# بام نهایی

## ((سؤالات موضوعی نهایی ریاضیات گسسته))

پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

آخرین نسخه: مرداد ۱۴۰۳

**(جلد دوم؛ خرداد ۱۴۰۱ به بعد)**

تهیه کننده: جابر عامری

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان**

**باسمه تعالی**

# معرفی کتاب

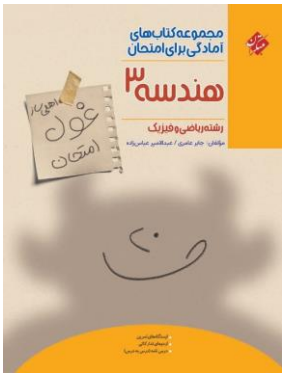
**ریاضی و آمار۲**

**ریاضی و آمار۳**

**ریاضیات گسسته**

**آمار و احتمال**

**حسابان۱**




**هندسه۳**

**هندسه۲**

**کتاب های زیر برای آموزش مفهومی و کسب نمره بالا در امتحانات نهایی بسیار مفید هستند.**

**مطالعه این کتاب ها به دانش آموزان و علاقه مندان به یادگیری ریاضی دبیرستانی و کسب نمره ی بالا در امتحانات نهایی توصیه می شود.**

**برای تهیه می توانید از لینک زیر استفاده نمایید.**

https://zil.ink/ameri.math

# فصل اوّل

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۱ : استدلال ریاضی

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج $n$ حاصل $n^{۲}-۵n+۷$ عددی فرد است. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۲ | درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. (خارج کشور)<br>الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.<br>ب) اگر $a>۰$ باشد، آنگاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$<br>پ) مربع هر عدد فرد، فرد است.<br>ت) عدد حقیقی مانند $x$ وجود دارد که $x^{۳}<x^{۲}$ | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۳ | اگر $n$ عددی فرد باشد، ثابت کنید حاصل $n^{۲}-۵n+۷$ عددی فرد است. (خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۴ | هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه‌ی مثال نقض کنید.<br>الف) برای هر عدد طبیعی $n$، عدد $۲^{n}+۱$ اول است.<br>ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است. | شهریور ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۵ | $a_{۱}$ و $a_{۲}$ و $a_{۳}$ اعدادی صحیح هستند و $b_{۱}$ و $b_{۲}$ و $b_{۳}$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_{۱}-b_{۱})(a_{۲}-b_{۲})(a_{۳}-b_{۳})$ عددی زوج است. | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۶ | درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.<br>الف) اگر $x$ یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز عددی گنگ است.<br>ب) برای مقادیر حقیقی و ناصفر $a$ و $b$ به شرط آنکه $a+b\neq ۰$ تساوی $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ برقرار است. | دی ۱۴۰۱ | ۰/۵ نمره |
| ۷ | گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی(گزاره های هم ارز) ثابت کنید.<br>« برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ داریم : $y^{۲}+۱\geq -۲x(y+x+۱)$ » | دی ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۸ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>حاصل هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۹ | اگر $x$ و $y$ و $z$ سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:<br>$x^{۲}+y^{۲}+۱\geq ۲xy-z^{۲}$ | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۷۵ نمره |
| ۱۰ | درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.<br>حاصل ضرب هر دو عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. | شهریور ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۱ | برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$، به روش بازگشتی (گزاره های هم ارزی) نشان دهید:<br>$۲x^{۲}+۲xy+y^{۲}\geq ۴x-۴$ | شهریور ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۱۲ | در هر یک از موارد زیر، گزاره‌ی درست را اثبات و گزاره‌ی نادرست را با ارائه‌ی مثال نقض، رد کنید.<br>الف) عدد حاصل از اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، مربع کامل است.<br>ب) حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است. | دی ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۱۳ | ثابت کنید که مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه‌ی حاصل ضرب آنها کمتر نیست. | دی ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۱۴ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است. | خرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۵ | با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$ داریم.<br>$a^{۲}+b^{۲}\geq (a-۱)(b+۱)$ | خرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |
| ۱۶ | گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.<br>اگر $a,b\in R$ کدام یک از ترکیب های دو شرطی زیر درست است.<br>۱) $a<b\Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲}$ ۲) $a<b\Leftrightarrow a^{۳}<b^{۳}$<br>۳) $a<b\Leftrightarrow (a-b)^{۲}\geq ۰$ ۴) $a<b\Leftrightarrow a^{۲}<b^{۳}$ | مرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۷ | ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست. | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۲۵ نمره |

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه**

**استان خوزستان**

# فصل اوّل

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۲ : بخش پذیری در اعداد صحیح

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.<br>الف) اگر $a\|b$ و $b\neq ۰$ ، در این صورت $\|a\|>\|b\|$<br>ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ و عدد طبیعی $c$ اگر( $a\|c\ ,\ b\|c$ ) و ( $a\|m, b\|m \to c\leq m$ )آنگاه $[a,b]=c$<br>پ) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است. | خرداد ۱۴۰۱ | ۰/۷۵ نمره |
| ۲ | اگر عدد مانند $k$ در $Z$ باشد، بطوری که $۵\|۴k+۱$ ، ثابت کنید، $۲۵\|۱۶k^۲+۲۸k+۶$ | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۳ | پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ( خارج کشور)<br>الف) اگر $a\|b$ و $b\|a$ آنگاه $a$ برابر با ..... است. ( $b$ ، $\pm b$ )<br>ب) اگر $(a,b)=d$، آنگاه برای هر $m>۰$ که $m\|a$ و $m\|b$ داریم. ( $m\leq d$ و $m\geq d$ ) | خرداد ۱۴۰۱ | ۰/۵ نمره |
| ۴ | اگر $a>۱$ و $a\|۹k+۴$ و $a\|۵k+۳$ ، ثابت کنید $a$ عددی اوّل است. ( خارج کشور) | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۵ | اگر عدد طبیعی $a$، دو عدد $۵k+۹$ و $۸k+۱۳$ را عاد کند، ثابت کنید: $a=۱$ یا $a=۷$ | شهریور ۱۴۰۱ | ۰/۷۵ نمره |
| ۶ | اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد $a$ بر دو عدد ۶ و۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم عدد $a$ را بر ۴۲ بیابید. | شهریور ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۷ | درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.<br>اگر $a\|b+c$ آنگاه $a\|b$ یا $a\|c$ | دی ۱۴۰۱ | ۰/۲۵ نمره |
| ۸ | در جاهای خالی عبارت های مناسب بنویسید.<br>الف : حاصل $([m^۲,m],m^۵)$، برابر با ..... است.<br>ب: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ داشته باشیم، $(a,b)=۱$، می گوییم $a$ و $b$ ..... هستند. | دی ۱۴۰۱ | ۰/۵ نمره |
| ۹ | اگر $a\neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $۵m+۴$ و $۶m+۵$ بر $a$ بخش پذیر باشند، ثابت کنید، $a=\pm ۱$ | دی ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱۰ | اگر $a$ و $b$ دو عدد صحیح و فرد باشند. در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^{۲}+b^{۲}+۵$ را بر ۸ بیابید. | دی ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۱۱ | اگر $a\mid ۲m+۳$ و $a\mid m+۷$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای $a$ وجود دارد؟ | خرداد ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۱۲ | باقی ماندهی تقسیم $a$ بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می باشد، باقی ماندهی تقسیم $a$ برابر ۲۰ را محاسبه کنید. ( با راه حل ) | خرداد ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۱۳ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>حاصل $(۳m+۱\,,\,۳m+۲)$ برابر ۱ می باشد. $(m\in Z)$ | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۴ | درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.<br>الف) برای اعداد صحیح $a$ و $b$ و $c$ که $a\neq ۰$ ، اگر $a\mid b+c$ آن گاه $a\mid b$ یا $a\mid c$<br>ب) اگر داشته باشیم $(a,b)=۱$، آنگاه می گوییم؛ $a$ و $b$، نسبت به هم اول اند. | شهریور ۱۴۰۲ | ۰/۵ نمره |
| ۱۵ | به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر $a$ عدد صحیح فرد باشد و $b\mid a+۲$، آنگاه $b$ نیز عددی فرد است. | شهریور ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۱۶ | اگر عددی مانند $k$ در $Z$ باشد، به طوری که $۷\mid ۲k+۱$، ثابت کنید.<br>$۴۹\mid ۴k^{۲}-۱۰k-۶$ | شهریور ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۱۷ | اگر $a\mid b$ و $b\neq ۰$ ، در این صورت ثابت کنید $\lvert a\rvert\leq\lvert b\rvert$ | دی ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۱۸ | جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.<br>اگر $a$ و $b$ و $c$ اعدادی طبیعی باشند که $a\mid b$ و $b\mid c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a,b],[a,c])$ برابر ..... است. | دی ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۹ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>( اگر $m\in(Z-\{۰\})$ آنگاه ؛ $[m^{۵},(m^{۳},m^{۲})]=m^{۵}$ | خرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۲۰ | اگر $a$ عددی طبیعی و داشته باشیم $a\mid ۷k+۱$ و $a\mid ۴k+۳$ . ثابت کنید؛ $a=۱$ یا $a=۱۷$ | خرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |
| ۲۱ | اگر باقی مانده تقسیم عدد $a$ بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و۳ باشد، باقی مانده تقسیم عدد $a$ را بر ۲۰ بیابید. | خرداد ۱۴۰۳ | ۱/۲۵ نمره |
| ۲۲ | جای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید.<br>اگر $p$ عددی اول باشد و $a\in Z$ و $p\nmid a$ ، آن‌گاه $(p,a)=.....$ | مرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۲۳ | هرگاه $c$ و $b$ و $a$ سه عدد صحیح و $a\neq ۰$ و $a\mid b$ و $a\mid c$ ثابت کنید: $a\mid b\pm c$ | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۲۵ نمره |
| ۲۴ | اگر $b$ و $a$ دو عدد صحیح و $ab$ فرد باشد، باقی ماندهی $a^{۲}+b^{۲}-۵$ بر ۸ را حساب کنید. | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |
| ۲۵ | ثابت کنید اگر $p\geq ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۳$ نوشته می شود. $(k\in Z)$ | مرداد ۱۴۰۳ | ۰/۷۵ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۲۶ | درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید.<br>حاصل عبارت $(۳۰, [۱۸ - , ۱۲-])$ برابر ۶- است.<br>(( ) نماد ب م م و [ ] نماد ک م م است.) | مرداد<br>۱۴۰۳ | ۰/۲۵<br>نمره |

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه**

**استان خوزستان**

# فصل اوّل

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس۳ : هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربرد ها

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید.<br>برای هر دو عدد صحیح $a$ و $b$ و عدد طبیعی $m$، اگر باقی مانده تقسیم $a$ بر $m$ مساوی با $r$ باشد، در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$ | خرداد ۱۴۰۱ | ۰/۲۵ نمره |
| ۲ | باقی مانده تقسیم عدد $a = ۲۷^{۲۰} + ۱۸$ را بر ۱۳بیابید. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۳ | اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟ | خرداد ۱۴۰۱ | ۰/۵ نمره |
| ۴ | پاسخ صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. (خارج کشور)<br>الف) معادله هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر ( $(a,m) \mid b$ ،$(a,b) \mid m$ )<br>ب) اگر برای دو عدد صحیح $x$ و $k$ داشته باشیم: $x = ۴k + ۳$ آنگاه ( $x \in [۳]_۴$ ، $x \in [۴]_۳$ ) | شهریور ۱۴۰۱ | ۰/۵ نمره |
| ۵ | بدون انجام عمل تقسیم باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = ۱۳۵۸۱۱۲$ را بر ۹ تعیین کنید. (خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۰/۷۵ نمره |
| ۶ | اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی است؟ ( خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۷ | همه‌ی اعداد صحیح مانند $a$ را بیابید که ۵ برابر آنها بعلاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشند. (خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۸ | ثابت کنید باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۹، با باقی مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ برابر است. | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۹ | دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است. اول به سئوالات ۵ امتیازی و۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. ( پاسخ به هر سئوال یا امتیاز کامل دارد یا امتیازی ندارد.) این دانش آموز به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟ | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۷۵ نمره |
| ۱۰ | باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + ... + ۲۰۰!$ را بر ۱۵ بدست آورید.<br>( ! نماد فاکتوریل می باشد.) | دی ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱۱ | معادله‌ی همنهشتی $4x \overset{6}{\equiv} 10$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه‌ی جواب آن را به دست آورید. | دی ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۱۲ | در معادله‌ی سیاله‌ی $15x + 19y = 7$، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می توان برای $x$ در نظر گرفت چه مقداری می باشد. ( با راه حل ) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۱۳ | درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.<br>معادله‌ی هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ ، دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a,m) \mid b$. | شهریور ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۴ | باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید. | شهریور ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۱۵ | معادله‌ی هم نهشتی $1402x \overset{9}{\equiv} 11$ را حل کنید. | شهریور ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۱۶ | در هر یک از موارد زیر، گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید.<br>الف) عدد ۱۴۰۲ به دام دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۷ تعلق دارد؟<br>۱) [۵] ۲) [۲] ۳) [۰] ۴) [۱]<br>ب) باقی مانده‌ی تقسیم عدد $(9^{100} - 2^{100} - 7^{100})$ بر ۱۴ کدام است؟<br>۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸<br>پ) کدام یک از معادلات هم نهشتی زیر در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب ندارد ؟<br>۱) $6x \overset{9}{\equiv} 11$ ۲) $2x \overset{5}{\equiv} 3$ ۳) $5x \overset{7}{\equiv} 10$ ۴) $3x \overset{7}{\equiv} 10$ | دی ۱۴۰۲ | ۰/۷۵ نمره |
| ۱۷ | رقم یکان $A = 2! + 4! + 6! + \ldots + 100!$ عدد را به دست آورید. | دی ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۱۸ | جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.<br>اگر $k$ عددی صحیح باشد. باقی مانده‌ی تقسیم $19k - 300$ بر ۱۹ برابر با .... است. | دی ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۹ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه‌ی $A = \{x \in Z \mid x = 4k + 3\}$، مضرب ۴ است. | خرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۲۰ | جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله $5x + 9y = 22$ را به دست آورید. | خرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |
| ۲۱ | معادله‌ی $9x - 1 \overset{13}{\equiv} 2x + 1$ را حل کنید و تعداد جوابهای دو رقمی طبیعی آن را به دست آورید. | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |

## تهیه کننده : جابرعامری

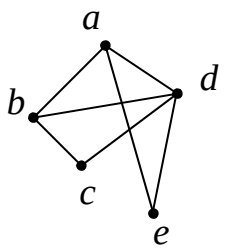
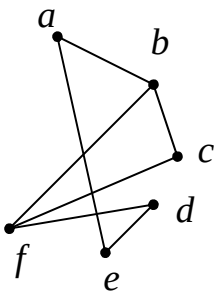
## عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

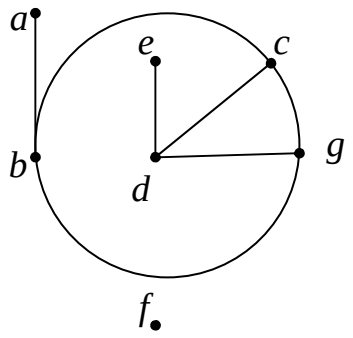
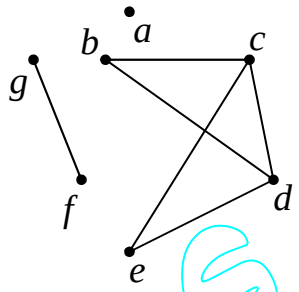
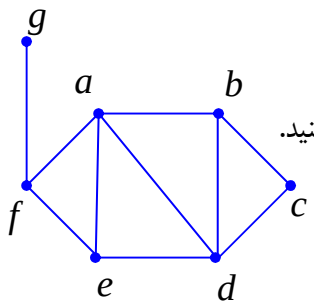
# فصل دوّم

# (( ریاضیات گسسته ))

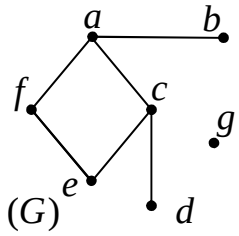
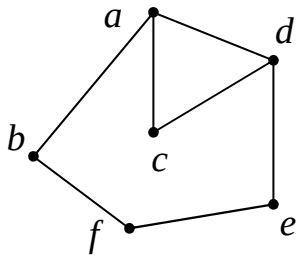
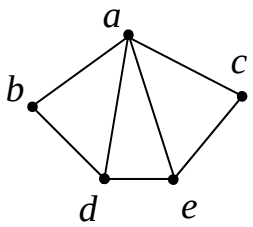
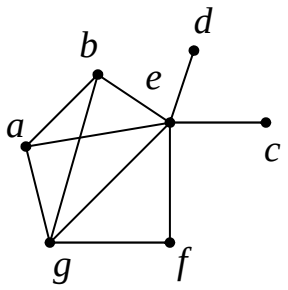
❋❋❋

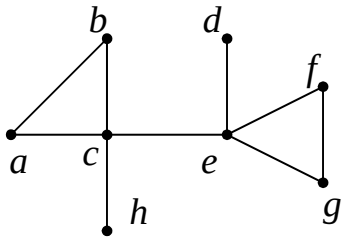
## درس ۱ : گراف

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | جاهای خالی را با عدد یا کلمه ی مناسب پر کنید.<br>الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس ..... می نامیم.<br>ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشند و هیچ یالی نداشته باشد، گراف ..... می نامیم.<br>پ) تعداد یال های گراف $k_۴$، برابر با ..... است.<br>ت) گراف $G$ را .... می نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۲ | به سئوالات زیر کوتاه پاسخ دهید.<br>الف) گراف $C_۷$ را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.<br>ب) در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.<br>  | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۳ | جاهای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب پر کنید. ( خارج کشور)<br>الف) به رأسی که درجه‌ی آن صفر است، یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس ..... می گوییم.<br>ب) اگر یک یال ، یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید، به آن یال ..... گفته می شود.<br>پ) هرگاه بین هر دو رأس یک گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، آن گراف را ..... می نامیم.<br>ث) تعداد رأس های فرد هر گراف ..... است. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۴ | با توجه به گراف $G$ ( شکل زیر) به سئوالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) $\Delta(G)$ را تعیین کنید.<br>ب) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.<br>پ) یک دور به طول ۵ برای $a$ بنویسید.<br>ت) درجه‌ی رأس $c$ در گراف مکمل چند است؟<br>ث) یک زیر گراف با سه یال رسم کنید.<br>  | خرداد ۱۴۰۱ | ۲/۵ نمره |
| ۵ | گراف کامل $K_p$ دارای ۳۶ یال است. مرتبه‌ی گراف را مشخص کنید. ( خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۶ | با توجه به گراف ( $G$ ) ( شکل مقابل) به سئوالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) یک مسیر به طول ۳ از $a$ به $c$ بنویسید.<br>ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.<br>پ) درجه‌ی رأس $a$ را در گراف $\overline{G}$ تعیین کنید.<br>ت) آیا گراف $G$ همبند است؟ ( با ذکر دلیل)<br>ث) $N_G[f]$ را بنویسید.<br>  <br> | شهریور ۱۴۰۱ | ۲/۲۵ نمره |
| ۷ | در جای خالی عبارت های مناسب بنویسید.<br>تعداد یال های گراف $k_۷$ ، برابر..... است. | دی ۱۴۰۱ | ۰/۲۵ نمره |
| ۸ | در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.<br>الف)تعداد رئوس یک گراف را ( اندازه ، مرتبه ) می نامیم.<br>ب) گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک ( مسیر ، یال ) وجود داشته باشد.<br>پ) اگر $G$ یک گراف $n$ رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ برابر با ( $n(n-۱)$ ، $\frac{n(n-۱)}{۲}$ ) است.<br>ت) گراف $C_n$ تنها یک ( دور ، مسیر) $n$ رأسی دارد. | دی ۱۴۰۱ | ۲ نمره |
| ۹ | گراف $G$ ( شکل مقابل) را در نظر بگیرید:<br>الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.<br>ب) دوری به طول ۴ بنویسید.<br>پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس $b$ بنویسید.<br>ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.<br>  <br> | دی ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۱۰ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است. | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۱ | به گراف ۸ رأسی۳- منتظم ، چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه حل) | خرداد ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۱۲ | گراف $G$ به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سئوالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) مجموعه‌ی $N_G(g)$ را بنویسید.<br>ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس $a$ بنویسید.<br>ج) درجه‌ی رأس $c$ در گراف $\overline{G}$ ( مکمل گراف $G$) را مشخص کنید.<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۷۵ نمره |

جابر عامری

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱۳ | جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.<br>الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گرافِ ..... می گوییم.<br>ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی ..... است.<br>ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه‌ی $p$ برابر ..... است.<br>د) گرافی را که درجه‌ی تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد $k$ باشد، گرافِ ..... می گوییم. | شهریور ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۱۴ | گراف $G$ به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سئوالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) مرتبه و اندازه‌ی آن را بنویسید.<br>ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.<br>ج) مجموعه‌ی $N_G[c]$ را بنویسید.<br>د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.<br>هـ) حاصل $q(\overline{G})+\deg_{\overline{G}}(g)$ عبارت را به دست آورید.<br>  <br> | شهریور ۱۴۰۲ | ۲/۵ نمره |
| ۱۵ | الف) مجموعه‌ی همسایگی بسته‌ی یک رأس را تعریف کنید.<br>ب) در گراف شکل روبرو ، همسایگی باز رأس $d$ را بنویسید.<br>  <br> | دی ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۱۶ | مکمل گراف $G$ که در شکل زیر آمده است، را رسم کنید.<br>  <br> | دی ۱۴۰۲ | ۰/۷۵ نمره |
| ۱۷ | آیا می توان گرافی ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۹ رسم کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. | دی ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۱۸ | نمودار گراف $P_{10}$ را رسم کنید. تمام مسیرهای متفاوت به طول ۳ در این گراف را نوشته و تعداد این مسیرها را قید نمایید. | دی ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۱۹ | با توجه گراف $G$، مقابل به سئوالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.<br>ب) مسیری به طول ۵ از رأس $c$ به رأس $f$ بنویسید.<br>ج) دوری به طول ۴ بنویسید.<br>د) آیا گراف $\overline{G}$ همبند است؟ چرا؟<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۳ | ۲ نمره |
| ۲۰ | جای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید.<br>گراف ۳- منتظم ، ۸ رأسی دارای ..... یال است. | مرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۲۱ | اگر $\deg_G(v)=5$ و $G$ یک گراف ۱۰ رأسی باشد،آنگاه $\deg_{\overline{G}}(v)=4$ | مرداد | ۰/۲۵ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ۱۴۰۳ | نمره |
| ۲۲ | گراف $G$ روبرو را در نظر بگیرید:<br>الف) مقدار $q(\overline{G})$ را به دست آورید.<br>ب) مجموع درجات رئوس گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.<br>پ) مجموعه‌ی $N_{\overline{G}}[e]$ را بنویسید.<br>  <br> | مرداد<br>۱۴۰۳ | ۱/۵<br>نمره |
| ۲۳ | در گراف کامل $K_p$ با ۲۸ یال مقدار $۲\Delta(K_p) - ۳\delta(K_p) + p$ را محاسبه کنید. | مرداد<br>۱۴۰۳ | ۱<br>نمره |
| ۲۴ | ۷ دانش آموز $g$ و $f$ و $e$ و $d$ و $c$ و $b$ و $a$ از یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید، دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه‌ی دو طرفه است. یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند یا هیچ یک با دیگری دوست نیست. اطلاعات زیر را داریم:<br>– شخص $a$ با $d$ و $g$ و $b$ دوست می باشد. شخص $b$ با همه به جز $c$ دوست می باشد.<br>– شخص $e$ با $f$ دوست می باشد. شخص $d$ با $g$ دوست می باشد.<br>الف) برای رابطه‌ی دوستی فوق یک گراف ترسیم کنید.<br>ب) رأس با رئوس ایزوله این گراف را مشخص کنید و تعبیر آن را در این رابطه‌ی دوستی بیان کنید.<br>پ) رابطه‌ی دوستی کدام چهار نفر تشکیل یک گراف کامل را می دهد؟ | مرداد<br>۱۴۰۳ | ۱/۵<br>نمره |

## تهیه کننده : جابرعامری

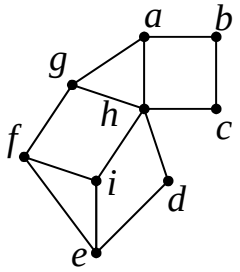
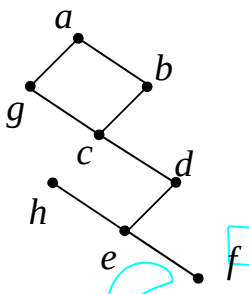
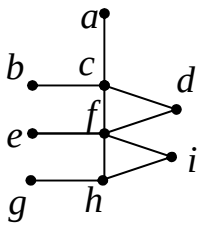
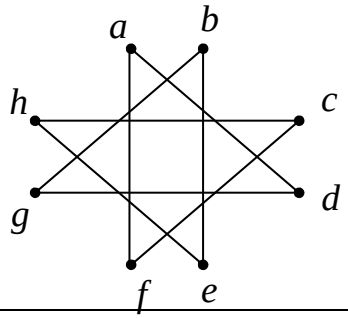
## عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

# فصل دوّم

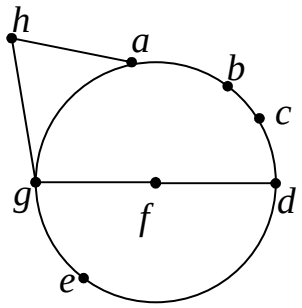
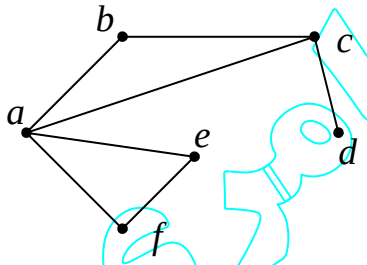
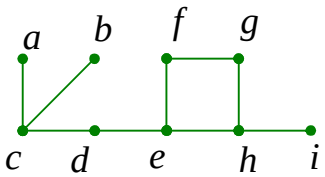
# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

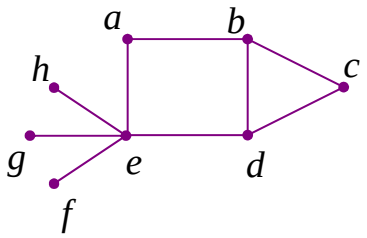
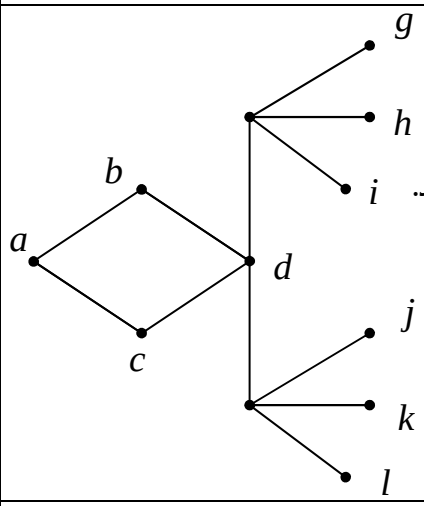
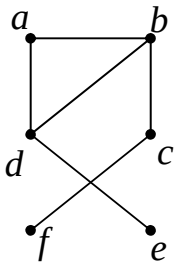
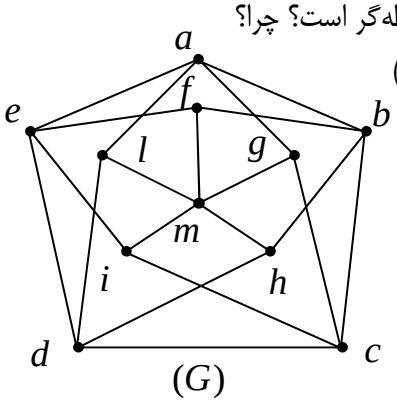
## درس ۲ : مدل سازی با گراف

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | الف) مجموعه احاطه گر مینیمال را تعریف کنید.<br>ب) برای گراف شکل روبرو، یک مجموعه‌ی احاطه گر با ۴ عضو انتخاب کنید.<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۲ | عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه‌ی راه حل ، تعیین کنید.<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۳ | ابتدا گراف $P_9$ را رسم کنید. سپس یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم از آن را مشخص کنید. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۴ | گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید.<br>الف) یک $\gamma$ − مجموعه مشخص کنید.<br>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۵ | عدد احاطه گرای گراف شکل مقابل را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید. (خارج کشور)<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |

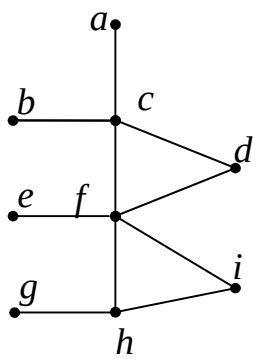
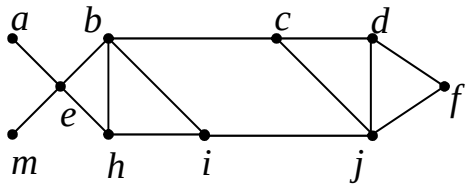
جابر عامری

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۶ | به سئوالات زیر پاسخ داده و برای آنها دلیل ارائه کنید.<br>الف) یک گراف کامل ۱۱ رأسی چند یال دارد؟<br>ب) در یک گراف از مرتبه‌ی ۸ با $\Delta = ۳$ ، حداقل چند رأس برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس لازم است؟ | شهریور ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۷ | به سئوالات زیر پاسخ دهید:<br>الف) گراف $C_۸$ را رسم کنید.<br>ب) یک $\gamma -$ مجموعه از آن را مشخص کنید.<br>پ) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۴- عضوی از آن را مشخص کنید. | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۸ | با توجه به گراف ( $G$ ) به سئوالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید.<br>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیممم نباشد.<br>  <br> | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۹ | در جای خالی عبارت های مناسب بنویسید.<br>یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر نباشد، احاطه ..... می نامیم. | دی ۱۴۰۱ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۰ | عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید و ادعای خود را ثابت نمایید.<br>  <br> | دی ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۱۱ | یک گراف ۲- منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. | دی ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۱۲ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>عدد احاطه گری $P_{۱۰}$ برابر عدد ۳ است. | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۳ | جای خالی را عبارت مناسب پر کنید.<br>در یک گراف از مرتبه‌ی $p$ ، اگر $\gamma(G) = ۱$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یالها برابر ..... است. | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۱۴ | گراف زیر را در نظر بگیرید.<br>  <br><br>الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال با ۴ عضو بنویسید.<br>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.<br>ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه گری گراف ۲ خواهد شد؟ | خرداد ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۱۵ | الف) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۳ داشته باشد. | خرداد ۱۴۰۲ | ۱ نمره |

جابر عامری

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ب) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر با اندازه‌ی ۳ داشته باشد. | | |
| ۱۶ | گراف مقابل را در نظر بگیرید.<br>الف) عدد احاطه گری گراف را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید.<br>ب) این گراف چند $\gamma -$ مجموعه دارد؟<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۲ | ۱/۷۵ نمره |
| ۱۷ | گراف زیر را در نظر بگیرید:<br>الف) عدد احاطه گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.<br>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.<br>ج) یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال ۴ عضوی بنویسید.<br>  <br> | شهریور ۱۴۰۲ | ۲/۵ نمره |
| ۱۸ | الف) با ذکر دلیل عدد احاطه گری گراف شکل زیر را تعیین کنید.<br>ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال بنویسید که مینیمم نباشد.<br>دلیل پاسخ خود را بنویسید.<br>  <br> | دی ۱۴۰۲ | ۲ نمره |
| ۱۹ | درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.<br>هر مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم است. | خرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۲۰ | جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.<br>الف) عدد احاطه‌گری گراف $C_7$ برابر است با ..... . | خرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۲۱ | با توجه به گراف $G$، به سئوالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) آیا مجموعه‌ی $D=\{a,b,m\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است؟ چرا؟<br>ب) عدد احاطه گری گراف $G$ را بدست آورید. (با ذکر دلیل)<br>ج) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۵ عضوی از آن را بنویسید.<br>  <br><br>$(G)$ | خرداد ۱۴۰۳ | ۲ نمره |

جابر عامری

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۲۲ | در گراف روبرو :<br>الف) مجموعه‌ی احاطه‌گر غیر مینیمال $A=\{b,e,g,a,f\}$ را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید.<br>ب) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم که شامل شامل رأس $e$ باشد را بنویسید.<br>ج) با اضافه نمودن چه یالی عدد احاطه‌گری گراف ۲ می شود؟<br>  <br> | خرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |
| ۲۳ | الف) گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.<br>ب) یک $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص کنید. | خرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |
| ۲۴ | گراف روبرو را در نظر بگیرید:<br>الف) آیا $\{a,h,j,f\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر برای این گراف می باشد؟ چرا؟<br>ب) آیا مجموعه‌ی $\{a,m,i,f,d\}$ احاطه گر مینیمال است؟ چرا؟<br>پ) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم شامل رأس $e$ را بنویسید.<br>  <br> | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان**

# فصل سوّم

# (( ریاضیات گسسته ))

***

## درس ۱ : مباحثی در ترکیبیات

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که :<br>الف) کتاب های تاریخ همواره کنار هم باشند.<br>ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۲ | می خواهیم با ارقام ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۴ و ۳ و ۲ یک عدد ۷ رقمی تولید کنیم به طوری که :<br>الف) اعداد زوج کنار هم باشند.<br>ب) هیچ دو عدد زوجی کنار هم نباشند. ( خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۳ | به چند طریق می توان ۴۵ دانش آموز را در چهار کلاس ۸ نفره،۱۰ نفره،۱۲ نفره و۱۵ نفره در یک مدرسه قرار دارد؟ | شهریور ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۴ | می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر رو به روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می توان انجام داد؟ | دی ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۵ | اگر داشته باشیم، $A=\{۷,۸,۹\}$ و $B=\{a,b,c,d,e,f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از $A$ و چهار حرف از $B$ باشد؟ | خرداد ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۶ | چهار برادر و سه خواهر می خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادر ها کنار هم قرار بگیرند. آن گاه این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟ | شهریور ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۷ | می خواهیم۱۰ نفر را که دو به دو برابر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟ | خرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |

## جایگشت های با تکرار

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | با ارقام ۹ و ۷ و ۶ و ۵ و ۳ و ۳ و ۱ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟ | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۲ | به چند طریق می توان ۷ نفر را در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار داد؟ ( خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۳ | برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسأله ای طرح | شهریور | ۱ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | کنید که پاسخ آن $7!\times 4!$ باشد. | ۱۴۰۱ | نمره |
| ۴ | با ارقام ۲ و ۳ و ۱ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ چند کد ۸ رقمی می توان نوشت؟ | شهریور ۱۴۰۲ | ۰/۷۵ نمره |
| ۵ | با ارقام ۶ و ۶ و ۵ و ۱ و ۴ و ۴ و ۴ ، چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟ راه حل خود را بنویسید. | دی ۱۴۰۲ | ۰/۷۵ نمره |
| ۶ | با ارقام ۳ و ۱ و ۲ و ۳ و ۱ و ۲ و ۴ و ۳ و ۲ و ۲ چند عدد ۱۰ رقمی می توان نوشت؟ ( محاسبه‌ی جواب آخر الزامی نیست.) | خرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |
| ۷ | با حروف عبارت « **بادبادک باز**» چند کلمه‌ی ۱۰ حرفی می توان نوشت؟ | مرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |

# معادلات حسابی

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3=4$ و $x_5>2$ باشد؟ | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۲ | معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟( خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۳ | تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را با شرایط داده شده به دست آورید. $x_1+4x_2+x_3+x_4+x_5=9 \qquad (x_i\geq 0\ ,\ 1\leq i\leq 4\ ,\ x_5=2)$ | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۴ | به چند روش می توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد، به طوری که از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم. | دی ۱۴۰۱ | ۱/۷۵ نمره |
| ۵ | معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+2x_4^3=10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟ | خرداد ۱۴۰۲ | ۲ نمره |
| ۶ | معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد. به شرط آن که $x_2=4$ و $x_4\geq 3$ باشد. | شهریور ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۷ | نشان دهید تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k=n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است. | دی ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۸ | تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+2x_2+x_3+x_4=20$ را با شرط-های $x_3\geq 4$ و $x_2=3$ و $x_1>2$ به دست آورید. | خرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |
| ۹ | به چند طریق می توان از بین مدادهایی با رنگ های، زرد- آبی- قرمز- سبز، ۱۱ مداد انتخاب کرد. اگر بخواهیم از مداد زرد رنگ حداقل دو تا و از مداد سبز رنگ بیش از سه تا داشته باشیم. | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |

# مربع های لاتین

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | الف) مربع لاتین $A$ را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت( ۳ ← ۱ و ۲ ← ۲ و ۴ ← ۳ و ۱ ← ۴ ) مربع لاتین $B$ را به دست آورید. | خرداد ۱۴۰۱ | ۲ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline\end{array}$<br>ب) آیا دو مربع لاتین $A$ و $B$ متعامدند؟ دلیل بیاورید. | | |
| ۲ | الف) مربع لاتین $A$ را در نظر بگیرید. سطر اول و سوم مربع $A$ را جابجا کنید تا مربع لاتین $B$ حاصل شود.<br>$A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۱&۲&۳\\\hline ۲&۳&۱\\\hline ۳&۱&۲\\\hline\end{array}$<br>ب) آیا دو مربع لاتین $A$ و $B$ متعامدند؟ دلیل بیاورید. (خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۳ | دو مربع لاتین متعامد ۳×۳ را بنویسید. (دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید.) | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۴ | درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.<br>دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۶ وجود ندارد. | دی ۱۴۰۱ | ۰/۲۵ نمره |
| ۵ | قرار است سه مدرس $T_۱$ و $T_۲$ و $T_۳$ در سه جلسه‌ی متوالی در سه کلاس $C_۱$ و $C_۲$ و $C_۳$ به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور ، با استفاده از مربع لاتین برنامه ریزی کنید. | دی ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۶ | جای خالی را عبارت مناسب پر کنید.<br>در یک مربع لاتین چرخشی ۴×۴ ، مجموع درایه های روی قطر اصلی برابر ..... است. | خرداد ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۷ | قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند، به گونه ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقا یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هر یک از مسیرها را دقیقا یک بار طی کند. برای این مسأله برنامه ریزی کنید. | خرداد ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۸ | ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی۳ بنویسید. | شهریور ۱۴۰۲ | ۱/۵ نمره |
| ۹ | مربع لاتینی بنویسید که با مربع لاتین زیر متعامد باشد و متعامد بودن آن را با ذکر دلیل بیان کنید.<br>$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۱&۳&۲\\\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline\end{array}$ | دی ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۱۰ | جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.<br>فقط ..... مربع لاتین وجود دارد و ..... مربع لاتین ۱×۱ وجود دارد. | دی ۱۴۰۲ | ۰/۵ نمره |
| ۱۱ | قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخ ریسی و سه نوع الیاف در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقا یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقا یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید. | خرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱۲ | الف) سه مدرس $A$ و $B$ و $C$ قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰–۸ و ۱۲–۱۰ و ۱۴–۱۲ در سه کلاس (الف) و (ب) و (ج) تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه‌ی درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. به کمک مربع لاتین چرخشی برای آنها یک برنامه ریزی انجام دهید.<br>ب) در برنامه‌ی قبلی، مدرس $A$ تصمیم دارد با مدرس $B$ برنامه‌ی خود را جابجا کند. مربع لاتین جدید را تشکیل دهید و متعامد بودن این دو مربع لاتین را بررسی کنید. | مرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |
| ۱۳ | درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید.<br>برای $n=۱,۲,۶$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی $n$ وجود ندارد. | مرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |

## تهیه کننده : جابرعامری

## عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

# فصل سوّم

# (( ریاضیات گسسته ))

***

## درس ۲ : روش هایی برای شمارش ، اصل شمول و عدم شمول

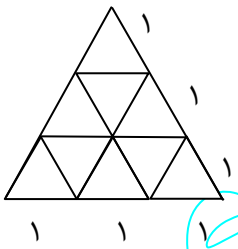
| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | چند عضو از مجموعه‌ی $S=\{n\in N \mid ۱\le n\le ۶۳۰\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیرند؟ | دی ۱۴۰۱ | ۱/۵ نمره |
| ۲ | چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ ( نیاز به محاسبه‌ی پاسخ نهایی نمی باشد.) | خرداد ۱۴۰۲ | ۲ نمره |
| ۳ | در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($۱\le n\le ۵۰۰$) چند عدد وجود دارد که به هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟ | شهریور ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۴ | اگر یک قفل رمز دار شامل ۴ رقم صفر تا ۵ باشد و بدانیم رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم صفر و یک رقم ۵ را شامل می شود. چند رمز متفاوت برای این قفل می توان ساخت. | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۵ نمره |

## نتایج اصل شمول و عدم شمول در تعیین تعداد توابع

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | به چند طریق می توان ۵ سیب متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد. به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۲ | به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد. اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم. ( خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۰/۷۵ نمره |
| ۳ | تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۷ عضوی را به دست آورید. ( راه حل نوشته شود.) | شهریور ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۴ | جای خالی را عبارت مناسب پر کنید.<br>تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۳ عضوی به یک مجموعه‌ی ۵ عضوی برابر ..... است. | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۵ | جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.<br>تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ی دو عضوی به مجموعه‌ی ۴ چهار عضوی برابر ..... می باشد. | دی ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |
| ۶ | به چند طریق می توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم. | دی ۱۴۰۲ | ۱/۷۵ نمره |
| ۷ | جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.<br>تعداد راه‌های توزیع ۳ خودکار متفاوت بین ۵ نفر به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد، | خرداد ۱۴۰۲ | ۰/۲۵ نمره |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | برابر ..... است. | | |
| ۸ | تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی $A$ به مجموعه‌ی ۳ عضوی $B$ را به دست آورید. | خرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |
| ۹ | جای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید.<br>تعداد توابع یک به یک مانند $f : A \to B$ اگر بدانیم، $\|B\|=۴$ و $\|A\|=۵$ برابر ..... است. | مرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |

# اصل لانه کبوتری

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۲ | حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع۲ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از یک باشد. ( خارج کشور) | خرداد ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۳ | حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ ، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است. | شهریور ۱۴۰۱ | ۱ نمره |
| ۴ | هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و۶ انتخاب می کنیم، ثابت کنید، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها کمتر از $\sqrt{۸}$ است. | دی ۱۴۰۱ | ۱/۲۵ نمره |
| ۵ | یک نجار در هفته ۴ مدل صندلی در ۳ رنگ متفاوت می سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم، لااقل ۳ صندلی هم رنگ و هم مدل ساخته شده است. | شهریور ۱۴۰۲ | ۱ نمره |
| ۶ | یک مثلث متساوی الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه‌ی دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم. حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله-ی آنها از یکدیگر کمتر از یک باشد.<br>  <br> | دی ۱۴۰۲ | ۱/۲۵ نمره |
| ۷ | حداقل چند دانش آموز در حیاط یک دبیرستان حضور داشته باشند، تا مطمئن باشیم لااقل ۲۱ نفر از آنها متعلق به یک پایه‌ی تحصیلی ( دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشته تحصیلی ( ریاضی، تجربی، انسانی) هستند. | خرداد ۱۴۰۳ | ۱ نمره |
| ۸ | جاهای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید.<br>در بین ۳۹۰ دانش آموز، حداقل ..... نفر روز تولد یکسانی دارند. | مرداد ۱۴۰۳ | ۰/۲۵ نمره |
| ۹ | ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عـددی زوج است. | مرداد ۱۴۰۳ | ۱/۲۵ نمره |

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان**

# فصل اوّل

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۱ : استدلال ریاضی

| | |
|---|---|
| ۱ | $n=۲k \to n^۲-۵n+۷=۴k^۲-۱۰k+۶+۱=۲(۲k^۲-۵k+۳)+۱=۲q+۱$ |
| ۲ | الف) نادرست $\sqrt{۵}+(۲-\sqrt{۵})=۲$ ب) درست پ) درست ت) درست |
| ۳ | $n=۲k+۱ \to n^۲-۵n+۷=(۲k+۱)^۲-۵(۲k+۱)+۷$<br>$=۴k^۲+۴k+۱-۱۰k-۵+۷=۲(۲k^۲-۳k+۱)+۱=۲q+۱$ |
| ۴ | الف) نادرست، $n=۳$ مثال نقض می باشد.<br>ب) درست<br>$a=۲k+۱ \to a^۲=(۲k+۱)^۲ \to a^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲(۲k^۲+۲k)+۱=۲k'+۱$ |
| ۵ | اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ اگر زوج نباشد ( فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_۱-b_۱)$ و $(a_۲-b_۲)$ و $(a_۳-b_۳)$ هم باید فرد باشند، در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد. اما با توجه به فرض مسأله، مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است، با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. |
| ۶ | الف : درست ب : نادرست |
| ۷ | $y^۲+۱ \geq -۲x(y+x+۱)$<br>$\leftrightarrow y^۲+۲xy+x^۲+x^۲+۲x+۱ \geq ۰$<br>$\leftrightarrow (y+x)^۲+(x+۱)^۲ \geq ۰$<br>رابطه‌ی بدست آمده همواره بدیهی است. از طرفی چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، لذا حکم ثابت است. |
| ۸ | درست ، به کمک برهان خلف اثبات می شود. |
| ۹ | $x^۲+y^۲+۱ \geq ۲xy-z^۲ \to x^۲-۲xy+y^۲+z^۲+۱ \geq ۰$<br>$\to (x-y)^۲+z^۲+۱ \geq ۰$<br>نامساوی بدست آمده همواره بدیهی است، حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، حکم ثابت است. |
| ۱۰ | نادرست؛ ممکن است حاصل ضرب عدد گویا شود. مثلاً : $-\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=-۲$ |
| ۱۱ | $۲x^۲+۲xy+y^۲ \geq ۴x-۴$ |

| | |
|---|---|
| $\leftrightarrow 2x^2+2xy+y^2-4x+4\geq 0$<br>$\leftrightarrow (x+y)^2+(x-2)^2\geq 0$<br>رابطه‌ی بدست آمده ، بدیهی است و چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم برقرار می باشد. | |
| الف) درست؛ اثبات :<br>$2k(2k+2)+1=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$<br>ب) نادرست؛ مثال نقض<br>حاصل ضرب عدد صفر در هر عدد گویا، برابر صفر است که یک عدد گویا می باشد. | ۱۲ |
| $a^2+b^2\not< -ab\rightarrow a^2+b^2\geq -ab$<br>$\xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2\geq -2ab\rightarrow a^2+b^2+a^2+b^2+2ab\geq 0$<br>$\rightarrow a^2+b^2+(a^2+b^2+2ab)\geq 0\rightarrow a^2+b^2+(a+b)^2\geq 0$<br>نامساوی بدست آمده، بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است. | ۱۳ |
| نادرست ؛ به شرط اینکه این اعداد متوالی باشند که در سئوال ذکر نشده | ۱۴ |
| $a^2+b^2\geq (a-1)(b+1)$<br>$\leftrightarrow a^2+b^2\geq ab+a-b-1$<br>$\leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b+1)\geq 0$<br>این رابطه همواره برقرار است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیرند، پس حکم برقرار است. | ۱۵ |
| گزینه‌ی ۲ ؛ زیرا از بین دو گزاره‌ی $a<b$ و $a^3<b^3$ ، هر گزاره از دیگری نتیجه می شود. | ۱۶ |
| $\frac{a+b}{2}\geq \sqrt{ab}\rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\rightarrow (a+b)^2\geq (2\sqrt{ab})^2$<br>$\rightarrow a^2+2ab+b^2\geq 4ab\rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\rightarrow (a-b)^2\geq 0$<br>نامساوی بدست آمده بدیهی (همواره درست) است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم درست است. | ۱۷ |

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه**

**استان خوزستان**

# فصل اوّل

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۲ : بخش پذیری در اعداد صحیح

| | |
|---|---|
| ۱ | الف) نادرست ب) درست پ) نادرست |
| ۲ | $\begin{cases} ۵ \mid ۴k+۱ \to ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۸k+۱ \\ ۵ \mid ۴k+۱ \to ۲۵ \mid ۲۰k+۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲۵ \mid (۱۶k^۲+۸k+۱)+(۲۰k+۵)$ <br> $\to ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۲۸k+۶$ |
| ۳ | الف) $a \mid b \ , \ b \mid a \ \to \ a=\pm b$ ب) $m \le d$ |
| ۴ | $a \mid ۹k+۴ \xrightarrow{۵(۹k+۴)} a \mid ۴۵k+۲۰$ <br> $a \mid ۵k+۳ \xrightarrow{۹(۵k+۳)} a \mid ۴۵k+۲۷$ <br> $\to a \mid ۷ \to a=\pm ۱ \ , \ \pm ۷$ <br> چون $a>۱$، پس $a=۷$ |
| ۵ | $\begin{cases} a \mid ۵k+۹ \\ a \mid ۸k+۱۳ \end{cases} \to \begin{cases} a \mid ۴۰k+۷۲ \\ a \mid ۴۰k+۶۵ \end{cases} \to a \mid ۷ \to a=۱ \ \vee \ a=۷$ |
| ۶ | $\begin{cases} a=۶q+۳ \\ a=۷q'+۵ \end{cases} \to \begin{cases} ۷a=۴۲q+۲۱ \\ ۶a=۴۲q'+۳۰ \end{cases} \to a=۴۲(q-q'-۱)+۳۳ \to r=۳۳$ |
| ۷ | نادرست |
| ۸ | الف) $m^۲$ ب) نسبت هم اول (متباین) |
| ۹ | $\begin{cases} a \mid ۵m+۴ \\ a \mid ۶m+۵ \end{cases} \to \begin{matrix} a \mid ۶(۵m+۴) \\ a \mid ۵(۶m+۵) \end{matrix} \to a \mid ۵(۶m+۵)-۶(۵m+۴)$ <br> $\to a \mid ۳۰m+۲۵-۳۰m-۲۴ \to a \mid ۱ \to a=\pm ۱$ |
| ۱۰ | $a$ عدد صحیح فرد $\to a=۲k_۱+۱$ <br> $b$ عدد صحیح فرد $\to b=۲k_۲+۱$ <br> $a^۲+b^۲+۵=(۲k_۱+۱)^۲+(۲k_۲+۱)^۲+۵$ <br> $=۴k_۱^۲+۴k_۱+۱+۴k_۲^۲+۴k_۲+۱+۵=۴k_۱(k_۱+۱)+۴k_۲(k_۲+۱)+۷$ <br> $=۴(۲m)+۴(۲n)+۷=۸(m+n)+۷=۸k+۷ \to r=۷$ |

| | |
|---|---|
| ۱۱ | $\times ۲\begin{cases} a \mid ۲m+۳ \\ a \mid m+۷ \end{cases} \rightarrow \times ۲\begin{cases} a \mid ۲m+۳ \\ a \mid ۲m+۱۴ \end{cases} \rightarrow a \mid (۲m+۱۴)-(۲m+۳)$<br>$\rightarrow a \mid ۱۱ \rightarrow a=۱ \quad or \quad a=۱۱$ |
| ۱۲ | $\begin{cases} a=۵q_۱+۴ \xrightarrow{\times ۴} \\ a=۴q_۲+۳ \xrightarrow{\times ۵} \end{cases} \begin{cases} ۴a=۲۰q_۱+۱۶ \\ ۵a=۲۰q_۲+۱۵ \end{cases} \rightarrow a=(۲۰q_۱+۱۵)-(۲۰q_۲+۱۶)$<br>$\rightarrow a=۲۰(q_۱-q_۲)+(۱۵-۱۶) \rightarrow a=۲۰q+(-۱) \rightarrow a=۲۰q+(۱۹-۲۰)$<br>$\rightarrow a=۲۰(q-۱)+۱۹ \rightarrow a=۲۰k+۱۹ \rightarrow r=۱۹$ |
| ۱۳ | درست ، چون دو عدد متوالی اند و هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند. |
| ۱۴ | الف) نادرست؛ ممکن است $a$ نه $b$ و $c$ را عاد نکند. مثلاً : $۵ \mid ۱۲+۸ \not\rightarrow ۵ \mid ۱۲ \ , \ ۵ \mid ۸$<br>ب) درست؛ تعریف دو عدد متباین ( یا نسبت به هم) اول |
| ۱۵ | فرض کنید که $b$ عدد فرد نیابد، پس زوج است. لذا وجود دارد عدد صحیح $k$ که در آن $b=۲k$<br>$b=۲k \xrightarrow{b \mid a+۲} a+۲=bq \rightarrow a+۲=۲kq$<br>$\rightarrow a=۲kq-۲ \rightarrow a=۲(kq-۱) \rightarrow a=۲k'$<br>که با فرض سئوال در تناقض است. |
| ۱۶ | $۷ \mid ۲k+۱ \rightarrow (۷)^۲ \mid (۲k+۱)^۲ \rightarrow ۴۹ \mid ۴k^۲+۴k+۱ \quad (۱)$<br>$۷ \mid ۲k+۱ \xrightarrow{\times ۷} ۴۹ \mid ۱۴k+۷ \quad (۲)$<br>$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۴۹ \mid (۴k^۲+۴k+۱)-(۱۴k+۷) \rightarrow ۴۹ \mid ۴k^۲-۱۰k-۶$ |
| ۱۷ | چون $a \mid b$ پس وجود دارد یک عدد صحیح مانند $q$ به طوری که $b=aq$ ، ولی چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ لذا باید<br>$\lvert q \rvert \geq ۱$<br>اکنون دو طرف این نامساوی را در $\lvert a \rvert$ ضرب می کنیم. در این صورت خواهیم داشت.<br>$۱ \leq \lvert q \rvert \rightarrow \lvert a \rvert \leq \lvert a \rvert \times \lvert q \rvert \rightarrow \lvert a \rvert \leq \lvert aq \rvert \rightarrow \lvert a \rvert \leq \lvert b \rvert$ |
| ۱۸ | $b$ ، زیرا:<br>$a \mid b \rightarrow [a,b]=b$<br>$a \mid b \ , \ b \mid c \rightarrow a \mid c \rightarrow [a,c]=c$<br>$b \mid c \rightarrow (b,c)=b$<br>$([a,b],[a,c])=(b,c)=b$ |
| ۱۹ | نادرست ؛ باید ذکر شود که $[m^۵,(m^۳,m^۲)]=\lvert m \rvert^۵$ |
| ۲۰ | $\begin{cases} a \mid ۷k+۱ \rightarrow a \mid ۲۸k+۴ \\ a \mid ۴k+۳ \rightarrow a \mid ۲۸k+۲۸ \end{cases} \rightarrow a \mid ۱۷ \rightarrow a=۱ \quad or \quad a=۱۷$ |
| ۲۱ | $\begin{cases} a=۴q_۱+۲ \\ a=۵q_۲+۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۵a=۲۰q_۱+۱۰ \\ ۴a=۲۰q_۲+۱۲ \end{cases} \rightarrow a=۲۰(q_۱-q_۲)-۲=a=۲۰q_۳+۱۸$ |

| | |
|---|---|
| $\rightarrow a = ۲۰q_۳ + ۱۸ \rightarrow r = ۱۸ \quad or \quad r = -۲ + ۲۰ = ۱۸$ | |
| یک ؛ این موضوع یک قضیه است. | ۲۲ |
| $\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{\exists k_۱ \in Z} b = ak_۱ \\ a \mid c \xrightarrow{\exists k_۲ \in Z} c = ak_۲ \end{cases} \xrightarrow{\pm} b \pm c = ak_۱ \pm ak_۲ \rightarrow b \pm c = a(k_۱ \pm k_۲)$ <br> $\rightarrow a \mid b \pm c$ | ۲۳ |
| $\begin{cases} a = ۲k_۱ + ۱ \\ b = ۲k_۲ + ۱ \end{cases}$ <br> $a^۲ + b^۲ - ۵ = (۲k_۱ + ۱)^۲ + (۲k_۲ + ۱)^۲ - ۵$ <br> $= (۴k_۱^۲ + ۴k_۱ + ۱) + (۴k_۲^۲ + ۴k_۲ + ۱) - ۵ = (۴k_۱^۲ + ۴k_۱) + (۴k_۲^۲ + ۴k_۲) - ۳$ <br> $= ۴k_۱(k_۱ + ۱) + ۴k_۲(k_۲ + ۱) - ۳ = ۴(۲m) + ۴(۲n) - ۸ + ۵$ <br> $= (۸m + ۸n - ۸) + ۵ = ۸(m + n - ۱) + ۵ = ۸q + ۵ \rightarrow r = ۵$ | ۲۴ |
| کافی است $p$ را بر عدد ۴ تقسیم کنیم. در این صورت طبق قضیه‌ی تقسیم خواهیم داشت: <br> $p = ۴k$ و $p = ۴k + ۱$ و $p = ۴k + ۲$ و $p = ۴k + ۳$ <br> واضح است که در حالت های $p = ۴k$ و $p = ۴k + ۲$ ، عدد $p$ زوج است. لذا با اول بودن آن تناقض دارد. با این وصف فقط حالت های $p = ۴k + ۱$ و $p = ۴k + ۳$ باقی می ماند و حکم ثابت می شود. | ۲۵ |
| ) نادرست؛ ب م م و ک م م طبق تعریف باید عدد صحیح مثبت باشند. <br> $([-۱۲ , -۱۸] , ۳۰) = (۳۶,۳۰) = ۶$ | ۲۶ |

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه**

**استان خوزستان**

# فصل اوّل

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۲ : هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربرد ها

| | |
|---|---|
| ۱ | درست |
| ۲ | $۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \rightarrow (۲۷)^{۲۰} \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^{۲۰} \rightarrow (۲۷)^{۲۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$<br>$۱۸ = ۱۳ \times ۱ + ۵ \rightarrow ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۵$<br>$(۲۷)^{۲۰} + ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۵ \rightarrow (۲۷)^{۲۰} + ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \rightarrow r = ۶$ |
| ۳ | فاصله ی ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با : $۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱$ است. از طرفی $۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$ . بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است.<br>ج پ چ س د ی ش<br>۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰ |
| ۴ | الف) $(a,m) \mid b$ ب) $x \in [۳]_۴$ |
| ۵ | از مفهوم هم نهشتی استفاده می کنیم.<br>$۱۳۵۸۱۱۲ \overset{۹}{\equiv} ?$<br>$۱۳۵۸۱۱۲ \overset{۹}{\equiv} ۱ + ۳ + ۵ + ۸ + ۱ + ۱ + ۲$<br>$۱۳۵۸۱۱۲ \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{۲۱ \overset{۹}{\equiv} ۳} ۱۳۵۸۱۱۲ \overset{۹}{\equiv} ۳$<br>یعنی باقی مانده ۳ می شود. |
| ۶ | اوّل روز ها از اول مهر تا ۷ اسفند را حساب می کنیم :<br>$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۷ = ۱۵۶$<br>$\rightarrow ۱۵۶ \overset{۷}{\equiv} ۲$<br>پس جواب ۲ روز بعد از اولین روز، یعنی شنبه می شود. پس ۷ اسفند می شود دوشنبه |
| ۷ | همه‌ی اعداد صحیح مانند $a$ که ۵ برابر آنها بعلاوه ۹ بر ۱۱بخش پذیر باشد. به زبان همنهشتی : |

$$۵a+۹=۱۱k \rightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} -۹$$

$$\rightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} -۹-۱۱ \rightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} -۲۰ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} a \overset{۱۱}{\equiv} -۴$$

$$\rightarrow a=۱۱k-۴ \qquad k\in Z$$

مثلاً : $a=\{\ldots,-۱۵,-۴,۷,۱۸,\ldots\}$

**۸**

عدد $n$ رقمی $A=a_{n-۱}a_{n-۲}\ldots a_{\circ}$ را بسط می دهیم و در هم نهشتی به پیمانه‌ی ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می دهیم. داریم :

$$A=۱۰^{n-۱}a_{n-۱}+۱۰^{n-۲}a_{n-۲}+\ldots+۱۰^{۲}\times a_{۲}+۱۰\times a_{۱}+۱۰^{\circ}\times a_{\circ}$$

$$\rightarrow A\overset{۹}{\equiv}۱\times a_{n-۱}+۱\times a_{n-۲}+\ldots+۱\times a_{۲}+۱\times a_{۱}+۱\times a_{\circ}$$

$$\rightarrow A\overset{۹}{\equiv}a_{n-۱}+a_{n-۲}+\ldots+a_{۲}+a_{۱}+a_{\circ}$$

**۹**

$$۵x+۳y=۴۲ \rightarrow ۵x\overset{۳}{\equiv}۴۲ \rightarrow ۵x\overset{۳}{\equiv}\circ \rightarrow x\overset{۳}{\equiv}\circ \leftarrow x=۳k$$

$$۵x+۳y=۴۲ \rightarrow ۵(۳k)+۳y=۴۲ \rightarrow y=-۵k+۱۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱۴ \end{cases}, \begin{cases} x=۳ \\ x=۹ \end{cases}, \begin{cases} x=۶ \\ x=۴ \end{cases}$$

**۱۰**

$$۱!=۱ \rightarrow ۱!\overset{۱۵}{\equiv}۱$$

$$۲!=۲\times۱ \rightarrow ۲!\overset{۱۵}{\equiv}۲$$

$$۳!=۳\times۲\times۱ \rightarrow ۳!\overset{۱۵}{\equiv}۶$$

$$۴!=۴\times۳\times۲\times۱ \rightarrow ۴!\overset{۱۵}{\equiv}۹$$

$$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱ \rightarrow ۵!\overset{۱۵}{\equiv}۰$$

و چون در سایر موارد عوامل ۳ و ۵ وجود دارد پس بر ۱۵ بخش پذیر می باشند. لذا :

$$۱!+۲!+۳!+۴!+۵!+\ldots+۲۰۰!\overset{۱۵}{\equiv}۱+۲+۶+۹+۰+۰+\ldots+۰\overset{۱۵}{\equiv}۱۸\overset{۱۵}{\equiv}۳$$

**۱۱**

چون $(۴,۶)=۲$ و $۲|۱۰$ پس معادله دارای جواب است.

$$۴x\overset{۶}{\equiv}۱۰ \rightarrow ۴x\overset{۶}{\equiv}۴ \xrightarrow{(۴,۶)=۲} x\overset{۳}{\equiv}۱ \rightarrow x=۳k+۱ \qquad ; \qquad k\in Z$$

**۱۲**

ابتدا جواب کلی معادله را تعیین می کنیم.

$$۱۵x\overset{۱۹}{\equiv}۷ \rightarrow ۱۵x\overset{۱۹}{\equiv}۴۵ \xrightarrow{(۱۵,۱۹)=۱} x\overset{۱۹}{\equiv}۳ \xrightarrow{\exists k\in Z} x=۱۹k+۳$$

$$\xrightarrow{k=۵} x=۱۹(۵)+۳ \rightarrow x=۹۸$$

توجه : می توانستیم بدین شکل نیز عمل کنیم.

| | |
|---|---|
| $x<۱۰۰ \to ۱۹k+۳<۱۰۰ \to ۱۹k<۹۷ \to k<\frac{۹۷}{۱۹} \to k\le ۵$<br>پس به ازای $k=۵$ ، داریم :<br>$x=۱۹(۵)+۳ \to x=۹۸$ | |
| درست؛ شرط وجود جواب برای یک معادله‌ی همنهشتی | ۱۳ |
| $۶۳ \overset{۱۶}{\equiv} -۱ \to (۶۳)^{۱۴} \overset{۱۶}{\equiv} (-۱)^{۱۴} \to ۶۳^{۱۴} \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \to ۶۳^{۱۴}+۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۱+۱$<br>$\to ۶۳^{۱۴}+۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۲ \to A \overset{۱۶}{\equiv} ۲ \to r=۲$ | ۱۴ |
| $۱۴۰۲x \overset{۹}{\equiv} ۱۱ \to (۱+۴+۰+۲)x \overset{۹}{\equiv} ۱+۱ \to ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲ \to ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲-۹$<br>$\to ۷x \overset{۹}{\equiv} -۷ \xrightarrow{(۷,۹)=۱} x \overset{۹}{\equiv} -۱ \to x \overset{۹}{\equiv} -۱+۹ \to x \overset{۹}{\equiv} ۸ \to x=۹k+۸$ | ۱۵ |
| الف) گزینه‌ی۲، زیرا ؛<br>$۱۴۰۲=۷(۱۴۰۰)+۲$<br>ب) گزینه‌ی۱، زیرا ؛<br>$r \overset{۱۴}{\equiv} (۹^{۱۰۰}-۲^{۱۰۰}-۷^{۱۰۰}) \to r \overset{۱۴}{\equiv} (۹^{۱۰۰}-(۲^{۱۰۰}+۷^{۱۰۰})) \to r \overset{۱۴}{\equiv} (۹^{۱۰۰}-(۲+۷)^{۱۰۰})$<br>$\to r \overset{۱۴}{\equiv} (۹^{۱۰۰}-۹^{۱۰۰}) \to r \overset{۱۴}{\equiv} ۰$<br>توجه کنید که برای هر $n\in N$ و $a,b\in Z$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$<br>پ) گزینه‌ی۱، زیرا می دانیم که معادله‌ی هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a,m)=d$ و $d\mid b$ باشد. همانطور که مشاهده می شود، این شرط در تمام معادلات بجز معادله‌ی اول برقرار است.<br>$(۳,۹)=۳ \ , \ ۳\nmid ۱۱$ | ۱۶ |
| می دانیم که از $۶!$ به بعد هر مورد مضربی از ۲ و ۵ است و لذا حاصل هر مورد بر ۱۰ بخش پذیر است. پس :<br>$A \overset{۱۰}{\equiv} ۲!+۴!+۶!+...+۱۰۰! \to A \overset{۱۰}{\equiv} ۲!+۴! \to A \overset{۱۰}{\equiv} ۲+۲۴ \to A \overset{۱۰}{\equiv} ۲۶ \to A \overset{۱۰}{\equiv} ۶$ | ۱۷ |
| ۴ ، زیرا :<br>$r \overset{۱۹}{\equiv} ۱۹k-۳۰۰ \to r \overset{۱۹}{\equiv} ۱۹k-۲۰\times ۱۵$<br>$\to r \overset{۱۹}{\equiv} ۱۹k-(۱۹\times ۱۵)-۱۵ \to r \overset{۱۹}{\equiv} -۱۵ \to r \overset{۱۹}{\equiv} -۱۵+۱۹ \to \to r \overset{۱۹}{\equiv} ۴$ | ۱۸ |
| درست ؛ زیرا $x_۱-x_۲=(۴k_۱+۳)-(۴k_۲+۳)=۴k_۱-۴k_۲=۴(k_۱-k_۲)=۴q$ | ۱۹ |
| $۵x \overset{۹}{\equiv} ۲۲ \to ۵x \overset{۹}{\equiv} ۲۲+۱۸ \to ۵x \overset{۹}{\equiv} ۴۰ \xrightarrow{(۵,۹)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۸ \to x=۹k+۸$ | ۲۰ |
| $۹x-۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۲x+۱ \to ۹x-۲x \overset{۱۳}{\equiv} ۱+۱ \to ۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \to ۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۲+۲(۱۳)$<br>$\to ۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۲۸ \xrightarrow{(۷,۱۳)=۱} x \overset{۱۳}{\equiv} ۴ \to x=۱۳k+۴$ | ۲۱ |

اکنون برای تعیین جواب های طبیعی دورقمی به شکل زیر عمل می کنیم.

$$۱۰ \le ۱۳k + ۴ \le ۹۹ \xrightarrow{-۴} ۶ \le ۱۳k \le ۹۵ \xrightarrow{\div ۱۳} \frac{۶}{۱۳} \le k \le \frac{۹۵}{۱۳}$$

$$\rightarrow ۰/۴۶ \le k \le ۷/۳۷ \rightarrow k = ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷$$

یعنی این معادله دارای هفت جواب دو رقمی است.

## تهیه کننده : جابرعامری

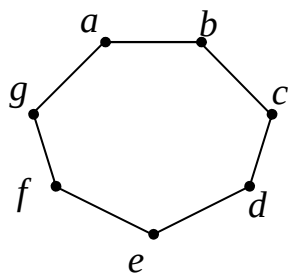
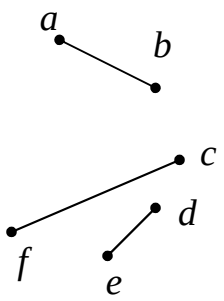
## عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

# فصل دوّم

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۱ : گراف

| | |
|---|---|
| ۱ | الف) فرد ب) تهی پ) ۶ ت) همبند |
| ۲ | الف) مسیر $abcdef$<br>ب) $N_G(c)=\{b,d\}$<br>  <br> |
| ۳ | الف) رأس منفرد ب) طوقه پ) گراف همبند ت) عددی زوج |
| ۴ | الف) $\Delta(G)=۳$<br>ب) $N_G[a]=\{a,b,c\}$<br>پ) $acdfba$<br>ت) درجه‌ی رأس $c$ در گراف مکمل برابر ۳ است. زیرا $۶-(۱+۲)=۳$<br>ث)<br>  <br> |
| ۵ | $q=\binom{p}{۲}\to ۳۶=\frac{p(p-۱)}{۲}\to p(p-۱)=۷۲\to p(p-۱)=۹\times ۸\to p=۹$ |
| ۶ | الف) $abgc$ ب) $bcdgb$ پ) ۵<br>ت) خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است. (هیچ مسیری از $f$ به سایر رئوس وجود ندارد.) ث) $N_G[f]=\{f\}$ |
| ۷ | ۲۱ |
| ۸ | الف) مرتبه ب) مسیر پ) $\frac{n(n-۱)}{۲}$ ت) دور |
| ۹ | الف) $\Delta(G)=۳$ و $\delta(G)=۰$ ب) $bcedb$<br>پ) $bdce$ یا $bced$ یا $bdec$ یا $bcde$ ت) $N_G(f)=\{g\}$ |
| ۱۰ | نادرست ، تعداد رئوس فرد هر گراف ، عددی زوج است. |

**۱۱** ابتدا تعداد یال های گراف ۸ رأسی۳- منتظم و همچنین گراف کامل ۸ رأسی را تعیین می کنیم.

تعداد یال های گراف ۳- منظم $q=\frac{kn}{۲}=\frac{۸\times ۳}{۲}=۱۲$

تعداد یال های گراف کامل $q=\frac{n(n-۱)}{۲}=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$

$\Rightarrow ۲۸-۱۲=۱۶$ تعداد یال هایی که باید اضافه شوند.

**۱۲** الف) مجموعه‌ی $N_G(g)$، طبق تعریف، شامل رأس های مجاور $g$ می باشند. $N_G(g)=\{f\}$

ب) $abdefa$ یا $abcdea$

ج) درجه‌ی رأس $c$ در گراف $G$ برابر ۲ می باشد. حال اگر این گراف کامل باشد، درجه‌ی رأس $c$ باید برابر $p-۱=۷-۱=۶$ باشد. لذا در گراف $\overline{G}$، درجه‌ی رأس $c$ برابر $۶-۲=۴$ است.

**۱۳** الف) همبند ب) زوج ج) $p-۱$ د) $k$- منتظم

**۱۴** الف) $p=۷$ و $q=۶$

ب) $D=۲q=۱۲$

ج) $N_G[c]=\{a,c,d,e\}$

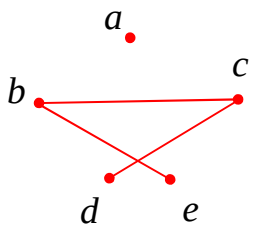
د) $acefa$ (شروع دور از هر رأس نیز درست است.)

هـ) $q(\overline{G})+\deg_{\overline{G}}(g)=۱۵+۶=۲۱$

**۱۵** الف) مجموعه‌ی رأس هایی از یک گراف که به یک رأس متصل هستند به همراه خود آن رأس را مجموعه‌ی همسایگی بسته‌ی آن رأس می نامیم.

ب) $N_G(d)=\{a,c,e\}$

**۱۶** با همین رأس ها ، گرافی می کنیم که اگر به گراف داده شده منطبق شود، گراف کامل بدست می آید. لذا تعداد یال های گراف مکمل می شوند.



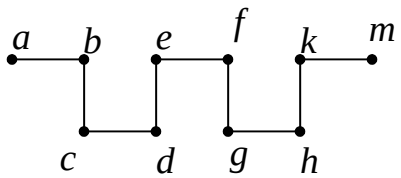

$\binom{۵}{۲}-۷=۱۰-۷=۳$

**۱۷** خیر ، زیرا در هر گراف $r-$ منتظم داریم $۲q=pr$ . حال در اینجا با توجه به اطلاعات مسأله می توان نوشت:

$۲q=pr\rightarrow ۲q=(۹)(۳)\rightarrow ۲q=۲۷$

و این نتیجه با توجه به زوج و فرد بودن دو طرف تساوی، ممکن نیست. لذا چنین گرافی وجود ندارد.

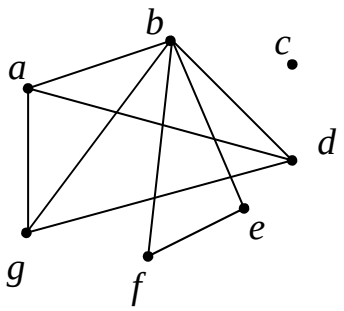
**۱۸**




اکنون با توجه به نمودار رسم شده، مسیر های متفاوت به طول ۳ به ترتیب زیر، قابل نوشتن است.

$abcd$ و $bcde$ و $cdef$ و $defg$ و $efgh$ و $fghk$ و $ghkm$

تعداد این مسیرها برابر ۳ می باشد.

| | |
|---|---|
| ۱۹ | الف) $q=۱۰$ و $p=۷$ ب) $cebagf$ یا $ceabgf$<br>ج) $ebgfe$ یا $eagfe$ یا $ebage$ یا $eagbe$<br>د) خیر، زیرا رأس $e$ در گراف $G$ ماکزیمم درجه است، لذا درجه آن در گراف $\overline{G}$ صفر می باشد. یا<br>$\deg_G(e)=p-۱=\Delta=۶\Rightarrow$ $\overline{G}$ ناهمبند است. |
| ۲۰ | ۱۲ ؛ زیرا با توجه به ویژگی گراف منتظم می توان نوشت:<br>$۲q=rp\to ۲q=۳\times ۸\to q=۱۲$ |
| ۲۱ | درست ؛<br>$d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=p-۱\to ۵+d_{\overline{G}}(v)=۱۰-۱\to ۵+d_{\overline{G}}(v)=۹$<br>$\to d_{\overline{G}}(v)=۴$ |
| ۲۲ | الف) $q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-۱)}{۲}\xrightarrow{q(G)=۹\ ,\ p(G)=۸}۹+q(\overline{G})=\frac{۸(۸-۱)}{۲}$<br>$\to ۹+q(\overline{G})=۲۸\to q(\overline{G})=۱۹$<br>ب) $D(\overline{G})=۲q(\overline{G})=۲\times ۱۹=۳۸$<br>پ) $N_{\overline{G}}[e]=\{e,a,b,h\}$ |
| ۲۳ | روش اول :<br>$q=\frac{p(p-۱)}{۲}\xrightarrow{q=۲۸}\frac{p(p-۱)}{۲}=۲۸\to p(p-۱)=۵۶\to p=۸$<br>$\Delta=\delta=p-۱=۸-۱=۷$<br>$۲\Delta(K_p)-۳\delta(K_p)+p=۲(۷)-۳(۷)+۸=۱۴-۲۱+۸=۱$<br>روش دوم : می دانیم که در هر گراف کامل از مرتبه‌ی $p$ ، $\Delta=\delta=p-۱$ . لذا:<br>$۲\Delta(K_p)-۳\delta(K_p)+p=۲(p-۱)-۳(p-۱)+p=۲p-۲-۳p+۳+p=۱$ |
| ۲۴ | متناظر با رابطه‌ی دوستی بین هر دو نفر یک یال رسم می کنیم.<br>در این گراف رأس $c$ ایزوله است. یعنی دانش‌آموز $c$ در این رابطه با هیچکس دوست نیست.<br>رابطه‌ی دوستی بین چهار نفر $g$ و $d$ و $b$ و $a$ (به تنهایی) تشکیل یک گراف کامل را می دهد. زیرا در این گراف درجه‌ی هر رأس ۳ است.<br>  |

## تهیه کننده : جابرعامری

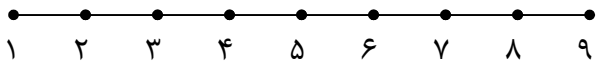
## عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

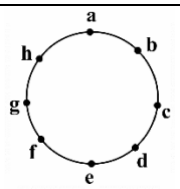
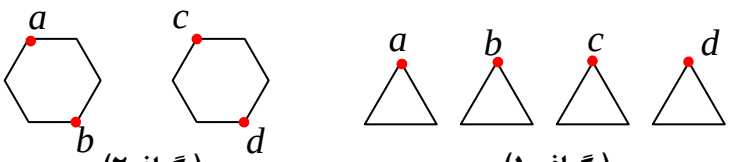
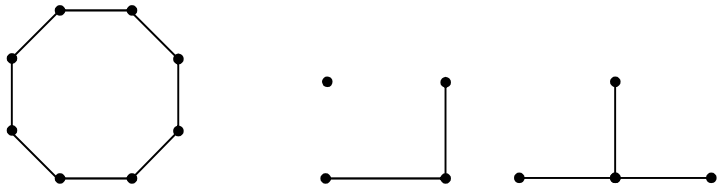
# فصل دوّم

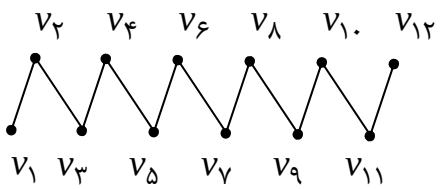
# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۲ : مدل سازی با گراف

| | |
|---|---|
| ۱ | الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نباشد را احاطه گر مینیمال می نامند.<br>ب) $D=\{h,b,i,a\}$ ( مسأله جواب های دیگر نیز دارد.) |
| ۲ | برای احاطه کردن رئوس $a$ و $b$ و $c$ و $d$ و $g$ حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه گر باشند. زیرا $\left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil = ۲$<br>برای احاطه کردن رئوس $e$ و $f$ و $h$ وحداقل یکی از آنها باید در مجموعه احاطه گر باشند. زیرا $\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil = ۱$<br>بنابراین حداقل سه رأس باید در هر مجموعه احاطه گری از گراف باشد. یعنی $\gamma(G) \geq ۳$.<br>از طرفی مجموعه‌ی $D=\{a,c,e\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq ۳$. بنابراین $\gamma(G)=۳$ |
| ۳ | $D=\{۲,۵,۸\}$<br>  <br> |
| ۴ | مساله جواب های متفاوت دارد. از جمله : الف) $D=\{h,c,e\}$ ب) $D=\{g,c,i,e\}$ |
| ۵ | در گراف داده شده $\Delta=۲$ و $n=۸$ ، رابطه‌ی $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ یک مقدار حداقلی برای عدد احاطه گری می دهد:<br>$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۸}{۲+۱} \right\rceil = ۳$<br>یعنی عدد احاطه گری حداقل ۳ است. با یک بررسی ساده معلوم است که $\{a,b,c\}$ می تواند یک مجموعه‌ی احاطه گر باشد. پس عدد احاطه گری برابر با ۳ است. |
| ۶ | الف)<br>$\frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۱۱(۱۱-۱)}{۲} = ۵۵$<br>ب)<br>$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ |
| ۷ | الف) |

| | |
|---|---|
| |  <br>ب) $D=\{a,d,g\}$ پ) $\{a,c,e,g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال |
| ۸ | الف) $\{g,c\}\rightarrow\gamma(G)=۲$ ب) $\{h,d,b\}$ |
| ۹ | مینیمال |
| ۱۰ | می دانیم $\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil\le\gamma(G)$ ، پس داریم $\left\lceil\frac{۶}{۵}\right\rceil=\left\lceil\frac{۶}{۴+۱}\right\rceil\le\gamma(G)$ ، بنابراین $۲\le\gamma(G)$ و با توجه به اینکه $\{a,d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است، لذا $\gamma(G)=۲$ |
| ۱۱ | هر یک از گراف های زیر می توانند، جواب مسأله باشند. در هر مورد، مجموعه‌ی احاطه گر برابر $\{a,b,c,d\}$ می باشد.<br>  <br>(گراف ۱) (گراف۲) |
| ۱۲ | نادرست، عدد احاطه گری حداقل برابر $\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۱۰}{۲+۱}\right\rceil=۴$ می باشد. ( در گراف های $P_n$ بزرگترین درجه رأس ها برابر ۲ می باشد) |
| ۱۳ | $p-۱$ |
| ۱۴ | برای هر مورد این سئوال ، جواب های درست متفاوت وجود دارد. لذا جواب های زیر را برای مثال ذکر می کنیم.<br>الف) $\{c,e,h,f\}$ ب) $\{c,g,i,e\}$ ج) $f\ h$ |
| ۱۵ | برای هر مورد این سئوال ، جواب های درست متفاوت وجود دارد. لذا جواب های زیر را برای مثال ذکر می کنیم.<br>  <br>(الف) (ب) |
| ۱۶ | الف) می دانیم که $\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil\le\gamma(G)$ ، پس داریم، $\left\lceil\frac{۸}{۵+۱}\right\rceil\le\gamma(G)$ در نتیجه، $۲\le\gamma(G)$<br>از طرفی مجموعه ای مانند $\{e,c\}$ ( هر کدام از مجموعه های $\{e,b\}$ یا $\{e,d\}$ اگر نوشته شد، درست است.) یک مجموعه‌ی احاطه گر برای گراف $G$ می باشد، پس $\gamma(G)\le۲$ . بنابراین $\gamma(G)=۲$<br>ب) ۳ |
| ۱۷ | الف) $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{p}{\Delta+۱}\right\rceil\rightarrow\gamma(G)\ge۳\quad(*)$ |

| | |
|---|---|
| | از طرفی $A=\{a,e,f\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. بنا به رابطه‌ی (*) ، پس : $\gamma(G)=۳$<br>ب) $B=\{a,d,g,h,i,j,k,l\}$<br>یا هر مجموعه‌ی احاطه گر هشت عضوی مینیمال دیگر<br>ج) $C=\{a,e,f,b\}$<br>یا هر مجموعه‌ی احاطه گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر |
| ۱۸ | الف) طبق قضیه داریم؛ $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۶}{۳+۱}\right\rceil=۲$ از طرفی مجموعه‌ی $D=\{d,c\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است.<br>لذا $\gamma(G)=۲$<br>ب) مجموعه‌ی $D=\{a,f,e\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال است که مینیمم نیست. دلیل این موضوع این است که از رأس $a$ را حذف کنیم، خود رأس $a$ احاطه نمی شود. اگر رأس $f$ را حذف کنیم. رأس $c$ احاطه نمی شود و همچنین با حذف رأس $e$ ، خود رأس $e$ احاطه نمی شود. |
| ۱۹ | نادرست ؛ بلکه هر مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال است. |
| ۲۰ | $\gamma(G)=\left\lceil\frac{۷}{۳}\right\rceil=۳$ |
| ۲۱ | الف) خیر، زیرا در این حالت رأس $c$ احاطه نمی شود.<br>ب) داریم، $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۱۱}{۶}\right\rceil=۲$ و از طرفی مجموعه‌ی $\{a,m,d\}$ احاطه گر مینیمم می باشد. پس $\gamma(G)=۳$<br>ج) $\{f,g,h,i,j\}$ |
| ۲۲ | الف) $\{b,g,a,f\}$ ب) $\{c,e,h\}$ ج) $ec$ یا $eh$ یا $gf$ یا $gc$ |
| ۲۳ | الف) نمودار گراف $P_{۱۲}$<br>  <br><br>ب) $\{v_۲,v_۵,v_۸,v_{۱۱}\}$ |
| ۲۴ | الف) خیر؛ زیرا رأس $m$ توسط هیچکدام از اعضای این مجموعه احاطه نمی شود.<br>ب) خیر؛ زیرا با حذف رأس $f$ مجموعه‌ی باقی مانده هنوز یک مجموعه‌ی احاطه گر می باشد.<br>پ) $\{e,j\}$ |

**تهیه کننده : جابرعامری**

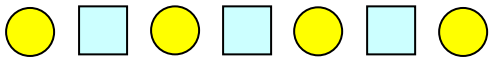
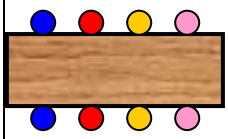
**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان**

# فصل سوّم

# (( ریاضیات گسسته ))

***

## درس ۱ : مباحثی در ترکیبیات

| | |
|---|---|
| ۱ | الف) $۶!\times۶!$ ب) $۵!\times۶!$ |
| ۲ | الف) ارقام زوج یعنی ۸ و ۶ و ۴ و ۲ را یک دسته در نظر می گیریم. خود این ارقام $۴!$ جابجایی دارند. این دسته با بقیه‌ی ارقام ۳ و ۷ و ۹ می شوند ۴ دسته که باز هم $۴!$ جابجایی دارند. پس می شوند،<br>$۴!\times۴!=۲۴\times۲۴=۵۷۶$<br>ب) اگر قرار است هیچ دو عدد زوجی کنار هم نباشند، ابتدا یک عدد زوج را انتخاب می کنیم و در کنار ان یک عدد فرد قرار می دهیم. سپس یک عدد زوج دیگر انتخاب می کنیم و یک عدد فرد دیگر در کنار آن قرار می دهیم و ....<br>  <br>حال چون اعداد زوج به تعداد $۴!$ و اعداد فرد به تعداد $۳!$ حالت انتخاب می شوند، لذا تعداد کل می شود؛<br>$۴!\times۳!=۲۴\times۶=۱۴۴$ |
| ۳ | روش اول : $\binom{۱۵}{۱۵}\times\binom{۲۷}{۱۲}\times\binom{۳۷}{۱۰}\times\binom{۴۵}{۸}$ روش دوم : $\binom{۴۵}{۸,۱۰,۱۲,۱۵}=\frac{۴۵!}{۸!\times۱۰!\times۱۲!\times۱۵!}$ |
| ۴ | در هر طرف میز ، ۴ نفر قرار می گیرند که باهم $۴!$ حالت دارند.<br>  <br>ولی چون هر نفر باید روی به روی برادرش قرار بگیرد و دو برادر می توانند با هم جابجا شوند، لذا در هر نشست دو برادر ۲ حالت وجود دارد. لذا در کل به تعداد $۴!\times۲^{۴}=۲۴\times۱۶=۳۸۴$ حالت ( روش نشستن) دارند. |
| ۵ | تعداد حالت های انتخاب دو رقم از $A$ $=\binom{۳}{۲}$<br>تعداد حالت های انتخاب چهار حرف از $B$ $=\binom{۶}{۴}$<br>و چون کارکتر ها ( $۴+۲=۶$ کارکتر) را می توان جابجا کرد. پس طبق اصل ضرب می توان نوشت:<br>$\binom{۳}{۲}\times\binom{۶}{۴}\times۶!$ |
| ۶ | $۳!\times۴!\times۲!=۲۸۸$ |

| | |
|---|---|
| ۷ | در واقع این ده نفر شامل ۵ گروه دو نفره ( هر برادر) می باشد که می تواند به !۵ کنار هم باشند. اما هر گروه نیز دو حالت دارد ، لذا: <br> $(۵\times۴\times۳\times۲\times۱)\times(۲!)^{۵}=۵!\times۲^{۵}=۳۸۴۰$ |

# جایگشت های با تکرار

| | |
|---|---|
| ۱ | $\binom{۹}{۳,۲,۱,۱,۱,۱}=\frac{۹!}{۳!\times۲!\times۱!\times۱!\times۱!\times۱!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{(۳\times۲\times۱)\times(۲\times۱)}=۳۰۲۴۰$ |
| ۲ | $\binom{۷}{۲,۲,۳}=\frac{۷!}{۲!\times۲!\times۳!}=۲۱۰$ |
| ۳ | ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را به چند طریق می توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد. به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند. |
| ۴ | $\binom{۸}{۴,۳,۱}=\frac{۸!}{۴!\times۳!\times۱!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!\times۳\times۲\times۱}=۸\times۷\times۵=۲۸۰$ |
| ۵ | $\binom{۷}{۳,۱,۱,۲}=\frac{۷!}{۳!\times۱!\times۱!\times۲!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳\times۲\times۱\times۱\times۱\times۲\times۱}=۴۲۰$ |
| ۶ | $\binom{۱۰}{۲,۳,۴}=\frac{۱۰!}{۲!\times۳!\times۴!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۲\times۶\times۴!}=۱۲۶۰۰$ |
| ۷ | $\binom{۱۰}{۳,۳,۲,۱}=\frac{۱۰!}{۳!\times۳!\times۲!\times۱!}=۵۰۴۰۰$ |

# معادلات حسابی

| | |
|---|---|
| ۱ | $x_۳=۴\ ,\ \ x_۵\geq۳\rightarrow x_۵=y_۵+۳$ <br> $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲$ <br> $\rightarrow x_۱+x_۲+۴+x_۴+y_۵+۳+x_۶=۱۲$ <br> $\rightarrow x_۱+x_۲+x_۴+y_۵+x_۶=۵$ <br> $\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۴!\times۵!}=۱۲۶$ تعداد جواب های صحیح و نامنفی |
| ۲ | $\binom{n-۱}{r-۱}=\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{۴!\times۶!}=۲۱۰$ |
| ۳ | $x_۱+۴x_۲+x_۳+x_۴+۲=۹\rightarrow x_۱+۴x_۲+x_۳+x_۴=۷$ <br> $\xrightarrow{x_۲=۱}x_۱+۴(۱)+x_۳+x_۴=۷\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۳\rightarrow\binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$ <br> $\xrightarrow{x_۲=۰}x_۱+۴(۰)+x_۳+x_۴=۷\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۷\rightarrow\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶$ |

| | |
|---|---|
| تعداد کل جواب ها $۳۶+۱۰=۴۶$ | |
| $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۶ \quad ; \quad x_۳=۳ , \quad x_۴\geq ۳ , \quad x_۵\geq ۵$<br>$\xrightarrow{x_۳=۳ , x_۴=y_۴+۳ , \quad x_۵=y_۵+۵} x_۱+x_۲+۳+(y_۴+۳)+(y_۵+۵)=۱۶$<br>$\rightarrow x_۱+x_۲+y_۴+y_۵=۵$<br>تعداد جواب های صحیح و نامنفی $\binom{۵+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۸}{۳}=۵۶$ | ۴ |
| $x_۴=۰ \longrightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۱۰ \rightarrow \binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۲}{۲}$ تعداد جواب های صحیح نامنفی<br>$x_۴=۱ \longrightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۸ \rightarrow \binom{۸+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۰}{۲}$ تعداد جواب های صحیح نامنفی<br>$\rightarrow \binom{۱۲}{۲}+\binom{۱۰}{۲}=۶۶+۴۵=۱۱۱$ تعداد کل جواب های صحیح نامنفی | ۵ |
| $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۲ \xrightarrow{x_۲=۴} x_۱+x_۳+x_۴=۸$<br>$\xrightarrow{x_۴-۳=y_۴} x_۱+x_۳+y_۴=۵$<br>$\rightarrow \binom{۵+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$ تعداد جواب های صحیح نامنفی | ۶ |
| برای تعیین تعداد جواب های طبیعی معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_k=n$<br>ابتدا از هر متغیر یک واحد بر می داریم و لذا تعداد جواب های دلخواه به $n-k$ حالت تقلیل پیدا می کند.<br>$x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_r=n$<br>$\rightarrow \underbrace{(x_۱-۱)}_{y_۱}+\underbrace{(x_۲-۱)}_{y_۲}+\underbrace{(x_۳-۱)}_{y_۳}+\ldots+\underbrace{(x_k-۱)}_{y_k}=n-\underbrace{(۱+۱+\ldots+۱)}_{k}$<br>$\rightarrow y_۱+y_۲+y_۳+\ldots+y_r=n-k$<br>اکنون تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی جدید را تعیین می کنیم.<br>$\binom{(n-k)+(k-۱)}{k-۱}=\binom{n-۱}{k-۱}$ | ۷ |
| $x_۱+۲x_۲+x_۳+x_۴=۲۰ \rightarrow x_۱+۲(۳)+x_۳+x_۴=۲۰ \rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱۴$<br>$\xrightarrow{x_۱>۲\rightarrow x_۱\geq ۳\rightarrow x_۱-۳\geq ۰ \rightarrow x_۱=y_۱+۳ , \quad x_۳-۴\geq ۰ \rightarrow x_۳=y_۳+۴}$<br>$(y_۱+۳)+(y_۳+۴)+x_۴=۱۴ \rightarrow y_۱+y_۳+x_۴=۷$<br>تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times ۸}{۲}=۳۶$ | ۸ |

**۹** اگر $x_۱$ ( تعداد مداد های زرد رنگ) و $x_۲$ ( تعداد مداد های آبی رنگ) و $x_۳$ ( تعداد مداد های قرمز رنگ) $x_۴$ ( تعداد مداد های سبز رنگ) فرض کنیم. در این صورت می توان نوشت:

$$x_۱ \geq ۲ \rightarrow x_۱ - ۲ \geq ۰ \xrightarrow{x_۱ - ۲ = y_۱} x_۱ = y_۱ + ۲$$

$$x_۲ \geq ۰$$

$$x_۳ \geq ۰$$

$$x_۴ > ۳ \rightarrow x_۴ \geq ۴ \rightarrow x_۴ - ۴ \geq ۰ \xrightarrow{x_۴ - ۴ = y_۴} x_۴ = y_۴ + ۴$$

حال ادامه می دهیم

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۱ \rightarrow (y_۱ + ۲) + x_۲ + x_۳ + (y_۴ + ۴) = ۱۱$$

$$\rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ = ۵$$

لذا تعداد جواب های صحیح نامنفی این معادله می شود:

$$\binom{۵ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳! \times (۸ - ۳)!} = \frac{۸!}{۳! \times ۵!} = ۵۶$$

# مربع های لاتین

**۱** الف)

$B =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۴ | ۱ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ | ۴ |
| ۳ | ۲ | ۴ | ۱ |
| ۱ | ۴ | ۲ | ۳ |

ب)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۳۴ | ۴۱ | ۱۳ | ۲۲ |
| ۲۲ | ۱۳ | ۴۱ | ۳۴ |
| ۱۳ | ۲۲ | ۳۴ | ۴۱ |
| ۴۱ | ۳۴ | ۲۲ | ۱۳ |

متعامد نیستند. زیرا در مربع تلفیقی دو مربع لاتین عدد دو رقمی تکراری داریم.

**۲** جابجایی سطر اول و سوم

$B =$

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

مربع تلفیقی

$\Rightarrow AB =$

| | | |
|---|---|---|
| ۱۳ | ۲۱ | ۳۲ |
| ۲۲ | ۳۳ | ۱۱ |
| ۳۱ | ۱۲ | ۲۳ |

چون هیچ دو عدد ۲ رقمی تکراری نداریم، پس دو مربع لاتین $A$ و $B$ متعامدند.

**۳** دو مربع زیر متعامد هستند، زیرا اگر مربع تلفیقی را تشکیل عدد تکراری نداریم.

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

**۴** درست

**۵** فرض کنیم هر سطر نشان دهنده‌ی هر کلاس و اعداد ۱ و ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین ۳×۳ مقابل ، هر مدرس در یک کلاس حاضر می شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد.

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

**۶** ۴ ، زیرا در چنین مربعی تمام درایه های روی قطر اصلی برابر ۱ هستند.

**۷**

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| شنبه | ۱ | ۳ | ۲ |
| یکشنبه | ۳ | ۲ | ۱ |
| دوشنبه | ۲ | ۱ | ۳ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| شنبه | ۱ | ۲ | ۳ |
| یکشنبه | ۳ | ۱ | ۲ |
| دوشنبه | ۲ | ۳ | ۱ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| شنبه | ۱۱ | ۲۳ | ۳۲ |
| یکشنبه | ۳۳ | ۱۲ | ۲۱ |
| دوشنبه | ۲۲ | ۳۱ | ۱۳ |

**۸** دو مربع لاتین متفاوت را **متعامد** گوییم، هرگاه مربع حاصل از تلفیق آنها، درایه های تکراری نداشته باشد.

$A=$

| | | |
|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

$B=$

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

$\Rightarrow A\Theta B=$

| | | |
|---|---|---|
| ۲۳ | ۳۱ | ۱۲ |
| ۳۲ | ۱۳ | ۲۱ |
| ۱۱ | ۲۲ | ۳۳ |

**۹** ابتدا سطرهای اول و سوم مربع لاتین داده شده را جابجا می کنیم.

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۱ | ۳ | ۲ |

حال اگر مربع جدید را با مربع داده شده تلفیق کنیم. خواهیم داشت:

| | | |
|---|---|---|
| ۱۳ | ۳۲ | ۲۱ |
| ۲۲ | ۱۱ | ۳۳ |
| ۳۱ | ۲۳ | ۱۲ |

مشاهده می شود که در مربع حاصل درایه‌ی تکراری وجود ندارد. بنابراین دو مربع متعامد هستند.

**۱۰** دو / یک

**۱۱** کافی است دو مربع لاتین متعامد تشکیل داده شود. فرض کنید که $w$ نام کارگرها و اعداد نوع ماشین و حروف لاتین نوع الیاف باشند. در این صورت چون دو مربع لاتین زیر متعامد هستند، پس از تلفیق آنها مربع جدیدی حاصل می شود که جواب مسئله است.

$A=$

| | $w_۱$ | $w_۲$ | $w_۳$ |
|---|---|---|---|
| شنبه | ۱ | ۲ | ۳ |
| یکشنبه | ۲ | ۳ | ۱ |
| دوشنبه | ۳ | ۱ | ۲ |

$B=$

| | $w_۱$ | $w_۲$ | $w_۳$ |
|---|---|---|---|
| شنبه | c | a | b |
| یکشنبه | b | c | a |
| دوشنبه | a | b | c |

$A\Theta B=$

| | $w_۱$ | $w_۲$ | $w_۳$ |
|---|---|---|---|
| شنبه | ۱c | ۲a | ۳b |
| یکشنبه | ۲b | ۳c | ۱a |
| دوشنبه | ۳a | ۱b | ۲c |

**۱۲** الف) قرار می دهیم ؛ $C=۳$ و $B=۲$ و $A=۱$، بر این اساس می توان مربع لاتین زیر را تنظیم کرد.

$M=$

| | ۸ – ۱۰ | ۱۰ – ۱۲ | ۱۲ –۱۴ |
|---|---|---|---|
| الف | ۱ | ۲ | ۳ |
| ب | ۳ | ۱ | ۲ |
| پ | ۲ | ۳ | ۱ |

ب) اگر جایشگت های ۳ ← ۳ و ۱ ← ۲ و ۲ ← ۱ را اعمال کنیم. در این صورت داریم:

$N=$

| | ۸ – ۱۰ | ۱۰ – ۱۲ | ۱۲ –۱۴ |
|---|---|---|---|
| الف | ۲ | ۱ | ۳ |
| ب | ۳ | ۲ | ۱ |
| پ | ۱ | ۳ | ۲ |

اکنون مربع تلفیقی (ادغام) را تشکیل می دهیم:

$M\Theta N=$

| | ۸ – ۱۰ | ۱۰ – ۱۲ | ۱۲ –۱۴ |
|---|---|---|---|
| الف | ۱۲ | ۲۱ | ۳۳ |
| ب | ۳۳ | ۱۲ | ۲۱ |
| پ | ۱۲ | ۳۳ | ۱۲ |

**۱۳** نادرست ؛ در واقع برای مربع های لاتین $n\times n$ که در آن $n\neq ۱,۲,۶$ باشد. همواره مربع های لاتین متعامد وجود دارد.

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه ، استان خوزستان**

# فصل سوّم

# (( ریاضیات گسسته ))

❋❋❋

## درس ۲ : روش هایی برای شمارش ، اصل شمول و عدم شمول

| | |
|---|---|
| ۱ | $S=\{۱,۲,۳,\dots,۶۳۰\}\rightarrow\|S\|=(۶۳۰-۱)+۱=۶۳۰$<br>بخش پذیر بر ۳ $A=\{۳,۶,۹,\dots,۶۳۰\}\rightarrow\|A\|=\frac{۶۳۰-۳}{۳}+۱=۲۱۰$<br>بخش پذیر بر ۵ $B=\{۵,۱۰,۱۵,\dots,۶۳۰\}\rightarrow\|B\|=\frac{۶۳۰-۵}{۵}+۱=۱۲۶$<br>بخش پذیر بر ۱۵ $A\cap B=\{۱۵,۳۰,۴۵,\dots,۶۳۰\}\rightarrow\|A\cap B\|=\frac{۶۳۰-۱۵}{۱۵}+۱=۴۲$<br>$\|\overline{A\cup B}\|=\|S\|-\|A\cup B\|=\|S\|-(\|A\|+\|B\|-\|A\cap B\|)$<br>$\|\overline{A\cup B}\|=۶۳۰-(۲۱۰+۱۲۶-۴۲)=۳۳۶$ |
| ۲ | $\|S\|=۵^۴=۶۲۵$ تعداد کل رمز ها<br>$\|A\|=۴^۴=۲۵۶$ تعداد رمزهای فاقد۳<br>$\|B\|=۴^۴=۲۵۶$ تعداد رمزهای فاقد۴<br>$\|A\cap B\|=۳^۲=۹$ تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳<br>$\|A\cup B\|=\|A\|+\|B\|-\|A\cap B\|=۴^۴+۴^۴-۳^۴=۲۵۶+۲۵۶-۹=۵۰۳$<br>تعداد رمزهای فاقد ۲ یا ۳<br>$\|\overline{A}\cap\overline{B}\|=\|S\|-\|A\cup B\|=۵^۴-(۴^۴+۴^۴-۳^۴)=۶۲۵-۵۰۳=۱۲۲$<br>تعداد رمزهای دارای ۲ یا ۳ یا هر دو |
| ۳ | $\|A\|=\left[\frac{۵۰۰}{۵}\right]=۱۰۰$ و $\|B\|=\left[\frac{۵۰۰}{۴}\right]=۱۲۵$ و $\|A\cap B\|=\left[\frac{۵۰۰}{۲۰}\right]=۲۵$<br>$\|\overline{A}\cap\overline{B}\|=\|\overline{A\cup B}\|=۵۰۰-(۱۰۰+۱۲۵-۲۵)=۳۰۰$ |
| ۴ | تعداد کل رمز های چهار رقمی<br>$\|S\|=۶^۴=۱۲۹۶$<br>تعداد رمز های ۴ رقمی فاقد صفر<br>$\|A\|=۵^۴=۶۲۵$ |

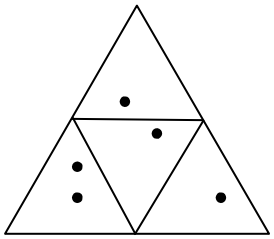
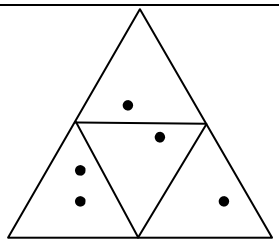
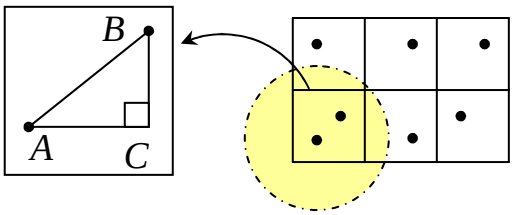
| | |
|---|---|
| | تعداد رمز های ۴ رقمی فاقد پنج<br>$\|B\|=۵^{۴}=۶۲۵$<br>تعداد رمز های ۴ رقمی فاقد صفر و پنج<br>$\|A\cap B\|=۴^{۴}=۲۵۶$<br>تعداد رمز های۴ رقمی فاقد صفر یا فاقد پنج یا فاقد هر دو<br>$\|A\cup B\|=\|A\|+\|B\|-\|A\cap B\|=۶۲۵+۶۲۵-۲۵۶=۹۹۴$<br>تعداد رمز های ۴ رقمی شامل صفر یا پنج یا هر دو<br>$\|\overline{A\cup B}\|=\|S\|-\|A\cup B\|=۱۲۹۶-۹۹۴=۳۰۲$ |

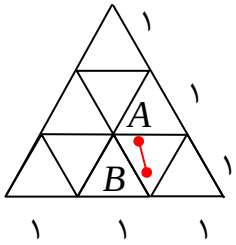
# نتایج اصل شمول و عدم شمول در تعیین تعداد توابع

| | |
|---|---|
| ۱ | این سئوال با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه‌ی ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی می توان نوشت.<br>$۳^{۵}-۳(۲^{۵}-۱)=۲۴۳-۳(۳۲-۱)=۲۴۳-۳(۳۱)=۲۴۳-۹۳=۱۵۰$ |
| ۲ | اینکه می خواهیم ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کنیم، به شرط آنکه هر نفر حداکثر یک کتاب داشته باشد، مثل نوشتن تعداد توابع یک به یک است از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی( افراد) به مجموعه‌ی ۸ عضوی (کتابها)<br>$P(۸,۵)=\frac{۸!}{(۸-۵)!}=۸\times۷\times۶\times۵\times۴=۶۷۲۰$ |
| ۳ | اگر فرض کنیم. $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,b_۳,b_۴,b_۵,b_۶,b_۷\}$ ، برای تعریف $f$ روی هر عضو $A$، هفت انتخاب داریم. بنابر اصل ضرب تعداد کل تابع های یک به یک برابر است<br>با $۷\times۶\times۵\times۴\times۳=\frac{۷!}{۲!}=۲۵۲۰$<br>روش دوم :<br>$P(۷,۵)=\frac{۷!}{(۷-۵)!}=\frac{۷!}{۲!}=۲۵۲۰$ |
| ۴ | $P(۷,۵)=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$ |
| ۵ | ۱۲ ، زیرا $(۴)_۲=\frac{۴!}{(۴-۲)!}=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲!}=۱۲$ |
| ۶ | تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی مانند $A$ به یک مجموعه‌ی سه عضوی مانند $B$ است. طوری که برد این توابع همه اعضای $B$ باشند. ( به هر عضو حداقل یک عضو از $A$ نسبت داده شود. یعنی تعیین تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی $A$ به مجموعه‌ی $B$ است.)<br>پس جواب این مسئله می شود:<br>$\|A\|=۴$ و $\|B\|=۳$ |

| | |
|---|---|
| $۳^m - ۳(۲^m - ۱) = ۳^۴ - ۳(۲^۴ - ۱) = ۸۱ - ۳(۱۶ - ۱) = ۸۱ - ۴۵ = ۳۶$ | |
| $(۵)_۳ = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = ۶۰$ | ۷ |
| $\lvert A \rvert = ۵$ و $\lvert B \rvert = ۳$<br>$۳^m - ۳(۲^m - ۱) = ۳^۵ - ۳(۲^۵ - ۱) = ۲۴۳ - ۳(۳۲ - ۱) = ۲۴۳ - ۹۳ = ۱۵۰$ | ۸ |
| صفر ، زیرا در این حالت تابع یک به یک نمی توان تعریف کرد. | ۹ |

# اصل لانه کبوتری

| | |
|---|---|
| تعداد کبروتر ها برابر ۵۰۵ و تعداد لانه ها برابر حاصل ضرب تعداد ماه های سال در تعداد روز های هفته ، یعنی $n = ۱۲ \times ۷ = ۸۴$ است. طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم.<br>تعداد کبوتر ها $= kn + ۱$<br>$\rightarrow ۵۰۵ = k \times ۸۴ + ۱ \rightarrow k = ۶ \rightarrow k + ۱ = ۷$<br>در این صورت لانه ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. | ۱ |
| مانند شکل زیر مثلث متساوی الاضلاع داده شده را به ۴ مثلث متساوی الاضلاع کوچکتر و به ضلع ۱ تبدیل می کنیم. اگر نقطه ها را کبوتر و هر یک از مثلث های کوچک را لانه فرض کنیم، چون $۵ > ۴$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار می گیرند. این یعنی فاصله‌ی این دو نقطه کمتر از یک است.<br>  | ۲ |
| مانند شکل زیر مثلث متساوی الاضلاع داده شده را به ۴ مثلث متساوی الاضلاع کوچکتر و به ضلع ۱ تبدیل می کنیم. ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک به ضلع یک را لانه در نظر می گیریم. چون $۵ > ۴$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (مثلث) وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می گیرد.<br>  | ۳ |
| ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می کنیم و هر نقطه را یک کبوتر در نظر می گیریم. حال چون $۷ > ۶$، پس طبق اصل لانه کبوتری، دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است. در نتیجه ، با توجه قضیه‌ی فیثاغورس داریم :<br>  <br><br>$\begin{cases} AC < ۲ \rightarrow AC^۲ < ۴ \\ BC < ۲ \rightarrow BC^۲ < ۴ \end{cases} \xrightarrow{+} AC^۲ + BC^۲ < ۴ + ۴$ | ۴ |

| | |
|---|---|
| $\xrightarrow{AB^۲=AC^۲+BC^۲} AB^۲<۸ \to AB<\sqrt{۸}$ | |
| $k+۱=۳ \to k=۲$<br>$n=۳\times۴=۱۲$<br>$\to kn+۱=۱۲\times۲+۱=۲۵$ | ۵ |
| ده نقطه را کبوتر و هر یک از ۹ قسمت از مثلث را لانه فرض می کنیم. چون $۱۰>۹$، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $AB<۱$<br>  <br> | ۶ |
| $n=۳\times۳=۹$ تعداد لانه ها<br>$k+۱=۲۱ \to k=۲۰$<br>$kn+۱=۲۰\times۹+۱=۱۸۱$ حداقل تعداد کبوتر ها ( دانش آموزان) | ۷ |
| ۲ ؛ اگر هر یک از دانش آموزان را کبوتر و هر یک از روز های سال را لانه فرض کنیم. حال چون $۳۹۰>۳۶۵$ پس با توجه به تقسیم مقابل و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر در یک ماه سال متولد شده‌اند.<br>۳۹۰ \| ۳۶۵<br>۳۶۵ \| ۱<br>۲۵<br>۱+۱=۲ | ۸ |
| اعداد طبیعی را به دو گروه زوج و فرد افراز می کنیم. این دو مجموعه را لانه ها و سه عدد طبیعی را کبوترها در نظر می گیریم. بنابر اصل لانه کبوتری یک لانه وجود دارد که حداقل شامل دو کبوتر باشد. یعنی دو عدد طبیعی وجود دارد که هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. لذا مجموع آنها در هر دو حالت زوج است. | ۹ |

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره دوم متوسطه ، استان خوزستان**