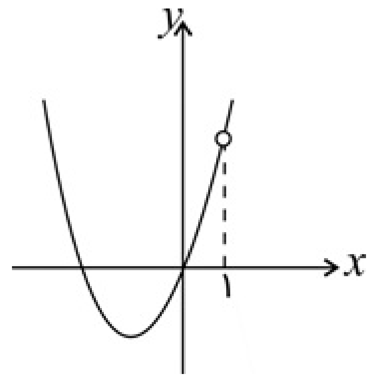
منبع: کنکور سراسری

۱ اگر $\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b} = \frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) ‎-۲　　۲) ‎-۱
۳) ۱　　۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{۴x^۳ + ax + b}{x - ۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(۰, -۴)$
۲) $(-۴, ۰)$
۳) $(-۴, ۱)$
۴) $(۴, ۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x + \sqrt{۳ - x}}{x^۲ + x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}$　　۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱ - \sqrt{x}}{۲ - \sqrt{۵ - x}}$ کدام است؟

۱) ‎-۴　　۲) ‎-۲
۳) ۲　　۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱ - \cos ۲x}{x \sin x}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱　　۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۶ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۷ در فاصلهٔ $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]-\{1\}$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x}\leq f(x)\leq g(x)$ و $\lim_{x\to 1}(\frac{\sin \pi x}{1-x}-g(x))=0$، حاصل $\lim_{x\to 1} f(x)$ برابر کدام است؟

۱) $-\pi$
۲) صفر
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۸ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۹ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\tan^2 x-1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

۱) -۲
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۰ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n-۳x+۱}{۳x^۲+x}$ اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{۲}{۳}$، آنگاه $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴}$، اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to۲} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}$ از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۴ اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=۳$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x\to۳$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۵ حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$، اگر $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-۱$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to۳} f(x)$ کدام است؟

۱) ۶-
۲) ۴-
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n-۶}$ اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to-۱} f(x)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}$ اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۵}{۲}$ باشد، آنگاه حدّ $f(x)$ وقتی $x\to-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۹ حد عبارت $\frac{۲[x]}{۲-x}+\frac{x+۲}{x^۲-۲x}$ ، وقتی $x\to۲^-$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $-\infty$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۰ حاصل $\lim_{x\to-۲}\left(\frac{۴}{x^۲-۴}-\frac{۳}{۲x^۲+۵x+۲}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۱ حاصل $\lim_{x\to۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۲ حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$
۲) $-\frac{3}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۳ حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}\right)$ ، کدام است؟

۱) -2
۲) $-\frac{3}{2}$
۳) ۱
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x-\sin x}{x^2} & ;x\neq 0\\ a & ;x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۵ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}a\sin 2x & ;\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{3\pi}{4}\\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) & ;\frac{3\pi}{4}\leq x<2\pi\end{cases}$ در $x=\frac{3\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۶ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-5 & ;x>2\\ ax-1 & ;x\leq 2\end{cases}$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a
۲) هیچ مقدار a
۳) فقط $a=-2$
۴) فقط $a=2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۷ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax+b & ;x>۲ \\ x^۲+bx-۱ & ;x<۲ \end{cases}$ با شرط $f(۲)=۵$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ;x \neq ۲ \\ a & ;x=۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & ;x \neq ۱ \\ a & ;x=۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در $x=۱$ پیوسته است؟

۱) هر مقدار a
۲) ۳-
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۰ با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x+a} & ;x \geq -۱ \\ x^۲+ax & ;x<-۱ \end{cases}$ در $x=-۱$ پیوسته است؟

۱) $\{۱,\sqrt{۲}\}$
۲) $\{۱+\sqrt{۲},۱-\sqrt{۲}\}$
۳) $\varnothing$
۴) R

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x+۱} & ;|x|>۱ \\ ۲x & ;|x| \leq ۱ \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- چگونه است؟

۱) در ۱- ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته
۲) در ۱- ناپیوسته، در ۱ پیوسته
۳) در ۱- پیوسته، در ۱ پیوسته
۴) در ۱- پیوسته، در ۱ ناپیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^{2}x}{1-\cos x} & ;x>0\\ a\sin(x+\frac{\pi}{6}) & ;x\le 0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=0$ پیوسته است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) هیچ مقدار a
۴) هر مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۳ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{2x-\pi} & ;x\neq\frac{\pi}{2}\\ a & ;x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\tan^{2}x}{\cos 2x} & ;0\le x<\frac{\pi}{4}\\ a\cos 3x & ;\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۱) $-2\sqrt{2}$
۲) -۱
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۵ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & ;1\le x\le 6\\ a+\cos^{2}\frac{\pi x}{36} & ;x>6\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۶ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos 3x}{\cos x} & ;0\le x<\frac{\pi}{2}\\ \sin 5x-a & ;\frac{\pi}{2}\le x\le 2\pi\end{cases}$ بر روی بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۷ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{4}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۸ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}3x-[x] & ;x<2\\ a & ;x=2\\ x+2 & ;x>2\end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است؟

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & ;\pi<x\leq 2\pi\\ a\cos\dfrac{2x}{3} & ;0\leq x\leq\pi\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=\pi$ پیوسته است؟

۱) $-2\sqrt{2}$

۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) -2

۲) -1

۳) ۱

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۴۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ;x>1\\ ax-a+2 & ;x\leq 1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) هر مقدار a

۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

نام و نام خانوادگی:

۴۲ به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y = x + a$ از نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع $y = \frac{۲x^۲-۲x}{x^۲+x-۲}$ می‌گذرد؟

۱) -۴ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۳ اگر $f(x) = \frac{x+۳}{۲x+۱}$ و $g(x) = \frac{۲x-۱}{x+۲}$، آنگاه نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(-۱,۱)$

۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(۰,۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۴ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x-\sqrt{x}}{x^۲-۳x+۲}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴۵ یکی از مجانب‌های منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۲x^۳+ax^۲+۵}{x^۲+x}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول -۲ قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۶ اگر محور yها، تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۳+ax-۲}{x^۲-x}$ باشد، آنگاه معادلهٔ مجانب مایل آن کدام است؟

۱) $y = x - ۲$ ۲) $y = x - ۱$

۳) $y = x + ۱$ ۴) $y = x + ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۷ مجانب‌های نمودار تابع $y = \frac{x^۳}{x^۲ - x - ۶}$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند، مختصات نقطهٔ وسط AB کدام است؟

۱) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ ۲) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right)$

۳) $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right)$ ۴) $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۸ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y = ۲x - \sqrt{x^۲ - ۲x}$، کدام است؟

۱) $(-۱, ۰)$
۲) $(-۱, ۱)$
۳) $(۱, ۲)$
۴) $(۱, ۳)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۹ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲, ۰)$ از خط مجانب منحنی به معادلهٔ $y = x - \sqrt{x^۲ - ۲x}\ ;\ x \leq ۰$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۵۰ منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{(a-۱)x^۲ + ax + ۲ - a}$ دارای دو خط مجانب می‌باشد، مجموعهٔ مقادیر a به کدام صورت است؟

۱) $a < ۲$
۲) $a > ۰$
۳) $a > ۱$
۴) $۱ < a < ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵۱ منحنی به معادلهٔ $a \neq ۰$، $y = \dfrac{x^۲ + ۳x}{ax^۲ + ۴x - ۱}$ فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطهٔ تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$
۲) $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۴}\right)$
۳) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}\right)$
۴) $\left(\frac{-۱}{۲}, \frac{-۱}{۴}\right)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱	○●○○	۱۱	○○○●	۲۱	○●○○	۳۱	○○○●	۴۱	○○●○	۵۱	○●○○
۲	○●○○	۱۲	●○○○	۲۲	●○○○	۳۲	○●○○	۴۲	○○○●		
۳	●○○○	۱۳	○●○○	۲۳	○●○○	۳۳	●○○○	۴۳	○○○●		
۴	○●○○	۱۴	○○●○	۲۴	○○○●	۳۴	●○○○	۴۴	○●○○		
۵	○○○●	۱۵	●○○○	۲۵	○○○●	۳۵	○●○○	۴۵	○○○●		
۶	○○○●	۱۶	●○○○	۲۶	●○○○	۳۶	○○○●	۴۶	○○●○		
۷	○○○●	۱۷	○●○○	۲۷	○○●○	۳۷	●○○○	۴۷	○●○○		
۸	●○○○	۱۸	○●○○	۲۸	○○●○	۳۸	○○○●	۴۸	○○●○		
۹	●○○○	۱۹	○●○○	۲۹	○○○●	۳۹	○●○○	۴۹	○○●○		
۱۰	●○○○	۲۰	○●○○	۳۰	○○●○	۴۰	○○○●	۵۰	○○●○		

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۲**

وقتی $x \to ۲$، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \to ۲$ مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = ۲$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۲a + b = ۰ \qquad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a} = \frac{۱-\frac{۳}{۲\times۲}}{a} = \frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a} = \frac{۱}{۴a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ (I) مقدار b برابر است با:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + b = ۰ \Rightarrow b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ **گزینه ۲**

باتوجه‌به نمودار $f(۰) = ۰$ است، پس داریم:

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow \frac{۰+b}{۰-۱} = ۰ \Rightarrow -b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x = ۱$ تعریف‌نشده است، چون $x = ۱$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x \to ۱$ باید برابر صفر باشد که تابع به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ دربیاید.

$$\lim_{x\to ۱} ۴x^۳ + ax + b = ۰ \Rightarrow ۴ + a = ۰ \Rightarrow a = -۴$$

بنابراین داریم: $(a,b) = (-۴,۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳ **گزینه ۱**

حاصل حد، وقتی $x \to -1$ مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x} \times \frac{2x-\sqrt{3-x}}{2x-\sqrt{3-x}} = \lim_{x\to -1} \frac{(2x)^2-(\sqrt{3-x})^2}{(x^2+x)(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{4x^2-3+x}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})} = \lim_{x\to -1} \frac{4x-3}{x(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$= \frac{-4-3}{(-1)(-2-2)} = \frac{-7}{(-1)(-4)} = -\frac{7}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴ **گزینه ۲**

حاصل حد، وقتی $x \to 1$ مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \times \frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{-(2+\sqrt{5-x})}{1+\sqrt{x}} = \frac{-(2+2)}{1+1} = -\frac{4}{2} = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۵ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

می‌دانیم:

الف) $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

ب) $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

گام دوم

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

۶ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos u \underset{u\to 0}{\sim} 1-\frac{u^2}{2}$

گام دوم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2})-(1-\frac{(2x)^2}{2})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}$$

۷ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) داریم:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{x\to 1} g(x)$$

ب) چون در فاصلهٔ $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] - \{1\}$، رابطهٔ $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$ برقرار است؛ طبق قضیهٔ فشردگی و باتوجه‌به قسمت قبل می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to 1} f(x)$ کافی است حاصل حد $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{1-x}$ را به دست آوریم. حاصل این حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$1-x = t \Rightarrow x = 1-t$$

$$x \to 1 \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi(1-t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi - \pi t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{t} = \pi$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \pi$$

۸ گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{\pi}{4}$ حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از روابط مثلثاتی و قاعدهٔ هوپیتال می‌توان رفع ابهام کرد.

روش اول:

با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}}{\cos x} = -\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2$$

روش دوم:

طبق قاعدهٔ هوپیتال، اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدهٔ هوپیتال را تا جایی که ابهام برطرف شود، به کار می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(1+\tan^2 x)}{\cos(x-\frac{\pi}{4})} = \frac{-(1+\tan^2\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})} = \frac{-(1+1)}{1} = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{3\pi}{4}$ حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{-(\sin^2 x - \cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

۱۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{\pi}{4}$ حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. باتوجه‌به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2})} = -1$$

۱۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید.

ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n = ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲ - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲}{۳x^۲} = \frac{a}{۳}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = ۲$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a، حاصل $f(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۲x^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x} \Rightarrow f(-۱) = \frac{۲(-۱)^۲-۳(-۱)+۱}{۳(-۱)^۲-۱} = \frac{۲+۳+۱}{۳-۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

۱۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{x^2+5} \underset{x\to\infty}{\sim} x$$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجهٔ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج باهم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرائب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{ax^n+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-x}{ax^n+4}$$

$$\xrightarrow{n=1} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-x}{ax+4} = \frac{-1}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{-2x+4}$$

اکنون حاصل $\lim_{x\to 2} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{-2x+4} \times \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{9-x^2-5}{2(2-x)(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(2+x)}{2(2-x)(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\to 2} \frac{2+x}{2(3+\sqrt{x^2+5})} = \frac{2+2}{2(3+\sqrt{4+5})}$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۱۳ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

ب) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f(x)=\frac{ax+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲} \xrightarrow{f(۲)=۱} ۱=\frac{۲a+۱+۵}{۴} \Rightarrow ۲a+۶=۴$$
$$\Rightarrow ۲a=-۲ \Rightarrow a=-۱$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۴x^۲+۹} \underset{x\to+\infty}{\sim} ۲x$$

پس:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+۲x}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{۳x-۲}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴ **گزینه ۳**

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است. چون $x \to +\infty$ برای یافتن حاصل حد کافی است بزرگ‌ترین جملهٔ صورت را بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج تقسیم کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=۳\Rightarrow a=-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}$$

$$\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to۳}\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}=\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}=-\frac{۳}{-\frac{۳}{۴}}$$
$$=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۵ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\sqrt{۴x^۲+۹x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{۴}\left|x+\frac{۹}{۸}\right|=۲\left(x+\frac{۹}{۸}\right)=۲x+\frac{۹}{۴}$$

چون $x \to +\infty$ می‌توان در مخرج کسر از عبارت $\sqrt{x}$ در برابر $۳x$ صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(۲x+\frac{۹}{۴})}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-۲x-\frac{۹}{۴}}{۳x}=-\frac{۱}{۳}$$

۱۶ **گزینه ۱**

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \to \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^{۲}+bx+c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{۴}\left|x+\frac{۱۵}{۸}\right| = -۲(x+\frac{۱۵}{۸})$$

(دقت کنید که چون $x \to -\infty$ بود، قرینهٔ عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، $n = ۱$ است. داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x-(-۲(x+\frac{۱۵}{۸}))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x+۲x+\frac{۱۵}{۴}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۵x+\frac{۱۵}{۴}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{۵x} = \frac{a}{۵}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱ \Rightarrow \frac{a}{۵} = -۱ \Rightarrow a = -۵$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۳$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to۳} f(x) = \lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}} = \frac{۰}{۰}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}} = \lim_{x\to۳} \frac{-۵}{۳-\frac{۸x+۱۵}{۲\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}}} = \frac{-۵}{۳-\frac{۲۴+۱۵}{۲\sqrt{۳۶+۴۵}}}$$

$$= \frac{-۵}{۳ - \frac{۳۹}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۵}{۶}} = -۶ \Rightarrow \lim_{x \to ۳} f(x) = -۶$$

روش دوم:

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\lim_{x \to ۳} \frac{-۵x + ۱۵}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} \times \frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۹x^۲ - ۴x^۲ - ۱۵x}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۵x(x - ۳)} = \lim_{x \to ۳} -\frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{x} = -\frac{۹ + ۹}{۳}$$

$$= -\frac{۱۸}{۳} = -۶$$

۱۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \to +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت کسر با بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجهٔ x در صورت کسر ۱ است، پس $n = 1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی‌که $x \to +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{1}|x+(\frac{-3}{2})|}{ax-6}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x-\frac{3}{2}}{ax-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\frac{3}{2}}{ax-6} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1} \frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6} \times \frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{2x-\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to-1} \frac{4x^2-x^2+3x}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})} = \lim_{x\to-1} \frac{3x}{-6(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$= \frac{-3}{-6(-2-2)} = \frac{-3}{(-6)(-4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

۱۸ **گزینه ۲**

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+\sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(a+2)}{2x}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{2}} \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} f\frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}} \lim_{x\to-1} \frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$$

$$\times \frac{3x-\sqrt{4x^2+5}}{3x-\sqrt{4x^2+5}}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{9x^2-4x^2-5}{2(x+1)(-3-\sqrt{4+5})} = \lim_{x\to-1} \frac{-5(x-1)(x+1)}{12(x+1)} = \frac{5}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۹ **گزینه ۲**

می‌دانیم: $[2^-] = 1$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2(1)}{2-x} = \lim_{x\to2^-} \frac{x+2}{x(x-2)} + \frac{2}{2-x} = \lim_{x\to2^-} \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} = \lim_{x\to2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۰ **گزینه ۲**

$$\lim_{x\to-2} \left(\frac{3}{(2x+1)(x+2)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)}\right) = \lim_{x\to-2} \left(\frac{3(x-2)-4(2x+1)}{(2x+1)(x+2)(x-2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-2} \left(\frac{-5(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x-2)}\right) = \lim_{x\to-2} \left(\frac{-5}{(2x+1)(x-2)}\right) = -\frac{5}{12}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۱ **گزینه ۲**

با استفاده از اتحاد $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$ داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲ - \sqrt[۳]{x+۶})(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}{\sqrt{(x-۲)^۲}(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲-x)}{(x-۲)(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})} = -\frac{۱}{۴+۴+۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x - ۲$ حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۲} \left(\frac{۶}{x^۲ - ۲x} - \frac{x+۱}{x-۲}\right) = \lim_{x\to ۲} \left(\frac{۶}{x(x-۲)} - \frac{x+۱}{x-۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۲} \left(\frac{۶ - x^۲ - x}{x(x-۲)}\right) = \lim_{x\to ۲} \left(\frac{-(x-۲)(x+۳)}{x(x-۲)}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-(x+۳)}{x} = \frac{-۵}{۲}$$

۲۳ **گزینه ۲**

$$\lim_{x\to -۱} \left(\frac{۲}{x^۲-۱} - \frac{x}{x+۱}\right) = \lim_{x\to -۱} \frac{۲}{(x-۱)(x+۱)} - \frac{x}{x+۱}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{۲ - x(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to -۱} \frac{-x^۲ + x + ۲}{x^۲ - ۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{-\cancel{(x+۱)}(x-۲)}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{-(x-۲)}{(x-۱)} = \frac{-(-۱-۲)}{-۱-۱} = \frac{۳}{-۲} = \frac{-۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

ب) می‌دانیم وقتی $x\to 0$ داریم: $\sin 2x\sim 2x$ و $\sin x\sim x$.

گام دوم

ابتدا حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x\to 0$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{2x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\pm\infty$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ فاقد حد است، بنابراین به ازای هیچ مقداری از a در این نقطه پیوسته نمی‌شود.

۲۵ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{۳\pi}{۴}$ پیوسته است؛ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = f(\frac{۳\pi}{۴})$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = \frac{۳\pi}{۴}$ به دست آورده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} a\sin ۲x = a\sin ۲(\frac{۳\pi}{۴}) = a\sin\frac{۳\pi}{۲} = -a$$

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} \cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱$$

$$f(\frac{۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = f(\frac{۳\pi}{۴}) \Rightarrow -a = -۱ \Rightarrow a = ۱$$

۲۶ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ R پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_{\circ}$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_{\circ}^-} f(x) = \lim_{x \to x_{\circ}^+} f(x) = f(x_{\circ})$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است؛ بنابراین کافی است پیوستگی تابع را فقط در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} x^۲ + ax - ۵ = ۲^۲ + ۲a - ۵ = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} ax - ۱ = ۲a - ۱$$

$$f(۲) = ۲a - ۱$$

به ازای هر مقدار حقیقی a، تساوی $۲a - ۱ = ۲a - ۱$ برقرار است.

۲۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} ax + b = ۲a + b$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} x^۲ + bx - ۱ = ۴ + ۲b - ۱ = ۳ + ۲b$$

$$f(۲) = ۵ \Rightarrow ۲a + b = ۳ + ۲b = ۵$$

داریم:

$$۳ + ۲b = ۵ \Rightarrow ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$
$$۲a + b = ۵ \Rightarrow ۲a + ۱ = ۵ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

۲۸ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = \lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} \times \frac{x + \sqrt{۲x}}{x + \sqrt{۲x}} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۲x}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})} = \lim_{x \to ۲} \frac{x(x - ۲)}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{-x}{x + \sqrt{۲x}} = \frac{-۲}{۲ + ۲} = \frac{-۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۲$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = f(۲) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۲۹ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x \to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ;u \geq \circ \\ -u & ;u < \circ \end{cases}$$

گام دوم

ضابطهٔ تابع شامل یک عبارت قدر مطلقی است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^۲ + x - ۲ = (x + ۲)(x - ۱)$$

		-۲		۱	
$x^۲+x-۲$	+	°	−	°	+

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & ;x \leq -۲ \\ \dfrac{-x^۲ - x + ۲}{x - ۱} & ;-۲ < x < ۱ \\ a & ;x = ۱ \\ \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & ;x > ۱ \end{cases}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x + ۲)(x - ۱)}{(x - ۱)} = \lim_{x \to ۱^+} (x + ۲) = ۱ + ۲$$
$$= ۳$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{-x^۲ - x + ۲}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{-(x + ۲)(x - ۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^-} (-x - ۲) = -۱$$
$$-۲ = -۳$$

باتوجه‌به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a، در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته نخواهد بود.

۳۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

برای بررسی شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ ابتدا لازم است حد چپ و راست تابع را در این نقطه به دست آوریم.

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = \lim_{x\to -۱^+} \frac{۱}{x+a} = \frac{۱}{-۱+a}$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x) = \lim_{x\to -۱^-} x^۲ + ax = ۱ - a$$

$$f(-۱) = \frac{۱}{-۱+a}$$

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = \lim_{x\to -۱^-} f(x) = f(-۱) \Rightarrow \frac{۱}{-۱+a} = ۱ - a$$

$$\Rightarrow -(۱-a)(۱-a) = ۱ \Rightarrow -(۱-a)^۲ = ۱ \Rightarrow (۱-a)^۲ = -۱ \quad (*)$$

معادلهٔ $(*)$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۳۱ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$

ب) می‌دانیم:

$$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$$

$|x| > a \Leftrightarrow x > a$ یا $x < -a$

گام دوم

ابتدا باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، محدودهٔ دو ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & ; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

اکنون حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در دو نقطهٔ $x = 1$ و $x = -1$ محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2(1) = 2$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

باتوجه‌به اینکه $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ است، تابع در $x = 1$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2x = 2(-1) = -2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

$$f(-1) = 2(-1) = -2$$

داریم:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -1$ پیوسته است.

۳۲ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$$

ب) می‌دانیم: $\sin x \underset{x\to\circ}{\sim} x$ و $۱-\cos x \underset{x\to\circ}{\sim} \frac{x^۲}{۲}$

گام دوم

شرط پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = \circ$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^+} \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} = \lim_{x\to\circ^+} \frac{x^۲}{\frac{x^۲}{۲}} = ۲$$

$$\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lim_{x\to\circ^-} a\sin(x+\frac{\pi}{۶}) = a\sin(\circ+\frac{\pi}{۶}) = a\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{a}{۲}$$

$$f(\circ) = a\sin(\circ+\frac{\pi}{۶}) = a\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{a}{۲}$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \circ$ پیوسته خواهد بود هرگاه:

$$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^-} f(x) = f(\circ) \Leftrightarrow \frac{a}{۲} = ۲ \Leftrightarrow a = ۴$$

۳۳ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسـته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[0, 2\pi]$ کافی است شرط پیوستگی را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} = \frac{0}{0}$$

با تغییر متغیر $x - \frac{\pi}{2} = t$ و با استفاده از هم‌ارزی $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$، رفع ابهام می‌کنیم.

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow 2x - \pi = 2t$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x-\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi+2t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin(2t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t}{2t} = -1$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow a = -1$$

۳۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_\circ^-} f(x) = \lim_{x \to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{\cos ۲x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos ۲x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\cos^۲ x - \sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} a \cos ۳x = a \cos \frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} a$$

$$f(\frac{\pi}{۴}) = a \cos \frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{۴}$ مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = f(\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲} a = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲} a = -۴ \Rightarrow a = -\frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = -۲\sqrt{۲}$$

۳۵ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_{\circ}$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_{\circ}^+} f(x) = \lim_{x\to x_{\circ}^-} f(x) = f(x_{\circ})$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطهٔ دادهشده روی بازهٔ $[۱, +\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطهٔ $x = ۶$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x\to ۶^-} f(x) = \lim_{x\to ۶^-} \sin\frac{\pi}{x} = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$f(۶) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۶^+} f(x) = \lim_{x\to ۶^+} a + \cos^۲\frac{\pi x}{۳۶} = a + \cos^۲\frac{\pi}{۶} = a + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ = a + \frac{۳}{۴}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۶$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a + \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۳۶ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) برای اینکه تـابع $f(x)$ در بازهٔ $[\circ, ۲\pi]$ پیوسـته باشـد، باید بر روی تمام نقاط این بازه پیوسـته باشد. نقطهٔ مرز ضابطه‌ها، یعنی $x = \frac{\pi}{۲}$ نقطه‌ای است که پیوستگی در مورد آن باید بررسی شود.

ب) شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{۲}$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{۲})$$

گام دوم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\cos ۳x}{\cos x} = \frac{\circ}{\circ}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\cos ۳x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{-\sin(\frac{۳\pi}{۲} - ۳x)}{\sin(\frac{\pi}{۲} - x)}$$

$$\xrightarrow{x-\frac{\pi}{۲}=t} \lim_{t\to \circ^+} \frac{-\sin(۳t)}{\sin t} = -۳$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \sin ۵x - a = \sin \frac{۵\pi}{۲} - a = ۱ - a$$

$$f(\frac{\pi}{۲}) = ۱ - a$$

شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow ۱ - a = -۳ \Rightarrow a = ۴$$

۳۷ **گزینه ۱**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & ; x \neq \circ \\ a & ; x = \circ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \circ} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} = \lim_{x\to \circ} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - ۱)}{۱ - \cos^۲ x}$$

$$\lim_{x\to \circ} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - ۱)}{(۱ - \cos x)(۱ + \cos x)} = \lim_{x\to \circ} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - ۱)}{(۱ - \sqrt{\cos x})(۱ + \sqrt{\cos x})(۱ + \cos x)} = -\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۸ **گزینه ۴**

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع f، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (۳x - [x]) = ۶ - \left[۲^-\right] = ۶ - ۱ = ۵ \\ f(۲) = a \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (x + ۲) = ۴ \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در ۲ $x = ۲$ پیوسته باشد، باید $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x)$، پس باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده در بالا، ازآنجاکه $\lim_{x\to ۲^-} f(x) \neq \lim_{x\to ۲^+} f(x)$، بنابراین تابع f در $x = ۲$ به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.

تذکر:

$$a \in Z \Rightarrow \begin{cases} [a^-] = a - ۱ \\ [a^+] = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳۹ **گزینه ۲**

برای اینکه تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{۱ + \cos x}}{x - \pi} & ; \pi < x \leq ۲\pi \\ a \cos \dfrac{۲x}{۳} & ; ۰ \leq x \leq \pi \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x = \pi$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{۱ + \cos x}}{x - \pi} \xrightarrow{\alpha = x - \pi} \lim_{\alpha\to ۰} \frac{\sqrt{۱ + \cos(\alpha + \pi)}}{\alpha} \Rightarrow \lim_{\alpha\to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \cos\alpha}}{\alpha}$$

$$\xrightarrow[\lim_{x\to ۰}(\cos x) = ۱ - \frac{x^۲}{۲}]{\text{هم‌ارزی}} \frac{\sqrt{\frac{\alpha^۲}{۲}}}{\alpha} \xrightarrow[\alpha = x - \pi]{x > \pi} \frac{+\frac{\alpha}{\sqrt{۲}}}{\alpha} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\text{برای پیوستگی} \Rightarrow a \cos\frac{۲\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}a \Rightarrow -\frac{۱}{۲}a = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = -\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۰ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در $x=\circ$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim_{x\to\circ} f(x)=f(\circ)$ است.

گام دوم

$$f(\circ)=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x}}{۱+\sqrt{۱-x}}$$
$$=\lim_{x\to\circ}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{(۱-\sqrt{۱-x})(۱+\sqrt{۱-x})}=\lim_{x\to\circ}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{۱-۱+x}$$
$$=\lim_{x\to\circ}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{x}\Rightarrow a=۱+\sqrt{۱-\circ}=۱+۱=۲\Rightarrow a=۲$$

۴۱ **گزینه ۳**

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x=۱$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to۱^+} f(x)=\lim_{x\to۱^-} f(x)=f(۱)$$

بنابراین داریم:

$$f(۱)=a-a+۲=۲$$

$$\lim_{x\to۱^-} f(x)=\lim_{x\to۱^-}(ax-a+۲)=a-a+۲=۲$$

$$\lim_{x\to۱^+} f(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{x-۱}{x-\sqrt{x}}=\frac{\circ}{\circ}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}\frac{x-۱}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-۱)}=\lim_{x\to۱^+}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}\,(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x})\,\cancel{(\sqrt{x}-۱)}}=\frac{۲}{۱}=۲$$

پس به ازای هر مقدار a، تابع در $x=۱$ پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۲ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) یک تابع گویا زمانی مجانب افقی دارد که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد.

ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

$$y = \frac{2x^2-2x}{x^2+x-2} \Rightarrow D = R - \{1, -2\}$$

معادلهٔ مجانب‌های قائم و افقی تابع را نوشته و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را به دست می‌آوریم. درجهٔ صورت و مخرج باهم مساوی‌اند پس تابع دارای مجانب افقی است. داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-2x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{مجانب افقی}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت "ب" از گام اول، ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$x=-2$ و $x=1$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع نیز در آن‌ها برقرار باشد.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2x}{x^2+x-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2-2x}{x^2+x-2} = \frac{2(-2)^2-2(-2)}{(-2)^2+(-2)-2} = \frac{8+4}{4-4} = +\infty$$

بنابراین تابع فقط دارای یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=-2$ است.

(توجه کنید که می‌توانستیم ابتدا تابع را ساده کنیم سپس ریشه‌های مخرج را به دست آوریم)

محل تلاقی دو مجانب $x=-2$ و $y=2$ نقطهٔ $(-2,2)$ است. با جایگذاری مختصات این نقطه در معادلهٔ خط داده‌شده، مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$y = x + a \xrightarrow{(-2,2)} 2 = -2 + a \Rightarrow a = 4$$

۴۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

ب) در توابع کسری ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع fog را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+۳}{۲x+۱} \\ g(x) &= \frac{۲x-۱}{x+۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+۳}{۲g(x)+۱}$$

$$= \frac{\frac{۲x-۱}{x+۲}+۳}{۲\frac{۲x-۱}{x+۲}+۱} = \frac{\frac{۲x-۱+۳x+۶}{x+۲}}{\frac{۴x-۲+x+۲}{x+۲}} = \frac{۵x+۵}{۵x}$$

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول، تابع دارای یک مجانب افقی است:

$$\lim_{x\to\pm\infty} fog(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۵x+۵}{۵x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۵x}{۵x} = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

مجانب افقی

همچنین خط $x = ۰$ مجانب قائم تابع است زیرا:

$$\lim_{x\to ۰} fog(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{۵x+۵}{۵x} = \frac{۵}{۰} = +\infty$$

نقطهٔ $(۰, ۱)$ محل تلاقی این دو مجانب است.

۴۴ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

ب) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن نقطه تعریف شده و دارای حد نامتناهی باشد.

ج) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ از نقطهٔ $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$BA=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

گام دوم

$$y=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}\quad\Rightarrow\quad D=[0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$$

درجهٔ مخرج بزرگ‌تر از درجهٔ صورت است، پس تابع مجانب افقی دارد. داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow y=0$$ مجانب افقی

برای به دست آوردن ریشه‌های مخرج کسر، آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2\\x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$$

$x=1$ و $x=2$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما باید شرط نامتناهی بودن حد تابع در این نقاط نیز بررسی شود.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\frac{1-1}{1-3+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-3}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{2-3}=-\frac{1}{2}\neq\infty$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4-6+2}=\frac{2-\sqrt{2}}{0}=+\infty$$

بنابراین فقط خط $x=2$ مجانب قائم تابع است.

محل تلاقی مجانب قائم و افقی، نقطهٔ $A(2,0)$ است، فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات $(O(0,0))$ برابر است با:

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4}=2$$

۴۵ **گزینه ۴**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

در توابع کسری به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای باشند و درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد، خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج این تابع، مجانب مایل آن است.

گام دوم

چون درجهٔ صورت دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ مخرج تابع است، پس با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{array}{rl|l}
 & ۲x^۳+ax^۲+۵ & x^۲+x \\ \cline{3-3}
- & (۲x^۳+۲x^۲) & ۲x+(a-۲) \\ \cline{1-2}
 & (a-۲)x^۲+۵ & \\
- & ((a-۲)x^۲+(a-۲)x) & \\ \cline{1-2}
 & -(a-۲)x+۵ &
\end{array}$$

بنابراین خط $y = ۲x + (a-۲)$ مجانب مایل تابع است. مختصات نقطهٔ $(-۲,۰)$ در معادلهٔ مجانب مایل صدق می‌کند؛ پس داریم:

$$y = ۲x + (a-۲) \xrightarrow{(-۲,۰)} ۰ = ۲(-۲) + (a-۲) \Rightarrow ۰ = -۴ + a - ۲$$
$$\Rightarrow a = ۶$$

۴۶ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند به‌شرط آنکه حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ این نقاط تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشند.

ب) در توابع کسری به‌شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد آنگاه خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج تابع، مجانب مایل آن خواهد بود.

گام دوم

$$y=\frac{x^3+ax-2}{x^2-x} \quad \Rightarrow \quad D=R-\{0,1\}$$

$$x^2-x=0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

طبق گام اول، دو خط $x=0$ و $x=1$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما بر اساس صورت سؤال، تنها مجانب قائم تابع محور yها به معادلهٔ $x=0$ است؛ بنابراین $x=1$ حتماً ریشهٔ صورت کسر نیز است، پس داریم:

$$x^3+ax-2=0 \xrightarrow{x=1} 1+a-2=0 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{x^3+x-2}{x^2-x}$$

اکنون با تقسیم صورت بر مخرج کسر، مجانب مایل تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x-2 & x^2-x \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x+1 \\ \cline{1-1} \quad x^2+x-2 & \\ -(x^2-x) & \\ \cline{1-1} \quad 2x-2 & \end{array}$$

بنابراین خط $y=x+1$ مجانب مایل تابع است.

۴۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن‌ها تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.

ب) در توابع کسری به شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجهٔ f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجهٔ g باشد آنگاه خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج تابع، مجانب مایل آن خواهد بود.

ج) دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$ وسط خط AB است.

گام دوم

$$y=\frac{x^۳}{x^۲-x-۶} \quad \Rightarrow \quad D=R-\{-۲,۳\}$$

$$x^۲-x-۶=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۳}{x^۲-x-۶}=\frac{(-۲)^۳}{(-۲)^۲-(-۲)-۶}=\frac{-۸}{۴+۲-۶}=\frac{-۸}{۰}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۳}{x^۲-x-۶}=\frac{۳^۳}{۳^۲-۳-۶}=\frac{۲۷}{۹-۳-۶}=\frac{۲۷}{۰}=+\infty$$

بنابراین دو خط $x=-۲$ و $x=۳$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

با تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ & x^۲-x-۶ \\ \cline{2-2} -(x^۳-x^۲-۶x) & x+۱ \\ \cline{1-1} x^۲+۶x & \\ -(x^۲-x-۶) & \\ \cline{1-1} ۷x+۶ & \end{array}$$

خط $y=x+۱$ مجانب مایل تابع است. نقطـهٔ برخورد این خط با هریک از دو خط $x=-۲$ و $x=۳$ را به ترتیب A و B می‌نامیم.

$$y=x+۱ \xrightarrow{x=-۲} y=-۲+۱=-۱ \Rightarrow A(-۲,-۱)$$

$$y=x+۱ \xrightarrow{x=۳} y=۳+۱=۴ \Rightarrow B(۳,۴)$$

باتوجه‌به قسمت "ج" از گام اول، نقطهٔ وسط AB را تعیین می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x_M=\frac{-۲+۳}{۲}=\frac{۱}{۲} \\ y_M=\frac{-۱+۴}{۲}=\frac{۳}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow M(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$

۴۸ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^{۲}+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right| \ , \ a>۰$$

گام دوم

تابع دارای دو مجانب مایل است، با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی در گام اول، معادلهٔ دو مجانب را تعیین می‌کنیم:

$$y=۲x-\sqrt{x^{۲}-۲x}$$

$$x\to+\infty: \sqrt{x^{۲}-۲x}\sim\sqrt{۱}\left|x-\frac{۲}{۲}\right|=|x-۱|=x-۱$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل}: y=۲x-(x-۱)=۲x-x+۱=x+۱$$

$$x\to-\infty: \sqrt{x^{۲}-۲x}\sim\sqrt{۱}\left|x-\frac{۲}{۲}\right|=|x-۱|=-(x-۱)$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل}: y=۲x+(x-۱)=۲x+x-۱=۳x-۱$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو مجانب، نقطهٔ برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x+۱=۳x-۱ \Rightarrow ۳x-x=۱+۱ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$$

$$y=x+۱\xrightarrow{x=۱}y=۱+۱=۲$$

محل برخورد مجانب‌های نمودار تابع، نقطهٔ $(۱,۲)$ است.

۴۹ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^{2}+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ از خطی به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$$

گام دوم

$$y=x-\sqrt{x^{2}-2x} \quad ; \quad D=(-\infty,0]$$

باتوجه‌به دامنهٔ ذکرشده برای تابع، معادلهٔ مجانب مایل تابع را وقتی $x\to-\infty$ تعیین می‌کنیم:

$$x\to-\infty:\sqrt{x^{2}-2x}\sim\sqrt{1}\left|x-\frac{2}{2}\right|=|x-1|=-(x-1)=-x+1$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل}: y=x-(-x+1)=x+x-1=2x-1$$

معادلهٔ مجانب را به فرم استاندارد نوشته و باتوجه‌به گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2,0)$ از آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y=2x-1 \Rightarrow 2x-y-1=0$$

$$\Rightarrow d=\frac{|2(-2)-0-1|}{\sqrt{2^{2}+(-1)^{2}}}=\frac{|-4-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

۵۰ **گزینه ۳**

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^{2}+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right| \quad , \quad a>0$$

گام دوم

با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی در گام اول داریم:

$$\sqrt{(a-1)x^{2}+ax+2-a} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a-1}\left|x+\frac{a}{2(a-1)}\right|$$

چون عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید مثبت باشد پس:

$$a-1>0 \Rightarrow a>1$$

۵۱ **گزینه ۲**

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به‌شرط آنکه تابع حداقل در یک بازهٔ یک‌طرفهٔ آن‌ها تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشد.

ب) یک تابع گویا که درجهٔ صورت کوچک‌تر یا مساوی درجهٔ مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

گام دوم

چون $a \neq ۰$ است؛ پس منحنی حتماً یک مجانب افقی دارد، پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲+۳x}{ax^۲+۴x-۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲}{ax^۲} = \frac{۱}{a} \quad , \quad a \neq ۰$$

پس $y = \frac{۱}{a}$ مجانب افقی تابع است. بنا بر صورت سؤال تابع باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد. مخرج تابع، چندجمله‌ای درجه دوم است، برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه دارد، معادلهٔ $\Delta = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$ax^۲+۴x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} ۱۶-۴(a)(-۱)=۰ \Rightarrow ۱۶+۴a=۰$$

$$\Rightarrow ۴a=-۱۶ \Rightarrow a=-۴$$

$$\xrightarrow{a=-۴} -۴x^۲+۴x-۱=۰ \xrightarrow{\times(-۱)} ۴x^۲-۴x+۱=۰ \Rightarrow (۲x-۱)^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲x-۱=۰ \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین خط $y=-\frac{۱}{۴}$ مجانب افقی تابع و خط $x=\frac{۱}{۲}$ مجانب قائم تابع می‌باشد. محل برخورد این دو مجانب نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴})$ است.