$f:$</td><td>x</td><td>-۲</td><td>-۱</td><td>۰</td></tr><tr><td>y</td><td>۰</td><td>-۱</td><td>۰</td></tr></table>

به کمک نمودار به سادگی معلوم است که تابع در فاصله‌ی $(-\infty,-۱]$ نزولی اکید و در فاصله‌ی $[-۱,+\infty)$ صعودی اکید است.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>درست، هر تابع لگاریتمی در دامنه‌ی خود یا صعودی اکید و یا نزولی اکید است و لذا اکیداً یکنوا است.</td><td>۲</td></tr>
<tr><td><table><tr><td rowspan="2">$f:$</td><td>x</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>y</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></table></td><td>۳</td></tr>
</table>

	 این تابع در تمام نقاط دامنه اش که مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، صعودی اکید است.
۴	ثابت
۵	بنابر اینکه تابع نمایی $f(x)=a^x$ برای حالت $0<a<1$ ، نزولی اکید است. پس : $(\frac{1}{3})^{2x+1} \le \frac{1}{27} \to (\frac{1}{3})^{2x+1} \le (\frac{1}{3})^{3} \to 2x+1 \ge 3 \to x \ge 1$
۶	درست
۷	صفر
۸	$g(x)=x^3-3x^2+3x-1+1 \to g(x)=(x-1)^3+1$ لذا از اینجا معلوم می شود که نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا منتقل می کنیم، تا اینکه نمودار $g(x)$ رسم شود.  تابع $g(x)$ اکیدا یکنوا (صعودی اکید) است.
۹	می دانیم که تابع $f(x)=(\frac{1}{5})^x$ ، اکیدا نزولی است، پس می توان نوشت:

	$(\frac{۱}{۵})^{۲x+۱} \le (\frac{۱}{۵})^{۳} \to ۲x+۱ \ge ۳ \to x \ge ۱$
۱۰	تابع در بازه های $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) است ولی تابع در کل دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا نیست.
۱۱	برای هر ضابطه، در محدوده‌ی تعیین شده، نقطه یابی می کنیم. در این صورت، نمودار تابع به صورت زیر خواهد شد.  این تابع در بازه‌ی $[۱,+\infty)$ و $[-۱,۰)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $(-\infty,-۱]$ اکیداً نزولی است.
۱۲	درست ؛ زیرا : $\begin{cases} x_۱ < x_۲ \to f(x_۱) < f(x_۲) \\ x_۱ < x_۲ \to g(x_۱) < g(x_۲) \end{cases} \to f(x_۱)+g(x_۱) < f(x_۲)+g(x_۲)$ $\to (f+g)(x_۱) < (f+g)(x_۲)$
۱۳	به کمک نقطه یابی برای هر شاخه از تابع فوق، نمودار زیر به دست می آید. اکنون با توجه به این نمودار واضح است که بازه‌ی $(۰,+\infty)$، بزرگترین بازه‌ای است که این تابع در آن اکیداً صعودی می باشد. 

تقسیم و بخش پذیری چند جمله های

۱	برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم، کافی است که ریشه عبارت $۲x+۱$ را در $P(x)$ جایگزین کنیم. $۲x+۱=۰ \to x=-\frac{۱}{۲}$ $R=P(-\frac{۱}{۲})=۸(-\frac{۱}{۲})^{۳}-۴(-\frac{۱}{۲})^{۲}+۲=-۱-۱+۲=۰$
۲	$x+۱=۰ \to x=-۱ \to \begin{cases} p(-۱)=(-۱)^{۳}+a(-۱)+۱=-a \\ q(-۱)=۲(-۱)^{۲}-(-۱)+۱=۴ \end{cases}$ $\to -a=۴ \to a=-۴$
۳	$x+۱=۰ \to x=-۱$ $\xrightarrow{P(-۱)=۲} (-۱)^{۴}+k(-۱)^{۲}-۳=۲ \to k=۴$
۴	$x+۲=۰ \to x=-۲$ $P(-۲)=(-۲)^{۳}+a(-۲)^{۲}+b=-۱ \to ۴a+b=۷$

$x-1=0 \to x=1$ $P(1)=(1)^3+a(1)^2+b=0 \to a+b=-1$ $\Rightarrow \begin{cases} 4a+b=7 \\ a+b=-1 \end{cases} \to a=\frac{8}{3} \ , \ b=-\frac{11}{3}$	
$x-a=0 \to x=a$ $R=(a)^2+a(a)-8=2a^2-8 \xrightarrow{R=0} 2a^2-8=0 \to a^2=4 \to a=\pm 2$	۵
$x-2=0 \to x=2$ $P(x)=x^3-ax+b \xrightarrow{x=2} P(2)=(2)^3-a(2)+b$ $\xrightarrow{P(2)=0} 8-2a+b=0 \to -2a+b=-8 \ \ (1)$ $x+1=0 \to x=-1$ $P(x)=x^3-ax+b \xrightarrow{x=-1} P(-1)=(-1)^3-a(-1)+b$ $\xrightarrow{P(-1)=3} -1+a+b=3 \to a+b=4 \ \ (2)$ $\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} -2a+b=-8 \\ a+b=4 \end{cases} \to -3a=-12 \to a=4 \ , \ b=0$	۶
$x-2=0 \to x=2$ $P(2)=4(2)^2+2m+2m+1=4m+13$ $\xrightarrow{P(2)=3} 4m+13=3 \to 4m=-10 \to m=-\frac{5}{2}$ $x+2=0 \to x=-2$ $f(-2)=-\frac{5}{2}(-2)^2-(-\frac{5}{2})(-2)+3=-12$	۷
$x-2=0 \to x=2$ $P(x)=x^3+mx+2 \xrightarrow{x=2} P(2)=(2)^3+m(2)+2$ $\xrightarrow{P(2)=0} 10+2m=0 \to m=-5$	۸
$x-k=0 \to x=k$ $\xrightarrow{p(k)=0} k^3+k(k)^2+2=0 \to 2k^3=-2 \to k^3=-1 \to k=-1$	۹

اتحادهای جبری تکمیلی و کاربرد

$x^5+32=x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$	۱
$\frac{x^5+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1$	۲
نادرست، زیرا به ازای $x=-1$ (ریشه‌ی عبارت $x+1$) مقدار عبارت $x^{16}+1$ برابر صفر نمی شود.	۳

۴	$x^{5}-1=(x-1)(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1)$
۵	نادرست ؛ زیرا باقی مانده برابر صفر نخواهد شد. $x+a=0\rightarrow x=-a$ $\rightarrow R=(-a)^{n}+a^{n}=a^{n}+a^{n}=2a^{n}$

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل دوم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۱ : تناوب و توابع متناوب

۱	$T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{\frac{۲\pi}{۱}}{\lvert -\frac{\pi}{۲}\rvert}=\frac{۴\pi}{\pi}=۴$
۲	با فرض اینکه در تابع $y=a\sin bx+c$ ، مقدار b مثبت باشد، می توان نوشت که : $b=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{b>۰}b=\frac{۲\pi}{۳}$ $a=\pm\frac{\max(f)-\min(f)}{۲}=\pm\frac{۹-۳}{۲}=\pm۳$ $c=\frac{\max(f)+\min(f)}{۲}=\frac{۹+۳}{۲}=۶$ $y=a\sin bx+c\to\begin{cases}y=۳\sin\frac{۲}{۳}\pi x+۶\\ y=-۳\sin\frac{۲}{۳}\pi x+۶\end{cases}$
۳	$\begin{cases}\lvert a\rvert+c=۵\\ -\lvert a\rvert+c=-۱\end{cases}\to c=۲\quad,\quad a=\pm۳$ $\begin{cases}T=۴\pi-۰=۴\pi\\ T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\end{cases}\to ۴\pi=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\to\lvert b\rvert=\frac{۱}{۲}\to b=\pm\frac{۱}{۲}$ $y=a\sin bx+c\to y=۳\sin(\frac{x}{۲})+۲\quad,\quad y=-۳\sin(-\frac{x}{۲})+۲$
۴	ابتدا به کمک دوره‌ی تناوب تابع مقدار b را تعیین می کنیم. $T=۲\pi-۰=۲\pi$ $\to b=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$

	تابع از نقطه‌ی $(۰,۴)$ می گذرد، لذا $f(x)=a+\cos bx \xrightarrow{f(۰)=۴} a+\cos b(۰)=۴ \to a+۱=۴ \to a=۳$ و در نهایت خواهیم داشت: $a+b=۳+۱=۴$
۵	دوره‌ی تناوب $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ $\max(f)=\|a\|+c=\|۳\|+۰=۳$
۶	$T=\frac{۲\pi}{\|b\|} \xrightarrow{T=\frac{\pi}{۳}} \frac{۲\pi}{\|b\|}=\frac{\pi}{۳} \to \|b\|=۶ \to b=\pm ۶$
۷	$b=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ $a=\pm\frac{M-m}{۲}=\pm\frac{۳-(-۱)}{۲}=\pm ۲$ $c=\frac{M+m}{۲}=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$ $y=a\cos bx+c \to \begin{cases} y=۲\cos(\pi x)+۱ \\ y=-۲\cos(\pi x)+۱ \end{cases}$
۸	درست، دوره‌ی تناوب این تابع $T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$ برابر است.
۹	$T=۲(۶-۳)=۶ \xrightarrow{T=\frac{۲\pi}{\|b\|}} \frac{۲\pi}{\|b\|}=۶ \to \|b\|=\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۳}$ $\max(f)=۶ \to \|a\|+c=۶$ $\min(f)=-۲ \to -\|a\|+c=۶$ $\to ۲c=۴ \to c=۲ \to \|a\|=۴$ $f(x)=a\sin(bx)+c \to \begin{cases} f(x)=۴\sin(\frac{\pi}{۲}x)+۲ \\ f(x)=-۴\sin(\frac{\pi}{۲}x)+۲ \end{cases}$
۱۰	$\begin{cases} c=۱ \\ \|a\|=۲ \xrightarrow{a>۰} a=۲ \end{cases}$ $T=\pi=\frac{۲\pi}{\|b\|} \to \|b\|=۲ \xrightarrow{b<۰} b=-۲$

۱۱	$a=\pm\frac{M-m}{۲}\rightarrow a=\pm\frac{۳-(-۱)}{۲}=\pm ۲$ $c=\frac{M+m}{۲}\rightarrow c=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$ $T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\rightarrow \lvert b\rvert=\frac{۲\pi}{T}\rightarrow \lvert b\rvert=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{b<۰} b=-\frac{۱}{۲}$

معرفی تابع تانژانت

۱	درست، کافی است از این فاصله، زاویه ای مانند ۳۰۰ درجه یا همان $\frac{۵\pi}{۳}$ را انتخاب کنیم و سینوس و تانژانت آن را تعیین و مقایسه کنیم. $\sin\frac{۵\pi}{۳}=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin(\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\tan\frac{۵\pi}{۳}=\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan(\frac{\pi}{۳})=-\sqrt{۳}$ $\sqrt{۳}>\frac{\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{\times(-۱)}-\sqrt{۳}<-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow \tan\frac{۵\pi}{۳}<\sin\frac{۵\pi}{۳}$
۲	برد تابع تانژانت به صورت $y=\tan x$ مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی است.
۳	درست
۴	$۳x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\rightarrow x\neq\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in Z$ $D_f=\{x\in R \mid x\neq\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in Z\}$
۵	نادرست، تابع تانژانت در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ از این بازه تعریف نمی شود و لذا نمی توان در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع در این بازه صحبت کرد.
۶	نادرست ؛ زیرا در این بازه شرایط تابع صعودی را ندارد.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل دوم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۲ : معادلات مثلثاتی

۱	می دانیم که $\sin 2x = 2\sin x\cos x$، پس : $\sin 2x - \cos x = 0 \rightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$ لذا : $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ یا $2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad : k \in Z$
۲	$\sin 2x - \cos x = 0 \rightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$
۳	$2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$
۴	$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1} (2\cos^2 x - 1) - \cos x + 1 = 0$ $\rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\rightarrow\begin{cases}\cos x=0\rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\\ 2\cos x-1=0\rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}\rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$	
$2\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\rightarrow \sin 2x=\dfrac{1}{2}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6}}\sin 2x=\sin(\dfrac{\pi}{6})$ $\xrightarrow{k\in Z}\begin{cases}2x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\dfrac{\pi}{12}\\ x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\end{cases}$	۵
$4\sin x+2\sqrt{3}=0\rightarrow \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \sin x=\sin(-\dfrac{\pi}{3})$ $\xrightarrow{k\in Z}\begin{cases}x=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}\\ x=2k\pi+\pi+\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}\\ x=2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$ $\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=\dfrac{5\pi}{3}\ ,\ x=\dfrac{4\pi}{3}$	۶
$\sqrt{3}\tan 3x-1=0\rightarrow \tan 3x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6}}3x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}\quad (k\in Z)$ $\rightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{18}$	۷
$\sin 2x=\sin x\xrightarrow{k\in Z}\begin{cases}2x=2k\pi+x\\ 2x=2k\pi+\pi-x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2k\pi\\ 3x=2k\pi+\pi\end{cases}$ $\rightarrow\begin{cases}x=2k\pi\\ 3x=2k\pi+\pi\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2k\pi\\ x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=(2k+1)\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$	۸
$\tan 5x=\tan x\xrightarrow{k\in Z}5x=k\pi+x\rightarrow 4x=k\pi\rightarrow x=\dfrac{k\pi}{4}$ $5x=k\pi+x\rightarrow 4x=k\pi\rightarrow x=\dfrac{k\pi}{4}$ $\rightarrow\begin{cases}k=0\rightarrow x=0\\ k=1\rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$	۹

روابط مثلثاتی

$\tan\beta=\tan(\theta-\alpha)=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}$ $=\frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x}}{1+(\frac{6}{x})(\frac{1}{x})}=\frac{\frac{5}{x}}{1+\frac{6}{x^2}}=\frac{\frac{5}{x}}{\frac{x^2+6}{x^2}}=\frac{5x^2}{x(x^2+6)}=\frac{5x}{x^2+6}$	۱

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل سوم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۱ : حدهای نامتناهی

۱	$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{2^++2}{2^+-2}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$
۲	$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-1}{(-1)^-+1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$
۳	الف) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]-2}{x-2}=\dfrac{[2^-]-2}{2^--2}=\dfrac{1-2}{0^-}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\dfrac{2}{\tan x}=\dfrac{2}{\tan((\frac{\pi}{2})^+)}=\dfrac{2}{-\infty}=0$
۴	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x+1}{\tan x}\right)=\dfrac{\frac{\pi}{2}+1}{\pm\infty}=0$
۵	$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{ax-3}{(2-x)^3}=\dfrac{2a-3}{0^-}=+\infty\to 2a-3<0\to a<\dfrac{3}{2}$
۶	الف) $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}\dfrac{5x}{\lvert 2x-1\rvert}=\dfrac{5(\frac{1}{2})}{\lvert 2(\frac{1}{2})^--1\rvert}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\lvert 0^-\rvert}=\dfrac{\frac{5}{2}}{0^+}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{x+3}{x^2+6x+9}=\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{x+3}{(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$
۷	$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[x]-1}{(x-1)^2}=\dfrac{0-1}{(1^--1)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$
۸	درست، زیرا :

	$\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin\pi^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$
۹	$\lim_{x\to(-5)^-}\frac{x^2+2x-15}{x^2+10x+25}=\lim_{x\to(-5)^-}\frac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x+5)}$ $=\lim_{x\to(-5)^-}\frac{x-3}{x+5}=\frac{-8}{0^-}=+\infty$
۱۰	$\lim_{x\to1^+}\frac{[2x]-1}{x-1}=\frac{[2^+]-1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$
۱۱	$-\infty$ ؛ در همسایگی راست $\frac{\pi}{2}$، مقدار تابع از هر عدد منفی، کوچکتر است.
۱۲	صفر ؛ زیرا $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{x+1}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}+1}{-\infty}=0$ و $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{x+1}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}+1}{+\infty}=0$
۱۳	$\lim_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}=\frac{3+1}{0^+}=+\infty$

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل سوم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۲ : حد در بی نهایت

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x-x^{۳}}{۲x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^{۳}}{۲x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^{۲}}{۲}=-\infty$	۱
$\lim\limits_{x\to+\infty}(۵-۳x-۴x^{۳})=\lim\limits_{x\to+\infty}(-۴x^{۳})=-۴(+\infty)=-\infty$	۲
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۵x^{۳}+۲x-۱}{-۲x^{۳}+۴}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۵x^{۳}}{-۲x^{۳}}=-\dfrac{۵}{۲}$	۳
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^{۲}+۲x+۱}{۴x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^{۲}}{۴x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{۴}=+\infty$	۴
الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=۲$ ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}f(x)=+\infty\end{cases}$	۵
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^{۲}+x}{۲x^{۲}+۳}=۷\to\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^{۲}}{۲x^{۲}}=۷\to\dfrac{m}{۲}=۷\to m=۱۴$	۶
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{۴}+۳x-۱}{۲+x-x^{۴}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{۴}}{-x^{۴}}=-۱$	۷
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۴-x+x^{۲}}{۵-۲x^{۲}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^{۲}}{-۲x^{۲}}=-\dfrac{۱}{۲}$	۸
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^{۲}-۳x}{۱-x^{۲}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^{۲}}{-x^{۲}}=-۲$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۳x^{۳}+۲x+۱)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-۳x^{۳})=-۳(-\infty)^{۳}=+\infty$	۹

۱۰	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{3}-4x^{2}}{-x^{3}\|x\|-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{3}-4x^{2}}{-x^{3}(-x)-2}$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{3}-4x^{2}}{x^{4}-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{3}}{x^{4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{2}} = 0$

خطوط مجانب نمودار تابع (مجانب های افقی و قائم)

۱	برای تعیین مجانب افقی، کافی است حد تابع را در بی نهایت بدست آوریم. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-x^{2}}{x^{2}+x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^{2}}{x^{2}} = -1$ $\Rightarrow y=-1$ مجانب افقی برای تعیین مجانب قائم، کافی است ریشه های مخرج کسر را تعیین کنیم. $x^{2}+x=0 \to x(x+1)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$ حال چون $x=-1$ ریشه‌ی صورت است، پس مجانب قائم نیست. لذا این تابع فقط یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=0$ دارد.
۲	$x^{2}-4=0 \to x^{2}=4 \to x=\pm 2$ مجانب های قائم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^{2}}{x^{2}-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^{2}}{x^{2}} = 2 \to y=2$ مجانب افقی
۳	$f(x)=\dfrac{ax^{2}+1}{2x^{2}-3x} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax^{2}+1}{2x^{2}-3x} = 2 \to \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax^{2}}{2x^{2}} = 2$ $\to \dfrac{a}{2}=2 \to a=4$
۴	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-4x^{3}}{x^{3}+5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-4x^{3}}{x^{3}} = -4 \to y=-4$ مجانب افقی
۵	گزینه‌ی پ صحیح است. زیرا: $4-x=0 \to x=4$ مجانب قائم برای تعیین وضعیت نمودار تابع ، نسبت به خط مجانب قائم آن به شکل زیر عمل می کنیم. $\lim\limits_{x\to 4^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^{+}} \dfrac{2[x]}{4-x} = \dfrac{2(4)}{4-4^{+}} = \dfrac{8}{0^{-}} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 4^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^{-}} \dfrac{2[x]}{4-x} = \dfrac{2(3)}{4-4^{-}} = \dfrac{6}{0^{+}} = +\infty$
۶	$x^{2}+2=0 \to x^{2}=-2 \to$ تابع فاقد مجانب قائم می باشد.

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x-۵}{x^۲+۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{x}=۰\to y=۰$$ مجانب افقی

۷ مجانب های افقی

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۲x}=\frac{۱}{۲}\to y=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}\to y=-\frac{۱}{۲}$$

۸ ابتدا تابع را به صورت دوضابطه ای تعریف می کنیم.

$$f(x)=\frac{۱}{x-|x|}\xrightarrow{x>۰}f(x)=\frac{۱}{x-(-x)}\to f(x)=\frac{۱}{۲x}$$

$$f(x)=\frac{۱}{x-|x|}\xrightarrow{x\le۰}f(x)=\frac{۱}{x-x}\to f(x)=$$ تعریف نمی شود.

$$f(x)=\frac{۱}{x-|x|}=\begin{cases} no\,anser & x>۰\\ \frac{۱}{۲x} & x<۰\end{cases}$$

لذا به سادگی معلوم است که تابع در شاخه‌ی $(-\infty,۰)$، مجانب قائمی به معادله‌ی $x=۰$ دارد.

۹ برای تعیین مجانب های قائم یک تابع کسری، ریشه های مخرج آن را تعیین می کنیم.

$$۴-۳x-x^۲=۰\to -x^۲-۳x+۴=۰\to x^۲+۳x-۴=۰$$
$$\to(x+۴)(x-۱)=۰\to x=-۴\quad , \quad x=۱$$

حال چون $x=۱$ ریشه‌ی صورت می باشد، پس خط $x=۱$ مجانب قائم نیست. لذا خط $x=۴$ تنها مجانب قائم نمودار تابع است.

برای تعیین مجانب افقی، حد تابع را وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند را تعیین می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲-۱}{۴-۳x-x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{-x^۲}=-۱\to y=۱$$ مجانب افقی

۱۰

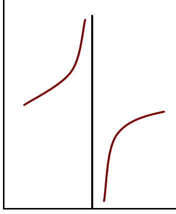
$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۳+۲x}$$

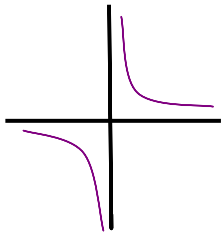
$$x^۳+۲x=۰\to x(x^۲+۲)=۰\to\begin{cases}x=۰\\ x^۲+۲=۰\to x^۲=-۲\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x^۳+۲x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{x^۲}=۰$$

لذا خط $x=۰$ و $y=۰$ به ترتیب مجانب قائم و مجانب افقی نمودار تابع هستند.

از طرفی چون $\lim_{x\to۰^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to۰^-}f(x)=+\infty$ ، لذا سپس وضعیت نمودار تابع را در



	نزدیکی مجانب قائم آن به شکل زیر است.
۱۱	در تابع $f(x)=\dfrac{x-۳}{(x-۳)(x+۳)}$ ، خط $x=۳$ صورت را صفر می کند و لذا شرایط مجانب قائم را ندارد ولی خط $x=-۳$ مجانب قائم می باشد، زیرا ؛ $\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۳)^-} f(x)=\dfrac{۱}{۰^-}=-\infty$ همچنین خط $y=۰$ مجانب قائم نمودار تابع است. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱}{x}=۰$ بر این اساس نمودار تابع f را در همسایگی مجانب قائم آن به صورت زیر می باشد. 

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

۱	الف) b ب) d پ) e
۲	الف) نقطه‌ی E ب) نقطه‌ی B پ) نقطه‌ی C ت) $m_D > m_A$

مشتق تابع در یک نقطه

۱	$f(x)=x^{۲}-۳x \xrightarrow{x=۱} f(۱)=(۱)^{۲}-۳(۱)=۱-۳=-۲$ $f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x^{۲}-۳x)-(-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x-۲)=۱-۲=-۱$
۲	نادرست $(۳f+g)'(۱)=۳f'(۱)+g'(۱)=۳(۲)+(-۳)=۳$

شیب و معادله‌ی خط مماس

۱	$m=f'(\circ)=\lim\limits_{x\to \circ}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-\circ}{x-\circ}=\lim\limits_{x\to \circ}\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}=+\infty$ لذا تابع مماس قائم دارد و چون $A(\circ,\circ)$ پس $x=\circ$
۲	-۹ ؛ زیرا معادله‌ی خط مماس با این شرایط می شود، $y=۲x-۹$ و این خط محور عرض ها را در نقطه‌ای به عـرض -۹ قطع می کند.
۳	درست ؛ زیرا مشتق راست تابع در این نقطه بی نهایت می شود. $f'_{+}(\cdot)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}}=\dfrac{۱}{\cdot^{+}}=+\infty$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان۲))

❃❃❃

درس ۲ : مشتق پذیری و پیوستگی

۱

درست ، اگر تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته بوده و مشتق راست و چپ عددهای برابر باشند، در این صورت تابع مشتق پذیر می شود.

۲

تابع در یک نقطه، مشتق پذیر است، هرگاه در این نقطه، پیوسته بوده و مشتقات راست و چپ آن در این نقطه برابر باشند.
حال اگر یکی از این دو شرط برقرار نباشد، تابع در نقطه‌ی داده شده مشتق پذیر نمی باشد.

$$f(x)=|2x-4|=\begin{cases} 2x-4 & x\geq 0 \\ -(2x-4) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} 2x-4 & x\geq 0 \\ -2x+4 & x<0 \end{cases}$$

$$f(2)=2(2)-4=0$$

مشتق راست

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(2x-4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

مشتق چپ

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(-2x+4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

حال بدون بررسی پیوستگی و به دلیل اینکه $f'_+(2)\neq f'_-(2)$ ، نتیجه می گیریم که این تابع در نقطه‌ی $x=2$ مشتق پذیر نمی باشد.

۳

نادرست، در چنین حالتی تابع مشتق پذیر نیست.

۴

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

لذا خط $x=0$، مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است.

۵

حد راست $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x-1)=2$

مقدار $f(1)=(1)^2+1=2$

	تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است. بررسی مشتقات یک طرفه مشتق راست $f'_{+}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}+۱-۲}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲$ مشتق چپ $f'_{-}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{۳x-۱-۲}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{۳x-۳}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{۳(x-۱)}{x-۱}=۳$ حال چون $f'_{+}(۱)\neq f'_{-}(۱)$ پس تابع در $x=۱$ مشتق پذیر نمی باشد.
۶	نباشد
۷	نادرست ، تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست، زیرا در این نقطه پیوسته نمی باشد.
۸	می دانیم که یک تابع در یک نقطه، مشتق پذیر است ، هرگاه در این نقطه هم پیوسته باشد و هم مشتقهای یک طرفه‌ی آن در نقطه‌ی داده شده برابر باشند. لذا برای حل این مسأله، ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ را بررسی می کنیم. $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(۲x^{۲}-۳)=۲(۱)^{۲}-۳=-۱$ $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}(۳x-۴)=۳(۱)-۴=-۱$ $f(۱)=۲(۱)^{۲}-۳=-۱$ و چون $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=f(۱)$ ، پس تابع در این نقطه، پیوسته است. اکنون مشتق های یکطرفه را در نقطه‌ی داده شده ، بررسی می کنیم. $f'_{+}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{(۲x^{۲}-۳)-(-۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{۲x^{۲}-۲}{x-۱}=۴$ $f'_{-}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{(۳x-۴)-(-۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{۳x-۳}{x-۱}=۳$ و چون $f'_{+}(۱)\neq f'_{-}(۱)$ ، لذا تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است. توجه: به جای استفاده از تعریف مشتق، برای بررسی مشتق های یک طرفه، می توان از فرمول های مشتق به شکل زیر نیز استفاده کرد. $f(x)=\begin{cases}۳ & x<۱\\ ۴x & x>۱\end{cases}\to f'_{+}(۱)=۴(۱)=۴ \quad , \quad f'_{-}(۱)=۳$
۹	$f'(۲)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{\sqrt[۳]{x-۲}\times\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}}$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}} = +\infty$$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق پذیر است.

۱۰

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ را بررسی می کنیم.

حد راست $\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} f(x^۲ + x) = ۱+۱=۲$

حد چپ $\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x+۱) = ۱+۱=۲$

مقدار $f(۱) = (x^۲ + x)\Big|_{x=۱} = ۱+۱=۲$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است.

اکنون مشتقات یک طرفه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(۱) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x+۱)-(۲)}{x-۱} = ۱$

مشتق چپ $f'_-(۱) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{(x^۲+x)-(۲)}{x-۱} = ۳$

و چون $f'_+(۱) \neq f'_-(۱)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست.

۱۱

می دانیم که یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر است، هرگاه در این نقطه پیوسته باشد و مشتقات راست و چپ تابع در این نقطه برابر باشند. در اینجا مشتق راست و چپ تابع در نقطه‌ی $x=۰$ برابر نیستند و لذا تابع در ایـن نقطـه مـشتق پـذیر نیست.

$f(۰)=۰$

$$f'_+(۰) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x^۲}{x} = \lim_{x \to ۰^+} x = ۰$$

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{-x}{x} = -۱$$

۱۲

$$f(x) = |x|(x-۲) = \begin{cases} x(x-۲) = x^۲ - ۲x & x \geq ۰ \\ -x(x-۲) = -x^۲ + ۲x & x < ۰ \end{cases}$$

$$f'_+(۰) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x^۲ - ۲x}{x} = \lim_{x \to ۰^+} (۲x-۲) = -۲$$

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{-x^۲ + ۲x}{x} = \lim_{x \to ۰^-} (-۲x+۲) = ۲$$

چون $f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$ ، لذا تابع f در $x=۰$ مشتق پذیر نیست.

تابع مشتق

۱	$f'(x)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ $=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$ $=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{۱}{\sqrt{x+۰}+\sqrt{x}}$ $=\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

محاسبه‌ی مشتق توابع

۱	در برای مشتق گیری از این توابع، کافی است فرمول های مشتق را مورد استفاده قرار دهیم. الف) $f'(x)=۵(-۶x+۱)(-۳x^۲+x)^۴(۲x)+۲(-۳x^۲+x)^۵$ فرمول های مورد استفاده : $y=uv\to y=u'v+v'u$ $y=au^n\to y'=anu'u^{n-۱}$ ب) $g'(x)=۵(۱+\tan^۲ x)+۲x\cos x^۲$ فرمول های مورد استفاده : $y=\tan x\to y=۱+\tan^۲ x$ $y=\sin u\to y'=u'\cos u$ پ) $h'(x)=-\frac{۲}{x^۲}$ فرمول مورد استفاده : $y=\frac{۱}{x}\to y=\frac{-۱}{x^۲}$
۲	برای مشتق گیری از توابع داده شده، فرمول های مشتق گیری را بکار می گیریم. الف) $y=\frac{۳x^۲}{x^۳-۵x+۲}\to y'=\frac{۶x(x^۳-۵x+۲)-(۳x^۲-۵)(۳x^۲)}{(x^۳-۵x+۲)^۲}$ فرمول استفاده شده : $y=\frac{u}{v}\to y'=\frac{u'v-v'u}{v^۲}$ ب) $y=\cos^۴(۳x-۲)\to y'=-۴(۳)\sin(۳x-۲)\cos^۳(۳x-۲)$

فرمول استفاده شده : $y=a\cos^n u \to y'=-anu'\sin u\cos^{n-1} u$

۳

الف) $f'(x)=3(8x-5)(4x^2-5x)^2(\sqrt{x}+1)+\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2-5x)^3$

ب) $g'(x)=\frac{9(x-x^2)-(1-2x)(9x+1)}{(x-x^2)^2}$

پ) $h'(x)=6x\cos(3x^2)$

۴

الف) $f'(x)=\frac{7}{2\sqrt{7x}}(3x^2+2)+(6x)\sqrt{7x}$

ب) $g'(x)=-3(2)\sin(2x)\cos^2(2x)-\frac{-1}{x^2}=-6\sin(2x)\cos^2(2x)+\frac{1}{x^2}$

۵

الف) $f'(x)=9(15x^2-1)(5x^3-x)^8(\sqrt{2x+1})+(5x^3-x)^9(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}})$

$y=u.v \to y'=u'.v+v'.u$ و $y=u^n \to y'=nu'.u^{n-1}$

ب) $g(x)=\frac{4\tan x}{3x^2-1} \to g'(x)=\frac{4(1+\tan^2 x)(3x^2-1)-(6x)(4\tan x)}{(3x^2-1)^2}$

$y=\frac{u}{v} \to y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$

۶

الف) $f'(x)=(4x^3+2)(\sqrt{x})+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^4+2x)$

ب) $g'(x)=3(1+\tan^2 x)-3(2)\cos(2x)\sin^2(2x)$

۷

الف) $f(x)=\frac{5\tan x}{1-\sin x} \to f'(x)=\frac{5(1+\tan^2 x)(1-\sin x)-(-\cos x)(5\tan x)}{(1-\sin x)^2}$

ب) $g(x)=\cos^7(x^2) \to g'(x)=7(2x)(-\sin x)(\cos^6(x^2))$

پ) $h(x)=(3x+5)^6 \to h'(x)=6(3)(3x+5)^5$

۸

$$f(x)=2x^3+1 \to f'(x)=6x^2 \to \begin{cases} f'(4)=6(4)^2=96 \\ f'(1)=6(1)^2=6 \end{cases}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \to g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \to \begin{cases} g'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4} \\ g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(f+g)'(4)=f'(4)+g'(4)=96+\frac{1}{4}=\frac{385}{4}$$

$(f+g)'(۴)+(f\times g)'(۱)=f'(۱)\times g(۱)+f(۱)\times g'(۱)=(۶)(۱)+(۳)(\frac{۱}{۲})$ $=(۶)(۱)+(۳)(\frac{۱}{۲})=۶+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$ $(f+g)'(۴)+(f\times g)'(۱)=\frac{۳۸۵}{۴}+\frac{۱۵}{۲}=\frac{۳۸۵+۳۰}{۴}=\frac{۴۱۵}{۴}$	
الف) $f'(x)=۲\times ۳x^{۲}(x^{۳}+۱)(\sqrt{۳x+۲})+\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۱)^{۲}$ ب) $g'(x)=۲\times ۳\times \cos ۳x\sin ۳x+۲x(۱+\tan^{۲}(x^{۲}))$	۹
الف) $f'(x)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}})(x^{۳}-۶x+۱)-(۳x^{۲}-۶)(\sqrt{x+۱})}{(x^{۳}-۶x+۱)^{۲}}$ ب) $g'(x)=۲(۱+\tan^{۲}x)+(۵)(۶x^{۲})(-\sin(۲x^{۳}))(\cos^{۴}(۲x^{۳}))$	۱۰
$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{۲x-۴}=۵\to \frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۵$ $\xrightarrow{\times ۲}\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۱۰\xrightarrow{\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)}f'(۲)=۱۰$ $g(x)=xf(x)\to g'(x)=۱\times f(x)+xf'(x)=f(x)+xf'(x)$ $\to g'(۲)=f(۲)+(۲)f'(۲)=۷+(۲)(۱۰)=۲۷$	۱۱

معادله‌ی خط مماس

ابتدا محل تقاطع نمودار تابع را با محور محور x ها، به دست می آوریم. $f(x)=x^{۳}-۸\xrightarrow{f(x)=۰}x^{۳}-۸=۰\to x=۲\to A(۲,۰)$ اکنون مقدار مشتق تابع را در این نقطه به دست آوریم. حاصل شیب خط مماس است. $f'(x)=۳x^{۲}\to f'(۲)=۳(۲)^{۲}=۱۲\to m=۱۲$ حال چون از خط مماس مختصات یک نقطه و شیب را داریم. پس می توانیم، معادله‌ی این خط را به شکل زیر تعیین کنیم. $y=m(x-a)+b$ $\to y=۱۲(x-۲)+۰\to y=۱۲x-۲۴$	۱

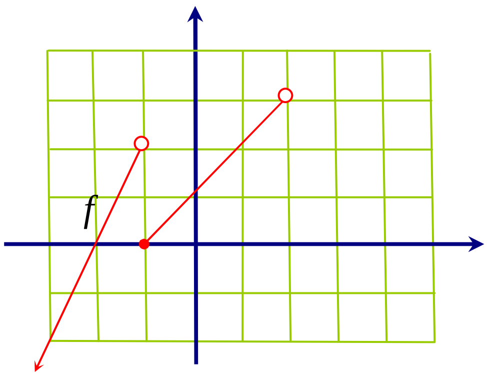
مشتق تابع مرکب و قاعده‌ی زنجیری

$((f+g)of)'(۱)=f'(۱)(f+g)'(f(۱))=f'(۱)(f'(۱)+g'(۱))$ $=f'(۱)(f'(۱)+g'(۱))=۳(۳+۵)=۲۴$	۱

مشتق مراتب بالاتر

$f(x)=\cos ۲x \to f'(x)=-۲\sin ۲x \to f''(x)=-۴\cos ۲x$ $f''(\frac{\pi}{۸})=-۴\cos ۲(\frac{\pi}{۸})=-۴\cos(\frac{\pi}{۴})=-۴(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۲\sqrt{۲}$	۱
پ) ۲ ؛ زیرا $f(x)=x^۳+۴x^۲-۱ \to f'(x)=۳x^۲+۸x \to f''(x)=۶x+۸$ $f''(-۱)=۶(-۱)+۸=-۶+۸=۲$	۲

مشتق پذیری در یک فاصله

برای رسم نمودار تابع داده شده، ابتدا برای هر ضابطه، نقطه یابی می کنیم. $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x+۱ & -۱\leq x<۲ \end{cases}$ $y=۲x+۴ \xrightarrow{x<-۱} A(-۱,۲), B(-۲,۰)$ $y=x+۱ \xrightarrow{-۱\leq x<۲} C(-۱,۰), D(۲,۳)$  اکنون با توجه به نمودار رسم شده، به سادگی مشخص است که تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ پیوسته نیست. در نتیجه تابع در این نقطه نیز مشتق پذیر نیست و لذا تابع در بازه‌ی $[-۲,۰]$ مشتق پذیر نمی باشد.	۱
درست، طبق تعریف مشتق پذیری تابع در یک بازه	۲

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۳ : مفهوم آهنگ تغییر و کاربرد آن

۱	سرعت لحظه ای $f'(t)=3t^{2}-1$ سرعت متوسط $\frac{\Delta f}{\Delta t}=2$ $f'(t)=\frac{\Delta f}{\Delta t}\rightarrow 3t^{2}-1=2\rightarrow 3t^{2}=3\xrightarrow{t>0}t=1$
۲	$m(t)=\sqrt{t}+2t^{2}\rightarrow m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+4t$ $\rightarrow m'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}+4(4)=\frac{1}{4}+16=\frac{65}{4}$
۳	الف) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{18-3}{3}=5$ سرعت متوسط ب) $f'(t)=4t-1\rightarrow f'(4)=4(4)-1=15$ سرعت لحظه ای
۴	آهنگ لحظه ای $m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+2$ آهنگ متوسط $\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{m(4)-m(0)}{4-0}=\frac{10-0}{4-0}=\frac{5}{2}$ $m'(t)=\frac{\Delta m}{\Delta t}\rightarrow\frac{1}{2\sqrt{t}}+2=\frac{5}{2}\rightarrow\sqrt{t}=1\rightarrow t=1$
۵	$f(t)=\frac{120}{t}+5\rightarrow f'(t)=-\frac{120}{t^{2}}\rightarrow f'(2)=-\frac{120}{(2)^{2}}=-30$ آهنگ لحظه ای تغییر $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{(\frac{120}{6}+5)-(\frac{120}{4}+5)}{6-4}=\frac{25-35}{2}=-5$ آهنگ متوسط تغییر مجموع آهنگ لحظه ای و آهنگ متوسط تغییر $(-30)+(-5)=-35$

۶	الف) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(\circ)-f(-۲)}{\circ-(-۲)}=\frac{-۳+۲}{۲}=-\frac{۱}{۲}$ ب) $f'(x)=\frac{۳(x^۲+۲)-(۲x)(۳x-۶)}{(x^۲+۲)^۲}\rightarrow f'(-۱)=-۱$
۷	نادرست، اگر تابع صعودی باشد، آهنگ لحظه ای آن در هر نقطه عدد غیر منفی است.
۸	$f(۴)=\sqrt{۴+۵}=۳$ $f(-۱)=\sqrt{-۱+۵}=۲$ $\frac{f(۴)-f(-۱)}{۴-(-۱)}=\frac{۳-۲}{۴+۱}=\frac{۱}{۵}$ آهنگ متوسط تغییر
۹	$\frac{h(۴)-h(۳)}{۴-۳}=\frac{۸۰-۷۵}{۱}=۵$ سرعت متوسط $h'(t)=-۱۰t+۴۰\rightarrow\xrightarrow{h'(t)=\circ}-۱۰t+۴۰=۰\rightarrow t=۲$
۱۰	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۲۵)-f(\circ)}{۲۵-\circ}=\frac{۸۵-۵۰}{۲۵}=\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۷}{۵}$ آهنگ متوسط تغییر قد $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰\rightarrow f'(x)=۷(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$ $f'(۴۹)=۷(\frac{۱}{۲\sqrt{۴۹}})=\frac{۱}{۲}$ آهنگ لحظه‌ای تغییر قد

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل پنجم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۱ : اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱	نادرست، زیرا ممکن است در نقطه‌ی بحرانی تابع مشتق پذیر نباشد.
۲	الف) با توجه به نمودار مشخص است که نقطه‌ی (۱,۸)، نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع است و لذا مقدار ماکزیمم مطلق برابر ۸ است. ب) با توجه به نمودار مشخص است که نقطه‌ی (۲,−۴−)، نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع است و لذا مقدار مینیمم مطلق برابر ۴− است. پ) با توجه به نمودار مشخص است که تابع در نقطه ای به طول $x=۴$ ماکزیمم نسبی دارد. ت) با توجه به نمودار مشخص است که تابع در نقطه ای به طول $x=۲$ مینیمم نسبی دارد.
۳	$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x \to f'(x)=x^{۲}-۱ \xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۱=۰ \to x=\pm۱$ $\to \begin{cases} f(-۱)=\frac{۱}{۳}(-۱)^{۳}-(-۱)=\frac{۲}{۳} \\ f(۰)=\frac{۱}{۳}(۰)^{۳}-(۰)=۰ \\ f(۱)=\frac{۱}{۳}(۱)^{۳}-(۱)=-\frac{۲}{۳} \\ f(۲)=\frac{۱}{۳}(۲)^{۳}-(۲)=\frac{۲}{۳} \end{cases}$ لذا مقدار ماکزیمم مطلق برابر $\frac{۲}{۳}$ و مقدار می نیمم مطلق برابر $-\frac{۲}{۳}$ می باشد.
۴	ماکزیمم نسبی
۵	(جدول زیر)
۶	$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۴}+x^{۲}+۱ \to f'(x)=۲x^{۳}+۲x$

B	D	D	E
مینیمم نسبی	ماکزیمم نسبی	ماکزیمم مطلق	مینیمم مطلق
۱	۲	۲	۴

	$\xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x^۳+۲x=۰ \to ۲x(x^۲+۱)=۰ \to x=۰ \ \ or \ \ x^۲=-۱$ (غیر قابل قبول) $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & ۰ & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & ۰ & + & \\ \hline f(x) & & \searrow & & \nearrow & \end{array}$ و لذا تابع در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ نزولی اکید است. توجه : جواب زیر نیز درست است. تابع در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی اکید است.
۷	نادرست
۸	$f'(x)=۵x^۴-۵ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۵x^۴-۵=۰ \to x^۴=۱ \to \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$ ریشه‌ی $x=-۱$، عضو بازه‌ی داده شده نمی باشد، و لذا بررسی نمی شود. $f(۱)=(۱)^۵-۵(۱)=-۴$ مینیمم مطلق $f(۰)=(۰)^۵-۵(۰)=۰$ $f(۲)=(۲)^۵-۵(۲)=۲۲$ ماکزیمم مطلق
۹	$f'(x)=۳x^۲-۱۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲-۱۲x=۰ \to x=۰\ ,\ x=۴ \in [-۲,۳]$ $f(x)=x^۳-۶x^۲ \to \begin{cases} f(-۲)=-۳۲ \\ f(۳)=-۲۷ \\ f(۰)=۰ \end{cases}$ لذا می نیمم مطلق نمودار f برابر ۳۲- و ماگزیمم مطلق آن صفر می باشد.
۱۰	نادرست، در تابع $f(x)=x^۳$ هم $f(۰)=۰$ و هم $f'(۰)=۰$
۱۱	نادرست ؛ زیرا ممکن است تابع در این نقطه مشتق پذیر نباشد.
۱۲	$f'(x)=۳x^۲-۱۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲-۱۲=۰ \to x=۲\ ,\ x=-۲ \notin [-۱,۳]$ $f(x)=x^۳-۱۲x \to \begin{cases} x=-۱ \to f(-۱)=۱۱ \\ x=۲ \to f(۲)=-۱۶ \\ x=۳ \to f(۳)=-۹ \end{cases} \to \max(f)=۱۱$ ماکزیمم مطلق
۱۳	$f(x)=x^۳-۶x^۲ \to f'(x)=۳x^۲-۱۲x$ $\xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲-۱۲x=۰ \to x=۰ \quad , \quad x=۴ \notin [-۱,۳]$

$$\begin{cases} x=-۱ \to f(-۱)=-۷ \\ x=۰ \to f(۰)=۰ \\ x=۳ \to f(۳)=-۲۷ \end{cases}$$

نقطه‌ی $(۰,۰)$ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق (به کمک جدول تغییرات نیز قابل بررسی است.)

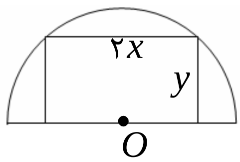
x	-۱		۰		۳
f'		$+$	۰	$-$	
f	-۷	$\nearrow$	۰	$\searrow$	-۲۷

مینیمم نسبی

نقطه‌ی $(۳,-۲۷)$نقطه‌ی مینیمم مطلق این تابع در بازه‌ی $[-۲۷,۳]$ است.

حل مسائل بهینه سازی

۱



$$y^۲=۱۶-x^۲ \Rightarrow S(x)=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}$$

$$S'(x)=\frac{۳۲-۴x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=۰ \to ۳۲-۴x^۲=۰$$

$$\to x=\sqrt{۸} \to x=۲\sqrt{۲} \longrightarrow y=۲\sqrt{۲}$$

طول $۲x=۴\sqrt{۲}$ و عرض $y=۲\sqrt{۲}$

حل مسائل پارامتری

۱

اولاً : مختصات این نقطه در معادله‌ی تابع صدق می کند.

$$f(x)=ax^۳+bx^۲+۲ \xrightarrow{A(-۱,۱)} f(-۱)=a(-۱)^۳+b(-۱)^۲+۲$$

$$\xrightarrow{f(-۱)=۱} -a+b+۲=۱ \to a-b=۱$$

ثانیاً : به ازای طول این نقطه، مقدار مشتق دوم برابر صفر می شود.

$$f(x)=ax^۳+bx^۲+۲ \to f'(x)=۳ax^۲+۲bx \to f''(x)=۶ax+۲b$$

$$\xrightarrow{A(-۱,۱)} f''(-۱)=۶a(-۱)+۲b \xrightarrow{f''(-۱)=۰} -۶a+۲b=۰ \to -۳a+b=۰$$

حال دستگاه زیر را تشکیل می دهیم و مقادیر a و b را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} a-b=۱ \\ -۳a+b=۰ \end{cases} \to a=-\frac{۱}{۲} \ , \ b=-\frac{۳}{۲}$$

۲

$$f(x)=x^۳+ax-b \xrightarrow{f(۱)=۲} ۲=(۱)^۳+a(۱)-b \to a-b=۱$$

$$f(x)=x^۳+ax-b \to f'(x)=۳x^۲+a$$

$$\xrightarrow{f'(۱)=۰} ۳(۱)^۲+a=۰ \to a=-۳$$

	$\xrightarrow{a-b=۱} b=-۴$

نمودار تابع مشتق

۱	گزینه‌ی ت صحیح است. مشتق سهمی، تابع غیر خطی(غیرثابت) است. چون طول نقطه‌ی مینیمم، منفی است، پس f' محور x ها را در ناحیه‌ی $x<۰$ قطع می کند.

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل پنجم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۲ : جهت تقعر نمودار یک تابع

۱ چون در این بازه، مشتق دوم مثبت است، لذا نمودار تابع در این بازه تقعر رو به **بالا** دارد.

۲ درست ، زیرا در نقطه‌ی عطف، تقعر و تحدب منحنی عوض می شود.

۳ نادرست

۴

$D_f = R - \{۱\}$

$$f(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \to f'(x) = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} \to f''(x) = \frac{۶}{(x-۱)^۳}$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

جهت تقعر نمودار تابع فقط در نقطه‌ی $x=۱$، تغییر می کند. ولی چون این نقطه، در دامنه‌ی تابع نیست، لذا نمودار تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

نقطه‌ی عطف

۱ ضرایب a و b را در تابع $y = x^۳ + ax^۲ + b$ ، طوری بیابید که نقطه‌ی $(۱,۴)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد.

$$y = x^۳ + ax^۲ + b \xrightarrow{(۱,۴)} ۴ = (۱)^۳ + a(۱)^۲ + b \to a+b=۳$$

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax \to y'' = ۶x + ۲a \xrightarrow{(۱,۴)} ۰ = ۶(۱) + ۲a \to a = -۳$$

$$a+b=۳ \xrightarrow{a=-۳} -۳+b=۳ \to b=۶$$

۲

$$f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \to f''(x) = ۶x \xrightarrow{f''(۰)=۰} ۶x = ۰ \to x = ۰$$

نقطه‌ی $(۰,۱)$ نقطه‌ی عطف تابع است.

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\cap$	۱	$\cup$

۳	$f(x)=ax^۲+bx+c$ $\xrightarrow{f(۰)=۱} a(۰)^۳+b(۰)^۲+c=۱ \to c=۱$ $\xrightarrow{f(۲)=-۳} a(۲)^۳+b(۲)^۲+c=-۳ \xrightarrow{c=۱} ۲a+b=-۱$ $f(x)=ax^۳+bx^۲+c \to f'(x)=۳ax^۲+۲bx \to f''(x)=۶ax+۲b$ $\xrightarrow{f''(۱)=۰} ۶a(۱)+۲b=۰ \to ۳a+b=۰$ $\to \begin{cases} ۲a+b=-۱ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \to a=۱ \ , \ b=-۳$
۴	$f(x)=x^۳+ax^۲+bx \to f'(x)=۳x^۲+۲ax+b \to f''(x)=۶x+۲a$ $f(۱)=(۱)^۳+a(۱)^۲+b(۱) \xrightarrow{f(۱)=-۱۱} ۱+a+b=-۱۱ \to a+b=-۱۲$ $f''(۱)=۶(۱)+۲a \xrightarrow{f''(۱)=۰} ۶+۲a=۰ \to a=-۳$ $a+b=-۱۲ \xrightarrow{a=-۳} b=-۹$
۵	$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c \to f'(x)=۳x^۲+۲ax+b \to f''(x)=۶x+۲a$ $f''(x)=۶x+۲a \xrightarrow{f''(۱)=۰} ۶(۱)+۲a=۰ \to a=-۳$ $f'(x)=۳x^۲+۲ax+b \xrightarrow{f'(۳)=۰} ۳(۳)^۲+۲a(۳)+b=۰$ $\to ۲۷+۶a+b=۰ \xrightarrow{a=-۳} -۹=b$ $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c \xrightarrow{f(۳)=-۱} -۱=(۳)^۳+a(۳)^۲+b(۳)+c$ $\to -۲۸=۹a+۳b+c \xrightarrow{a=-۳\ ,\ b=-۹} -۲۸=-۲۷-۲۷+c \to c=۲۶$
۶	$f(x)=ax^۳+۳x^۲+۱ \to f'(x)=۳ax^۲+۶x \to f''(x)=۶ax+۶$ $\xrightarrow{f''(-\frac{۱}{۲})=۰} ۶a(-\frac{۱}{۲})+۶=۰ \to a=-۲$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل پنجم

((حسابان۲))

❊❊❊

درس ۳ : رسم نمودار توابع چندجمله ای

۱

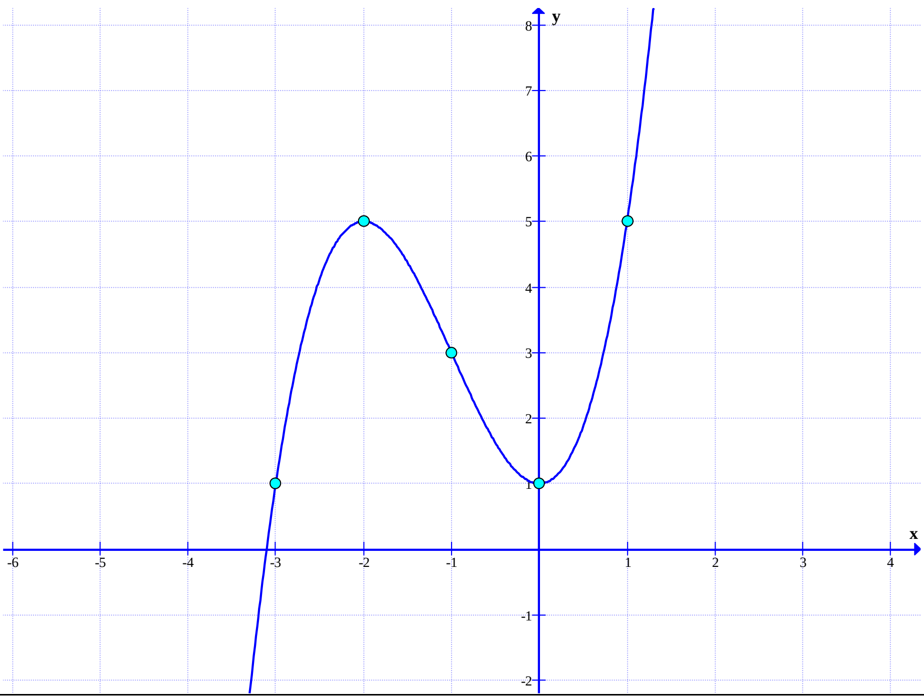
تابع $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$ ، یک تابع چندجمله ای درجه‌ی سوم است و لذا دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$y = x^۳ + ۳x^۲ + ۱ \to y' = ۳x^۲ + ۶x$$

$$\xrightarrow{y'=۰} ۳x^۲ + ۶x = ۰ \to ۳x(x+۲) = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ \\ x + ۲ = ۰ \to x = -۲ \end{cases}$$

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می باشد.

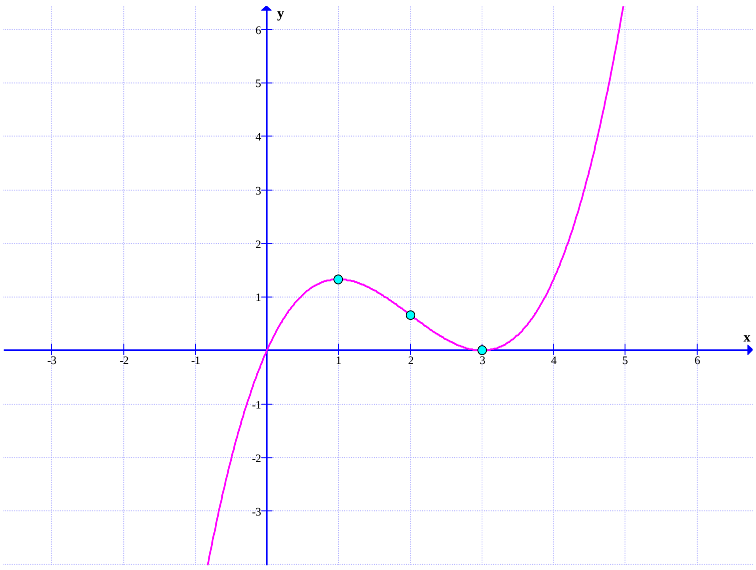
x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۵ max	$\searrow$	۱ min	$\nearrow$	$+\infty$



۲

$$f'(x)=x^{۲}-۴x+۳ \rightarrow f''(x)=۲x-۴$$

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۴}{۳}$	$\searrow$	$\frac{۲}{۳}$	$\searrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$
		$\cap$	max	$\cap$	atf	$\cup$	min	$\cup$	



۳

$D_f=R$

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-x^{۲} \rightarrow f'(x)=۲x^{۲}-۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$

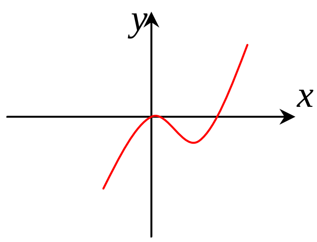
در کنار نقاط بحرانی فوق نقاط کمکی زیر را تعیین می کنیم.

$$x=-۱ \rightarrow f(-۱)=-\frac{۵}{۳}$$

$$x=\frac{۱}{۲} \rightarrow f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۶}$$

$$x=۲ \rightarrow f(۲)=\frac{۴}{۳}$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰	$\searrow$	$-\frac{۱}{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$
			max		min		



۴

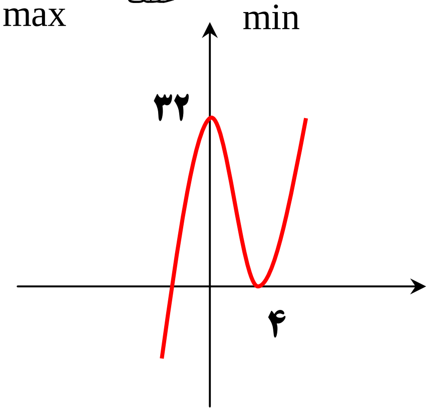
$D_f=R$

$$y=(x+۲)(x-۴)^{۲} \rightarrow y'=۱(x-۴)^{۲}+۲(۱)(x-۴)(x+۲)$$

$$\xrightarrow{y'=۰} ۱(x-۴)^۲+۲(۱)(x-۴)(x+۲)=۰ \to (x-۴)(x-۴+۲x+۴)=۰$$

$$\to (x-۴)(۳x)=۰ \to x=۰\ ,\ x=۴$$

x	$-\infty$		۰		۲		۴		$+\infty$
y'		+	۰	-		-	۰	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۳۲ max	$\searrow$	۱۶ عطف	$\searrow$	۰ min	$\nearrow$	$+\infty$



توابع هموگرافیک

۱ با توجه به اینکه نقطه‌ی $(۲,۱)$ محل تقاطع مجانب های تابع است لذا :

مجانب قائم $x=۲ \xrightarrow{cx+d=۰} ۲c+d=۰$

مجانب افقی $y=۱ \xrightarrow{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{a}{c}} \frac{a}{c}=۱ \to a=c$

چون تابع از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ می گذرد.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{(-۱,۰)} \frac{-a+b}{c+d}=۰ \to a=b$$

از روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$$

رسم نمودار توابع هموگرافیک

۱ دامنه‌ی تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۲}$ مجموعه‌ی $R-\{۲\}$ است. این تابع یک تابع هموگرافیک است و یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد.

$x-۲=۰ \to x=۲$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x-۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x}=۲ \to y=۲$ مجانب افقی

حال چون

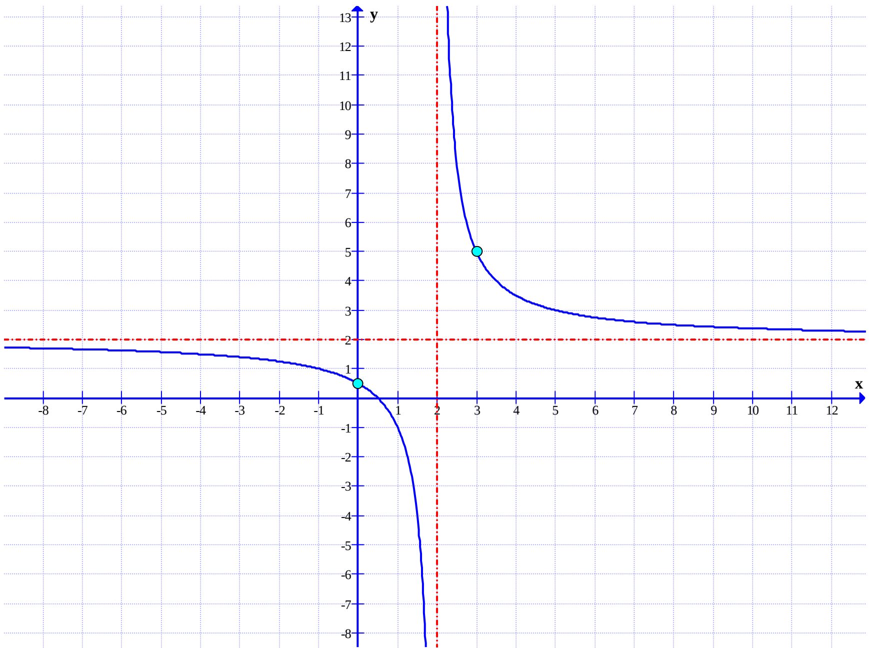
$$y=\frac{۲x-۱}{x-۲}\longrightarrow y'=\frac{۲(x-۲)-(۱)(۲x-۱)}{(x-۲)^۲}=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}<۰$$

پس نمودار تابع در هر طرف مجانب قائم خود نزولی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می باشد.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	
y	۲	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	۲

نقاط $(۰,\frac{۱}{۲})$ و $(۳,۵)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می شود.



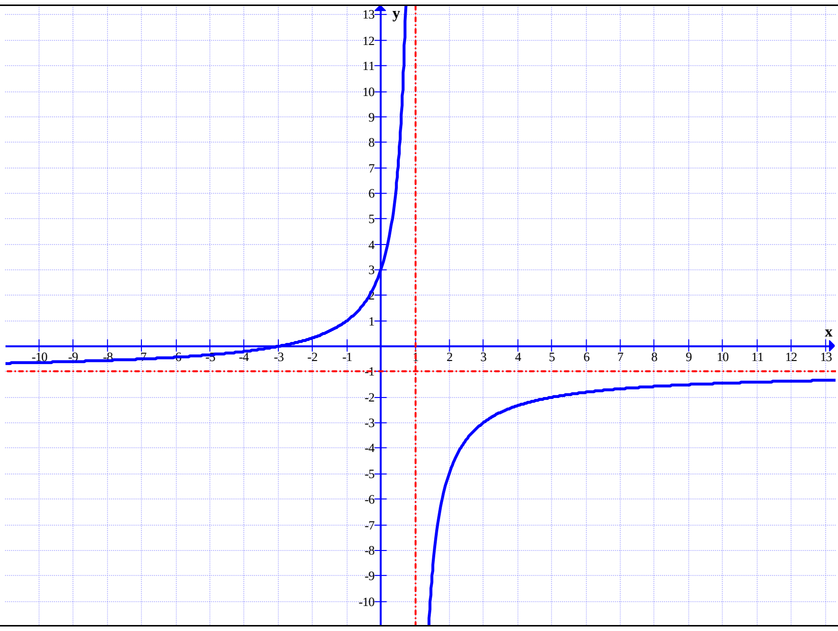
۲

$y=-۱$ مجانب افقی $x=۱$ مجانب قائم

تابع نقطه‌ی بحرانی ندارد و نمودارتابع در هر طرف مجانب قائم خود صعودی اکید است. $f'(x)=\frac{۴}{(۱-x)^۲}>۰\longrightarrow$

.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		$+$	||	$+$	
f	-۱	$\nearrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\nearrow$	-۱



۳

$x+۱=۰ \rightarrow x=-۱$ مجانب قائم

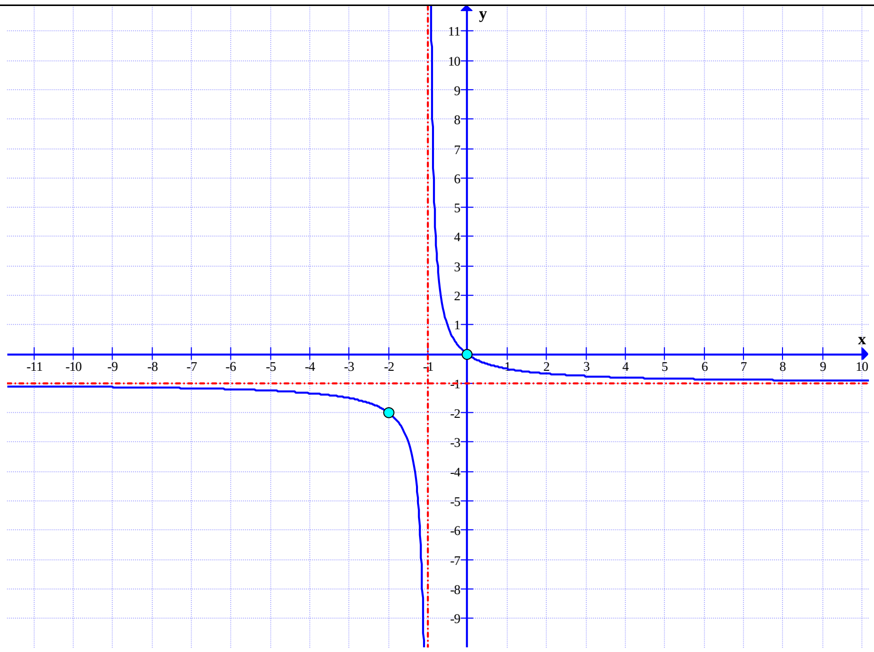
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x}{x+۱}=-۱ \rightarrow y=-۱$ مجانب افقی

$y'=\dfrac{-۱}{(x+۱)^{۲}}<۰ \rightarrow$ نمودار تابع در هر طرف مجانب قائم آن ، نزولی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می باشد.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-۱	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	-۱

نقاط $(۰,۰)$ و $(-۲,-۲)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می شود.



۴

$D_f = R - \{-۳\}$

$x + ۳ = ۰ \rightarrow x = -۳$ مجانب قائم

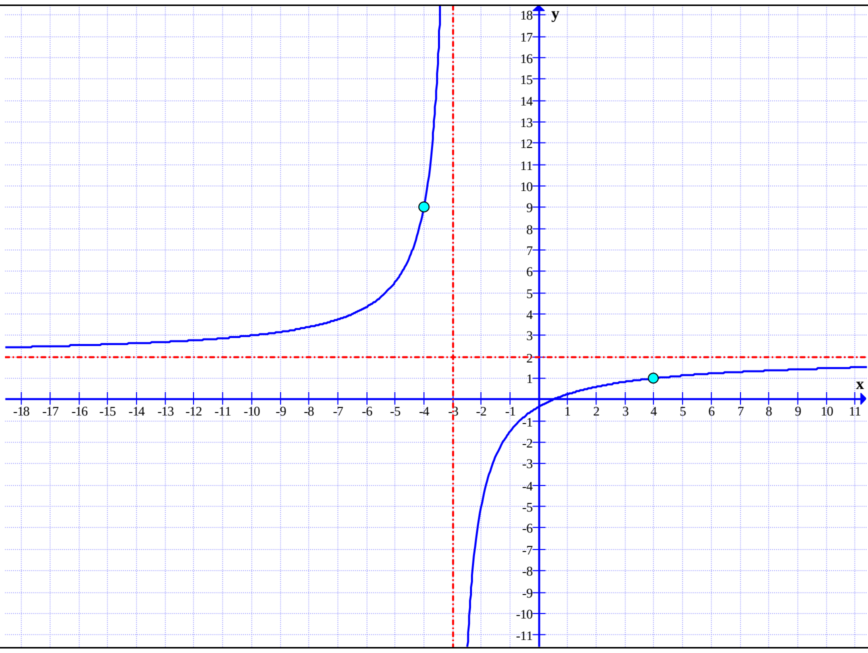
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x - ۱}{x + ۳} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x}{x} = ۲ \rightarrow y = ۲$ مجانب افقی

$f'(x) = \frac{۲(x+۳) - ۱(۲x-۱)}{(x+۳)^۲} = \frac{۷}{(x+۳)^۲} > ۰$ تابع در هر طرف مجانب قائم آن صعودی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می باشد.

x	$-\infty$		-۳		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	۲	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	۲

نقاط $(۴,۱)$ و $(-۴,۹)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می شود.



۵

$D_f = R - \{-۱\}$

$x + ۱ = ۰ \to x = -۱$ مجانب قائم

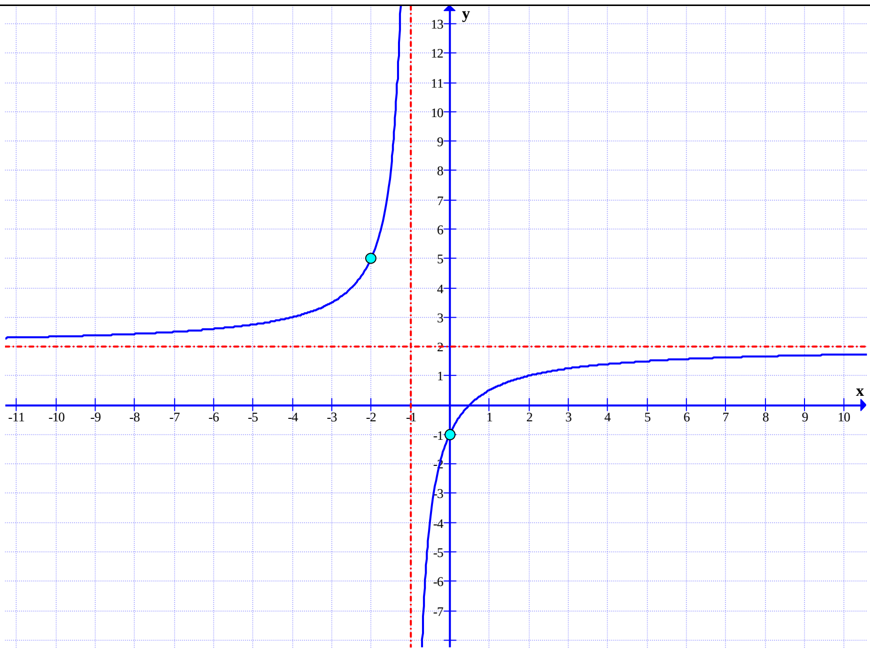
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x - ۱}{x + ۱} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{۲x}{x} = ۲ \to y = ۲$ مجانب افقی

$f'(x) = \frac{۲(x+۱) - ۱(۲x-۱)}{(x+۱)^۲} = \frac{۳}{(x+۱)^۲} > ۰$ تابع در هر طرف مجانب قائم آن صعودی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می باشد.

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	۲	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	۲

نقاط $(۰,-۱)$ و $(-۲,۹)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می شود.



تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان