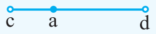
فصل ۹

حد و پیوستگی

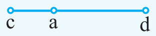
همسایگی و همسایگی محذوف

وقتی در مورد حد تابع f در نقطهٔ a صحبت می‌کنیم، خود نقطهٔ $x=a$ کشک حساب می‌شود و فقط رفتار تابع در اطراف a (نزدیک به آن) برایمان مهم است. پس بیایید اطراف a را بهتر تعریف کنیم و اسم بهتری هم روی آن بگذاریم! بهترین اسم، همسایگی a است.

اگر a یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل a را یک **همسایگی** a می‌نامیم. به عبارت دیگر، بازهٔ (c,d) یک همسایگی نقطهٔ a است، هرگاه $a\in(c,d)$.

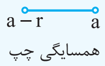


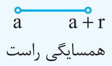
حالا اگر نقطهٔ a را از این بازه حذف کنیم، مجموعهٔ حاصل یعنی $(c,d)-\{a\}$ را یک **همسایگی محذوف** a می‌نامیم. همسایگی محذوف a را به شکل $(c,a)\cup(a,d)$ هم می‌توانیم بنویسیم و می‌بینیم که اجتماع دو بازه است.



هر نقطه، بی‌شمار همسایگی یا همسایگی محذوف دارد.
راستی، همسایگی چپ و راست هم داریم.

اگر $r>۰$ باشد، هر بازه مانند $(a,a+r)$ یک **همسایگی راست** a و هر بازه مانند $(a-r,a)$ یک **همسایگی چپ** a است.





تست **اگر بازهٔ $(x-۲,-۳)\cup(-۳,۲x+۵)$ یک همسایگی محذوف -۳ باشد، مجموعه مقادیر x، همسایگی چند عدد صحیح محسوب می‌شود؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ می‌توانیم مجموعهٔ داده‌شده را به شکل $(x-۲,۲x+۵)-\{-۳\}$ بنویسیم. سؤال می‌خواهد بازهٔ $(x-۲,۲x+۵)$ همسایگی -۳ باشد تا وقتی -۳ را از آن حذف می‌کنیم، به همسایگی محذوف -۳ برسیم. پس باید داشته باشیم $-۳\in(x-۲,۲x+۵)$، یعنی: $x-۲<-۳<۲x+۵$

از $x-۲<-۳$ نتیجه می‌شود $x<-۱$ و از $۲x+۵>-۳$ نتیجه می‌شود $x>-۴$. بنابراین $-۴<x<-۱$ و مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(-۴,-۱)$ است. در این بازه، ۲ عدد صحیح می‌بینیم. پس این بازه، همسایگی ۲ عدد صحیح است. گزینهٔ (۳) درست است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

همسایگی و همسایگی محذوف

۱۴۴۷- حدود m برای آن‌که بازهٔ $(-۱,۷)$ یک همسایگی از نقطهٔ $۲m-۳$ باشد، کدام است؟

۱) $۱<m<۲$ ۲) $۱<m<۵$
۳) $-۱<m<۳$ ۴) $-۱<m<۲$

۱۴۴۸- مجموعهٔ $\{x|۶x^۲+x-۳۵<۰\}$، یک همسایگی از چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۴۴۹- مجموعه جواب x های نامعادلهٔ $|۲x-m|<x$، یک همسایگی نقطهٔ $۲m-۱$ می‌باشد. حدود m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}<m<۱$ ۲) $\frac{۱}{۳}<m<۱$ ۳) $-۱<m<۲$ ۴) $-۲<m<۱$

۱۴۵۰- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲-\frac{۱}{x}|<۱$ یک همسایگی از نقطهٔ $۱-\frac{m}{۶}$ است. حدود m کدام است؟

۱) $۵<m<۸$ ۲) $۸<m<۱۲$ ۳) $-۱<m<۵$ ۴) $۵<m<۱۲$

۱۴۵۱- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲x|-x<b$، یک همسایگی است که شامل سه عدد صحیح می‌باشد $(b>۰)$. حداکثر مقدار b کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۴۵۲- طول بزرگ‌ترین همسایگی $\sqrt{۵}$ که زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{(x-۲)^۲(۹-x^۲)}}$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۵۳- اگر $n\in\mathbb{N}$ باشد، چند همسایگی به صورت $(\frac{۱}{n+۹},\frac{۱}{۲n-۵})$ از نقطهٔ $\frac{۱}{۱۰}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۵۴- کدام مجموعهٔ زیر، یک همسایگی محذوف $x=۰$ نیست؟

۱) $(-۲,۵)-\{۰\}$ ۲) $(-۱,۰)\cup(۰,۷)$ ۳) $\{x:\frac{|[x]|}{x}=۰\}$ ۴) $\{x:\frac{۱}{|x|}>۱\}$

۱۴۵۵- مجموعهٔ $(۳a-۷,a+۵)-\{۳\}$، یک همسایگی محذوف نقطهٔ ۳ است. حدود a کدام است؟

۱) $-۲<a<۱$ ۲) $-۱<a<۲$ ۳) $-۱<a<\frac{۷}{۳}$ ۴) $-۲<a<\frac{۱۰}{۳}$

۱۴۵۶- تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{x([x]-۱)}$ در همسایگی محذوف چند نقطه تعریف شده است، به طوری که در هیچ همسایگی از آن نقاط تعریف شده نباشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۵۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x|<۲x^۲$، یک .... با نقطهٔ میانی .... است.

۱) همسایگی ـ صفر ۲) همسایگی ـ $\frac{۱}{۲}$ ۳) همسایگی محذوف ـ صفر ۴) همسایگی محذوف ـ $\frac{۱}{۲}$

۱۴۵۸- مجموعهٔ $\{x:|\frac{x-۳}{۲x-۱}|>۱\}$ یک .... و شامل .... عدد صحیح است.

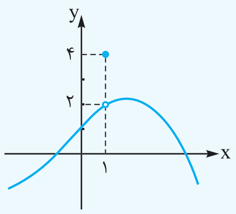
۱) همسایگی ـ ۲ ۲) همسایگی ـ ۳ ۳) همسایگی محذوف ـ ۲ ۴) همسایگی محذوف ـ ۳

۱۴۵۹- اگر I مجموعه جواب نامعادلهٔ $[x]^۲-۴[x]+۳<۰$ بوده و $I-\{a,b\}$ همسایگی محذوف باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

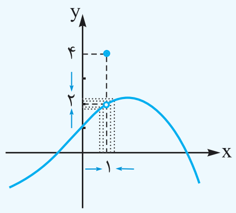
۱) ۴ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۲۷}$

مفهوم حد و حدود غیر مبهم

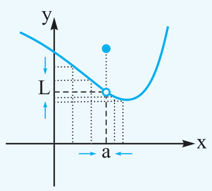
مفهوم حد



نمودار تابع f را در شکل روبه‌رو ببینید؛ اگر از شما بپرسم مقدار تابع در نقطهٔ $x=۱$ چه می‌شود، چه‌کار می‌کنید؟ از $x=۱$ خط عمودی به بالا یا پایین رسم می‌کنید، هر جا با نمودار برخورد کرد، عرض آن نقطه می‌شود $f(۱)$. در شکل روبه‌رو، $f(۱)=۴$.



حالا یک سوال عجیب می‌پرسم! اگر روی محور x و از دو طرف به نقطهٔ $x=۱$ نزدیک شویم، مقادیر تابع یعنی $f(x)$ها روی محور y به چه عددی نزدیک می‌شود؟ خب شکل روبه‌رو می‌گوید ۲!

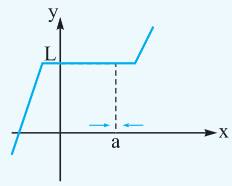


ما در بالا دو مفهوم کاملاً متفاوت را بررسی کردیم. یکی مقدار تابع و دیگری حد تابع. داستان حد این است که ببینیم وقتی مقادیر x روی محور افقی به یک عدد مثل a نزدیک می‌شود، مقادیر تابع یعنی $f(x)$ها روی محور عمودی به چه عددی نزدیک می‌شود. اگر وقتی x به a نزدیک می‌شود (میل می‌کند)، $f(x)$ به L نزدیک و نزدیک‌تر شود (میل کند)، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a **حد** دارد و حد آن مساوی L است. این مطلب را به طور خلاصه این‌طوری می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.

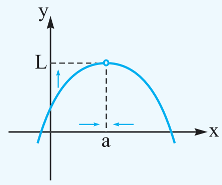
lim مخفف limit به معنی حد است و $x\to a$ هم **میل‌کردن** x به سمت a را نشان می‌دهد. در مثال بالا، $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۲$.

تذکر **مقدار تابع** و **حد تابع** دو چیز کاملاً متفاوت‌اند! در مثال بالا، دیدید که $f(۱)=۴$ و $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۲$ شد!

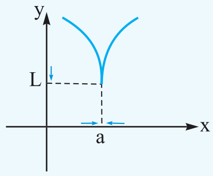
قبل از ادامهٔ مطلب، چند کلیپ تصویری ببینید!



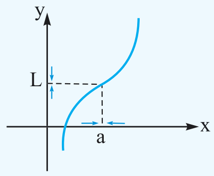
شکل چهارم



شکل سوم



شکل دوم



شکل اول

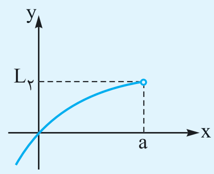
در همهٔ نمودارهای بالا، x از دو طرف (هم چپ و هم راست) به a نزدیک می‌شود و مقادیر $f(x)$ به سمت L می‌رود، یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. البته در شکل اول $f(x)$ از دو طرف (بالا و پایین) به سمت L می‌رود، در شکل دوم فقط از بالا و در شکل سوم فقط از پایین به L نزدیک می‌شود؛ در شکل چهارم مقادیر تابع اطراف a ثابت و مساوی L است. این رفتارها فعلاً برایمان مهم نیست؛ اما کمی جلوتر خواهیم دید که گاه (به خصوص وقتی پای جزءصحیح می‌آید وسط)، باید به این رفتارها توجه کنیم. توجه به این رفتار در مورد x مهم‌تر است.

حد چپ، حد راست

در حرف‌های بالا آن‌قدر چپ و راست کردیم که خسته شدیم! خب بیاییم یک حد چپ و یک حد راست هم تعریف کنیم و خودمان را راحت کنیم! برای آن‌که زیاده‌گویی نکرده باشم، همه چیز را در جدول زیر جمع‌وجور کرده‌ام. در ستون سمت چپ، حد تابع را دوباره توضیح داده‌ام، در ستون وسط حد راست توضیح داده شده و در ستون راست، حد چپ! محبت کنید هر سطر جدول را از چپ به راست بخوانید!

نزدیک‌شدن به a از چپ (مقدارهای کم‌تر از a) را با $x\to a^-$ نشان می‌دهیم.

همین‌طور، اگر وقتی x از طرف چپ به a نزدیک می‌شود، $f(x)$ به L_2 نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ f در a مساوی L_2 است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$



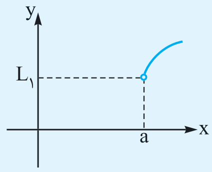
برای آن‌که داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ دو شرط لازم است:

۱ x در همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

۲ هر قدر که بخواهیم، $f(x)$ به L_2 نزدیک شود و برای این کار فقط باید x به اندازهٔ کافی از چپ به a نزدیک شود.

نزدیک‌شدن به a از راست (مقدارهای بیشتر از a) را با $x\to a^+$ نشان می‌دهیم.

حالا اگر وقتی x از طرف راست به a نزدیک می‌شود، $f(x)$ به L_1 نزدیک شود، می‌گوییم حد راست f در a مساوی L_1 است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$



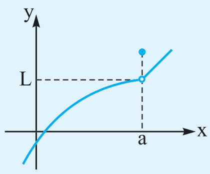
برای آن‌که داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ دو شرط لازم است:

۱ x در همسایگی راست a تعریف شده باشد.

۲ هر قدر که بخواهیم، $f(x)$ به L_1 نزدیک شود و برای این کار فقط باید x به اندازهٔ کافی از راست به a نزدیک شود.

نزدیک‌شدن به a از دو طرف را با $x\to a$ نشان می‌دهیم.

گفتیم اگر وقتی x به a نزدیک می‌شود، $f(x)$ به L نزدیک شود، می‌گوییم حد f در a مساوی L است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

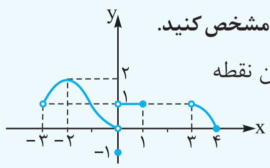


پس برای آن‌که داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ دو شرط لازم است:

۱ x در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

۲ هر قدر که بخواهیم، $f(x)$ به L نزدیک شود و برای این کار فقط باید x به اندازهٔ کافی به a نزدیک شود.

مثال **شکل روبه‌رو نمودار f را نشان می‌دهد. وضعیت حد چپ، حد راست، حد و مقدار f را در نقاط $x=-3,-2,0,1,3,4$ مشخص کنید.**



پاسخ $x=-3$: f در همسایگی چپ این نقطه تعریف نشده و در این نقطه حد چپ و حد وجود ندارد. حد راست در این نقطه مساوی ۱ است، در مورد مقدار تابع هم باید بگوییم f در $x=-3$ تعریف نشده.

$x=-2$: حد چپ، حد راست، حد و مقدار تابع همه مساوی ۲ هستند.

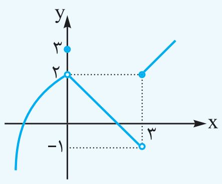
$x=0$: حد چپ مساوی صفر است، حد راست مساوی ۱ است، حد در این نقطه وجود ندارد (چون حد چپ و راست مساوی نشدند و در واقع با نزدیک شدن x به صفر، $f(x)$ به سمت یک عدد نمی‌رود)، مقدار تابع مساوی ۱ − است.

$x=1$: حد چپ مساوی ۱ است، حد راست وجود ندارد (چون تابع در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده)، حد وجود ندارد و مقدار تابع هم ۱ است.

$x=3$: حد چپ وجود ندارد (چون تابع در همسایگی چپ $x=3$ تعریف نشده)، حد هم وجود ندارد. حد راست مساوی ۱ است. $f(3)$ هم تعریف نشده.

$x=4$: حد چپ مساوی صفر است، حد راست و حد وجود ندارد (چون تابع در همسایگی راست $x=4$ تعریف نشده)، مقدار تابع هم صفر است.

تست **اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times f(0)$ کدام است؟**



۱) ۶   ۲) ۵

۳) ۷   ۴) ۸

پاسخ خب با توجه به نمودار، $f(0)=3$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر می‌شود $3\times 2-1=5$ و گزینهٔ (۲) صحیح است.

شرط وجود حد در یک نقطه

شرط آن‌که تابع f در نقطهٔ به طول $x=a$ دارای حد باشد، آن است که دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشند:

۱ تابع f در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشد.

۲ حد چپ و حد راست تابع f در $x=a$ موجود و برابر باشند. به عبارت دیگر: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=$ عدد حقیقی

تست **اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ هم حد چپ و هم حد راست داشته باشد، کدام گزینه لزوماً درست است؟**

۱) f در a تعریف شده است.   ۲) f در a حد دارد.

۳) f در همسایگی a تعریف شده است.   ۴) f در همسایگی محذوف a تعریف شده است.

پاسخ بررسی گزینه‌ها:

۱) حد ارتباطی به مقدار تابع ندارد. پس این گزینه لزوماً درست نیست.

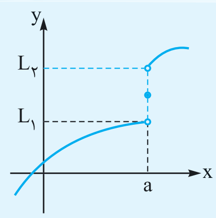
۲) ممکن است حدهای چپ و راست با هم مساوی نباشند، پس این گزینه هم درست نیست.

۳) هر همسایگی a، خود نقطهٔ a را هم دربرمی‌گیرد و در بررسی گزینهٔ (۱) گفتیم که خود نقطه مهم نیست. پس این گزینه هم دقت خوبی ندارد.

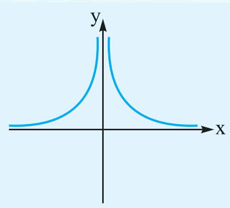
۴) چون تابع در a حد چپ دارد پس دست‌کم در یک همسایگی چپ a تعریف شده و چون تابع حد راست دارد، پس دست‌کم در یک همسایگی راست a تعریف شده. خب این یعنی تابع در همسایگی محذوف a تعریف شده است.

چه موقع حد نداریم؟

این همه حرف زدیم و مدام گفتیم x به سمت a می‌رود و $f(x)$ به سمت L . خب آقاجان، ممکن است وقتی x به سمت a می‌رود، اصلاً $f(x)$ به سمت یک عدد مثل L نرود! شکل‌های زیر را ببینید:

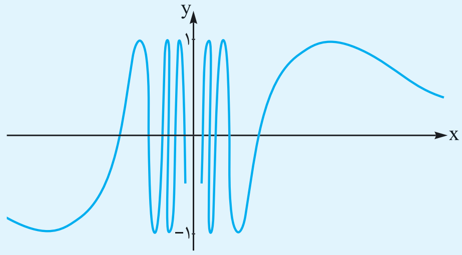


وقتی x به سمت a می‌رود، مقدارهای تابع به دو عدد نزدیک می‌شوند (L_1, L_2) نه یک عدد. در واقع حد چپ تابع در a مساوی L_1 و حد راست آن مساوی L_2 است. چون حد چپ و حد راست با هم مساوی نیستند، می‌گوییم تابع در a حد ندارد.



وقتی x به سمت صفر می‌رود (از دو طرف به مبدأ نزدیک می‌شود)، مقادیر تابع بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند و به سمت هیچ عدد مشخصی نمی‌روند. یعنی حد تابع در $x=0$ وجود ندارد.

تابع نوسانی است و وقتی x به سمت صفر می‌رود، مقادیر تابع به سمت هیچ عدد مشخصی نمی‌روند. این نمودار متعلق به تابع $y=\sin\frac{1}{x}$ است.



در شکل‌های بالا، تابع در همسایگی محذوف نقطهٔ موردنظر تعریف شده بود و هر سه حالت عدم وجود حد را دیدید:

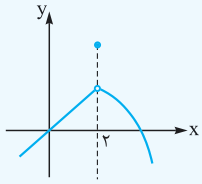
۱ مقادیر تابع حداقل برای یکی از حالت‌های $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر یا از هر عدد منفی کوچک‌تر شوند و به سمت هیچ عدد حقیقی نروند (حد نامتناهی).

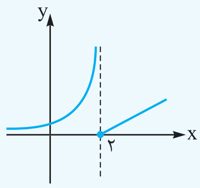
۲ حد چپ و راست در $x=a$ وجود داشته باشند، اما با هم مساوی نباشند.

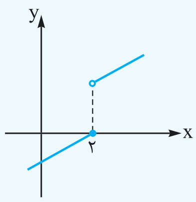
۳ تابع در همسایگی $x=a$ نوسانی باشد و حد آن به هیچ عدد مشخصی نزدیک نشود.

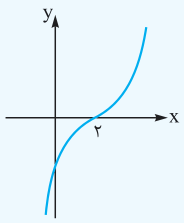
حالت چهارم عدم وجود حد هم این است که تابع در هیچ همسایگی محذوف نقطهٔ مورد نظر تعریف نشده باشد.

تست در کدام‌یک از توابعی که نمودارشان در زیر رسم شده، حدهای چپ و راست تابع در $x=۲$ وجود دارند، اما حد تابع در این نقطه وجود ندارد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که در $x=۲$ حدهای چپ و راست دارد اما با هم مساوی نیستند.

در گزینهٔ (۱) حد چپ و راست مساوی هستند، پس حد وجود دارد. در گزینهٔ (۲) حد چپ وجود ندارد، چون وقتی $x \to ۲^-$، مقادیر تابع بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و به سمت عدد مشخصی نمی‌رود. حد راست در $x=۲$ مساوی صفر است. $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ هم وجود ندارد. در گزینهٔ (۴) نیز حد چپ و راست در $x=۲$ برابر صفر است و تابع در این نقطه، حدی مساوی صفر دارد.

گزینهٔ (۳) صحیح است.

با درکی که از حد پیدا کردیم، در ادامه، حد بعضی توابع مهم را بررسی می‌کنیم.

حد توابع چندجمله‌ای

حد توابع چندجمله‌ای در یک نقطه، برابر است با مقدار تابع در آن نقطه:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\dots+kx+l \Rightarrow \lim_{x\to x_\circ} f(x)=f(x_\circ)$$

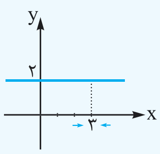
مثلاً:

$$\lim_{x\to ۱}(۳x^۲-x+۲)=۳-۱+۲=۴$$

توجه توابع ثابت $(y=c)$ و همانی $(y=x)$ نیز تابع چندجمله‌ای محسوب می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x\to x_\circ} c=c \ , \ \lim_{x\to x_\circ} x=x_\circ$$

مثلاً اگر پرسیدند $\lim\limits_{x\to ۳} ۲$ چه می‌شود، گیج نشوید! بگویید ۲. نمودار روبه‌رو هم این را تأیید می‌کند:



حد توابع گویا

تابع $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را در نظر بگیرید طوری‌که $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند. برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ سه حالت ممکن است پیش بیاید.

حالت اول: اگر a ریشهٔ صورت و مخرج نباشد یا این‌که نهایتاً فقط صورت را صفر کند، حد تابع f در a مساوی مقدار تابع در این نقطه است:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

در این صورت حاصل حد برابر با عددی حقیقی می‌شود.

مثلاً:
$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x^۲+۳}{x-۲}=\frac{۲\times ۱^۲+۳}{۱-۲}=-۵ \quad , \quad \lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{x+۲}=\frac{۲^۳-۸}{۲+۲}=۰$$

حالت دوم: اگر a ریشهٔ مخرج باشد ولی ریشهٔ صورت نباشد، حاصل حد وجود ندارد. در این حالت، صورت به سمت عددی غیرصفر و مخرج به سمت صفر میل می‌کند. یعنی مخرج از نظر قدرمطلق مدام کوچک و کوچک‌تر و به صفر نزدیک می‌شود. پس قدرمطلق کسر حاصل مدام بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و این یعنی کسر به سمت عدد مشخصی نمی‌رود.

برای این‌که حرف‌هایم را بهتر بفهمید، تابع $y=\dfrac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید و جدول مقادیری از آن را ببینید:

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$-۰/۰۰۰۱$	$\cdots$	$\to ۰ \leftarrow$	$\cdots$	$۰/۰۰۰۱$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$y=\dfrac{۱}{x}$	-۱۰	-۱۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰۰۰		$\cdots$		۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰

می‌بینید که وقتی با مقادیر کم‌تر از صفر به آن نزدیک می‌شویم ($x\to ۰^-$)، مقادیر تابع با علامت منفی کوچک و کوچک‌تر می‌شود (جلوتر می‌گوییم $y\to -\infty$) و وقتی با مقادیر بیشتر از صفر به آن نزدیک می‌شویم ($x\to ۰^+$)، مقادیر تابع با علامت مثبت بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود (جلوتر می‌گوییم $y\to +\infty$).

مثلاً حدهای روبه‌رو وجود ندارند (نامتناهی می‌شوند):

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x+۱}{x-۱} \quad , \quad \lim_{x\to ۲}\frac{x-۳}{x^۳-۲x-۴}$$

صورت کسرهای موجود در این حدها به سمت عددی غیرصفر و مخرج آن‌ها به سمت صفر می‌رود.

حالت سوم: اگر $x=a$ هم صورت و هم مخرج را صفر کند، می‌گوییم حد به حالت مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ دچار است و باید رفع ابهام شود. در این حالت، حاصل حد ممکن است موجود باشد یا نباشد. جلوتر، در مورد این نوع حدها و ریزه‌کاری‌های آن‌ها حرف می‌زنیم.

تست اگر $f(۲x-۱)=\dfrac{۳-x}{۴-۳x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۶} f(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۱}{۱۳}$ ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $\dfrac{۱}{۱۴}$

پاسخ **روش اول:** $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$۲x-۱=t \Rightarrow ۲x=t+۱ \Rightarrow x=\frac{t+۱}{۲}$$

$$f(۲x-۱)=\frac{۳-x}{۴-۳x} \Rightarrow f(t)=\frac{۳-\frac{t+۱}{۲}}{۴-۳\times\frac{t+۱}{۲}}=\frac{\frac{۶-t-۱}{۲}}{\frac{۸-۳t-۳}{۲}} \Rightarrow f(t)=\frac{۵-t}{۵-۳t} \xrightarrow{\text{به جای } t\text{، } x \text{ می‌نویسیم!}} f(x)=\frac{۵-x}{۵-۳x}$$

حالا:
$$\lim_{x\to ۶} f(x)=\lim_{x\to ۶}\frac{۵-x}{۵-۳x}=\frac{۵-۶}{۵-۳\times ۶}=\frac{-۱}{-۱۳}=\frac{۱}{۱۳}$$

روش دوم: همان روش اول است، ولی $f(x)$ را به دست نمی‌آوریم!

$$۲x-۱=۶ \Rightarrow ۲x=۷ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$$

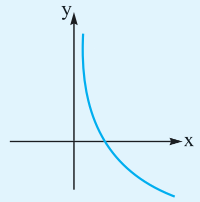
اگر می‌خواهیم $۲x-۱$ برود به سمت ۶، خب x باید برود به سمت $\dfrac{۷}{۲}$؛ پس:

$$\lim_{x\to ۶} f(x)=\lim_{x\to \frac{۷}{۲}} f(۲x-۱)=\lim_{x\to \frac{۷}{۲}}\frac{۳-x}{۴-۳x}=\frac{۳-\frac{۷}{۲}}{۴-۳\times\frac{۷}{۲}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۸-۲۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۳}$$

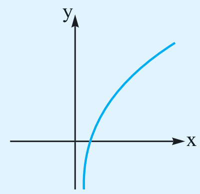
یعنی گزینهٔ (۲) صحیح است.

حد توابع نمایی و لگاریتمی

بگذارید برویم روی نمودار!

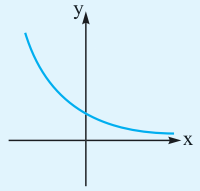


$y=\log_a x\ ,\ ۰<a<۱$

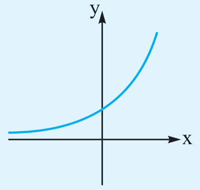


$y=\log_a x\ ,\ ۱<a$

این دو تابع در همهٔ نقاط حقیقی مثبت حد دارند و حد آن‌ها مساوی مقدار تابع است. این دو تابع در $x=۰$ و xهای منفی حد ندارند.



$y=a^x\ ,\ ۰<a<۱$



$y=a^x\ ,\ ۱<a$

این دو تابع در همهٔ نقاط حقیقی حد دارند و حد آن‌ها مساوی مقدار تابع است.

مثلاً: $\lim\limits_{x\to ۲}\log_۴ ۴x=\log_۴ ۸=\log_{۲^۲} ۲^۳=\frac{۳}{۲}\quad ,\quad \lim\limits_{x\to ۳} ۲^x=۲^۳=۸$

حد توابع مثلثاتی

توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در همهٔ نقاط حقیقی حد دارند و حد آن‌ها مساوی با مقدار تابع است.

مثلاً: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۹}}\cos ۳x=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}\quad ,\quad \lim\limits_{x\to\pi}\sin x=\sin\pi=۰$

توابع $y=\tan x$ و $y=\cot x$ در همهٔ نقاط دامنه‌شان حد دارند و حد آن‌ها مساوی با مقدار تابع است.

مثلاً: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}}\cot\frac{x}{۲}=\cot\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}\quad ,\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\tan x=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$

تابع $y=\tan x$ در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و تابع $y=\cot x$ در نقاط $x=k\pi$ حد ندارد $(k\in\mathbb{Z})$.

مثلاً $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\tan x$ و $\lim\limits_{x\to\pi}\cot x$ وجود ندارد. این حدها، نامتناهی‌اند!

حد توابع رادیکالی

در توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، مشکلی پیش نمی‌آید. یعنی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و n عددی فرد باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$.

مثلاً $\lim\limits_{x\to ۱}(۲۰x+۷)=۲۷$، پس $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt[۳]{۲۰x+۷}=\sqrt[۳]{۲۷}=۳$. همچنین:

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{\frac{۵x-۲}{۱-x}}=\sqrt[۳]{\frac{۵\times ۲-۲}{۱-۲}}=\sqrt[۳]{-۸}=-۲$$

اما امان از وقتی که فرجه زوج باشد! این‌جاست که باید حواسمان باشد تابع زیر رادیکال در همسایگی محذوف a منفی نباشد. فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$؛ برای $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$ وقتی n زوج است سه حالت ممکن است پیش بیاید:

حالت اول، $L>۰$: در این صورت مشکلی پیش نمی‌آید و $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$. مثلاً: $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x+۳}=\sqrt{۴}=۲$

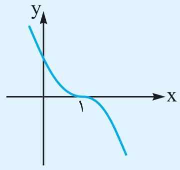
دقت کنید که مثبت‌بودن L ایجاب می‌کند مقادیر $f(x)$ لااقل در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد!

حالت دوم، $L<۰$: در این صورت مشکل بزرگ است و $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}$ وجود ندارد. چون منفی‌بودن L باعث می‌شود در همسایگی‌های به اندازهٔ کافی کوچک از a، مقادیر $f(x)$ منفی باشد.

مثلاً $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۵}$ وجود ندارد:

$\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۵}=\sqrt{-۴}$ مگه می‌شه؟ مگه داریم؟

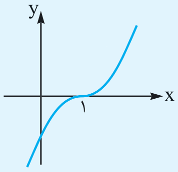
حالت سوم، $L=0$: این‌جا بحث کلی کمی سخت می‌شود و باز چند حالت پیش می‌آید! مثال‌های زیر را ببینید.



$f(x)=-(x-1)^3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

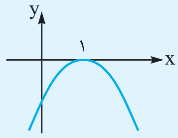
در همسایگی چپ $x=1$، $f(x)$ مثبت و در همسایگی راست آن $f(x)$ منفی است. پس: $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{f(x)}=0$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{f(x)}$ وجود ندارد.



$f(x)=(x-1)^3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

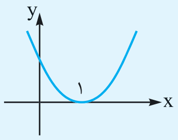
در همسایگی راست $x=1$، $f(x)$ مثبت و در همسایگی چپ آن $f(x)$ منفی است. پس $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{f(x)}=0$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{f(x)}$ وجود ندارد.



$f(x)=-(x-1)^2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

در همسایگی محذوف $x=1$، $f(x)$ منفی است، پس $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{f(x)}$ وجود ندارد.



$f(x)=(x-1)^2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

در همسایگی محذوف $x=1$، $f(x)$ مثبت است، پس: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{f(x)}=0$

تست **تابع f به گونه‌ای است که $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$ اما $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{f(x)}$ وجود ندارد. چه تعداد از ضابطه‌های زیر، می‌توانند متعلق به تابع f باشند؟**

$f(x)=x^2-3x$ ، $f(x)=9-x^2$ ، $f(x)=|x-3|$ ، $f(x)=-9+6x-x^2$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ چه‌طور ممکن است $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ مساوی صفر شود، اما $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{f(x)}$ وجود نداشته باشد؟ تنها حالت ممکن این است که $f(x)$ در همسایگی محذوف $x=3$ یا لااقل در یک طرف آن (همسایگی چپ یا راست) منفی باشد. $f(x)=-9+6x-x^2=-(x-3)^2$ در همسایگی محذوف $x=3$ منفی است و راستِ کارِ ماست! $f(x)=|x-3|$ در همسایگی محذوف $x=3$ مثبت است. و به گروه خونی ما نمی‌خورَد! $f(x)=9-x^2$ در همسایگی راست و $f(x)=x^2-3x=x(x-3)$ در همسایگی چپ $x=3$ منفی می‌شود و این دوتا هم مناسب‌اند! شد ۳ تابع و گزینهٔ (۱) درست است.

حد توابع چندضابطه‌ای

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x-3 & x<1\\ -x & 1\le x<2\\ x+1 & 2\le x\end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم در مورد حد این تابع در نقاط $x=0,\frac{3}{2},3,1,2$ صحبت کنیم.

وقتی $x\to 0$، در واقع $x<1$ است. چون x دارد به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. پس در همسایگی $x=0$، داریم $f(x)=2x-3$. یعنی:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(2x-3)=2\times 0-3=-3$$

وقتی $x\to\frac{3}{2}$، شرط $1\le x<2$ برقرار می‌شود و در این حالت $f(x)=-x$:

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{3}{2}}(-x)=-\frac{3}{2}$$

وقتی $x \to 3$، شرط $2 \leq x$ برقرار می‌شود و در این حالت $f(x)=x+1$:
$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(x+1)=3+1=4$$

برویم سراغ $x=1$. این یک نقطهٔ مرزی ضابطه‌هاست!

وقتی $x \to 1^-$، شرط $x<1$ برقرار می‌شود و $f(x)=2x-3$. یعنی: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-3)=-1$. اما وقتی $x\to 1^+$، شرط $1\leq x<2$ برقرار می‌شود و $f(x)=-x$. یعنی: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x)=-1$. خوشبختانه حد چپ و راست مساوی شدند و می‌توان گفت $\lim_{x\to 1} f(x)=-1$.

یک نقطه بیشتر نماند: $x=2$. این یکی را بدون شرح می‌رویم!
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x)=-2 \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+1)=3$$

حدهای چپ و راست مساوی نشدند، پس $\lim_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد.

فکر کنم با این مثال فهمیدیم که در توابع چندضابطه‌ای، وقتی می‌خواهیم حد را در نقاط مرزی حساب کنیم، باید حدهای چپ و راست را جداجدا برویم جلو.

تست **اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ x^2+x-2 & 1\leq x\end{cases}$ باشد، نسبت حد تابع g به حد تابع f در $x=2$ کدام است؟**

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ حد توابع g و f را جداگانه حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم:
$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=4+4+4=12$$

هم‌چنین $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+x-2)=4+2-2=4$. پس نسبت حد g به حد f می‌شود $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ و گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست **اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1+a\sin x & x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{x}{\pi}-1 & \frac{\pi}{2}\leq x\end{cases}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟**

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) -2

پاسخ باید حدهای چپ و راست تابع در $\frac{\pi}{2}$ با هم مساوی باشند.
$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(1+a\sin x)=1+a\sin\frac{\pi}{2}=1+a \quad , \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)=\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1=-\frac{1}{2}$$

بنابراین:
$$1+a=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

یعنی گزینهٔ (۳) صحیح است.

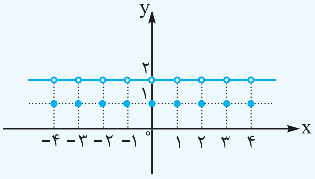
دو تست بعدی، متفاوت و زیرکانه هستند طوری که صرفاً میزان درک شما را از مفهوم حد محک می‌زنند!

تست **اگر $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Z}\\ 2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x)+\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

پاسخ شاید حواسمان نباشد و بگوییم چون $3\in\mathbb{Z}$، پس $\lim_{x\to 3} f(x)=1$ و چون $\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$، پس $\lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=2$.

در این صورت نصف حرف‌هایمان غلط است و میزان درک ما از حد نهایتاً ۵۰ درصد است! آن ۵۰ درصد بقیه که نتوانسته‌ایم درک کنیم این است: وقتی در مورد حد در یک نقطه حرف می‌زنیم، با خود نقطه کاری نداریم! در این سؤال هم وقتی x به ۳ میل می‌کند، با چه مقادیری میل می‌کند؟ صحیح یا غیرصحیح؟ خب معلوم است که غیرصحیح، چون نزدیک‌ترین همسایه‌های ۳ غیرصحیح‌اند.



نمودار تابع f

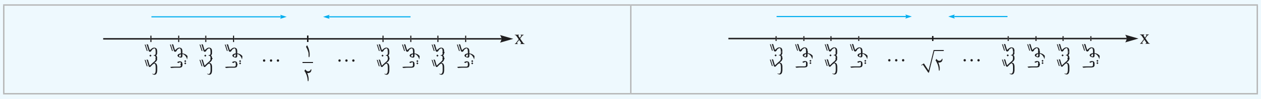
پس وقتی $x\to 3$، $x\notin\mathbb{Z}$ و در نتیجه $\lim_{x\to 3} f(x)=2$. برای $x\to\frac{1}{3}$ هم داستان همین‌طوری است. بنابراین:
$$\lim_{x\to 3} f(x)+\lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=2+2=4$$

تجربه‌ای که در تست قبل به دست آوردیم، به دردمان می‌خورَد. کلاً در توابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\mathbb{Z} \\ h(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، برای حدگیری در یک نقطه، فقط از ضابطهٔ مربوط به $x\notin\mathbb{Z}$ استفاده می‌کنیم. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)$

تست اگر $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\in\mathbb{Q} \\ ۲ & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}} f(x)+\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۳　　۴) وجود ندارد

پاسخ اولین سؤال این است که وقتی x به سمت $\frac{۱}{۲}$ یا $\sqrt{۲}$ میل می‌کند، با مقادیر گویا میل می‌کند یا مقادیر گنگ. خب مگر بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود ندارد؟ در واقع اعداد گویا و گنگ روی محور اعداد حقیقی به شدت به هم چسبیده‌اند. پس وقتی x به سمت یک عدد حقیقی (چه گویا، چه گنگ) میل می‌کند، مدام و به طور پی‌درپی مقادیر گنگ و گویا به خود می‌گیرد. در این تست نیز وقتی x به سمت $\frac{۱}{۲}$ یا $\sqrt{۲}$ می‌رود، همین اتفاق می‌افتد و مقدار تابع مدام در دو عدد ۱ و ۲ نوسان می‌کند. در واقع تابع به سمت این دو عدد می‌رود، نه یک عدد مشخص.



پس $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}} f(x)$ وجود ندارند. در واقع تابع f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد! گزینهٔ (۴) درست است.

تست تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳ & x\in\mathbb{Q} \\ x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، در چند نقطه از دامنه‌اش حد دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ با حل تست قبل فهمیدیم که اوضاع بی‌ریخت است! تابع f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد، مگر آن‌که وقتی x دارد بین مقادیر گنگ و گویا نوسان می‌کند، $f(x)$ تغییری نکند. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a} x^۳=\lim\limits_{x\to a} x$ باشد، پس: $a^۳=a \Rightarrow a(a^۲-۱)=۰ \Rightarrow a=-۱,۰,۱$

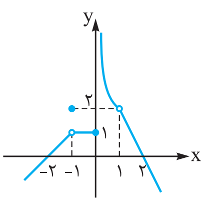
f فقط در سه نقطهٔ بالا حد دارد و گزینهٔ (۴) درست است.

کلاً یادمان باشد که تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\mathbb{Q} \\ h(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ فقط در نقاطی مثل a حد دارد که $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ باشد. این شرط را به صورت $g(x)=h(x)$ نگوییم! مگر آن‌که توابع g و h در a پیوسته باشند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مفهوم حد و حدود غیر مبهم

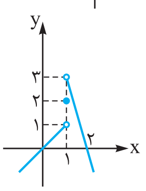
۱۴۶۰- شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)-۳\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟



۱) -۲　　۲) -۱

۳) ۱　　۴) ۲

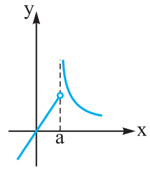
۱۴۶۱- نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)+۳\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)+۲f(۱)$ کدام است؟

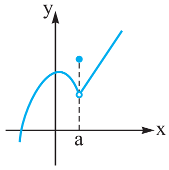


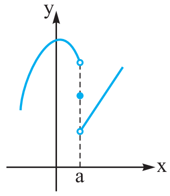
۱) ۱۳　　۲) ۴

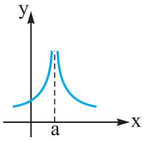
۳) ۹　　۴) ۱۲

۱۴۶۲- در کدام یک از نمودارهای زیر، حد چپ و راست تابع f در a موجود است ولی حد در این نقطه موجود <u>نیست</u>؟

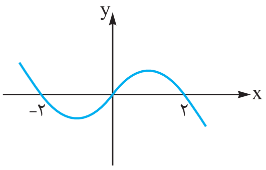
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۴۶۳- شکل مقابل، نمودار تابع f است. اگر $g(x)=\frac{|f(x)|}{f(x)}$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲^+}g(x)-\lim\limits_{x\to(-۲)^-}g(x)$ کدام است؟



۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۶۴- اگر $f(x)=\begin{cases}ax-۱ & x<۱\\ x^۲+۲a & x\geq ۱\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)-\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=-۱$، مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۱۴۶۵- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲+a & x<-۲\\ ۳x+۴ & x>-۲\end{cases}$، مقدار حد چپ در نقطهٔ $x=-۲$، معکوس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) -۴ ۴) $-۴/۵$

۱۴۶۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}(x+a)^۲ & x\geq -۱\\ ۲x+۱ & x<-۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۱$ حد دارد؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۲\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۴۶۷- اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲-x & x\in\mathbb{Z}\\ ۴x+۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}f(x)+\lim\limits_{x\to۲}f(x)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۴۶۸- اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\notin\mathbb{Q}\\ ۳x-\frac{۱}{x} & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to۱}f(x)$ به ترتیب از چپ به راست کدام است؟

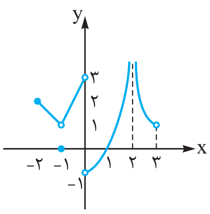
۱) ۳ ـ ۲ ۲) ۳ ـ موجود نیست

۳) موجود نیست ـ ۲ ۴) موجود نیست ـ موجود نیست

۱۴۶۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x\notin\mathbb{Q}\\ x^۲-۲ & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ در چند نقطه حد دارد؟

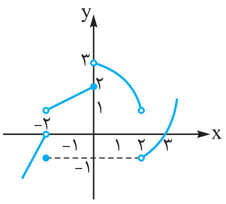
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۷۰- شکل مقابل، نمودار تابع f است. تابع f در چند نقطه از نقاط موجود در بازهٔ $[-۲,۳]$ حد <u>ندارد</u>؟



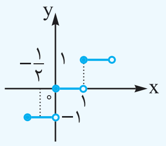
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۴۷۱- شکل مقابل، نمودار تابع f است. تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{۲}$ در چند نقطه حد <u>ندارد</u>؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

حد توابع شامل جزءصحیح



نمودار $y=[x]$ را ببینید. می‌خواهیم در مورد $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}[x]$ و $\lim\limits_{x\to ۱}[x]$ حرف بزنیم. تشخیص حاصل این دو حد از روی نمودار آسان است:

$\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}[x]=-۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱}[x]$ وجود ندارد، چون حد چپ و راست تابع در $x=۱$ مساوی نمی‌شوند: $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+}[x]=۱$.

اگر بخواهیم بدون توجه به نمودار عمل کنیم، چه باید بگوییم؟

وقتی $x\to -\frac{۱}{۲}$، می‌توانیم بگوییم $-۱<x<۰$ و البته x بسیار به $-\frac{۱}{۲}$ نزدیک است (مثل $-۰/۴۹$ یا $-۰/۵۱$). پس $[x]=-۱$، یعنی $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}[x]=-۱$.

$x=۱$ نقطهٔ مرزی است (داخل براکت را عدد صحیح می‌کند)، پس باید حدهای چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم. وقتی $x\to ۱^-$، می‌توانیم بگوییم $۰<x<۱$ و البته x بسیار به ۱ نزدیک است (مثل ۰/۹). پس $[x]=۰$، یعنی $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]=۰$. اما وقتی $x\to ۱^+$، باید بگوییم $۱<x<۲$ و البته x بسیار به ۱ نزدیک است (مثل ۱/۱). پس $[x]=۱$،یعنی $\lim\limits_{x\to ۱^+}[x]=۱$.

کلاً در مورد توابع $y=[f(x)]$، وقتی می‌خواهیم حد تابع را در نقطه‌ای مثل $x=a$ بررسی کنیم، اول باید ببینیم داخل براکت به ازای $x=a$ عدد صحیح می‌شود یا نه. اگر عدد صحیح نشود، a نقطهٔ مرزی نیست و لزومی ندارد حدهای چپ و راست را جداگانه حساب کنیم. در این حالت اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد و مساوی L باشد، $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ هم وجود دارد و مساوی $[L]$ است.

اما اگر داخل براکت به ازای $x=a$ عدد صحیح شود، a نقطهٔ مرزی است و باید حدهای چپ و راست را جداگانه حساب کنیم.

مثال **حد تابع $y=[۲x]$ را در نقاط $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=\frac{۳}{۲}$ بررسی کنید.**

پاسخ $\frac{۱}{۳}$ داخل براکت را صحیح نمی‌کند و $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۳}}[۲x]=[\frac{۲}{۳}]=۰$. اما $\frac{۳}{۲}$ داخل براکت را صحیح می‌کند.

$$\lim_{x\to \frac{۳}{۲}^-}[۲x]=[۲(\frac{۳}{۲})^-]=[۳^-]=۲ \quad , \quad \lim_{x\to \frac{۳}{۲}^+}[۲x]=[۲(\frac{۳}{۲})^+]=[۳^+]=۳$$

در واقع وقتی $x\to (\frac{۳}{۲})^-$، می‌توانیم بگوییم $۱<x<\frac{۳}{۲}$ پس $۲<۲x<۳$ و در نتیجه $[۲x]=۲$.

وقتی $x\to (\frac{۳}{۲})^+$، می‌توانیم بگوییم $\frac{۳}{۲}<x<۲$ پس $۳<۲x<۴$ و در نتیجه $[۲x]=۳$.

تست **اگر $f(x)=x+[-\frac{x}{۳}]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)-\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) -۱

۳) -۲ ۴) صفر

پاسخ وقتی $x\to ۳^-$، می‌توانیم بگوییم $۲<x<۳$، پس $\frac{۲}{۳}<\frac{x}{۳}<۱$ و در نتیجه $-۱<-\frac{x}{۳}<-\frac{۲}{۳}$. در این صورت $[-\frac{x}{۳}]=-۱$. با فرض $x=۲/۷$ هم به همین نتیجه می‌رسیدیم. به هر حال:

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=۳+(-۱)=۲$$

وقتی $x\to ۳^+$، می‌توانیم بگوییم $۳<x<۴$، پس $۱<\frac{x}{۳}<\frac{۴}{۳}$ و در نتیجه $-\frac{۴}{۳}<-\frac{x}{۳}<-۱$. در این صورت $[-\frac{x}{۳}]=-۲$. با فرض $x=۳/۳$ هم به همین نتیجه می‌رسیدیم. به هر حال:

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=۳+(-۲)=۱$$

پس:

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)-\lim_{x\to ۳^+}f(x)=۲-۱=۱$$

یعنی گزینهٔ (۱) درست است.

تست اگر $f(x)=[\sqrt{x}]+[x^۲]$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

پاسخ **روش اول:** وقتی $x\to ۴^-$، می‌توانیم بگوییم $۳<x<۴$ که در این صورت $\sqrt{۳}<\sqrt{x}<۲$ و در نتیجه $[\sqrt{x}]=۱$. اما اگر با همان فرض $۳<x<۴$ برویم جلو، $۹<x^۲<۱۶$ می‌شود و نمی‌توان در مورد $[x^۲]$ نظر داد. پس فرضمان را دقیق‌تر می‌کنیم. در واقع x خیلی به ۴ نزدیک است و انتخاب ۳ کمی بی‌انصافی بود! وقتی $x\to ۴^-$، می‌توانیم بگوییم $\sqrt{۱۵}<x<۴$، پس $۱۵<x^۲<۱۶$ و در نتیجه $[x^۲]=۱۵$. حرف‌های بالا را این شکلی هم می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=[(\sqrt{۴})^-]+[(۴^-)^۲]=[۲^-]+[۱۶^-]=۱+۱۵=۱۶$$

روش دوم: (راه نادقیق!): عددی نزدیک ۴ و کوچک‌تر از آن انتخاب می‌کنیم، مثل $x=۳/۹$. حالا $f(۳/۹)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(۳/۹)=[\sqrt{۳/۹}]+[(۳/۹)^۲]=[۱/۹]+[۱۵/۲۱]=۱+۱۵=۱۶$$

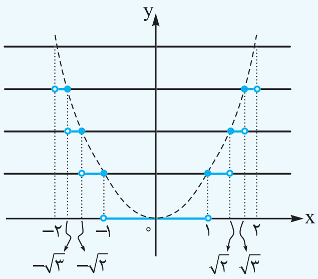
بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

جزءصحیح کجاها حد دارد؟

این هم برای خودش مسئله‌ای است! تا این‌جای کار فهمیدیم که در توابعی مثل $y=[f(x)]$، اگر داخل براکت عدد صحیح نشود، مشکلی پیش نمی‌آید. یعنی اگر $f(a)\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه در صورت وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)$، $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ هم وجود خواهد داشت. اما اگر $f(a)\in\mathbb{Z}$ شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا حد در تمام نقاطی که داخل براکت را صحیح می‌کنند، وجود ندارد؟ جواب، منفی است. در مثال بعدی، متوجه همه‌چیز خواهیم شد.

مثال تابع $y=[x^۲]$ در چند نقطه از بازهٔ $(-۲,۲)$ حد ندارد؟

پاسخ **روش اول:** نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل روبه‌رو، نقاطی از بازهٔ $(-۲,۲)$ که در آن‌ها حد نداریم، این‌ها هستند:

$$x=-\sqrt{۳},-\sqrt{۲},-۱,۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳}$$

روش دوم: ببینیم داخل براکت یعنی $x^۲$ کجاها عدد صحیح می‌شود:

$$x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ \quad , \quad x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

$$x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \quad , \quad x^۲=۳ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

نتیجه با نتیجهٔ راه قبل یکسان شد به جز $x=۰$! در این روش $x=۰$ اضافی به دست آمد، در حالی که با توجه به روش قبل مطمئن هستیم تابع در این نقطه حد دارد. این‌جاست که باید نکتهٔ زیر را بلد باشیم.

توجه برای این‌که ببینیم تابع $y=[f(x)]$ در چه نقاطی حد ندارد، اول نقاطی را پیدا می‌کنیم که داخل براکت یعنی $f(x)$ در آن‌ها صحیح می‌شود. تابع $y=[f(x)]$ در این نقاط حد ندارد، مگر آن‌که نمودار f (نمودار تابع درون براکت) در همسایگی آن نقطه به شکل ، ، ، یا باشد! (علت این امر، به طریقهٔ رسم نمودار $y=[f(x)]$ بر می‌گردد!)

در مثال قبلی، نمودار تابع درون براکت، یعنی $y=x^۲$ در همسایگی $x=۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳}$ به شکل و در همسایگی $x=-\sqrt{۳},-\sqrt{۲},-۱$ به شکل ، اما در همسایگی $x=۰$ به شکل است. به همین خاطر، باید $x=۰$ را از لیست نقاط فاقد حد خط بزنیم.

تست تابع $y=[\sin x]$ در چه تعداد از نقاط به طول‌های $۰,\frac{۲\pi}{۳},\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲}$ حد ندارد؟

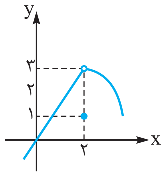
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ $x=\frac{۲\pi}{۳}$ داخل براکت را صحیح نمی‌کند، پس تابع $y=[\sin x]$ در این نقطه حد دارد. بقیهٔ نقاط، یعنی $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=\pi$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ داخل براکت یعنی $\sin x$ را صحیح می‌کنند و نمودار $y=\sin x$ در همسایگی این نقاط به ترتیب به شکل ، ، و است. گفتیم و را بی‌خیال شویم، پس تابع $y=[\sin x]$ در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ حد دارد و در نقاط $x=۰$ و $x=\pi$ حد ندارد.

بنابراین تابع فقط در دو نقطهٔ $(x=۰,\pi)$ از نقاط داده‌شده حد ندارد و گزینهٔ (۳) درست است.

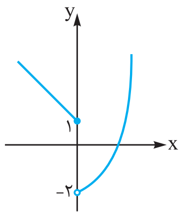
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

حد توابع شامل جزء صحیح



۱۴۷۲– شکل مقابل، نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}[f(x)]-[\lim\limits_{x\to ۲} f(x)]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) موجود نیست.



۱۴۷۳– نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}[\frac{۲}{f(x)}]$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۱-
۴) صفر

۱۴۷۴– در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+a)[x]$، اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=۳$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

۱۴۷۵– به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطهٔ $x=۱$ حد دارد؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۷۶– مجموع حدهای راست و چپ تابع $y=[x]+[۲x]$ وقتی $x\to -\frac{۱}{۲}$، کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۶- ۳) ۵- ۴) ۳-

۱۴۷۷– هرگاه $f(x)=x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{۲}$، اختلاف حد چپ و راست تابع در $x=۴$ چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۷۸– در کدام یک از نقاط زیر از تابع $f(x)=۴[x]+۳[-x]$، حد چپ، دو برابر حد راست است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۴۷۹– اگر $f(x)=[x]+[-x]$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}f(x)=-۱$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=-۱$ ۳) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=۰;(a\in\mathbb{Z})$ ۴) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-۱;(a\in\mathbb{R})$

۱۴۸۰– کدام حد زیر موجود است؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{|x|(x-۲)}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x}{x-۱}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۰}[\frac{x^۲}{x^۲+۱}]$

۱۴۸۱– کدام تابع زیر در نقطه به طول $x=۱$ حد ندارد؟

۱) $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\in\mathbb{Z} \\ ۲ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ ۲) $f(x)=[\sin\frac{\pi}{۲}x]$ ۳) $f(x)=\sqrt[۶]{(x-۱)^۲(x-۳)}$ ۴) $f(x)=\frac{x-۱}{x-۱}$

۱۴۸۲– حاصل $\lim\frac{۴-[x^۲]}{[x]-۲}$ وقتی $x\to ۲$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

۱۴۸۳– در تابع $f(x)=[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x\to ۶$، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

۱۴۸۴– در تابع $y=[\frac{۱}{x}]$ وقتی $x\to -\frac{۱}{۱۰}$، حد چپ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹- ۳) ۱۰- ۴) ۱۱-

۱۴۸۵- حاصل $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^+}[\frac{-1}{x^2}]$ کدام است؟

۱) -9 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -7

۱۴۸۶- حاصل $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^+}[-6x]-\lim\limits_{x\to(\frac{1}{4})^-}[-\frac{2}{x}]$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -9 ۳) -8 ۴) -11

۱۴۸۷- اگر $f(x)=-x^2+2x+1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to1}[f(x)]$ و $[\lim\limits_{x\to1}f(x)]$ به ترتیب کدام است؟

۱) ۲ و ۲ ۲) ۱ و ۲ ۳) ۱ و ۱ ۴) موجود نیست و ۲

۱۴۸۸- حاصل $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1-x^2}{1+x^2}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) ناموجود

۱۴۸۹- حاصل $\lim\limits_{x\to2^+}[\frac{2x+3}{x-1}]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۹۰- تعداد نقاطی که تابع $f(x)=[\frac{4x^2+3}{x^2+1}]$ در آن‌ها حد ندارد، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۴۹۱- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x<1\\ x & x\geq1\end{cases}$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to1^-}[\frac{f(x)+1}{f^2(x)}]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -1

۱۴۹۲- حاصل $\lim\limits_{x\to2}[\cos x]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

۱۴۹۳- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}[\frac{1}{\cos x}]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) -2 ۴) موجود نیست.

۱۴۹۴- مقدار $\lim\limits_{x\to6^+}[4\sin^2\frac{\pi}{x}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۳

۱۴۹۵- مجموع حدهای چپ و راست تابع $f(x)=[2\sqrt{2}\cos2x]$ در $x=\frac{\pi}{8}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۴۹۶- حاصل حد راست تابع $f(x)=[\frac{1+\cos x}{\sin x}]$ وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۱۴۹۷- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}[\sqrt{2}(\sin x-\cos x)]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

۱۴۹۸- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}[\tan x+\cot x]$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) -3 ۴) صفر

۱۴۹۹- حد عبارت $[\sin(x-\frac{\pi}{3})]\cos3x+[\tan^2x]$، وقتی $x\to\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۰۰- حد عبارت $\sin\frac{x}{2}[\cos\frac{x}{2}]-\cos x[\sin2x]$، وقتی $x\to\pi$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

در دو جملهٔ اول، از $۲\sin^۲ x$ فاکتور بگیریم:

$$۲\sin^۲ x(\sin x-۱)-(\sin x-۱)=۰$$

حالا از $\sin x-۱$ فاکتور بگیریم:

$$(\sin x-۱)(۲\sin^۲ x-۱)=۰\Rightarrow \sin x=۱ \text{ یا } \sin^۲ x=\frac{۱}{۲}$$

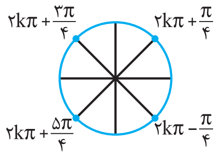
از $\sin x=۱$ به جواب $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ می‌رسیم که سؤال این را نمی‌خواهد.

برویم سراغ $\sin^۲ x=\frac{۱}{۲}$ که از آن نتیجه می‌شود $\sin x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. از طرفی:

$$\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \text{ یا } x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \text{ یا } x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}$$

جای این جواب‌ها را روی دایره ببینید:



این‌ها مضارب فرد $\frac{\pi}{۴}$ هستند. پس این چهار دسته را می‌توان در فرم $(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ خلاصه کرد.

۱۴۴۶ ۲

با استفاده از اتحادهای $۱-\sin^۲ x=\cos^۲ x$ و $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$، کمی معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sin ۲x\cdot\sin ۴x=۱-\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow(۲\sin x\cos x)(۲\sin ۲x\cos ۲x)=\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow(۲\sin x\cos x)(۲(۲\sin x\cos x)\cos ۲x)=\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۸\sin^۲ x\cos^۲ x\cos ۲x-\cos^۲ x=۰$$

$$\Rightarrow \cos^۲ x(۸\sin^۲ x\cos ۲x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos^۲ x=۰\Rightarrow\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ ۸\sin^۲ x\cos ۲x-۱=۰\end{cases}$$

در معادلهٔ دوم به جای $\cos ۲x$ می‌گذاریم $۱-۲\sin^۲ x$:

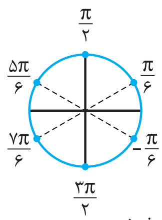
$$۸\sin^۲ x(۱-۲\sin^۲ x)-۱=۰\xrightarrow{\sin^۲ x=t}۸t(۱-۲t)-۱=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶t^۲-۸t+۱=۰\Rightarrow(۴t-۱)^۲=۰\Rightarrow t=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\sin^۲ x=\frac{۱}{۴}=(\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow\sin^۲ x=\sin^۲\frac{\pi}{۶}$$

کلاً اگر $\sin^۲ u=\sin^۲\alpha$، آن‌گاه $u=k\pi\pm\alpha$. پس: $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

انتهای کمان مربوط به زوایای $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ روی دایرهٔ مثلثاتی به صورت مقابل است:



این جواب‌ها فقط توسط جواب کلی $(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$ تولید می‌شوند.

۱۴۴۷ ۲ کلاً هر بازهٔ باز شامل a را یک همسایگی نقطهٔ a می‌نامیم. پس اگر بازهٔ $(-۱,۷)$ بخواهد همسایگی عدد $۲m-۳$ باشد، باید داشته باشیم:

$$۲m-۳\in(-۱,۷)\Rightarrow -۱<۲m-۳<۷$$

$$\Rightarrow ۲<۲m<۱۰\Rightarrow ۱<m<۵$$

۱۴۴۸ ۱ باید نامعادلهٔ $۶x^۲+x-۳۵<۰$ را حل کنیم. گیر کارمان، ریشه‌های آن است که می‌توانیم با روش دلتا یا تجزیه آن‌ها را پیدا کنیم. با روشی که در تجزیه بلدیم، این شکلی می‌شود:

$$۶x^۲+x-۳۵\xrightarrow{\text{تبدیل}}x^۲+x-۲۱۰\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x+۱۵)(x-۱۴)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل}}(x+\frac{۱۵}{۶})(۶x-۱۴)$$

ریشه‌ها، $x=-\frac{۱۵}{۶}=-\frac{۵}{۲}$ و $x=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}$ هستند. حالا می‌توانیم بگوییم:

$$۶x^۲+x-۳۵<۰\Rightarrow -\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۳}$$

می‌خواهیم ببینیم در فاصلهٔ بالا چند عدد صحیح وجود دارد. خب ۵ تا:

$$x=۰,\pm۱,\pm۲$$

۱۴۴۹ ۱ **روش اول:** x از یک قدرمطلق بزرگ‌تر شده، پس باید مثبت باشد، یعنی $x>۰$. از طرفی کلاً وقتی $a>۰$ است، از $|u|<a$ نتیجه می‌شود $-a<u<a$. در این جا هم می‌توانیم بگوییم:

$$|۲x-m|<x\Rightarrow -x<۲x-m<x$$

دو نامعادله را جدا حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}-x<۲x-m\Rightarrow\frac{m}{۳}<x\\ ۲x-m<x\Rightarrow x<m\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\frac{m}{۳}<x<m$$

پس همسایگی مورد نظر در صورت سؤال، بازهٔ $(\frac{m}{۳},m)$ است. واضح است که اگر $m\le ۰$ باشد، این بازه تهی خواهد بود! سؤال گفته $۲m-۱$ درون این بازه باشد:

$$۲m-۱\in(\frac{m}{۳},m)\Rightarrow\frac{m}{۳}<۲m-۱<m$$

باز هم دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{m}{۳}<۲m-۱\xrightarrow{\times۳}m<۶m-۳\Rightarrow\frac{۳}{۵}<m\\ ۲m-۱<m\Rightarrow m<۱\end{cases}$$

اشتراک حرف‌های بالا، می‌شود $\frac{۳}{۵}<m<۱$.

روش دوم: $۲m-۱$ باید در نامعادلهٔ داده‌شده صدق کند، پس به جای xهای نامعادله قرار می‌دهیم $۲m-۱$:

$$|۲x-m|<x\xrightarrow{x=۲m-۱}|۲(۲m-۱)-m|<۲m-۱$$

$$\Rightarrow|۳m-۲|<۲m-۱$$

$۲m-۱$ از یک قدرمطلق بزرگ‌تر شده، پس باید مثبت باشد:

$$۲m-۱>۰\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}$$

حالا می‌توانیم بگوییم:

$$-(2m-1)<3m-2<2m-1 \xrightarrow{+2} -2m+3<3m<2m+1$$

دو نامعادله را جداگانه حل کنیم:

$$-2m+3<3m \Rightarrow \frac{3}{5}<m \quad , \quad 3m<2m+1 \Rightarrow m<1$$

اشتراک تمام حرف‌های بالا، می‌شود $\frac{3}{5}<m<1$.

۱۴۵۰ ۲ یک راه خوب برای حل نامعادله، این است:

$$|2-\frac{1}{x}|<1 \Rightarrow |\frac{2x-1}{x}|<1 \Rightarrow \frac{|2x-1|}{|x|}<1$$

با شرط $x\neq 0$، دو طرف را در عبارت مثبت $|x|$ ضرب می‌کنیم:

$$|2x-1|<|x|$$

کلاً داریم:

$$0<a<b \Rightarrow a^2<b^2 \Rightarrow a^2-b^2<0 \Rightarrow (a-b)(a+b)<0$$

پس با فرض $a=2x-1$ و $b=x$، می‌توانیم بگوییم:

$$(2x-1-x)(2x-1+x)<0 \Rightarrow (x-1)(3x-1)<0 \Rightarrow \frac{1}{3}<x<1$$

شرط $x\neq 0$ هم چیزی را عوض نمی‌کند! خلاصه این که همسایگی مورد نظر در صورت سؤال، بازهٔ $(\frac{1}{3},1)$ است. می‌خواهیم $\frac{m}{6}-1$ درون این بازه باشد:

$$\frac{m}{6}-1\in(\frac{1}{3},1) \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{m}{6}-1<1 \xrightarrow{\times 6} 2<m-6<6$$
$$\Rightarrow 8<m<12$$

۱۴۵۱ ۳ برای حل نامعادلهٔ $|2x|-x<b$، دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت اول، $x\geq 0$. در این صورت، $|2x|=2x$ و داریم:

$$2x-x<b\Rightarrow x<b$$

که اشتراک آن با $x\geq 0$، می‌شود: $0\leq x<b$

حالت دوم، $x<0$. در این صورت، $|2x|=-2x$ و داریم:

$$-2x-x<b \Rightarrow -b<3x \Rightarrow -\frac{b}{3}<x$$

که اشتراک آن با $x<0$، می‌شود: $-\frac{b}{3}<x<0$

اجتماع دو فاصلهٔ به دست آمده، ما را به $-\frac{b}{3}<x<b$ می‌رساند. یعنی بازهٔ $(-\frac{b}{3},b)$. واضح است که اگر $b\leq 0$ باشد، این بازه تهی خواهد بود. سؤال هم گفته $b>0$ و می‌خواهد ۳ عدد صحیح در این بازه وجود داشته باشد. اگر $b=1$ باشد، بازهٔ $(-\frac{1}{3},1)$ به دست می‌آید که فقط یک عدد صحیح در خود دارد $(x=0)$ و ما این را نمی‌خواهیم. اگر $b=2$ باشد، بازهٔ $(-\frac{2}{3},2)$ به دست می‌آید که فقط دو عدد صحیح در خود دارد $(x=0,1)$ و این را هم نمی‌خواهیم. اگر $b=3$ باشد، بازهٔ $(-1,3)$ به دست می‌آید که سه عدد صحیح در خود دارد $(x=0,1,2)$ و برای ما مطلوب است. اما سؤال که نگفته b عددی طبیعی است! در واقع اگر $2<b\leq 3$ باشد، به هدفمان می‌رسیم. پس حداکثر مقدار b مساوی ۳ است.

۱۴۵۲ ۳ لطفاً مخرج، صفر نباشد.

$$\sqrt{(x-2)^2(9-x^2)}=|x-2|\sqrt{9-x^2}\neq 0 \Rightarrow x\neq 2,\pm 3$$

زیر رادیکال هم منفی نباشد:

$$9-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 9\Rightarrow |x|\leq 3\Rightarrow -3\leq x\leq 3$$

اشتراک حرف‌های بالا، می‌شود:

$$-3<x<3, x\neq 2 \Rightarrow D_f=(-3,3)-\{2\}$$

نمایش این مجموعه را روی محور اعداد ببینیم:

باید از دل مجموعهٔ بالا، بازهٔ بازی بیرون بکشیم که $\sqrt{5}$ عضو آن باشد. خب $2<\sqrt{5}<3$ و بزرگ‌ترین بازه‌ای که می‌توانیم انتخاب کنیم، $(2,3)$ است. طول این بازه برابر است با $3-2=1$.

۱۴۵۳ ۲ چون $\frac{1}{n+9}$ مثبت است، $\frac{1}{2n-5}$ هم باید مثبت باشد. پس:

$$2n-5>0\Rightarrow n>\frac{5}{2}$$

می‌خواهیم $\frac{1}{10}$ عضو همسایگی باشد:

$$\frac{1}{10}\in(\frac{1}{n+9},\frac{1}{2n-5})\Rightarrow \frac{1}{n+9}<\frac{1}{10}<\frac{1}{2n-5}$$

هر سه طرف مثبت‌اند و با معکوس کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$n+9>10>2n-5$$

نامعادله‌ها را جدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} n+9>10\Rightarrow n>1 \\ 10>2n-5\Rightarrow n<\frac{15}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<n<\frac{15}{2}$$

گفتیم $n>\frac{5}{2}$، پس $\frac{5}{2}<n<\frac{15}{2}$. حالا چون n طبیعی است، مقادیر ممکن برای n، این پنج تا می‌شود: $n=3,4,5,6,7$

۱۴۵۴ ۳ اگر از یک همسایگی a (بازهٔ باز شامل a)، خود a را حذف کنیم، یک همسایگی محذوف a به دست می‌آید. ببینیم کدام گزینه برای $a=0$ چنین نیست!

۱) هست! $(-2,5)$ همسایگی صفر است و $(-2,5)-\{0\}$ می‌شود همسایگی محذوف آن.

۲) هست! $(-1,7)$ همسایگی صفر است که وقتی خود صفر را از آن حذف می‌کنیم، می‌شود: $(-1,7)-\{0\}=(-1,0)\cup(0,7)$

۳) نیست! از $\frac{|[x]|}{x}=0$ نتیجه می‌شود $[x]=0$ و $x\neq 0$. یعنی $0\leq x<1$ و $x\neq 0$. خب بازهٔ $[0,1)$ همسایگی $x=0$ محسوب نمی‌شود و $(0,1)$ همسایگی محذوف $x=0$ نیست.

۴) هست! برای وجود $\frac{1}{|x|}$، باید $x\neq 0$ باشد. حالا از $\frac{1}{|x|}>1$ نتیجه می‌شود $|x|<1$. یعنی $-1<x<1$. پس $\frac{1}{|x|}>1$ معادل $-1<x<1$ و $x\neq 0$ است. در واقع، از بازهٔ $(-1,1)$، صفر را حذف کرده‌ایم که یک همسایگی محذوف $x=0$ محسوب می‌شود.

۱۴۵۵ ۴ در واقع، بازهٔ $(3a-7, a+5)$ یک همسایگی ۳ است که با کمال احترام، خود ۳ را از آن حذف کرده‌ایم. پس باید داشته باشیم:

$$3a-7<3<a+5$$

دو نامعادله را جداگانه حل کرده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases}3a-7<3\Rightarrow a<\frac{10}{3}\\ 3<a+5\Rightarrow -2<a\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -2<a<\frac{10}{3}$$

۱۴۵۶ ۲ زیر رادیکال، نامنفی:

$$4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 4\Rightarrow -2\le x\le 2$$

مخرج هم صفر نباشد. از طرفی:

$$x([x]-1)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } [x]=1\Rightarrow x=0 \text{ یا } 1\le x<2$$

پس لازم است بگوییم $x\neq 0$ و $x\notin[1,2)$. اشتراک این حرف‌ها، دامنهٔ تابع را می‌دهد:

$$D_f=[-2,0)\cup(0,1)\cup\{2\}$$

این که در همسایگی محذوف یک نقطه تعریف شده باشیم ولی در هیچ همسایگی از آن نقطه تعریف نشده باشیم، به همان نقاط حذف شده از دل همسایگی اشاره می‌کند. یعنی سوراخ وسط یک بازه! در نمایش بالا، $x=0$ این ویژگی را دارد.

۱۴۵۷ ۳ یک راه خوب برای حل نامعادلهٔ $2x^2<|x|$ این است که بگوییم x^2 همان $|x|^2$ است:

$$2|x|^2<|x|\Rightarrow 2|x|^2-|x|<0\Rightarrow |x|(2|x|-1)<0$$

$|x|$ که همیشه نامنفی است: $|x|\ge 0$ و در این جا کافی است صفر نشود:

$$|x|\neq 0\Rightarrow x\neq 0$$

در واقع، $x=0$ سمت چپ نامعادله را صفر می‌کند و کار خراب می‌شود. حالا $|x|$ را که در علامت اثر ندارد، کنار بگذاریم و بگوییم:

$$2|x|-1<0\Rightarrow |x|<\frac12\Rightarrow -\frac12<x<\frac12$$

اما قرار شد $x\neq 0$ باشد. در واقع: $x\in(-\frac12,\frac12)-\{0\}$

ایشان یک همسایگی محذوف $x=0$ هستند.

۱۴۵۸ ۴ یک راه خوب برای حل نامعادلهٔ $|\frac{x-3}{2x-1}|>1$ این است که آن را به شکل $\frac{|x-3|}{|2x-1|}>1$ بنویسیم و با شرط $x\neq\frac12$ دو طرفش را در عبارت مثبت $|2x-1|$ ضرب کنیم:

$$|x-3|>|2x-1|$$

کلاً داریم: $a>b>0\Rightarrow a^2>b^2\Rightarrow a^2-b^2>0\Rightarrow (a-b)(a+b)>0$

پس با فرض $a=x-3$ و $b=2x-1$، می‌نویسیم:

$$(x-3-2x+1)(x-3+2x-1)>0\Rightarrow(-x-2)(3x-4)>0$$

$$\Rightarrow (x+2)(3x-4)<0\Rightarrow -2<x<\frac43$$

اما گفتیم $x\neq\frac12$ باشد، پس مجموعه جواب نامعادله، این شکل است:

$$(-2,\frac43)-\{\frac12\}$$

ایشان همسایگی محذوف $x=\frac12$ هستند و ۳ عدد صحیح $-1,0,1$ را در خود دارند.

۱۴۵۹ ۲ با فرض $t=[x]$، نامعادله این شکلی می‌شود:

$$t^2-4t+3\Rightarrow (t-1)(t-3)<0\Rightarrow 1<t<3$$

یعنی $1<[x]<3$. اما مگر $[x]$ عدد صحیح نیست؟! پس باید بگوییم $[x]=2$.

در واقع، $2\le x<3$ و با توجه به صورت سؤال، $I=[2,3)$. می‌خواهیم دو تا عدد از این بازه حذف کنیم تا همسایگی محذوف شود. خب اولاً بازه بسته نباشد، پس $a=2$ را حذف کنیم. ثانیاً عددی را از بازهٔ $(2,3)$ حذف کنیم تا از همسایگی به همسایگی محذوف برسیم. با حذف هر عدد مانند b که $2<b<3$، به آرزویمان می‌رسیم.

$$2<b<3\xrightarrow{+a} a+2<a+b<a+3\xrightarrow{a=2}4<a+b<5$$

فقط گزینهٔ دوم بین ۴ و ۵ است!

۱۴۶۰ ۲ با توجه به شکل، $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$. پس:

$$\lim_{x\to1}f(x)-3\lim_{x\to-1}f(x)=2-3(1)=-1$$

۱۴۶۱ ۴ از روی شکل، می‌توانیم بگوییم $f(1)=2$، $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$. پس:

$$2f(1)+3\lim_{x\to1^+}f(x)-\lim_{x\to1^-}f(x)=2\times2+3\times3-1=12$$

۱۴۶۲ ۳ منظور سؤال، این است که حدهای چپ و راست داشته باشیم ولی با هم برابر نباشند. در گزینهٔ (۱)، در $x=a$ حد راست نداریم. در گزینهٔ (۴)، چپ و راست نداریم!

در گزینهٔ (۲)، هر دو را داریم و با هم مساوی‌اند.

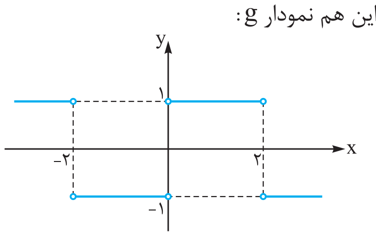
فقط گزینهٔ (۳)، خواستهٔ ما را تأمین می‌کند.

۱۴۶۳ ۱ شاید باورتان نشود، اما قصد داریم نمودار $g(x)$ را بکشیم!

$$g(x)=\frac{|f(x)|}{f(x)}=\begin{cases}\frac{f(x)}{f(x)}=1 & f(x)>0\\ \frac{-f(x)}{f(x)}=-1 & f(x)<0\end{cases}$$

یعنی هر جا نمودار f بالای محور xهاست $(f(x)>0)$، تابع g ثابت و مساوی ۱ می‌شود. هر جا نمودار f پایین محور xهاست $(f(x)<0)$، تابع g ثابت و مساوی -1 می‌شود. نمودار f، در بازه‌های $(-\infty,-2)$ و $(0,2)$ بالای محور xها و در بازه‌های $(-2,0)$ و $(2,+\infty)$ پایین محور xهاست.

خب بفرمایید، این هم نمودار g:



حالا می‌توانیم بگوییم:

$$\lim_{x\to2^+}g(x)-\lim_{x\to(-2)^-}g(x)=(-1)-1=-2$$

۱۴۶۴ ۲ برای حد راست در $x=۱$، از ضابطهٔ پایینی (مربوط به $x\geq ۱$) و برای حد چپ در $x=۱$، از ضابطهٔ بالایی (مربوط به $x<۱$) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+۲a)=۱+۲a$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-۱)=a-۱$$

سؤال گفته $\lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$ پس:

$$(۱+۲a)-(a-۱)=-۱\Rightarrow a=-۳$$

۱۴۶۵ ۴ برای حد چپ در $x=-۲$، از ضابطهٔ بالایی (مربوط به $x<-۲$) و برای حد راست در $x=-۲$، از ضابطهٔ پایینی (مربوط به $x>-۲$) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(x^۲+a)=۴+a$$
$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(۳x+۴)=۳(-۲)+۴=-۲$$

سؤال گفته حد چپ، معکوس حد راست است:

$$۴+a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۴-\frac{۱}{۲}=-۴/۵$$

۱۴۶۶ ۳ شرط وجود حد در $x=-۱$ این است که حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

از طرفی:

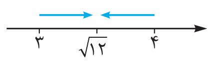
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(x+a)^۲=(-۱+a)^۲$$
$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲x+۱)=۲(-۱)+۱=-۱$$

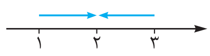
حالا دو مقدار به دست آمده را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(a-۱)^۲=-۱$$

عجب شد! تساوی بالا هیچ وقت برقرار نمی‌شود. چون $(a-۱)^۲$ همیشه نامنفی است و نمی‌تواند -۱ شود. خلاصه این‌که سر کار بودیم و مجموعه مقادیر a تهی است.

۱۴۶۷ ۴ وقتی به یک عدد نزدیک می‌شویم، با مقادیر غیرصحیح این کار را می‌کنیم! مثلاً وقتی می‌گوییم $x\to ۲$ یا $x\to\sqrt{۱۲}$، $x\notin\mathbb{Z}$ است.





پس هر وقت تابعی مثل $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in\mathbb{Z}\\ h(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ داشتیم، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(x)$، از ضابطهٔ $h(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)$$

در این‌جا هم از $۴x+۱$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)+\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)=(۴(۲)+۱)+(۴(\tfrac{۱}{۲})+۱)=۹+۳=۱۲$$

۱۴۶۸ ۳ وقتی به یک عدد نزدیک می‌شویم، این اتفاق هم با مقادیر گنگ و هم با مقادیر گویا رخ می‌دهد. چون در همسایگی محذوف هر عدد، بی‌شمار عدد گنگ و بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. پس هر وقت تابعی مثل $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in\mathbb{Q}\\ h(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ داشتیم، بدون آن‌که دست و پایمان را گم کنیم، می‌گوییم f در هیچ نقطه مثل a حد ندارد مگر آن‌که $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)$ باشد. در این سؤال هم می‌گوییم $f(x)$ فقط در نقطه‌ای مثل a حد دارد که $\lim_{x\to a}(x^۲+۱)=\lim_{x\to a}(۳x-\frac{۱}{x})$ باشد. یعنی $a^۲+۱=۳a-\frac{۱}{a}$. به ازای $a=\sqrt{۲}$، این خواسته تأمین نمی‌شود و به ازای $a=۱$، تأمین می‌شود:

$$۱^۲+۱=۳(۱)-\frac{۱}{۱}=۲$$

یعنی $\lim_{x\to\sqrt{۲}} f(x)$ موجود نیست و $\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$.

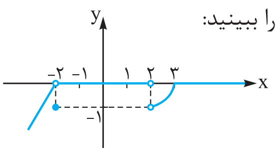
۱۴۶۹ ۴ تابع f فقط در نقاطی حد دارد که حد $\frac{۱}{x}$ و حد $x^۲-۲$ در آن نقاط با یکدیگر مساوی شود. از طرفی معادلهٔ $x^۲-۲=\frac{۱}{x}$ سه جواب دارد. در واقع با ضرب طرفین این معادله در x، به $x^۳-۲x-۱=۰$ می‌رسیم که خیلی راحت می‌فهمیم $x=-۱$ یک جواب آن است. با تقسیم $x^۳-۲x-۱$ بر $x+۱$، خارج قسمت $x^۲-x-۱$ به دست می‌آید و این عبارت هم دو ریشه دارد. بنابراین تابع مورد نظر در صورت سؤال، در ۳ نقطه حد دارد. منظورم نقاط $x=-۱$ و $x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ است.

۱۴۷۰ ۳ در $x=-۲$ و $x=۳$ حد نداریم، چون تابع f در هیچ همسایگی محذوفی از آن‌ها تعریف نشده است. در واقع، سمت چپ -۲ و سمت راست ۳، چیزی نداریم! در $x=۰$ حد نداریم، چون حد چپ و راست در این نقطه با هم مساوی نیستند ($\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۳$ و $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=-۱$). در $x=۲$ هم حاصل حد متناهی (عددی حقیقی) نیست و در نتیجه حد نداریم. تمام! شد ۴ نقطه.

۱۴۷۱ ۱ در حرکتی جسورانه، نمودار g را می‌کشیم. اول دقت کنیم که:

$$g(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{۲}=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x)}{۲}=۰ & f(x)\geq ۰\\[2mm] \dfrac{f(x)+f(x)}{۲}=f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

یعنی هر جا نمودار f بالای محور xها یا روی آن باشد، نمودار g خطی افقی روی محور xهاست و هر جا نمودار f پایین محور xها باشد، نمودار g همان نمودار f است. عجب وضعی شد! نمودار g را ببینید:



خب با توجه به نمودار، g فقط در $x=۲$ حد ندارد. در واقع، $\lim_{x\to ۲^-} g(x)=۰$ و $\lim_{x\to ۲^+} g(x)=-۱$. یعنی حد چپ و راست نامساوی‌اند.

۱۴۷۲ ۲ نمودار می‌گوید وقتی $x\to ۲$، $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شود و این اتفاق با مقادیر کم‌تر از ۳ می‌افتد. یعنی وقتی $x\to ۲$، $f(x)\to ۳^-$. پس:

$$\lim_{x\to ۲}[f(x)]=[۳^-]=۲$$

در مورد $[\lim_{x\to ۲} f(x)]$، دقت کنید که حاصل حد همیشه عددی مطلق است و می‌گوییم:

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=۳\Rightarrow[\lim_{x\to ۲}f(x)]=[۳]=۳$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر در صورت سؤال، می‌شود:

$$۲-۳=-۱$$

۱۴۷۳ ۲ وقتی $x\to ۰^+$، $f(x)$ به -۲ نزدیک می‌شود و این اتفاق با مقادیر بیشتر از -۲ رخ می‌دهد: $f(x)\to(-۲)^+$. در واقع، در همسایگی راست $x=۰$، $f(x)>-۲$ است و می‌توانیم بگوییم $\frac{۱}{f(x)}<-\frac{۱}{۲}$ در نتیجه $\frac{۲}{f(x)}<-۱$. چیزی که فهمیدیم، این است که وقتی $x\to ۰^+$، داریم:

$$\frac{۲}{f(x)}\to(-۱)^-$$

پس:

$$\lim_{x\to ۰^+}[\frac{۲}{f(x)}]=[(-۱)^-]=-۲$$

۱۴۷۴ ۱ وقتی $x\to ۲^+$، $[x]=۲$ و وقتی $x\to ۲^-$، $[x]=۱$ می‌شود.

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^+]$$
$$=(۲+a)(۲)=۴+۲a$$
$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^-]$$
$$=(۲+a)(۱)=۲+a$$

سؤال گفته $\lim_{x\to ۲^+}f(x)-\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۳$ باشد:

$$(۴+۲a)-(۲+a)=۳\Rightarrow a=۱$$

۱۴۷۵ ۲ باید حد چپ و راست در $x=۱$ موجود و با هم برابر باشند. از طرفی:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(a[x]+[x+۱])=a[۱^+]+[۲^+]=a(۱)+۲=a+۲$$
$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(a[x]+[x+۱])=a[۱^-]+[۲^-]=a(۰)+۱=۱$$

گفتیم با هم مساوی باشند:

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

۱۴۷۶ ۳ وقتی $x\to(-\frac{۱}{۲})^+$، $۲x\to(-۱)^+$ و داریم:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+}([x]+[۲x])=[(-\frac{۱}{۲})^+]+[(-۱)^+]=-۱-۱=-۲$$

وقتی $x\to(-\frac{۱}{۲})^-$، $۲x\to(-۱)^-$ و داریم:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}([x]+[۲x])=[(-\frac{۱}{۲})^-]+[(-۱)^-]=-۱-۲=-۳$$

حاصل جمع این دو، می‌شود -۵.

۱۴۷۷ ۱ وقتی $x\to ۴^+$، $[x]\to[۴^+]=۴$ و $\frac{\pi[x]}{۲}\to\frac{۴\pi}{۲}=۲\pi$، پس:

$$\lim_{x\to ۴^+}f(x)=\lim_{x\to ۴^+}(x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{۲})=۴-۴+\underbrace{\sin ۲\pi}_{۰}=۰$$

وقتی $x\to ۴^-$، $[x]\to[۴^-]=۳$ و $\frac{\pi[x]}{۲}\to\frac{۳\pi}{۲}$، پس:

$$\lim_{x\to ۴^-}f(x)=\lim_{x\to ۴^-}(x-[x]+\sin\frac{\pi[x]}{۲})=۴-۳+\underbrace{\sin\frac{۳\pi}{۲}}_{-۱}=۰$$

هر دو حد، صفر شد و تفاضل آن‌ها هم صفر می‌شود.

۱۴۷۸ ۳ یک راه این است که گزینه‌ها را امتحان کنیم، ولی ما این کار را نمی‌کنیم! در عوض، فرض می‌کنیم حد چپ $f(x)$ در نقطهٔ $x=k$، دو برابر حد راست آن در این نقطه باشد. اولین چیزی که باید به آن دقت کنیم، صحیح بودن k است: $k\in\mathbb{Z}$. چون در نقاط غیرصحیح، داخل براکت‌ها صحیح نمی‌شود و مشکلی نداریم. در واقع، در هر $x_۰\notin\mathbb{Z}$، حد چپ و راست با هم مساوی می‌شود. البته در گزینه‌ها هم عدد غیرصحیح نمی‌بینیم و این استدلال زیادی بود! کارمان را با k ادامه دهیم.

وقتی $x\to k^+$، $[x]\to[k^+]=k$. در این حالت، $x>k$ است و در نتیجه $-x<-k$. یعنی $(-x)\to(-k)^-$ و داریم:

$$[-x]\to[(-k)^-]=(-k)-۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to k^+}f(x)=۴k+۳(-k-۱)=k-۳$$

وقتی $x\to k^-$، $[x]\to[k^-]=k-۱$. در این حالت، $x<k$ است و در نتیجه $-x>-k$. یعنی $(-x)\to(-k)^+$ و داریم:

$$[-x]\to[(-k)^+]=-k$$

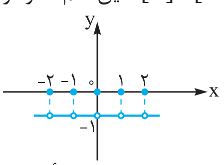
بنابراین:

$$\lim_{x\to k^-}f(x)=۴(k-۱)+۳(-k)=k-۴$$

سؤال می‌خواهد حد چپ ۲ برابر حد راست باشد:

$$k-۴=۲(k-۳)\Rightarrow k-۴=۲k-۶\Rightarrow k=۲$$

۱۴۷۹ ۳ یادمان هست که $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. این هم نمودار $f(x)$:



تابع f در همهٔ نقاط حد دارد و حد آن مساوی -۱ است. پس برای گزینهٔ سوم متأسفیم!

۱۴۸۰ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) موجود نیست. $|x|(x-۲)$ اطراف $x=۰$ منفی می‌شود و در واقع هیچ همسایگی محذوفی از $x=۰$ نداریم که $\sqrt{|x|(x-۲)}$ در آن تعریف شده باشد.

x		۰		۲	
$\lvert x\rvert(x-۲)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

۲) موجود نیست. وقتی $x\to ۱$، صورت کسر به سمت ۱ و مخرج آن به سمت صفر میل می‌کند. پس حق بدهید که حاصل حد، متناهی نشود!

۳) موجود نیست. در حالت $x \to 2^-$ به مشکل برمی‌خوریم. چون اگر $x<2$ باشد، $\sqrt{x-2}$ تعریف نشده خواهد بود. در واقع هیچ همسایگی محذوفی از $x=2$ نداریم که $\sqrt{x-2}$ در آن تعریف شده باشد.

۴) همه چی آرومه! حاصل حد هم می‌شود صفر.

۱۴۸۱ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) حد دارد. وقتی به عددی مثل a نزدیک می‌شویم، این اتفاق همیشه با مقادیر غیر صحیح می‌افتد. پس: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$

۲) حد دارد. وقتی $x\to1$، $\frac{\pi}{2}x \to \frac{\pi}{2}$ پس: $\sin\frac{\pi}{2}x \to \sin\frac{\pi}{2}=1$

همیشه $-1\le \sin x \le 1$ پس می‌توانیم بگوییم وقتی $x\to1$، $\sin\frac{\pi}{2}x$ با مقادیر کم‌تر از ۱ به آن نزدیک می‌شود: $\sin\frac{\pi}{2}x\to1^-$. بنابراین:

$$\lim_{x\to1} f(x)=[1^-]=0$$

۳) حد ندارد. در هر همسایگی محذوف $x=1$، $(x-1)^2(x-3)$ منفی و در نتیجه $\sqrt[6]{(x-1)^2(x-3)}$ تعریف نشده است.

x		1		3	
$(x-1)^2(x-3)$	$-$	0	$-$	0	$+$

۴) حد دارد. حد آن هم می‌شود ۱.

۱۴۸۲ ۴ موافقید اول دامنهٔ تابع را چک کنیم؟!

$$[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\le x<3$$

دامنهٔ تابع، $\mathbb{R}-[2,3)$ است. یعنی در هیچ همسایگی محذوفی از $x=2$ تعریف نشده (سمت راست ۲ مشکل دارد). پس $f(x)$ در $x=2$ حد ندارد.

۱۴۸۳ ۴ چون $x=6$ داخل براکت‌ها را صحیح می‌کند، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to6^+} f(x)=\lim_{x\to6^+}([\frac{x}{2}]+[\frac{x}{3}])=[3^+]+[2^+]=3+2=5$$

$$\lim_{x\to6^-} f(x)=\lim_{x\to6^-}([\frac{x}{2}]+[\frac{x}{3}])=[3^-]+[2^-]=2+1=3$$

حاصل جمع این دو، می‌شود $5+3=8$.

۱۴۸۴ ۳ وقتی $x\to(-\frac{1}{10})^-$، در واقع $x<-\frac{1}{10}$ است و با معکوس کردن طرفین، به $\frac{1}{x}>-10$ می‌رسیم. یعنی $\frac{1}{x}\to(-10)^+$. پس:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{10})^-}[\frac{1}{x}]=[(-10)^+]=-10$$

۱۴۸۵ ۳ وقتی $x\to(-\frac{1}{3})^+$، در واقع $x>-\frac{1}{3}$ است و $x^2<\frac{1}{9}$ می‌شود. پس $\frac{1}{x^2}>9$ و در نتیجه $-\frac{1}{x^2}<-9$. یعنی:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+}[\frac{-1}{x^2}]=[(-9)^-]=-10$$

۱۴۸۶ ۱ وقتی $x\to(\frac{1}{4})^-$، می‌توانیم بگوییم:

$$0<x<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x}>4 \Rightarrow \frac{2}{x}>8\Rightarrow -\frac{2}{x}<-8$$

یعنی $-\frac{2}{x}\to(-8)^-$ و داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{4})^-}[-\frac{2}{x}]=[(-8)^-]=-9$$

وقتی $x\to(-\frac{1}{3})^+$، می‌توانیم بگوییم:

$$-\frac{1}{3}<x<0 \xrightarrow{\times(-6)} 2>-6x$$

یعنی $-6x\to2^-$ و داریم:

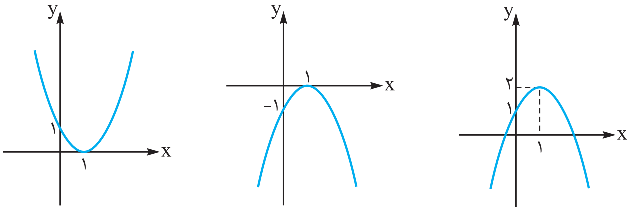
$$\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+}[-6x]=[2^-]=1$$

سؤال، تفاضل این‌ها را می‌خواهد: $-9-1=-10$

۱۴۸۷ ۲ ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=-(x^2-2x-1)=-((x-1)^2-2)=-(x-1)^2+2$$

حتی می‌توانیم نمودار آن را خیلی سریع بکشیم:



$f(x)$ $y=-(x-1)^2$ $y=(x-1)^2$

وقتی $x\to1$، $f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود، آن هم با مقادیر کم‌تر از ۲. در واقع، $f(x)\to2^-$. پس: $\lim\limits_{x\to1}[f(x)]=[2^-]=1$

در مورد $[\lim\limits_{x\to1} f(x)]$، دقت کنیم که حاصل حد مطلق است:

$$\lim_{x\to1}f(x)=2\Rightarrow[\lim_{x\to1}f(x)]=[2]=2$$

۱۴۸۸ ۲ وقتی $x\to0$، چه از سمت چپ و چه از سمت راست، $x^2\to0^+$.

پس: $\lim\limits_{x\to0}[\frac{1-x^2}{1+x^2}]=[\frac{1-0^+}{1+0^+}]=[\frac{1^-}{1^+}]$

1^- کوچک‌تر از ۱ و 1^+ بزرگ‌تر از ۱ است، پس $\frac{1^-}{1^+}$ کوچک‌تر از ۱ می‌شود:

$$[\frac{1^-}{1^+}]=[1^-]=0$$

۱۴۸۹ ۳ وقتی $x\to2^+$، داخل براکت به سمت ۵ می‌رود. اما باید ببینیم با مقادیر کم‌تر از ۵ این اتفاق می‌افتد یا با مقادیر بیشتر از ۵. یک راه خوب برای فهمیدن این موضوع، ظاهر کردن مخرج در صورت کسر و تفکیک آن است:

$$[\frac{2x+3}{x-1}]=[\frac{2(x-1)+5}{x-1}]=[2+\frac{5}{x-1}]=2+[\frac{5}{x-1}]$$

وقتی $x\to2^+$، $\frac{5}{x-1}\to\frac{5}{1^+}=5^-$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to2^+}[\frac{2x+3}{x-1}]=2+[5^-]=2+4=6$$

۱۴۹۰ ۱ این که مخرج کسر را در صورت آن ظاهر کنیم تا کسر تفکیک شود، خیلی کار خوبی است:

$$f(x)=[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}]=[\frac{۴(x^۲+۱)-۱}{x^۲+۱}]=[۴-\frac{۱}{x^۲+۱}]=۴+[\frac{-۱}{x^۲+۱}]$$

همیشه $x^۲\ge ۰$ پس $x^۲+۱\ge ۱$ و در نتیجه $۰<\frac{۱}{x^۲+۱}\le ۱$.

پس $-۱\le \frac{-۱}{x^۲+۱}<۰$ و داریم: $[\frac{-۱}{x^۲+۱}]=-۱\Rightarrow f(x)=۴+(-۱)=۳$

اصن یه وضی! تابع f ثابت از آب در آمد و در همهٔ نقاط حد دارد.

۱۴۹۱ ۱ وقتی $x\to ۱^-$، باید از ضابطهٔ بالایی (مربوط به $x<۱$) استفاده کنیم:

$f(x)=\sqrt{x}$

$$[\frac{f(x)+۱}{f^۲(x)}]=[\frac{f(x)}{f^۲(x)}+\frac{۱}{f^۲(x)}]=[\frac{۱}{f(x)}+\frac{۱}{f^۲(x)}]$$

$$=[\frac{۱}{\sqrt x}+\frac{۱}{(\sqrt x)^۲}]=[\frac{۱}{\sqrt x}+\frac{۱}{x}]$$

حالا حد می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۱^-}[\frac{۱}{\sqrt x}+\frac{۱}{x}]=[\frac{۱}{۱^-}+\frac{۱}{۱^-}]=[۱^++۱^+]=[۲^+]=۲$$

۱۴۹۲ ۱ اول ببینیم ۲ رادیان در کدام ناحیه از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. هر رادیان تقریباً ۵۷ درجه است، پس ۲ رادیان تقریباً ۱۱۴ درجه می‌شود که در ناحیهٔ دوم قرار می‌گیرد. یک جور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم: $\pi\simeq ۳/۱۴$ پس ۲ رادیان بین $\frac{\pi}{۲}$ و π رادیان قرار می‌گیرد، یعنی همان ناحیهٔ دوم! با این حساب، وقتی $x\to ۲$، $\cos x$ منفی است: $-۱<\cos x<۰$ و جزء صحیح آن ۱- می‌شود: $\lim_{x\to ۲}[\cos x]=-۱$

۱۴۹۳ ۳ وقتی $x\to\pi$، $\cos x$ به $\cos\pi=-۱$ میل می‌کند. اما همیشه $-۱\le\cos x\le ۱$ پس در هر دو حالت $x\to\pi^-$ و $x\to\pi^+$، $\cos x$ با مقادیر بیشتر از ۱- به آن میل می‌کند: $\cos x\to(-۱)^+$. یعنی:

$$-۱<\cos x\Rightarrow \frac{۱}{\cos x}<-۱\Rightarrow\frac{۱}{\cos x}\to(-۱)^-$$

پس:

$$\lim_{x\to\pi}[\frac{۱}{\cos x}]=[(-۱)^-]=-۲$$

۱۴۹۴ ۲ وقتی $x\to ۶^+$، $\frac{\pi}{x}$ به $\frac{\pi}{۶^+}=(\frac{\pi}{۶})^-$ میل می‌کند. در این صورت، عبارت داخل جزء صحیح به طرف $۴\sin^۲\frac{\pi}{۶}=۴(\frac{۱}{۲})^۲=۱$ می‌رود. باید ببینیم این عبارت، با مقادیر کم‌تر از ۱ به سمت آن می‌رود یا با مقادیر بیشتر از ۱.

نمودار $y=\sin x$ در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی، صعودی اکید است. یعنی با افزایش x، مقدار $\sin x$ هم زیاد می‌شود.

پس وقتی با $\frac{\pi}{x}\to(\frac{\pi}{۶})^-$ مواجهیم، می‌توانیم بگوییم:

$$\frac{\pi}{x}<\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{x}<\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{x}<\frac{۱}{۲}$$

با توجه به مثبت بودن $\sin\frac{\pi}{x}$، می‌توانیم با خیال راحت دو طرف را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin^۲\frac{\pi}{x}<\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴\sin^۲\frac{\pi}{x}<۱$$

یعنی وقتی $x\to ۶^+$، $۴\sin^۲\frac{\pi}{x}\to ۱^-$:

$$\lim_{x\to ۶^+}[۴\sin^۲\frac{\pi}{x}]=[۱^-]=۰$$

۱۴۹۵ ۳ وقتی $x\to\frac{\pi}{۸}$، داخل جزء صحیح به سمت $۲\sqrt۲\cos\frac{\pi}{۴}=۲\sqrt۲\times\frac{\sqrt۲}{۲}=۲$ می‌رود. باید ببینیم عبارت داخل جزء صحیح، با مقادیر کم‌تر از ۲ به سمت آن می‌رود یا با مقادیر بیشتر از ۲.

نمودار $y=\cos x$ در ناحیهٔ اول نزولی اکید است. یعنی با افزایش x، مقدار $\cos x$ کم می‌شود. پس وقتی $۰<x<\frac{\pi}{۴}$، $\cos x>\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt۲}{۲}$ و وقتی $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$، $\cos x<\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt۲}{۲}$. یعنی:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۸})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۸})^+}[۲\sqrt۲\cos ۲x]=[۲\sqrt۲(\frac{\sqrt۲}{۲})^-]=[۲^-]=۱$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۸})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۸})^-}[۲\sqrt۲\cos ۲x]=[۲\sqrt۲(\frac{\sqrt۲}{۲})^+]=[۲^+]=۲$$

حاصل جمع این دو، می‌شود ۳=۲+۱.

۱۴۹۶ ۱ ای کاش عبارت داخل جزء صحیح، ساده‌تر می‌شد!

خب کلاً $۱+\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha$ و $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$، پس:

$$\frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\cot\frac{x}{۲}$$

راحت شدیم! فهمیدیم $f(x)=[\cot\frac{x}{۲}]$. وقتی $x\to\frac{\pi}{۲}$، $\cot\frac{x}{۲}$ به $\cot\frac{\pi}{۴}=۱$ میل می‌کند. حالا باید ببینیم این اتفاق با مقادیر کم‌تر از ۱ رخ می‌دهد یا با مقادیر بیشتر از ۱. خب تابع $y=\cot x$ در هر بازه‌ای تعریف شده باشد، در آن بازه نزولی اکید است. یعنی:

$$x>\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\cot x<\underbrace{\cot\frac{\pi}{۴}}_{۱}$$

پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}[\cot\frac{x}{۲}]=[\cot(\frac{\pi}{۴})^+]=[۱^-]=۰$$

۱۴۹۷ ۱ از مثلثات، این کارها را بلدیم:

$$\sqrt۲(\sin x-\cos x)=۲(\underbrace{\frac{\sqrt۲}{۲}}_{\cos\frac{\pi}{۴}}\sin x-\underbrace{\frac{\sqrt۲}{۲}}_{\sin\frac{\pi}{۴}}\cos x)$$

$$=۲(\sin x\cos\frac{\pi}{۴}-\cos x\sin\frac{\pi}{۴})=۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

وقتی $x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+$، $(x-\frac{\pi}{۴})\to(\frac{\pi}{۲})^+$ و در نتیجه $\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ به $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ میل می‌کند. همیشه $-۱\le\sin x\le ۱$ پس این که می‌گوییم سینوس به ۱ میل می‌کند، منظورمان با مقادیر کم‌تر از ۱ است:

$$\sin(x-\frac{\pi}{۴})\to ۱^-$$

در واقع:

$$\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+}[\sqrt۲(\sin x-\cos x)]=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}[۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})]$$

$$=[۲(۱^-)]=[۲^-]=۱$$

۱۴۹۸ ۳ از مثلثات یادمان هست که:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=\frac{۲}{\sin ۲x}$$

وقتی $x\to\frac{۳\pi}{۴}$، داریم $۲x\to\frac{۳\pi}{۲}$ و در نتیجه می‌نویسیم $\sin ۲x\to -۱$.

همیشه $-۱\le\sin\alpha\le۱$ پس وقتی می‌گوییم $\sin ۲x$ به -۱ میل می‌کند، منظورمان با مقادیر بیشتر از -۱ است: $\sin ۲x\to(-۱)^+$

حالا: $-۱<\sin ۲x\Rightarrow\frac{۱}{\sin ۲x}<-۱\Rightarrow\frac{۲}{\sin ۲x}<-۲$

$$\Rightarrow\frac{۲}{\sin ۲x}\to(-۲)^-$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}[\tan x+\cot x]=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}[\frac{۲}{\sin ۲x}]=[(-۲)^-]=-۳$$

۱۴۹۹ ۳ اول تکلیف $[\sin(x-\frac{\pi}{۳})]$ را معلوم کنیم. وقتی $x\to(\frac{\pi}{۳})^+$، و $\sin(x-\frac{\pi}{۳})\to\sin ۰^+=۰^+$ که جزء صحیح آن می‌شود صفر. اما وقتی $x\to(\frac{\pi}{۳})^-$، $\sin(x-\frac{\pi}{۳})\to\sin ۰^-=۰^-$ که جزء صحیح آن می‌شود -۱.

دقت کنید که $\sin ۰^-$ سینوس کمانی در ربع چهارم است و در آن ناحیه سینوس منفی است. به همین خاطر، گفتیم $\sin ۰^-=۰^-$. حالا تکلیف $[\tan^۲ x]$ را معلوم کنیم. تانژانت، در هر بازه‌ای تعریف شده باشد، در آن بازه صعودی اکید است. مثلاً $\tan x$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ روند صعودی دارد. پس:

$$x\to(\frac{\pi}{۳})^+:x>\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\tan x>\tan\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\tan x>\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\tan^۲ x>۳\Rightarrow[\tan^۲ x]=[۳^+]=۳$$

$$x\to(\frac{\pi}{۳})^-:x<\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\tan x<\sqrt{۳}\Rightarrow\tan^۲ x<۳$$

$$\Rightarrow[\tan^۲ x]=[۳^-]=۲$$

حالا در مورد $f(x)=[\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x+[\tan^۲ x]$، داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}f(x)=(۰\times\cos\pi)+۳=۳$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^-}f(x)=(-۱\times\cos\pi)+۲=(-۱)(-۱)+۲=۳$$

حد چپ و راست، هر دو ۳ شدند. پس: $\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}f(x)=۳$

۱۵۰۰ ۱ اول تکلیف $[\cos\frac{x}{۲}]$ را معلوم کنیم. وقتی $x\to\pi$، $\frac{x}{۲}\to\frac{\pi}{۲}$ و $\cos\frac{x}{۲}$ به $\cos\frac{\pi}{۲}=۰$ میل می‌کند. اگر $x\to\pi^-$، آن‌گاه $\frac{x}{۲}\to(\frac{\pi}{۲})^-$. یعنی کمان در ناحیهٔ اول قرار می‌گیرد. جایی که کسینوس مثبت است:

$$\lim_{x\to\pi^-}[\cos\frac{x}{۲}]=[۰^+]=۰$$

اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $\frac{x}{۲}\to(\frac{\pi}{۲})^+$. یعنی کمان در ناحیهٔ دوم قرار می‌گیرد. جایی که کسینوس منفی است:

$$\lim_{x\to\pi^+}[\cos\frac{x}{۲}]=[۰^-]=-۱$$

برویم سراغ $[\sin ۲x]$. وقتی $x\to\pi$، $۲x\to ۲\pi$ و $\sin ۲x$ به $\sin ۲\pi=۰$ میل می‌کند. اگر $x\to\pi^-$، آن‌گاه $۲x\to(۲\pi)^-$. یعنی کمان در ناحیهٔ چهارم قرار می‌گیرد. جایی که سینوس منفی است:

$$\lim_{x\to\pi^-}[\sin ۲x]=[۰^-]=-۱$$

اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $۲x\to(۲\pi)^+$. یعنی کمان در ناحیهٔ اول قرار می‌گیرد. جایی که سینوس مثبت است:

$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin ۲x]=[۰^+]=۰$$

حالا در مورد $f(x)=\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}]-\cos x[\sin ۲x]$، می‌توانیم بگوییم:

$$\lim_{x\to\pi^-}f(x)=(\sin\frac{\pi}{۲})(۰)-(\cos\pi)(-۱)=۰-۱=-۱$$

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=(\sin\frac{\pi}{۲})(-۱)-(\cos\pi)(۰)=-۱-۰=-۱$$

حد چپ و راست، هر دو -۱ شدند. پس:

$$\lim_{x\to\pi}f(x)=-۱$$

۱۵۰۱ ۳ فرض کنیم $\lim_{x\to۱}f(x)=L$ باشد. در این صورت با توجه به قضیه‌های محترم حد، داریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۱\Rightarrow\frac{۲\lim_{x\to۱}f(x)-۱}{\lim_{x\to۱}f(x)+۱}=۱\Rightarrow\frac{۲L-۱}{L+۱}=۱$$

$$\Rightarrow ۲L-۱=L+۱\Rightarrow L=۲$$

یعنی:

$$\lim_{x\to۱}f(x)=۲$$

۱۵۰۲ ۳ به طور کلی جدول زیر را داریم:

وضعیت / تابع	f و g در a دارای حد هستند.	f در a دارای حد و g در a فاقد حد است.	g در a دارای حد و f در a فاقد حد است.	f و g هر دو در a فاقد حد هستند.
$f+g$	حد دارد.	حد ندارد.	حد ندارد.	معلوم نیست.
$f-g$	حد دارد.	حد ندارد.	حد ندارد.	معلوم نیست.
$f\times g$	حد دارد.	معلوم نیست	معلوم‌نیست	معلوم نیست.
$\frac{f}{g},\ \lim_{x\to a}g(x)\neq۰$	حد دارد.	معلوم نیست	حد ندارد.	معلوم نیست.
$\frac{g}{f},\ \lim_{x\to a}f(x)\neq۰$	حد دارد.	حد ندارد.	معلوم‌نیست.	معلوم نیست.