

به نام پروردگار مهربان

کنکور ۹۹

ویرایش جدید

# ریاضیات پایه و حسابان

دهم، یازدهم و دوازدهم **جامع کنکور**

• عباس اشرفی • وهاب تقی زاده

• علیرضا ندافزاده • شروین سیاحنیا

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



# فهرست

۷	فصل ۱: عبارتهای جبری (اتحادها)	
۱۷	فصل ۲: توانهای گویا (ریشه و رادیکال)	
۲۷	فصل ۳: نامعادله و تعیین علامت	
۳۷	فصل ۴: الگو و دنباله	
۵۳	فصل ۵: هندسه تحلیلی (خط)	
۶۵	فصل ۶: معادلات گویا و گنگ	
۷۳	فصل ۷: قدر مطلق و ویژگیهای آن	
۸۷	فصل ۸: جزء صحیح	
۹۹	فصل ۹: مثلثات (دهم، یازدهم)	
۱۳۱	فصل ۱۰: تابع (دهم، یازدهم)	
۱۶۳	فصل ۱۱: معادله و تابع درجه دو	
۱۸۱	فصل ۱۲: توابع نمایی و لگاریتمی	
۲۰۱	فصل ۱۳: حد و پیوستگی	
۲۲۸	فصل ۱۴: تابع (دوازدهم)	
۲۵۵	فصل ۱۵: مثلثات (دوازدهم)	
۲۸۱	فصل ۱۶: حدهای نامتناهی و حد دربی نهایت	
۳۲۹	فصل ۱۷: مشتق	
۳۷۷	فصل ۱۸: کاربردهای مشتق	

## اتحادهای

به جدول اتحادهای زیر توجه کنید:

ردیف	نام یا شهرت	اتحادهای	مثال
۱	مربع مجموع دوجمله‌ای	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$
۲	مربع تفاضل دوجمله‌ای	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(\sqrt{x}-y)^2 = x - 2\sqrt{x}y + y^2$
۳	مزدوج	$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$
۴	جمله مشترک	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	$(x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10$
۵	مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$(x+y-2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$
۶	مکعب مجموع دوجمله‌ای	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
۷	مکعب تفاضل دوجمله‌ای	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
۸	مجموع مکعب دوجمله‌ای	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$
۹	تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر)	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$27x^3 - y^3 = (3x-y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

ردیف	نام یا شهرت	اتحادهای فرعی	مثال
۱۰	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$	$(x+\frac{1}{x})^2 - (x-\frac{1}{x})^2 = 4$
۱۱	اتحاد فرعی مکعب مجموع دوجمله‌ای	$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$	$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x})$
۱۲	اتحاد فرعی مکعب تفاضل دوجمله‌ای	$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$	$x^3 - \frac{1}{x^3} = (x-\frac{1}{x})^3 + 3(x-\frac{1}{x})$
۱۳	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$	$9y^2 + 4 = (3y+2)^2 - 12y$
۱۴	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$	$9y^2 + 4 = (3y-2)^2 + 12y$

**مثال:** اگر  $4x^2 + 4xy + y^2 = 0$  باشد، حاصل  $\frac{x}{y}$  (با شرط  $y \neq 0$ ) را بیابید.

**پاسخ روش اول:** عبارت  $4x^2 + 4xy + y^2$  مربع مجموع دوجمله‌ای است.  $4x^2 + 4xy + y^2 = 0 \Rightarrow (2x+y)^2 = 0 \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow 2x=-y$

$$\frac{2x}{2y} = \frac{-y}{2y} \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$$

طرفین را بر  $2y$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x}{y} = \frac{-y}{-2y} = -\frac{1}{2}$$

**روش دوم:** بعد از به دست آوردن رابطه بین  $x$  و  $y$  یعنی  $y = -2x$ ، خواسته مسئله را محاسبه می‌کنیم:

دقت کنید که چون  $y$  مخالف صفر است، پس مقدار  $x$  نیز مخالف صفر بوده و می‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد.

**تست:** اگر  $x + \frac{1}{x} = 3$  باشد، آن‌گاه  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

**پاسخ (گزینه ۳):** روش اول این تست، یکی از مشهورترین سوالات در مورد اتحادهاست. در این‌گونه سوالات معمولاً حاصل ضرب دو جمله عبارت داده

شده، مقدار ثابتی است به عنوان مثال در این سؤال  $x(\frac{1}{x}) = 1$  است.



۴۴. حاصل  $(\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x})(\frac{9-x^2}{5x^2+7x-3})$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3-x}$  (۲)  $3-x$  (۳)  $\frac{1}{3+x}$  (۴)  $3+x$

۴۵. برای یکی کردن مخرج کسرهای  $A = \frac{2x-1}{x(x-1)}$  و  $B = \frac{2x+5}{(x^2-1)(x^2+2x^2)}$  صورت و مخرج کسر A در کدام عبارت باید ضرب شود؟

- (۱)  $x^2+4x^2+2x$  (۲)  $x^2+4x+2$  (۳)  $x^2+4x^2+2x^2$  (۴)  $(2x-1)(x^2+4x^2+2x)$

برای ۱۰۰٪

۴۶. اگر  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$  و  $x+y+z=6$  باشند، مقدار  $xyz$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۴۷. اگر  $x = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}$  باشد، حاصل  $x(x^2-2)$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $-\sqrt{2}$

۴۸. اتحاد  $(ax-y)^2 + (bx+cy)^2 = 6\Delta x^2 + 5y^2 + 2xy$ ، برای سه عدد  $a, b$  و  $c$  که  $b < c < 0$  برقرار است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۲

۴۹. اگر بدانیم  $a+b-c=1$  است، آن گاه از روابط زیر چند مورد صحیح است؟

- (الف)  $a^2 + b^2 - c^2 = 1 - 2ab + 2c$  (ب)  $a^2 - b^2 + c^2 = 1 + 2ac - 2b$   
 (پ)  $a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2ab + 2bc + 2ca$  (ت)  $a^2 + b^2 - c^2 = -1 - 2ab + 2a + 2b$   
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۰. اگر  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{5}$  باشد، حاصل  $\frac{x^2}{x^2+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{25}$  (۲)  $\frac{1}{24}$  (۳)  $\frac{1}{23}$  (۴)  $\frac{1}{22}$

۵۱. حاصل عبارت  $\frac{(1-x)^{-1}(1-\sqrt{x})^{-1}(1-\sqrt[4]{x})^{-1}}{(1+\sqrt{x})^2(1+\sqrt[4]{x})}$  کدام است؟ ( $x \geq 0, x \neq 1$ )

- (۱)  $1-x$  (۲)  $(1-x)^{-2}$  (۳)  $(1-\sqrt{x})^{-2}$  (۴)  $1-\sqrt{x}$

۵۲. اگر  $a+b+c=0$  باشد که در آن  $abc \neq 0$  است، حاصل  $L$  کدام است؟

- $L = \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2) + \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$   
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $abc$  (۴)  $a^2+b^2+c^2$

۵۳. چند مورد از عبارات زیر همواره صحیح است؟

- (الف)  $(x^2+2y+1)(x^2+4y^2+4x^2y-x^2-2y+1) = (x^2+2y)^2+1$   
 (ب)  $(x^2-2y+1)(x^2+4y^2+2x^2y-x^2-4y+1) = x^6 - (2y-1)^2$   
 (پ)  $(x^2-2y-1)(x^2+4y^2+2x^2y-2x^2-2y+1) = (x^2-1)^2 - 4y^2$   
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۴. حاصل عبارت  $\frac{x^2+y^2+z^2-3xyz}{x+y+z}$  به شرط  $x+y+z \neq 0$  برابر کدام است؟

- (۱)  $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$  (۲)  $\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(x-z)^2}{2} + \frac{(y-z)^2}{2}$   
 (۳)  $(x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2$  (۴)  $\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+z)^2}{2} + \frac{(y+z)^2}{2}$

۵۵. اگر  $1+x+2x^2-x^3 = 3+a(x-2)+b(x-2)^2-(x-2)^3$  باشد، آن گاه  $a+b$  کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) ۷

## توان‌های گویا



۷۳. اگر  $x$  عددی منفی باشد، ساده‌شده کسر  $\frac{\sqrt[5]{x^5} \times \sqrt[4]{x^8}}{\sqrt[7]{x^7}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $x$  (۲)  $-x$  (۳)  $-x^2$  (۴)

۷۴. به‌ازای کدام مقدار  $k$  عبارت  $\sqrt[3]{a^k a^4}$  برابر  $a$  است؟ ( $a > 0$ )

- ۱ (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)

۷۵. اگر  $x > 0$  و  $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[2]{4} = \sqrt[5]{x}$  باشد، مقدار  $\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{2x}$  کدام است؟

- ۲ (۱)  $1$  (۲)  $4$  (۳)  $6$  (۴)

(کانون فرهنگی آموزش)

۷۶. حاصل عبارت  $\sqrt[3]{19+8\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{3}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\sqrt{7}$  (۲)  $7$  (۳)  $\sqrt{13}$  (۴)  $13$

(ریاضی ۹۳)

۷۷. حاصل عبارت  $(\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \sqrt{2\sqrt{2}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $2$  (۳)  $1+\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

۷۸. اگر  $x$  عددی مثبت،  $a$  عدد گویایی مثبت و  $x^{\frac{5}{a}} = 2$  باشد، ریشه بیستم  $x$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\pm 2^{100}$  (۲)  $\pm 2^{50}$  (۳)  $\pm 2^{25}$  (۴)  $\pm 2^{10}$

۷۹. اگر  $\frac{(\sqrt{\sqrt{3}+1})^2 \times 27^{\frac{1}{3}} \times (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{(2 \times 2242)^{\frac{1}{8}}}$  برابر  $6^a$  باشد،  $a$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{1}{12}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{24}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۸۰. اگر  $a^{\sqrt{2}} = 16$  و  $b^{\sqrt{2}} = 81$  باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $8$  (۲)  $16$  (۳)  $64\sqrt{2}$  (۴)  $64\sqrt[4]{2}$

۸۱. در یک آزمایشگاه نوعی باکتری کشت داده می‌شود که در هر ساعت وزن آن‌ها دو برابر می‌شود. اگر در ساعت ۸ صبح وزن باکتری‌ها ۴ گرم باشد، در ساعت ۹:۴۵ وزن آن‌ها چند گرم می‌شود؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

- ۱ (۱)  $4\sqrt[4]{4}$  (۲)  $8\sqrt[4]{2}$  (۳)  $8\sqrt[4]{4}$  (۴)  $8\sqrt[4]{8}$

۸۲. معکوس عدد  $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\sqrt{2}+1}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{\sqrt{2}-1}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $2^{1-\sqrt{2}}$  (۲)  $2^{-(\sqrt{2}+1)}$  (۳)  $2^{\sqrt{2}+1}$  (۴)  $2^{\sqrt{2}-1}$

۸۳. مساحت کف راهروی مستطیل شکلی ۱۵ واحد مربع و طول آن  $\sqrt{27} + \sqrt{12}$  واحد طول است. عرض کف راهرو کدام است؟

- ۱ (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\sqrt{6}$

(کانون فرهنگی آموزش)

۸۴. حاصل عبارت  $A = \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}+3} + \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $-3$  (۲)  $-2\sqrt{2}$  (۳)  $-\sqrt{7}$  (۴)  $-2\sqrt{7}$

۸۵. در تساوی  $\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{x-4} = \frac{A}{x-4}$  عبارت  $A$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $3\sqrt{x}-1$  (۲)  $3\sqrt{x}+1$  (۳)  $3\sqrt{x}$  (۴)  $3\sqrt{x}+2$

۸۶. اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $n > 1$ ، حاصل عبارت  $B = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\sqrt{n-1}$  (۲)  $\sqrt{n}-1$  (۳)  $\sqrt{n}$  (۴)  $\sqrt{n}+1$

۸۷. اگر گویا شده کسر  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$  به‌صورت  $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(9+2\sqrt{4}+(\sqrt{4})^2)}{x}$  باشد  $x$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $27$  (۲)  $21$  (۳)  $25$  (۴)  $23$

(کانون فرهنگی آموزش)

۸۸. کسر  $\frac{1}{\sqrt[5]{-2\sqrt[3]{4}}}$  را در چه عددی ضرب کنیم تا حاصل برابر  $-2$  گردد؟

- ۱ (۱)  $\sqrt[5]{2}$  (۲)  $2\sqrt[5]{4}$  (۳)  $\sqrt[5]{16}$  (۴)  $\sqrt[5]{4}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (-3x+3)^5 = 0 \Rightarrow -3x+3=0 \Rightarrow x=1 \\ \Delta x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}(\Delta x - 2)(\Delta x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	1	2	$+\infty$
$(-3x+3)^5$	+	+	-	-	-
$\Delta x^2 - 12x + 4$	+	-	-	+	+
A	+	-	+	-	-

**تست:** علامت عبارت  $A = \frac{(x^2 + 3x - 4)^7}{(x-2)^{20}(x-3)^5}$  در بازه  $(a, b)$  مثبت است. حداکثر مقدار  $b-a$  کدام است؟

 $\Delta(4)$  $4(3)$  $3(2)$  $2(1)$ 

$$(x^2 + 3x - 4)^7 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

پاسخ **گزینه ۴** ریشه‌های عوامل کسر را می‌یابیم:

$$(x-2)^{20} = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$(x-3)^5 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	-4	1	2	3	$+\infty$
$(x^2+3x-4)^7$	+	-	+	+	+	+
$(x-2)^{20}$	+	+	+	+	+	+
$(x-3)^5$	-	-	-	-	-	+
A	-	+	-	-	-	+

با توجه به این که توان‌های ۷ و ۵ به ترتیب در تعیین علامت  $x^2 + 3x - 4$  و  $x - 3$  تأثیری ندارند و علامت عبارت  $(x-2)^{20}$  همواره نامنفی است، جدول تعیین علامت آن را رسم می‌کنیم:

عبارت در بازه  $(-4, 1)$  مثبت است، بنابراین حداکثر مقدار  $b-a$  برابر  $5 - (-4) = 1$  است.

### یک گام فراتر: (تعیین علامت تستی)

عبارتهایی به صورت  $(x-x_1)^{a_1}$  و  $|x-x_2|$  را در روش تستی عبارات بی‌تأثیر و سایر عبارتهای جبری را عبارات اثرگذار می‌نامیم. برای استفاده از تعیین علامت تستی، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- ۱) عبارات را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و ریشه عبارات موجود را می‌یابیم.
- ۲) ریشه‌ها را به صورت صعودی در جدول تعیین علامت یک‌سطری می‌نویسیم.
- ۳) علامت جملات پرتوان عبارتهای اثرگذار را تعیین می‌کنیم.
- ۴) علامت پیدا شده را در اولین ستون از سمت راست جدول تعیین علامت می‌گذاریم.
- ۵) از سمت راست به چپ برمی‌گردیم در عبور از هر ستون، اگر ریشه، مربوط به عبارتهای بی‌تأثیر باشد، علامت عوض نمی‌شود و اگر ریشه، مربوط به عبارتهای اثرگذار باشد، علامت عوض می‌شود.

**مثال:** عبارت  $A = \frac{(x^2 + x - 2)^4 (x^2 - 9)^7}{(x-1)^8 (x+5)^2 |x-4|}$  را به روش تستی تعیین علامت کنید.

$$A = \frac{(x+2)^4 (x-1)^4 (x-3)^7 (x+3)^7}{(x-1)^8 (x+5)^2 |x-4|} = \frac{(x+2)^4 (x-3)^7 (x+3)^7}{(x-1)^4 (x+5)^2 |x-4|}$$

پاسخ ۱) عبارت را ساده و ریشه‌ها را می‌یابیم:

عبارتهای  $(x+2)^4$ ،  $(x-1)^4$  و  $|x-4|$  بی‌تأثیر و عبارتهای  $(x+3)^7$ ،  $(x-3)^7$  و  $(x+5)^2$  تأثیرگذارند. ریشه‌های این عبارتها به ترتیب زیر هستند:

۲) ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم. برای ریشه‌های صورت، صفر و برای ریشه‌های مخرج، تعریف‌نشده (تن) می‌گذاریم:

x	$-\infty$	-5	-3	-2	1	3	4	$+\infty$
A								

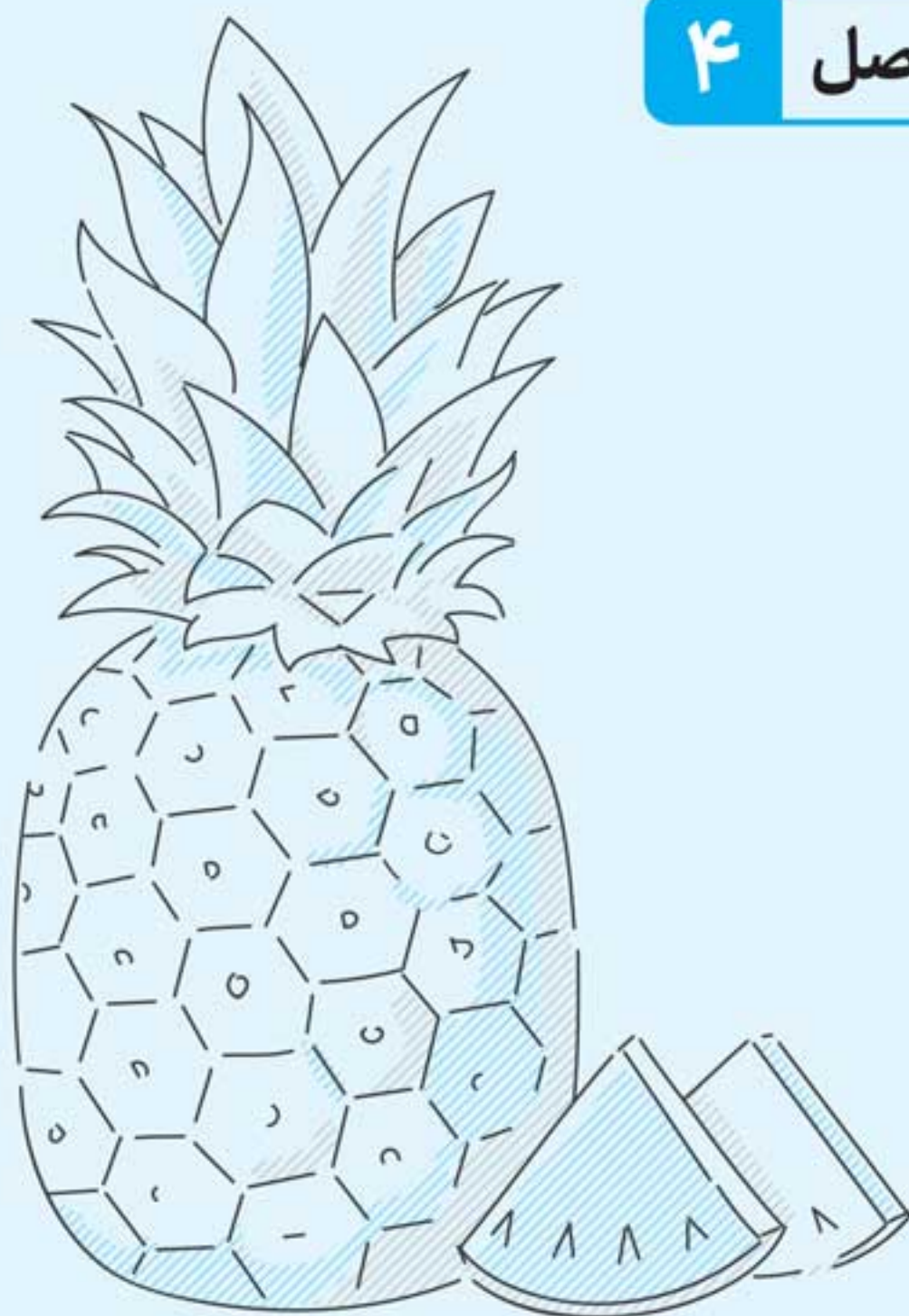
۳) علامت جمله‌های پرتوان عبارتهای اثرگذار را تعیین می‌کنیم:

$$\text{جمله پرتوان عبارات اثرگذار} = \frac{x^7 \times x^7}{x^4} = +x^{11}$$

علامت این جمله، مثبت است.

۴) جدول تعیین علامت تستی را رسم می‌کنیم و علامت مثبت را (که در قسمت قبل یافتیم) در اولین ستون از سمت راست جدول می‌گذاریم:

x	$-\infty$	-5	-3	-2	1	3	4	$+\infty$
A								+



## الگو و دنباله

این فصل با بررسی الگوها و نحوه محاسبه جمله  $n$  ام آنها آغاز می‌شود، در ادامه دنباله حسابی و مجموع جملات آن مطرح می‌شود و در انتها به دنباله هندسی و مجموع آن ختم می‌شود.

در کتاب‌های نظام جدید به مبحث الگوها توجه بیشتری شده است؛ به همین دلیل، ما نیز در این کتاب توجه ویژه‌ای به این مبحث داریم.


$$a_2 \times a_4 \times a_6 \times a_8 \times a_{10} \times a_{12} \times a_{14} = (a_8)^6 = (2\sqrt{2})^6 = 64 \times 27 = 1728$$

پس حاصل عبارت به صورت مقابل درمی آید:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(a_8)^2}_{(a_8)^2}}_{(a_8)^2}}_{(a_8)^2}$$

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

**نکته:** قدرنسبت دنباله‌ای که پس از درج  $m$  واسطه هندسی بین دو عدد  $a$  و  $b$  ایجاد می‌شود عبارت است از:

دو طلبان فرمول گریز  می‌تونن این فرمول رو حفظ نکنن و به جای آن  $m+2$  جمله از یک دنباله هندسی با جملات اول و آخر  $a$  و  $b$  بسازن.

**تست:** بین اعداد ۶ و ۴۸ دو عدد چنان قرار داده‌ایم به طوری که چهار عدد حاصل، تشکیل دنباله هندسی بدهند. مجموع این دو واسطه هندسی کدام است؟

- ۲۴ (۱)      ۳۶ (۲)      ۳۰ (۳)      ۶۰ (۴)


پاسخ **گزینه ۲** روش اول به کمک فرمول درج  $m$  واسطه هندسی بین  $a$  و  $b$  مقدار  $q$  را محاسبه می‌کنیم:

$$q^{m+1} = \frac{b}{a} \xrightarrow{\substack{b=48 \\ a=6}} q^{2+1} = \frac{48}{6} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 6 & & 12 & & 24 & & 48 \end{array}$$

با توجه به  $q = 2$  واسطه‌ها را می‌یابیم:

مجموع دو واسطه هندسی درج شده  $12 + 24 = 36$  است.

روش دوم (مخصوص فرمول گریزان) 

این دنباله، ۴ جمله دارد که جمله اول آن ۶ و جمله چهارم آن ۴۸ است.  $\begin{cases} a_4 = a_1 q^3 = 48 \\ a_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow a_1 q^3 = 48 \Rightarrow 6q^3 = 48 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

به کمک جمله اول و قدرنسبت، جمله‌های دوم و سوم به ترتیب ۱۲ و ۲۴ هستند که مجموعشان برابر ۳۶ است.

**نکته:** اگر رابطه‌ای در مورد تعداد فردی از جملات یک دنباله هندسی به ما بدهند، بهتر است جمله وسط را  $a$  و بقیه جمله‌ها را به کمک ضرب و

تقسیم بر  $q$  بسازیم. مانند  $aq, a, \frac{a}{q}$ .

اگر جمله‌های دنباله هندسی را در عددی ثابت و غیرصفر ضرب کنیم، دنباله هندسی جدیدی با قدرنسبت دنباله قبلی ساخته می‌شود.

اگر جمله‌های یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $q$  را به توان  $k$  برسانیم، دنباله هندسی جدیدی به وجود می‌آید که جمله اول آن  $a_1^k$  و قدرنسبت آن  $q^k$  است.

**یک گام فراتر:** اگر  $a_n, a_m, a_k$  از یک دنباله حسابی، خود تشکیل دنباله هندسی بدهند، قدرنسبت دنباله هندسی  $q = \frac{k-m}{m-n}$  است. ( $k > m > n$ )

**تست:** اگر جملات پنجم، هفتم و یازدهم از یک دنباله حسابی، جملات متوالی از دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- $\sqrt{2}$  (۱)       $\frac{2}{5}$  (۲)       $\frac{3}{2}$  (۳)      ۲ (۴)

$$q = \frac{k-m}{m-n} = \frac{11-7}{7-5} = \frac{4}{2} = 2$$

پاسخ **گزینه ۴** روش اول به کمک نکته گفته شده داریم:

روش دوم (مخصوص فرمول گریزان) جملات  $a_5 = a_1 + 4d, a_7 = a_1 + 6d, a_{11} = a_1 + 10d$  جملات متوالی یک دنباله هندسی اند، پس واسطه

$$(a_7)^2 = a_5 \times a_{11} \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 4d)(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 40d^2$$

هندسی  $a_5$  و  $a_{11}$  است.

$$\Rightarrow 2a_1d + 4d^2 = 0 \Rightarrow 2d(a_1 + 2d) = 0 \Rightarrow a_1 = -2d$$

$$q = \frac{a_7}{a_5} = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 4d} = \frac{-2d + 6d}{-2d + 4d} = \frac{4d}{2d} = 2$$

قدرنسبت دنباله هندسی را محاسبه می‌کنیم:

### مجموع جملات دنباله هندسی

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

برای یافتن مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی با قدرنسبت  $q$  و جمله اول  $a_1$  می‌توان از فرمول روبه‌رو استفاده نمود:

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1 - (a_1q^{n-1})q}{1-q} = \frac{a_1 - a_n \times q}{1-q}$$

با ساده کردن فرمول بالا می‌توان گفت: (با فرض این که جمله  $n$  ام باشد.)

**تست:** حاصل  $\frac{2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}}{2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-10}}$  کدام است؟

- ۴۰۹۶ (۱)      ۲۰۴۸ (۲)      ۵۱۲ (۳)      ۱۰۲۴ (۴)

پاسخ **گزینه ۲** دنباله  $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$  یک دنباله هندسی با قدرنسبت  $q = 2$  است و مجموع ده جمله آن برابر می‌شود با:

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2 \times 1024 = 2048$$



**تست:** زاویه بین دو خط  $y = -3x - 5$  و  $y = 2x - 1$  کدام است؟

$\frac{\pi}{6}$  (۴)

$\frac{\pi}{3}$  (۳)

$\frac{\pi}{4}$  (۲)

$\frac{\pi}{2}$  (۱)

$$\tan \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \times (-3)} \right| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

پاسخ **گزینه ۲** شیب‌های دو خط،  $m = 2$  و  $m' = -3$  هستند، پس:

**فاصله نقطه از خط**

فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $d: ax + by + c = 0$  به معادله برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



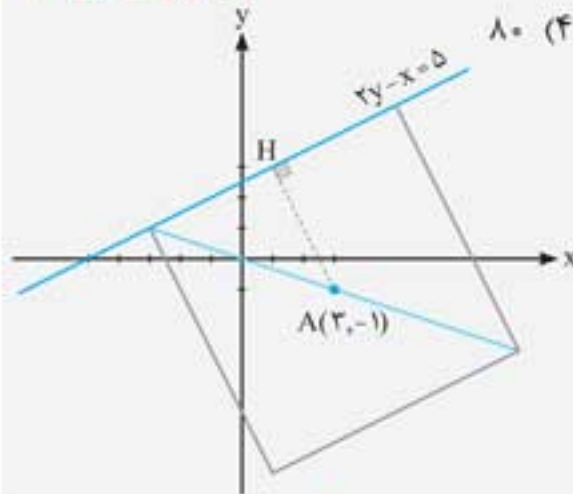
**تذکره:** فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط افقی  $y = k$  برابر  $AH = |k - y_0|$  و فاصله آن از خط قائم  $x = c$  برابر  $AH = |c - x_0|$  است.

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**توجه:** برای یافتن کوتاه‌ترین فاصله نقاط خط  $ax + by + c = 0$  از نقطه  $A(x_0, y_0)$  از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

**تست:** نقطه  $(3, -1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط  $2y - x = 5$  است. مساحت این مربع کدام است؟

(تجربی خارج ۹۳)



۷۵ (۳)

۴۵ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ **گزینه ۴** (این موضوع خارج از مباحث مطرح شده در کنکور رشته ریاضی در دوره آموزشی قبلی بود به همین دلیل از سوالات کنکور رشته تجربی استفاده کرده‌ایم.)

وسط قطر مربع، مرکز مربع است. فاصله نقطه  $A(3, -1)$  را از خط  $x - 2y + 5 = 0$  محاسبه می‌کنیم:

$$AH = \frac{|x_A - 2y_A + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 - 2(-1) + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

مطابق شکل این فاصله، نصف طول ضلع مربع است، بنابراین طول ضلع مربع  $4\sqrt{5}$  و مساحت  $S = (4\sqrt{5})^2 = 80$  مربع است.

**فاصله دو خط موازی**

فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر است با:

$$AH = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



**تست:** دو خط در صفحه مختصات از خط  $y = x$  به فاصله ۲ واحدی قرار دارند. یکی از آن‌ها محور طول‌ها را در قسمت مثبت آن قطع می‌کند. طول محل برخورد آن کدام است؟

$4\sqrt{2}$  (۴)

$2\sqrt{2}$  (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

پاسخ **گزینه ۳** روش اول فرض کنیم معادله دو خطی که از خط  $y - x = 0$  به فاصله ۲ واحدی قرار دارند به صورت  $y - x + k = 0$  باشند، پس:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ y - x + k = 0 \end{cases} \xrightarrow{a=-1, b=1, c=0, c'=k} d = \frac{|0 - k|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|-k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$$

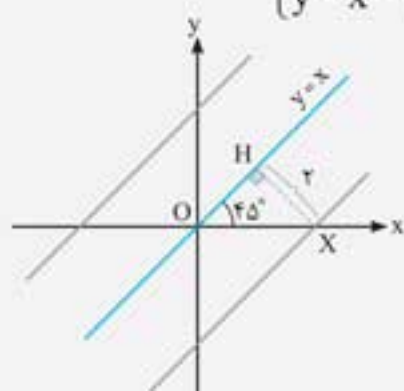
معادله خط‌ها را بازنویسی می‌کنیم:

$$y - x + k = 0 \Rightarrow \begin{cases} y - x + 2\sqrt{2} = 0 \xrightarrow{y=0} x = 2\sqrt{2} \\ y - x - 2\sqrt{2} = 0 \xrightarrow{y=0} x = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

با توجه به مثبت بودن طول محل برخورد،  $x = 2\sqrt{2}$  قابل قبول است.

روش دوم

**استراتژی حل:** شیب خط  $y = x$  برابر یک است، پس زاویه‌ای که خط با محور طول‌ها می‌سازد  $45^\circ$  است.



بنابراین مثلث  $OHX$  متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

$$OH^2 + HX^2 = OX^2 \Rightarrow 2^2 + 2^2 = OX^2 \Rightarrow OX = 2\sqrt{2}$$

طبق قاعده فیثاغورس داریم:

## معادلات و نامعادلات قدرمطلقى

### معادلات قدرمطلقى

جواب معادله  $|f(x)| = |g(x)|$ ، همان جواب‌های دو معادله  $f(x) = g(x)$  و  $f(x) = -g(x)$  هستند. به معادلاتی نظیر این معادله که شامل عبارت قدرمطلق هستند، معادلات قدرمطلقى می‌گویند.

**مثال:** معادله  $|1-3x| = |x-2|$  را حل کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

**پاسخ:** اگر دو عبارت قدرمطلقى با هم برابر باشند یا مقادیر داخل آن‌ها با هم برابرند یا قرینه یکدیگر هستند.

$$|1-3x| = |x-2| \Rightarrow \begin{cases} 1-3x = x-2 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \\ 1-3x = -(x-2) \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

**مثال:** معادله  $2x - \frac{x}{|x|} = 3$  را حل کنید.

**پاسخ:** معادله را به کمک تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق حل می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline x & - & 0 & + \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{x}{+x} = 3 ; x > 0 \\ 2x - \frac{x}{-x} = 3 ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 ; x > 0 \\ 2x + 1 = 3 ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 ; x > 0 \\ x = 1 ; x < 0 \end{cases}$$

تنها ریشه قابل قبول معادله  $x = 2$  است.

**تست:** معادله  $||3x-1|-4|-6=0$  چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

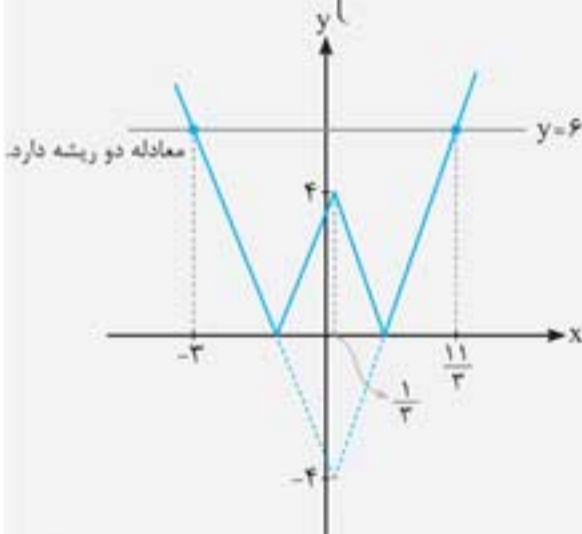
صفر (۱)

**پاسخ (گزینه ۳):** روش اول  $-6$  را به سمت راست معادله انتقال می‌دهیم، سپس از ویژگی‌های قدرمطلق استفاده می‌کنیم:

$$||3x-1|-4|=6 \Rightarrow \begin{cases} |3x-1|-4 = -6 \Rightarrow |3x-1| = -2 \text{ غیرممکن} \\ |3x-1|-4 = 6 \Rightarrow |3x-1| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1 = 10 \Rightarrow x = \frac{11}{3} \\ 3x-1 = -10 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

روش دوم به کمک رسم تابع  $f(x) = ||3x-1|-4|$  و خط  $y = 6$  تعداد نقاط برخورد آن‌ها (جواب معادله) را می‌یابیم.

طول نقاط برخورد، همان ریشه‌های معادله  $f(x) = ||3x-1|-4|$  هستند.



**تست:** مجموع ریشه‌های معادله  $2|x| + |x-1| = 3$  کدام است؟

$\frac{4}{3}$  (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

**پاسخ (گزینه ۲):** عبارات داخل قدرمطلق را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
x-1	-	-	0	+
	$-2x-x+1=3$	$2x-x+1=3$	$2x+x-1=3$	
	$x = -\frac{2}{3} \in (-\infty, 0)$	$x = 2 \notin [0, 1]$	$x = \frac{4}{3} \in (1, +\infty)$	
	قابل قبول	غیر قابل قبول	قابل قبول	

این معادله ۲ ریشه قابل قبول دارد که  $x = -\frac{2}{3}$  و  $x = \frac{4}{3}$  هستند. مجموع ریشه‌ها برابر  $\frac{2}{3}$  است.

**نامعادلات قدرمطلق**

نامعادلات قدرمطلق با استفاده از برخی از ویژگی‌هایشان، به خصوص دو ویژگی زیر راحت‌تر حل می‌شوند ( $k \in \mathbb{R} \geq 0$ ):  
(منظور از  $\mathbb{R} \geq 0$ ، صفر و تمام اعداد حقیقی مثبت است.)

$$\begin{cases} |u| \leq k \Leftrightarrow -k \leq u \leq k \\ |u| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq k \\ u \leq -k \end{cases} \end{cases}$$



(مشابه تمرین کتاب درسی)

**مثال:** مجموعه جواب  $|1 - \frac{x}{3}| < \frac{2}{3}$  را روی محور طول‌ها نشان دهید.

پاسخ بهتر است با استفاده از رابطه  $|x - y| = |y - x|$  نامعادله را به شکل  $|\frac{x}{3} - 1| < \frac{2}{3}$  در بیاوریم تا ضریب  $x$  مثبت شود.

$$|\frac{x}{3} - 1| < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} < \frac{x}{3} - 1 < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{x}{3} < \frac{5}{3} \Rightarrow 1 < x < 5$$



**تست:** مجموعه جواب نامعادله  $(|x - 2| + 1)(|x - 2| - 3) < 0$  بازه  $(a, b)$  است. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

پاسخ **گزینه ۴** عبارت  $|x - 2| + 1$  همواره مثبت است، بنابراین در نامعادله تأثیری ندارد.

$$|x - 2| - 3 < 0 \Rightarrow |x - 2| < 3 \Rightarrow -3 < x - 2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow b - a = 6$$

**یافتن نامعادله قدرمطلق از روی بازه**

برای تبدیل بازه  $(a, b)$  به نامعادله قدرمطلق باید:

- ۱) وسط بازه  $(a, b)$  را بیابیم:  $\frac{a+b}{2}$  وسط بازه
- ۲) نصف طول بازه  $(a, b)$  را بیابیم:  $\frac{b-a}{2}$  نصف طول بازه
- ۳) نامعادله را بنویسیم:  $|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$

**مثال:** بازه  $(-2, 3)$  را به صورت نامعادله قدرمطلق بنویسید.

- ۱) پاسخ **۱** وسط بازه  $(-2, 3)$  را می‌یابیم:  $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$  وسط بازه
- ۲) نصف طول بازه  $(-2, 3)$  را می‌یابیم:  $\frac{3 - (-2)}{2} = \frac{5}{2}$  نصف طول بازه
- ۳) نامعادله را می‌نویسیم:  $|x - \frac{1}{2}| < \frac{5}{2} \xrightarrow{\times 2} |2x - 1| < 5$

**تذکره**

- ۱) اگر بازه، بسته باشد، نامساوی به صورت کوچک‌تر یا مساوی درمی‌آید.
- ۲) برای تبدیل مجموعه  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  یا  $\mathbb{R} - [a, b]$  به نامعادله قدرمطلق، وسط و نصف طول بازه را می‌یابیم و نامعادله را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$[a, b] \Rightarrow |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$|x - \frac{a+b}{2}| > \frac{b-a}{2}$$

**تست:** اگر مجموعه جواب نامعادله  $|ax + b| > 3$  به صورت  $\mathbb{R} - [-2, 1]$  باشد،  $a + b$  کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

پاسخ **گزینه ۳** وسط بازه و نصف طول بازه  $[-2, 1]$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{وسط بازه} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \text{نصف طول بازه} = \frac{1 - (-2)}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow |x - (-\frac{1}{2})| > \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} |2x + 1| > 3$$

$$\begin{cases} ax + b = 2x + 1 \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow a + b = 3 \\ ax + b = -(2x + 1) \Rightarrow a = -2, b = -1 \Rightarrow a + b = -3 \end{cases}$$

در نتیجه  $|ax + b| = |2x + 1|$ . پس:

**تست:** کدام بازه مجموعه جواب نامعادله  $|\frac{x+1}{2x-3}| > 2$  را نشان می‌دهد؟

- ۱)  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$       ۲)  $(1, \frac{3}{2})$       ۳)  $(1, \frac{5}{2})$       ۴)  $(1, \frac{5}{2}) - \{\frac{3}{2}\}$

## مفهوم جزء صحیح یا براکت

اگر از شما بپرسند که چند سالتونه؟ در اکثر موارد، ما بخش صحیح سنمان را مطرح می‌کنیم. برای نمونه کسی که سنش ۱۷ سال و هشت ماه باشد، می‌گوید ۱۷ ساله هستم. در واقع این کار را در ریاضی توسط جزء صحیح (براکت) انجام می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیشتر از  $x$  را براکت یا جزء صحیح آن می‌نامیم و به صورت  $[x]$  نشان می‌دهیم. برای نمونه:

$$[18/3]=18, [4/99]=4, [-7/1]=-8, [-\sqrt{3}]=-2, [-\pi]=-4$$

به بیان ریاضی داریم:

$$[A]=n \Leftrightarrow n \leq A < n+1 \quad n \text{ عددی صحیح و } [A]=n \text{ است اگر و تنها اگر } A \text{ عددی بزرگ‌تر یا مساوی } n \text{ و کمتر از } n+1 \text{ باشد.}$$

📌 **تست:** مجموعه جواب معادله  $|\frac{3x-1}{5}|-2=0$  برابر است با:

(۱)  $[\frac{1}{3}, 5)$       (۲)  $[\frac{11}{3}, \frac{17}{3})$       (۳)  $[\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$       (۴)  $(4, 5)$

پاسخ **گزینه ۳** در تساوی داده شده عدد ۲ را به سمت راست انتقال می‌دهیم در نتیجه معادله به صورت  $|\frac{3x-1}{5}|=2$  تبدیل می‌شود لذا عبارت درون

$$2 \leq \frac{3x-1}{5} < 3 \xrightarrow{\times 5} 10 \leq 3x-1 < 15 \xrightarrow{+1} \frac{11}{3} \leq x < \frac{16}{3}$$

براکت باید بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و کمتر از ۳ باشد، پس:

📌 مقدار عبارت  $[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\dots+[\sqrt{25}]$  برابر است با:

(۱) ۷۳      (۲) ۷۴      (۳) ۷۵      (۴) ۷۶

پاسخ **گزینه ۲** می‌دانیم که  $\sqrt{2} \approx 1/4$  و  $\sqrt{3} \approx 1/7$  در نتیجه:

$$[\sqrt{2}]=[\sqrt{3}]=1$$

برای محاسبه بقیه عبارت‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:  $4 \leq x < 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}]=2 \Rightarrow [\sqrt{4}]=[\sqrt{5}]=\dots=[\sqrt{8}]=2$

$$9 \leq x < 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}]=3 \Rightarrow [\sqrt{9}]=[\sqrt{10}]=\dots=[\sqrt{15}]=3$$

$$16 \leq x < 25 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}]=4 \Rightarrow [\sqrt{16}]=[\sqrt{17}]=\dots=[\sqrt{24}]=4$$

$$[\sqrt{25}]=5$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\dots+[\sqrt{25}]=1+1+\underbrace{2+\dots+2}_{[\sqrt{4}]}+\underbrace{2+\dots+2}_{[\sqrt{8}]}+\underbrace{3+\dots+3}_{[\sqrt{9}]}+\underbrace{3+\dots+3}_{[\sqrt{15}]}+\underbrace{4+\dots+4}_{[\sqrt{16}]}+\underbrace{4+\dots+4}_{[\sqrt{24}]}+\underbrace{5}_{[\sqrt{25}]}=2+(8-4+1) \times 2+(15-9+1) \times 3+(24-16+1) \times 4+5=2+10+21+36+5=74$$

📌 هرگاه  $x^2 - 3x + 2 < 0$  باشد، در این صورت  $[x^2]$  چند مقداری است؟

(۱) ۱      (۲) ۳      (۳) صفر      (۴) ۲

پاسخ **گزینه ۲** ابتدا با حل نامعادله داده شده حدود تغییرات  $x$  را می‌یابیم و سپس عبارت داخل جزء صحیح  $(x^2)$  را می‌سازیم:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{توان}} 1 < x^2 < 4$$

از آن جایی که تغییرات  $(x^2)$  بین دو عدد صحیح متوالی نیست برای محاسبه  $[x^2]$  داریم:

$$\begin{cases} 1 < x^2 < 2 \Rightarrow [x^2]=1 \\ 2 \leq x^2 < 3 \Rightarrow [x^2]=2 \\ 3 \leq x^2 < 4 \Rightarrow [x^2]=3 \end{cases}$$

بنابراین  $[x^2]$  سه مقداری است.

📌 مجموعه جواب معادله  $|x|^2 - |x| = 12$  به صورت  $[a, b) \cup [c, d)$  است. حاصل  $a+b+c+d$  برابر است با:

(۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۴

پاسخ **گزینه ۴** معادله داده شده، یک معادله درجه ۲ است که مجهول آن  $|x|$  بوده و با استفاده از اتحاد جمله مشترک به صورت زیر تجزیه و حل می‌شود:

$$|x|^2 - |x| - 12 = 0 \Rightarrow (|x|-4)(|x|+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} [x]=4 \Rightarrow 4 \leq x < 5 \\ [x]=-3 \Rightarrow -3 \leq x < -2 \end{cases}$$

$$a+b+c+d = (-3) + (-2) + 4 + 5 = 4$$

بنابراین مجموعه جواب برابر  $[-3, -2) \cup [4, 5)$  است:

**تست:** اگر  $[\frac{x}{3}] - [-\frac{x}{3}] = 7$  باشد، مجموع مقادیر ممکن برای  $[\frac{x}{3}]$  برابر کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ **گزینه ۲** برای ساده کردن  $[\frac{x}{3}]$  دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\textcircled{1} \frac{x}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{معادله: } [\frac{x}{3}] - [-\frac{x}{3}] = 7 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 7 \xrightarrow{\times 3} x + x = 21 \Rightarrow 2x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{2} = 10.5$$

این جواب غیرقابل قبول است، زیرا در شرط اولیه  $\frac{x}{3} \in \mathbb{Z}$  صدق نمی‌کند.

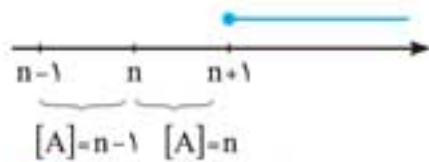
$$\textcircled{2} \frac{x}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{معادله: } [\frac{x}{3}] - [-\frac{x}{3}] = 7 \Rightarrow [\frac{x}{3}] - (-[\frac{x}{3}] - 1) = 7$$

$$\Rightarrow 2[\frac{x}{3}] = 6 \xrightarrow{+2} [\frac{x}{3}] = 3 \xrightarrow{\frac{x}{3} \notin \mathbb{Z}} 3 < \frac{x}{3} < 4$$

$$\xrightarrow{\times 3} 9 < x < 12 \xrightarrow{+2} 4/5 < \frac{x}{3} < 6 \Rightarrow [\frac{x}{3}] = 4 \text{ یا } 5 \Rightarrow$$

مجموع مقادیر ممکن برای  $[\frac{x}{3}]$  برابر ۹ است.

**ویژگی ۳** برای حل نامعادلات براکتی از روابط زیر استفاده می‌کنیم (هیچ‌کدام از این نامعادلات نیاز به حفظ کردن ندارند و کافی است آن‌ها را به صورت هندسی تجزیه و تحلیل کنیم).



$$\textcircled{1} [A] > n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} A \geq n+1$$

برای نمونه مجموعه جواب نامعادله  $[x] > 4$ ،  $x$  های بزرگ‌تر مساوی ۵ ( $x \geq 5$ ) است، زیرا براکت تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۵، از ۴ بزرگ‌تر است.

$$\textcircled{2} [A] \geq n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} A \geq n$$

$$\textcircled{3} [A] < n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} A < n$$

$$\textcircled{4} [A] \leq n \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} A < n+1$$

**تست:** مجموعه جواب نامعادله  $(x^2 + 3)([x] - 4) \geq 0$  کدام است؟

۳،  $+\infty$  (۴)۵،  $+\infty$  (۳)۴،  $+\infty$  (۲)۴،  $+\infty$  (۱)

پاسخ **گزینه ۱** با توجه به این که عبارت  $x^2 + 3$  همواره مثبت است، در نتیجه برای این که نامساوی داده شده برقرار شود، باید عبارت  $[x] - 4$  نیز مثبت یا صفر شود، یعنی:

$$[x] - 4 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 4 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow S = [4, +\infty)$$

**تست:** مجموعه جواب نامعادله  $[\frac{3x+2}{4}] \geq \frac{5}{3}$  برابر است با:

۱۱،  $+\infty$  (۴)۴،  $+\infty$  (۳)۱۰،  $+\infty$  (۲)۳،  $+\infty$  (۱)

پاسخ **گزینه ۲** جزء صحیح فقط با اعداد صحیح سروکار دارد در واقع می‌خواهیم اعداد صحیحی را بیابیم که بزرگ‌تر یا مساوی ۲/۵ باشند، در نتیجه اعداد صحیح ۳ به بعد قابل قبول هستند و نامعادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$[\frac{3x+2}{4}] \geq 3 \Rightarrow \frac{3x+2}{4} \geq 3 \Rightarrow 3x+2 \geq 12 \Rightarrow 3x \geq 10 \Rightarrow x \geq \frac{10}{3} \Rightarrow S = [\frac{10}{3}, +\infty)$$

**ویژگی ۴** جزء اعشاری یا بخش اعشاری اعداد حقیقی: برای هر عدد حقیقی  $x$ ، فاصله  $x$  از جزء صحیح را بخش اعشاری آن می‌نامیم و به صورت  $P(x)$

$$P(7/2) = (7/2) = 7/2 - [7/2] = 7/2 - 3 = 1/2$$

یا  $(x)$  نشان می‌دهیم. در نتیجه:  $P(x) = (x) = x - [x]$ . برای نمونه داریم:

$$P(-9/4) = (-9/4) = -9/4 - [-9/4] = -9/4 + 10 = 1/4$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

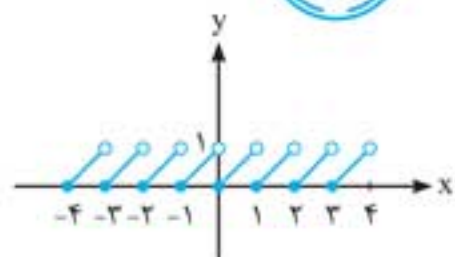
$$x - 1 < [x] \leq x$$



بخش اعشاری هر عدد حقیقی همواره عددی بین صفر و یک است، یعنی:

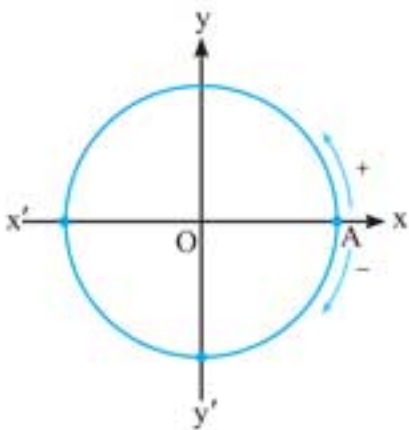
از این نامساوی می‌توان نتیجه گرفت که:

نمودار تابع  $y = x - [x]$  را می‌توان به صورت زیر رسم کرد:



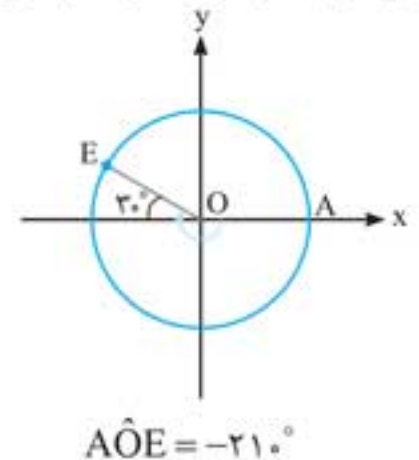
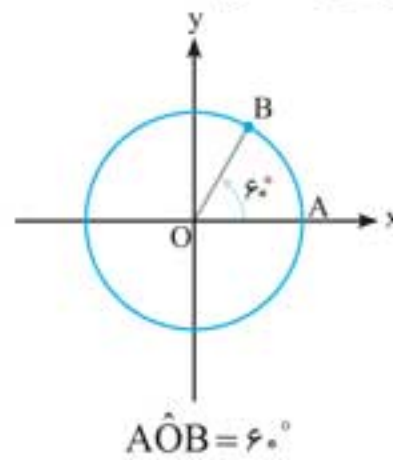
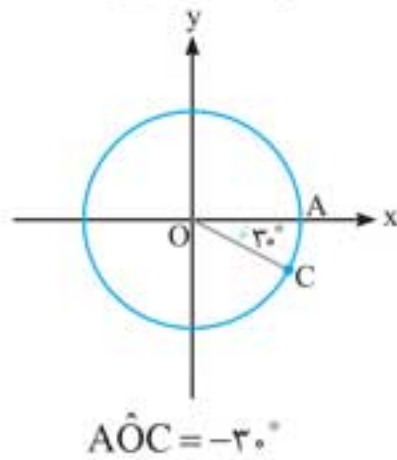
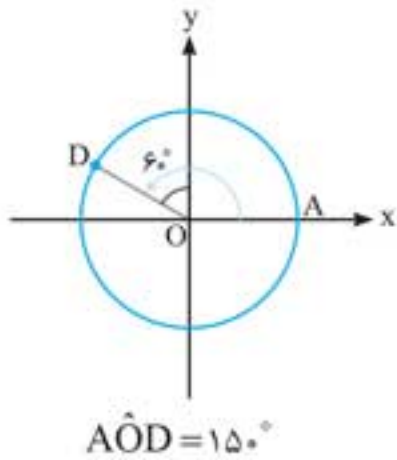
**نکته:** از نامساوی  $0 \leq A - [A] < 1$  معمولاً در محاسبه برد توابع براکتی که می‌توان چنین عبارت‌هایی را از درون ضابطه آن‌ها استخراج کرد، استفاده می‌کنیم.

## دایره‌مثلثاتی



**یادآوری:** دایره مثلثاتی دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، جهت مثلثاتی می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است. در شکل زیر نقطه A، نقطه شروع حرکت برای نمایش زوایا بر روی دایره است.

برای نمونه، در هر یک از شکل‌های زیر، زوایای مثلثاتی  $6^\circ$ ،  $-3^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $-21^\circ$  و  $33^\circ$  نمایش داده شده‌اند:



### نواحی در دایره مثلثاتی

در دایره مثلثاتی زاویه بین  $0^\circ$  تا  $90^\circ$  را ربع اول یا ناحیه اول،  $90^\circ$  تا  $180^\circ$  را ربع دوم یا ناحیه دوم،  $180^\circ$  تا  $270^\circ$  را ربع سوم یا ناحیه سوم و  $270^\circ$  تا  $360^\circ$  را ربع چهارم یا ناحیه چهارم می‌نامیم. زوایای  $0^\circ$ ،  $90^\circ$ ،  $180^\circ$ ،  $270^\circ$  و  $360^\circ$  در هیچ کدام از ربع‌ها قرار ندارند و نقاط مرزی هستند.

**تست:** از ساعت ۲ تا ۴، عقربه دقیقه‌شمار چند درجه می‌چرخد؟

- (۱)  $-6^\circ$       (۲)  $-12^\circ$       (۳)  $-36^\circ$       (۴)  $-72^\circ$

**پاسخ (گزینه ۴)** می‌دانیم که در هر یک ساعت، عقربه دقیقه‌شمار یک دور کامل در جهت منفی مثلثاتی می‌چرخد، در نتیجه از ساعت ۲ تا ۴ عقربه دقیقه‌شمار دو دور کامل در جهت منفی مثلثاتی چرخیده است. بنابراین زاویه  $-2 \times 36^\circ = -72^\circ$  ایجاد می‌شود.

### درجه

اگر محیط یک دایره دلخواه را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک درجه می‌نامیم. به بیان دیگر، یک درجه برابر  $\frac{1}{360}$  محیط یک دایره است. یک درجه را به صورت  $1^\circ$  نمایش می‌دهیم.

**تست:** چرخ و فلکی دارای ۱۸ کابین است که با فاصله‌های مساوی از هم قرار گرفته‌اند. زاویه بین کابین‌های شماره پنجم و دوازدهم چقدر است؟

- (۱)  $14^\circ$       (۲)  $15^\circ$       (۳)  $18^\circ$       (۴)  $21^\circ$

**پاسخ (گزینه ۱)** کل محیط دایره برابر ۳۶۰ درجه است و چون فاصله بین هر دو کابین با هم برابر است در نتیجه زاویه بین هر دو کابین متوالی  $\frac{360}{18} = 20^\circ$  درجه می‌شود. بین دو کابین پنجم و دوازدهم، ۷ زاویه مرکزی وجود دارد. پس زاویه بین آن‌ها برابر  $7 \times 20^\circ = 140^\circ$  است.

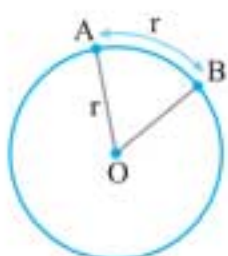


### رادیان

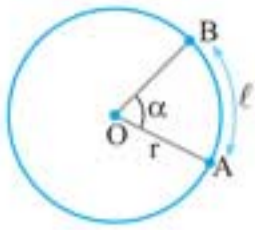
در هر دایره دلخواه به شعاع  $r$ ، اگر طول کمان  $AB$  برابر شعاع دایره یعنی  $r$  باشد اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن را ۱ رادیان می‌نامیم و به صورت  $1\text{rad}$  نشان می‌دهیم.

یک رادیان:

$$\widehat{AB} = r \Rightarrow \widehat{AOB} = 1\text{rad}$$



**محاسبه اندازه زاویه مرکزی برحسب رادیان**



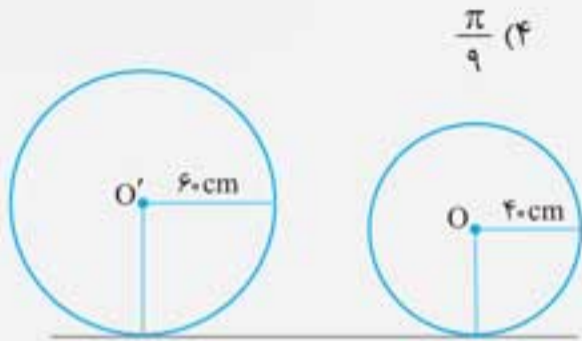
با توجه به تعریف رادیان، اندازه هر زاویه مرکزی برحسب رادیان برابر است با نسبت طول کمان روبه‌رو به آن زاویه به شعاع دایره. یعنی:

$$\text{اندازه یا طول کمان روبه‌رو به زاویه } \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{l}{r}$$

شعاع دایره (r)



**تست:** در یک تراکتور، شعاع چرخ جلو ۴۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ عقب ۶۰ سانتی‌متر است. اگر چرخ جلو  $\frac{\pi}{6}$  رادیان بچرخد میزان چرخش چرخ عقب برحسب رادیان برابر است با:



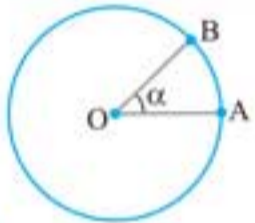
پاسخ **گزینه ۴** چرخ جلو یا عقب تراکتور به هر میزان بچرخد زاویه ایجاد شده توسط آن‌ها قطعاً متفاوت بوده ولی مسافت طی شده (رد چرخ‌ها بر روی زمین) توسط آن‌ها با هم برابر است. حال ابتدا مسافت طی شده توسط چرخ جلو را از رابطه  $\alpha = \frac{l}{r}$  محاسبه می‌کنیم:

$$l = r\alpha = 40 \times \frac{\pi}{6} = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}$$

چون چرخ عقب نیز همین مسافت را طی کرده است در نتیجه میزان چرخش چرخ عقب برابر است با:

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{20\pi}{3}}{60} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

**تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر**

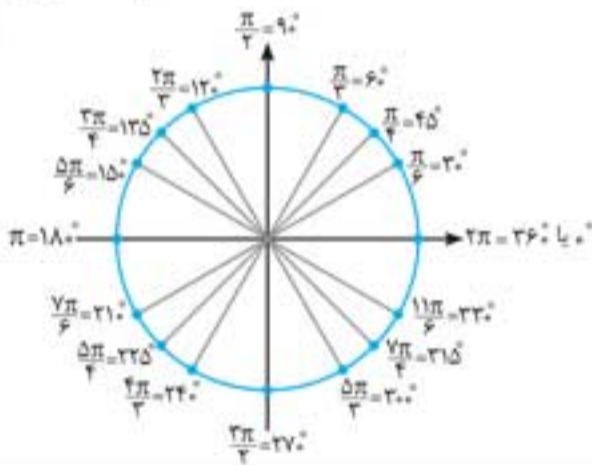


در دایره به شعاع ۱، محیط دایره برابر  $2\pi$  رادیان و برحسب درجه برابر  $360^\circ$  است. با توجه به این مطلب، در صورتی که تناسب بین زاویه‌ها برحسب درجه و رادیان را به صورت  $\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$  بنویسیم، با ساده کردن آن به رابطه  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$  می‌رسیم و از

آن برای تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر استفاده می‌کنیم. (D اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه زاویه برحسب رادیان است.)

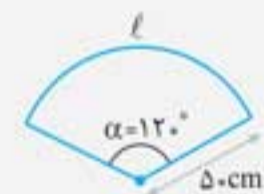
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

**زوایای معروف و پرکاربرد در دایره مثلثاتی**



**تست:** طول برف‌پاک‌کن شیشه عقب یک خودرو برابر ۵۰ سانتی‌متر بوده و زاویه‌ای که طی می‌کند برابر  $12^\circ$  است. انتهای این برف‌پاک‌کن در هر بار رفت و برگشت تقریباً چند سانتی‌متر حرکت می‌کند؟

پاسخ **گزینه ۳** ابتدا زاویه را برحسب رادیان محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطه  $l = r\alpha$  مسافت طی‌شده توسط نوک تیغه برف‌پاک‌کن را محاسبه می‌کنیم.



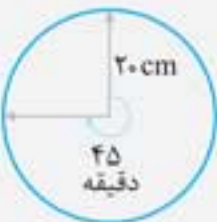
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{12}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

$$l = r\alpha \Rightarrow l = 50 \times \frac{2\pi}{3} \approx \frac{50 \times 2 \times 3.14}{3} \approx 105 \text{ cm}$$

در نتیجه انتهای برف‌پاک‌کن در هر بار رفت و برگشت تقریباً مسافتی به اندازه  $2 \times 105 = 210 \text{ cm}$  را طی می‌کند.

**تست:** اگر طول عقربه دقیقه‌شمار ساعتی، ۲۰ سانتی‌متر باشد، مسافت طی‌شده توسط نوک عقربه بعد از ۴۵ دقیقه چند سانتی‌متر است؟


پاسخ **گزینه ۴** زاویه متناظر با ۴۵ دقیقه برابر  $\frac{3\pi}{4}$  رادیان است، در نتیجه میزان مسافت طی‌شده برابر است با:



$$l = r\alpha \Rightarrow l = 20 \times \frac{3\pi}{4} = 30\pi \approx 30 \times 3.14 = 94.2 \text{ cm}$$

## روابط بین نسبت‌های مثلثاتی (اتحادهای مثلثاتی)

با استفاده از تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه می‌توان درستی هریک از روابط زیر را ثابت کرد.

$\textcircled{1} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{cases}$	$\textcircled{2} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	
$\textcircled{3} \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\textcircled{4} \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \text{ یا } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ یا } \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$	
$\textcircled{5} 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$	$\textcircled{6} 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$	
$\textcircled{7} \tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$	$\textcircled{8} (\sin \theta \pm \cos \theta)^2 = 1 \pm 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$	
$\textcircled{9} \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$	$\textcircled{10} \sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$	
$\textcircled{11} \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$		

**تست:** اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم بوده و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  باشد حاصل  $\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha + \cot \alpha}$  کدام است؟

$\frac{80}{3}$  (۱)       $-\frac{80}{3}$  (۲)       $\frac{20}{3}$  (۳)       $-\frac{20}{3}$  (۴)

پاسخ **گزینه ۲** روش اول ابتدا با استفاده از رابطه  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  مقدار  $\tan \alpha$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\cos \alpha = -\frac{3}{5}} 1 + \tan^2 \alpha = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow \tan \alpha = \pm \frac{4}{3}$$

چون  $\alpha$  در ناحیه سوم قرار دارد، پس  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  می‌باشد، از طرفی می‌دانیم  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ ، پس  $\cot \alpha = \frac{3}{4}$  و هم‌چنین می‌دانیم

$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  در نتیجه  $\sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$  است و چون  $\sin \alpha$  در ناحیه سوم واقع است، پس  $\sin \alpha$  منفی بوده و در نتیجه  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$  پس

مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha + \cot \alpha} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{4}{5} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{-16 + 15}{20}} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{1}{20}} = -\frac{80}{3}$$

$$\xrightarrow{\cos \alpha = -\frac{3}{5}} \sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

روش دوم از اتحاد  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\substack{\alpha \text{ در ناحیه سوم} \\ \sin \alpha < 0}} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha + \cot \alpha} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{4}{5} + \frac{3}{4}} = -\frac{80}{3}$$

حال مقدار عبارت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

**تست:** اگر  $\alpha$  در ربع چهارم بوده و  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$  باشد، حاصل  $\sin \alpha + \cos \alpha$  کدام است؟

$\frac{1}{5}$  (۱)       $-\frac{1}{5}$  (۲)       $\frac{2}{5}$  (۳)       $-\frac{2}{5}$  (۴)

پاسخ **گزینه ۱** با استفاده از اتحادهای مثلثاتی بیان شده می‌توان نوشت:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\substack{\alpha \text{ در ربع چهارم} \\ \cos \alpha > 0}} \cos \alpha = +\frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\substack{\alpha \text{ در ربع چهارم} \\ \sin \alpha < 0}} \sin \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

**تست:** اگر تساوی  $\frac{a}{\cos^2 x} + \frac{b}{\cos^4 x} = \tan^2 x + \tan^4 x$  یک اتحاد باشد، مقدار  $2a + 3b$  کدام است؟

$1$  (۱)       $-1$  (۲)       $5$  (۳)       $-5$  (۴)



## اعمال جبری روی توابع

قبل از هر عمل جبری بر روی دو تابع، ابتدا باید دامنه آن‌ها را طبق تعریف آن محاسبه و سپس عمل جبری خواسته شده را انجام دهیم. اعمال روی توابع دلخواهی مانند  $f$  و  $g$  به ترتیب با دامنه‌های  $D_f$  و  $D_g$  عبارت‌اند از: جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم.

نام عمل	نماد	دامنه تابع	تعریف و نحوه محاسبه ضابطه	تفسیر عمل	تفسیر دامنه تابع حاصل از عمل جبری روی دو تابع
جمع	$(f+g)(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	مقدار مجموع دو تابع در یک عدد، برابر مجموع مقدار هر کدام از آن دو تابع در عدد داده شده است.	یعنی دامنه مجموع دو تابع برابر اشتراک دامنه آن‌ها است.
تفاضل	$(f-g)(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	مقدار تفاضل دو تابع در یک عدد، برابر تفاضل مقدار هر کدام از آن‌ها در آن عدد داده شده است.	یعنی دامنه تفاضل دو تابع برابر اشتراک دامنه آن‌ها است.
ضرب	$(f \cdot g)(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	مقدار حاصل ضرب دو تابع در یک عدد، برابر حاصل ضرب مقدار هر کدام از آن‌ها در آن عدد است.	یعنی دامنه حاصل ضرب دو تابع برابر اشتراک دامنه آن‌ها است.
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x   g(x) = 0\}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	مقدار تقسیم دو تابع در یک عدد، برابر تقسیم مقادیر دو تابع در آن عدد است.	یعنی دامنه تابع حاصل از تقسیم دو تابع برابر اشتراک دامنه آن‌ها منهای ریشه‌های مخرج است.
حاصل ضرب عدد در تابع	$(kf)(x)$	$D_{kf} = D_f$	$(kf)(x) = kf(x)$	اگر عددی در تابع ضرب شود، باید مقادیر تابع را در آن عدد ضرب کنیم.	حاصل ضرب عدد در تابع تأثیری در دامنه تابع ندارد.

از تعاریف اعمال جبری روی توابع می‌توان نتیجه گرفت که:

- اعمال جمع، تفریق و ضرب دو تابع فقط بر روی اعدادی قابل انجام است که در دامنه هر دو تابع قرار گرفته باشند، در نتیجه قبل از انجام اعمال جبری  $(+ , - , \times)$  بر روی دو تابع بهتر است که ابتدا دامنه آن‌ها را محاسبه و اشتراکشان را بیابیم.
- تقسیم دو تابع فقط بر روی اعدادی قابل انجام است که اولاً آن اعداد در قسمت مشترک دامنه دو تابع باشند، ثانیاً مخرج کسر به ازای آن اعداد مخالف صفر شود.
- در توابعی که به صورت زوج مرتب تعریف می‌شوند، برای محاسبه عمل جبری خواسته شده کافی است آن عمل را بر روی مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌هایی که دارای مؤلفه اول یکسان در دو تابع می‌باشند، انجام دهیم.
- توان و ضرب تأثیری در دامنه توابع ندارند، برای نمونه داریم:

$$D_{f^2 - 2g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g, \quad D_{2f+g^2} = D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

📌 **تست:** اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$  باشند، دامنه تابع  $f-g$  کدام است؟

$\mathbb{R} - (0, 4)$  (۴)       $\mathbb{R} - [0, 4]$  (۳)       $\mathbb{R} - [0, 2]$  (۲)       $\mathbb{R} - (0, 2)$  (۱)

پاسخ **گزینه ۴** ابتدا دامنه هر کدام از توابع داده شده را تعیین و سپس اشتراک آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f: x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x(x-4) \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$D_g: x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

حال اشتراک دو دامنه به دست آمده را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$D_{f-g} = ((-\infty, 0] \cup [4, +\infty)) \cap ((-\infty, 0] \cup [2, +\infty)) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) = \mathbb{R} - (0, 4)$$



برای ۱۰۰٪

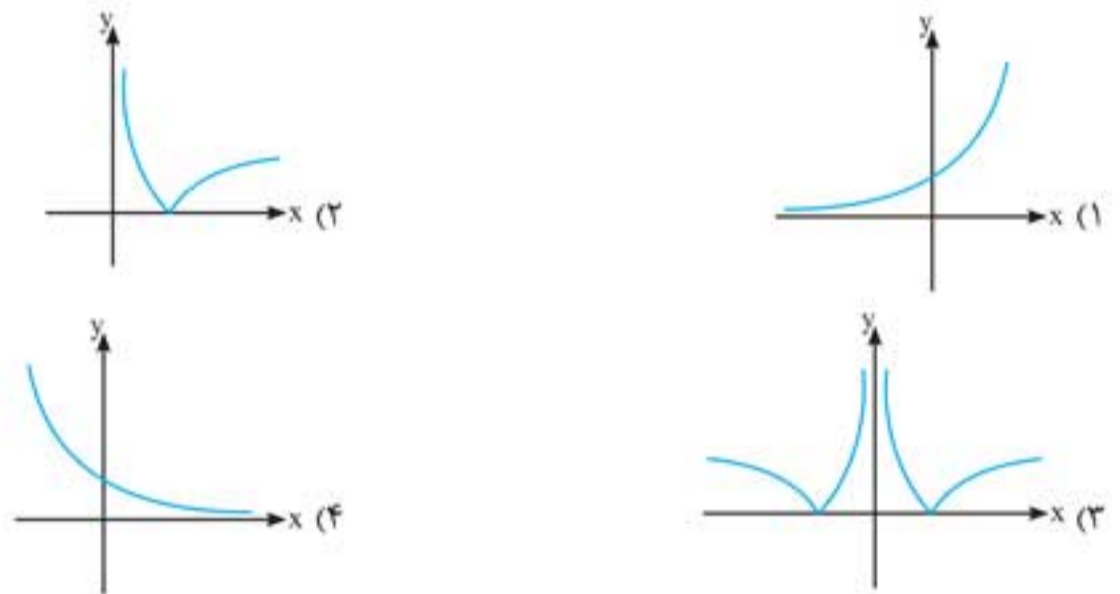
۷۴۷. دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{2^{x-1}} - 2^{2x-7}$  کدام است؟

- (۱)  $[6, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 6]$  (۳)  $(0, 6]$  (۴)  $[0, 6]$

۷۴۸. اگر  $5^x = 200$  باشد، آن گاه  $|x|$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۴۹. نمودار تابع  $f(x) = |\log|x||$  به کدام صورت زیر می‌باشد؟



۷۵۰. حاصل  $\log \tan 5^\circ + \log \tan 10^\circ + \dots + \log \tan 80^\circ + \log \tan 85^\circ$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\log \tan 50^\circ$  (۴)  $(\log \tan 50^\circ)^{16}$

۷۵۱. اگر  $f(x) = \frac{4^x - 1}{2^x}$  باشد، مقدار  $f(\log 2) + f(\log \frac{1}{2})$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) صفر

۷۵۲. اگر  $\log(\frac{2x+2y}{4}) = \frac{\log x + \log y}{2}$  باشد،  $9x^2 + 4y^2$  کدام است؟

- (۱)  $3xy$  (۲)  $4xy$  (۳)  $6xy$  (۴)  $16xy$

۷۵۳. جواب معادله  $\log(x^2 + 6x^2 + 12x + 9) - \log(x+3) = 1$  به صورت  $\frac{1}{4}(-3 + \sqrt{a})$  است.  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۹ (۳) ۳۵ (۴) ۳۷

۷۵۴. هرگاه  $2^{x+2} + 4^{x+2} = 72$  مفروض باشد، آن گاه  $\log_4 \sqrt{x+7}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۷۵۵. از دستگاه معادلات  $\begin{cases} \log(x^2 + 4y^2) = 2\log\sqrt{2} + \log 23 \\ \log x + \log y = 2\log 3 - \log 2 \end{cases}$  حاصل لگاریتم  $x + 2y$  در مبنای ۱۶ کدام است؟

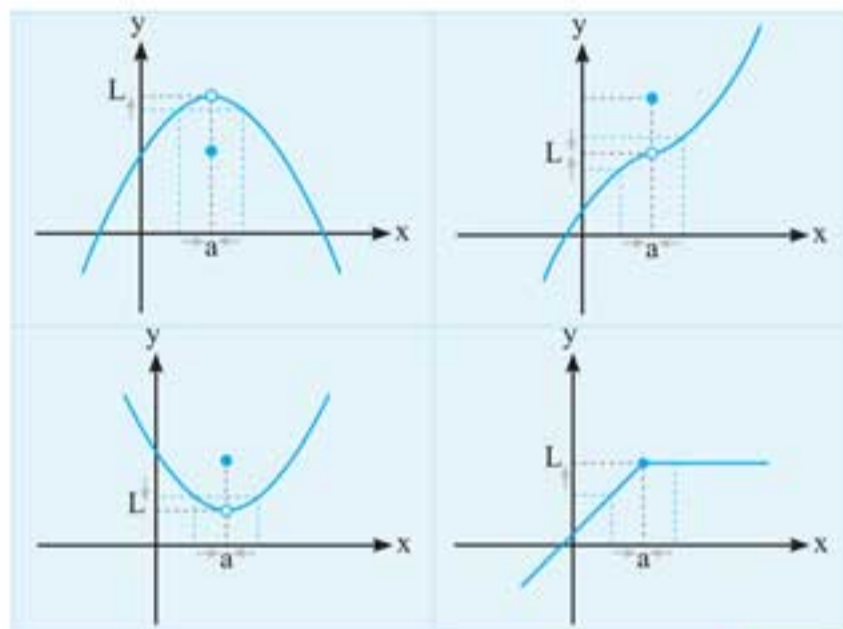
- (۱)  $0/5$  (۲)  $1/25$  (۳)  $0/75$  (۴)  $1/5$

۷۵۶. حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $\log_3 x \times \log_3 \frac{x}{27} = 10$  کدام است؟

- (۱) ۲۴۳ (۲) ۲۷ (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴) -۹۰

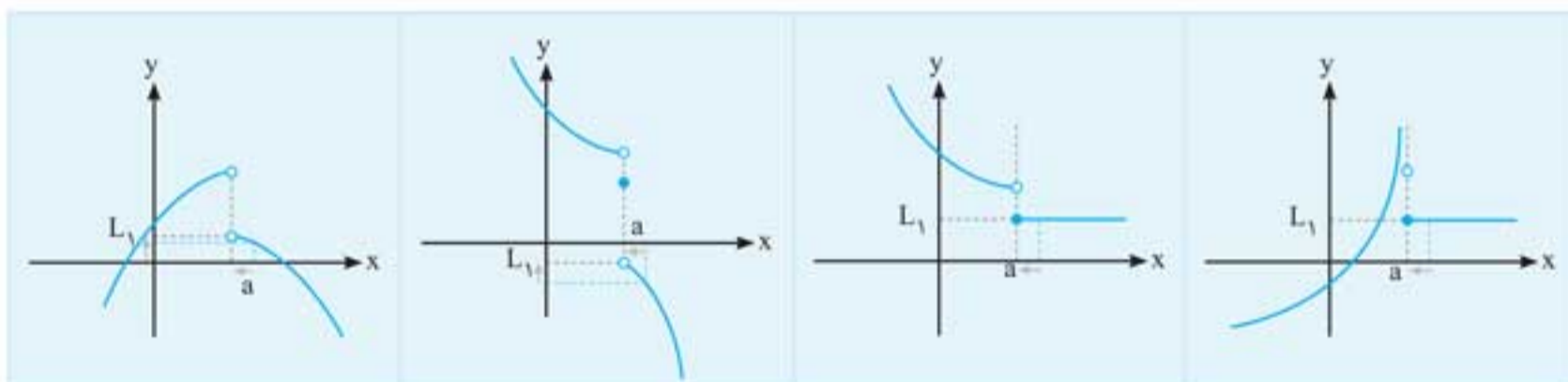
## حد تابع در یک نقطه

حد تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  برابر عدد حقیقی  $L$  است و آن را با نماد  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  نمایش می‌دهند. هرگاه در یک همسایگی محذوف عدد  $a$  واقع در دامنه  $f$ ، متغیر  $x$  به عدد حقیقی  $a$  نزدیک و نزدیک‌تر شود، آن‌گاه مقادیر تابع  $f$  واقع بر محور  $y$  ها به عدد حقیقی  $L$  نزدیک و نزدیک‌تر شده و یا ممکن است با آن برابر شوند. مانند:

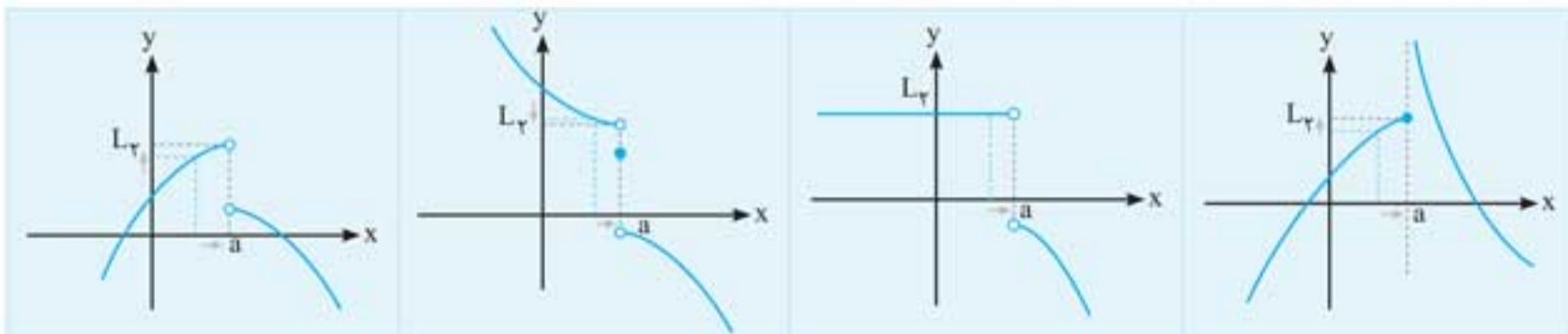


### حدهای یک‌طرفه (حد راست و حد چپ)

**حد راست:** حد راست تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  برابر عدد حقیقی  $L_1$  است و آن را با نماد  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$  نمایش می‌دهند. هرگاه در یک همسایگی محذوف راست عدد  $a$  واقع در دامنه  $f$ ، متغیر  $x$  به عدد حقیقی  $a$  نزدیک و نزدیک‌تر شود، آن‌گاه مقادیر تابع  $f$  واقع بر محور  $y$  ها به عدد حقیقی  $L_1$  نزدیک و نزدیک‌تر شده و یا ممکن است با آن برابر شوند. مانند:



**حد چپ:** می‌گویند حد چپ تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  برابر عدد حقیقی  $L_2$  است و آن را با نماد  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$  نمایش می‌دهند. هرگاه در یک همسایگی محذوف چپ عدد  $a$  واقع در دامنه  $f$ ، متغیر  $x$  به عدد حقیقی  $a$  نزدیک و نزدیک‌تر شود، آن‌گاه مقادیر تابع  $f$ ، واقع بر محور  $y$  ها به عدد حقیقی  $L_2$  نزدیک و نزدیک‌تر شده و یا ممکن است با آن برابر شوند. مانند:

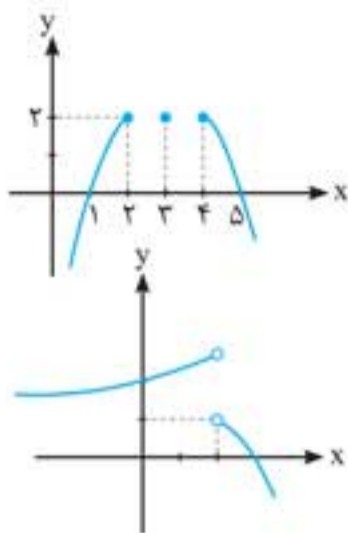


**قضیه:** اگر تابع  $f$  در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند  $a$  تعریف شده باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که حد تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  برابر  $L$  باشد، آن است که حد چپ و حد راست تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  موجود و برابر  $L$  باشند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

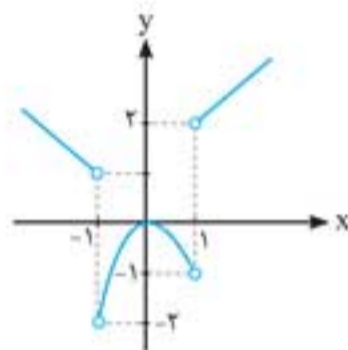


حد یک تابع و حدهای یک طرفه

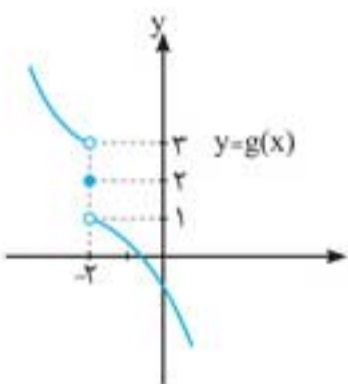


(۴) وجود ندارد

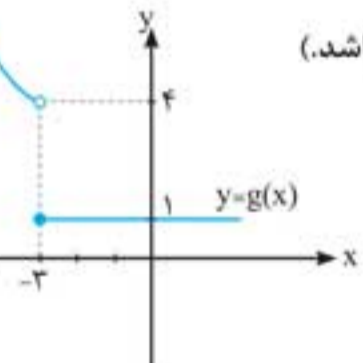
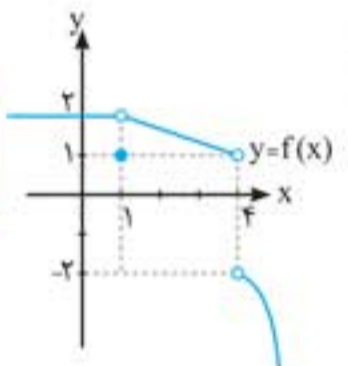
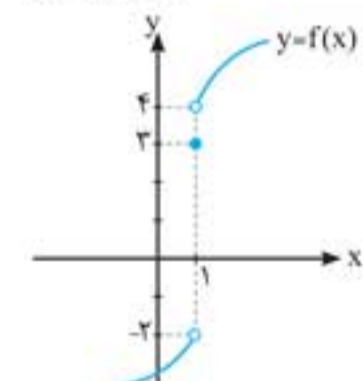
$$f(x) = \frac{x}{[x]+1} \quad (۴)$$



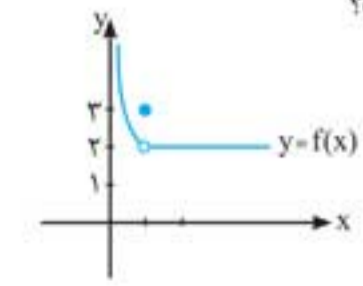
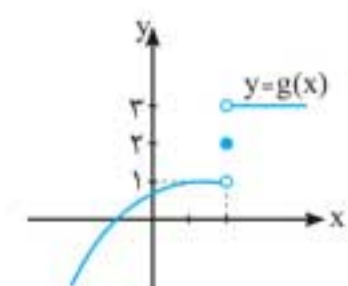
(۴) وجود ندارد



(۴) صفر، صفر



(۴) -۳



(۴) ۴

۷۶۲. با توجه به نمودار مقابل حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$  و  $f(1)$  به ترتیب کدامند؟

- (۱) صفر، صفر، صفر
- (۲) صفر، وجود ندارد، صفر
- (۳) وجود ندارند، صفر، صفر
- (۴) وجود ندارد، وجود ندارد، صفر

۷۶۳. اگر نمودار تابع  $f(x)$  به صورت روبه‌رو باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(2-x) + f(x+2))$  کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) وجود ندارد

۷۶۴. در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  چقدر است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) -۱

۷۶۵. کدام تابع در نقطه  $x = -1$  شرط لازم را برای داشتن حد دارد؟

(۱)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$     (۲)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$     (۳)  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

۷۶۶. در تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ 2x-1 & ; x < 0 \end{cases}$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) -۱
- (۳) ۲

۷۶۷. با توجه به نمودار مقابل، حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} 2f^2(x) + f(|x|)$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۴

۷۶۸. در تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 0 \\ x^2+2x & ; x < 0 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)]$  به ترتیب کدامند؟

- (۱) ۱، صفر
- (۲) ۱، -۱
- (۳) صفر، -۱

۷۶۹. با توجه به نمودارهای  $f$  و  $g$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} fog(x)$  کدام است؟

- (۱) -۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) وجود ندارد.

۷۷۰. با توجه به نمودار  $f$  و  $g$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [fog(x)]$  چقدر است. ( [ ] جزء صحیح می‌باشد.)

- (۱) ۱
- (۲) -۲
- (۳) -۳
- (۴) صفر

۷۷۱. در تست قبل حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [fog(x)]$  چقدر است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) -۲

۷۷۲. با توجه به نمودار تابع  $f(x)$  و  $g(x)$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} fog(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} gof(x)$  کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

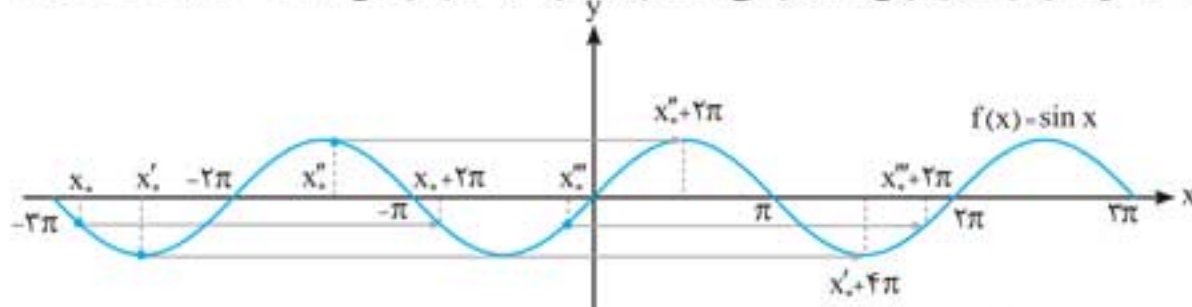
۷۷۳. اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+[x]}{|x|} & ; x < -1 \\ 2x+b & ; x > -1 \end{cases}$  در نقطه  $x = -1$  حد داشته باشد،  $b$  کدام است؟

- (۱) -۲
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۴

## مثلات

### تابع متناوب

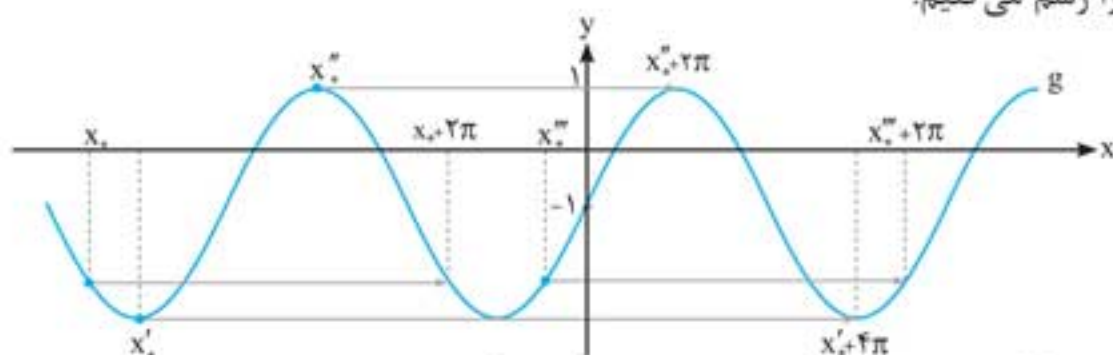
برخی توابع ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را از سایر توابع متمایز می‌کند. برای نمونه به نمودار تابع  $f(x) = \sin x$  نگاه کنید:



اگر به طول هر نقطه از نمودار این تابع مقدار  $2\pi$  اضافه کنیم، عرض نقاط نظیر تغییر نمی‌کند. همین‌طور اگر مقدار ثابت را به  $4\pi$  یا  $6\pi$  یا ... افزایش دهیم، این اتفاق تکرار می‌شود. حتی اگر اعداد ثابت منفی مانند  $-2\pi$  یا  $-4\pi$  یا  $-6\pi$  یا ... را نیز به طول هر نقطه از تابع اضافه کنیم همچنان عرض نقاط نظیر بدون تغییر باقی می‌مانند. به زبان نمادین در تابع  $f(x) = \sin x$  می‌توان گفت:

$$f(x) = f(x \pm 2\pi) = f(x \pm 4\pi) = f(x \pm 6\pi) = \dots = f(x \pm 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

در این تابع با افزودن یا کاستن مقادیر ثابت  $2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ ) به طول هر نقطه از دامنه تابع، مقدار تابع (عرض تابع) تغییر نمی‌کند. به این ویژگی تابع  $f(x) = \sin x$  متناوب بودن آن می‌گویند و به مقادیر ثابت نیز دوره تناوب می‌گوییم. تابع  $f(x) = \sin x$  دارای بی‌شمار دوره تناوب است. کوچک‌ترین دوره تناوب مثبت تابع  $f(x) = \sin x$  یعنی  $T = 2\pi$  را دوره تناوب اصلی آن می‌نامیم. حال با یک مثال می‌خواهیم نشان دهیم که دوره تناوب اصلی تابع  $g(x) = a \sin x + b$  با شرط  $a \neq 0$  نیز برابر  $T = 2\pi$  است. نمودار تابع  $g(x) = 2 \sin x - 1$  را رسم می‌کنیم.

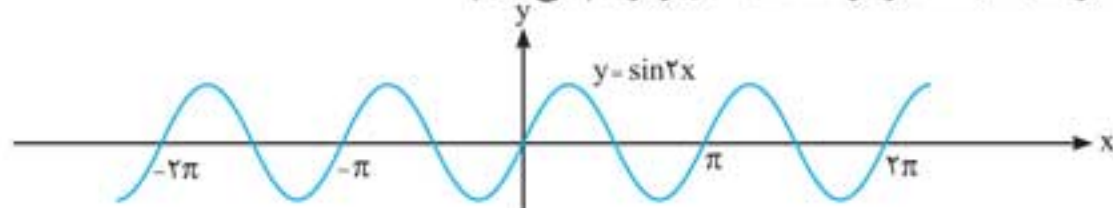


با توجه به نمودار، تابع  $g(x) = 2 \sin x - 1$  نیز متناوب است و دوره تناوب اصلی آن  $2\pi$  است.

**نکته:** به‌طور کلی اگر تابع  $y = f(x)$  متناوب و دوره تناوب اصلی آن  $T$  باشد، تابع  $y = af(x) + b$  نیز متناوب بوده و دوره تناوب اصلی آن  $T$  است. ( $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ )

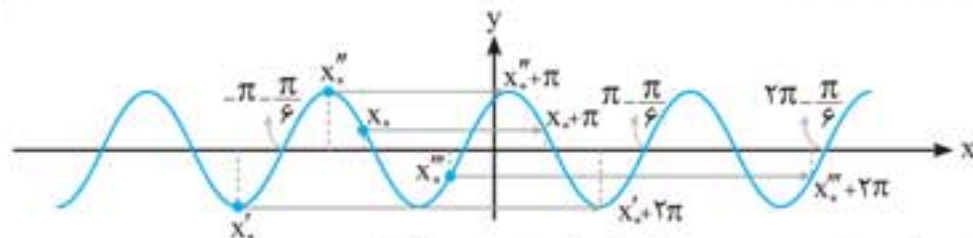
حال نمودار تابع  $h(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  را رسم می‌کنیم.

بر اساس آنچه در فصل گذشته آموختید، ابتدا نمودار  $y = \sin 2x$  را رسم می‌کنیم.



$$y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

سپس آن را  $\frac{\pi}{6}$  واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

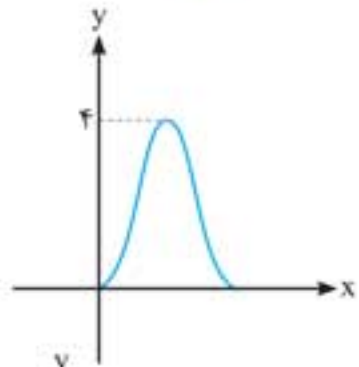


در شکل مشخص است که تابع  $h(x)$  متناوب است و دوره تناوب اصلی آن  $T = \pi$  است.

**نکته:** به‌طور کلی توابع مثلثاتی  $y = \sin(ax + b)$  (با شرط  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) توابعی متناوب با دوره تناوب اصلی  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  هستند.

**تذکره:** با توجه به مطالب گفته شده می‌توان گفت تابع  $y = k \sin(ax + b) + c$  ( $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ ) با شرط  $a, k \neq 0$  تابعی متناوب با دوره

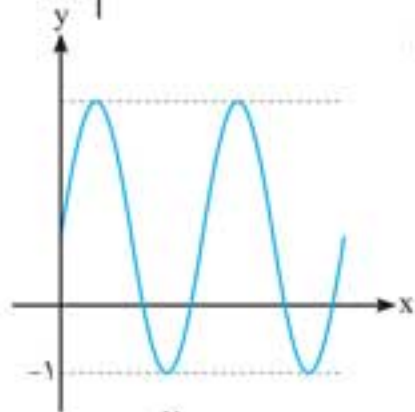
تناوب اصلی  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  است.



(ریاضی ۹۷)

۱۰۳۹. شکل مقابل نمودار تابع  $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4}x)$  در بازه  $(0, 4)$  است.  $b$  کدام است؟

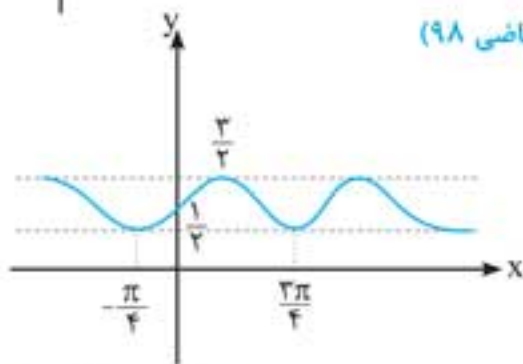
- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) ۲



(ریاضی خارج ۹۷)

۱۰۴۰. شکل زیر نمودار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$  در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶



(ریاضی ۹۸)

۱۰۴۱. شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin b x \cos b x$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳/۲
- (۳) ۲
- (۴) ۳

(ریاضی خارج ۹۸)

۱۰۴۲. دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ ، کدام است؟

- (۱) ۱/۲
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴)  $\pi$

تابع تانژانت



(مشابه تمرین کتاب درسی)

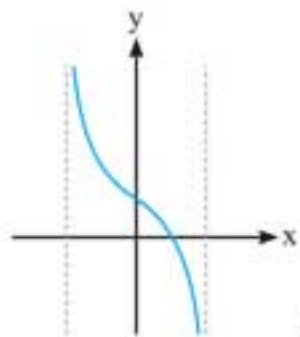
۱۰۴۳. نمودار مقابل مربوط به ضابطه کدام یک از توابع زیر می‌تواند باشد؟

$f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3}) + 1$  (۲)

$f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{3}) - 1$  (۱)

$f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{6}) - 1$  (۴)

$f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{6}) + 1$  (۳)



۱۰۴۴. ضابطه تابع مقابل کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

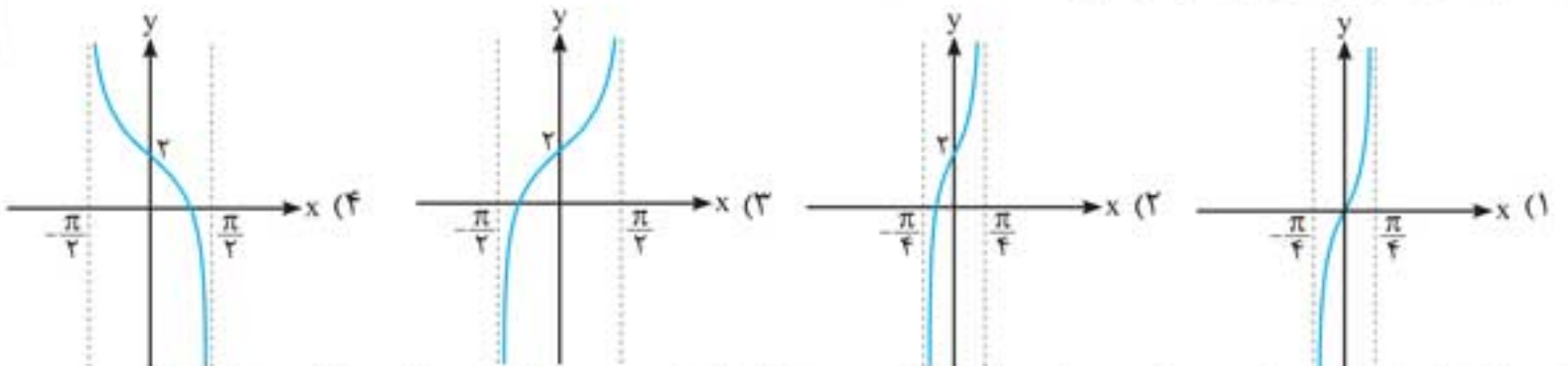
$y = 3 \tan x$  (۲)

$y = \tan(x - \frac{\pi}{2})$  (۱)

$y = -2 \tan 2x$  (۴)

$y = -\tan x + 1$  (۳)

۱۰۴۵. کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار تابع  $y = 2 + \tan 2x$  است؟



۱۰۴۶. نمودار توابع با ضابطه‌های  $y = \tan x$  و  $y = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$  در بازه  $(0, 2\pi)$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) چهار نقطه
- (۲) سه نقطه
- (۳) دو نقطه
- (۴) یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

۱۰۴۷. نمودار تابع  $y = \tan x$  و خط  $y = \frac{1}{4}x$  در بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) دو نقطه
- (۲) سه نقطه
- (۳) یک نقطه
- (۴) چهار نقطه

۱۰۴۸. مساحت مثلثی که از برخورد نمودار تابع تانژانت با محور  $x$  ها در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  و خط  $y = x + 3$  با محور  $y$  ها حاصل می‌شود، کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$
- (۲)  $\pi$
- (۳)  $\frac{5\pi}{2}$
- (۴)  $\frac{3\pi}{2}$

(ریاضی ۹۵)

۱۱۰۹. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$  در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{7\pi}{4}$  (۲)  $\frac{9\pi}{4}$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

(ریاضی خارج ۹۵)

۱۱۱۰. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{7\pi}{4}$

(ریاضی ۹۶)

۱۱۱۱. جواب کلی معادله  $\sin x \cdot \sin 3x = \cos 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{3}$

(ریاضی خارج ۹۶)

۱۱۱۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  با شرط  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(ریاضی ۹۸)

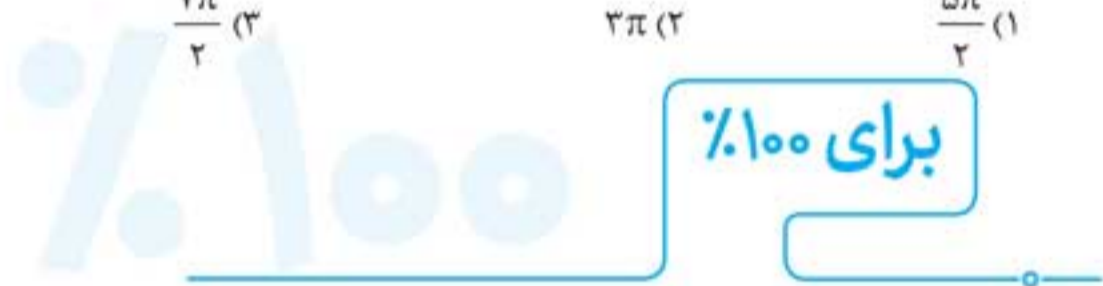
۱۱۱۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$  (۲)  $\frac{7\pi}{2}$  (۳)  $2\pi$  (۴)  $3\pi$

(ریاضی خارج ۹۸)

۱۱۱۴. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$  (۲)  $3\pi$  (۳)  $\frac{7\pi}{2}$  (۴)  $4\pi$



۱۱۱۵. اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = 5 \sin^2(\frac{3\pi}{m}x) + 1$  برابر  $\frac{2}{3}$  باشد،  $m$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) ۳

۱۱۱۶. دوره تناوب تابع  $f(x) = 3 \sin x - 4 \sin^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $\frac{4\pi}{3}$

۱۱۱۷. دوره تناوب تابع  $f(x) = \cot x - \tan x - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{16}$  (۲)  $\frac{\pi}{8}$  (۳)  $\frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{\pi}{2}$

۱۱۱۸. دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin x + 2 \cos \pi x$  در صورت وجود کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2\pi$  (۳)  $4\pi$  (۴) وجود ندارد

۱۱۱۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $(1 + \tan^2 x) \cos 2x + 2 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۱۲۰. اگر  $3 \sin x - 4 \cos x = 5$  حاصل  $\cos 2x$  کدام است؟

- (۱)  $0/28$  (۲)  $0/3$  (۳)  $0/26$  (۴)  $0/22$

۱۱۲۱. جواب کلی معادله  $\sqrt{3}(\sin x + \cos x) = 1 + \sin 2x$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$

۱۱۲۲. مجموع ریشه‌های معادله  $\tan x + \cot x = 2\sqrt{3}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $\frac{3\pi}{2}$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $\frac{5\pi}{2}$

۱۱۲۳. معادله  $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۲۴. معادله  $\sin^2 x + 2 \cos^2 x + \sin x \cos x = 3$  در بازه  $[0, \pi]$  چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



## آزمون فصل

۱. اگر  $f(x) = \frac{4x+7}{x^2-5x+6}$  و  $g(x) = 3^{-x}$  آن گاه  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (g \circ f)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳)  $+\infty$  (۴)  $-\infty$

۲. حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{3x+1}{4+3\tan x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}$  (۲) صفر (۳)  $-\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}$  (۴) وجود ندارد.

۳. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{2x+1}{x^2-7x+12} + \frac{2}{x-3} \right)$  کدام است؟

- (۱)  $+\infty$  (۲)  $-\infty$  (۳) ۳ (۴) -۳

۴. اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|9-x^2|}{ax^2+3x+\frac{1}{3}} = 3$  آن گاه حد چپ این عبارت در نقطه  $x = -1$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۲ (۳)  $+\infty$  (۴)  $-\infty$

۵. حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \left| \frac{-3}{2x} \right|$  کدام گزینه است؟

- (۱)  $-\infty$  (۲)  $+\infty$  (۳) صفر (۴)  $-\frac{3}{2}$

۶. اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^2(3-x)}{(ax+3)^2+2x^2} = -2$  مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $-\sqrt{\frac{3}{2}}$  (۳)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۷. حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{x^2+x+1}{x^2+x+3} \right|$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳)  $+\infty$  (۴)  $-\infty$

۸. مجانب‌های نمودار تابع  $f(x) = \frac{4+3x^2}{9-x^2}$  در دو نقطه  $A$  و  $B$  همدیگر را قطع می‌کنند اگر  $O$  مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث  $OAB$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷

۹. اگر خط  $y = \frac{2}{5}$  مجانب افقی تابع  $f(x) = \frac{Ax^2+3}{(2A-3)x^2+15}$  باشد، معادله مجانب‌های قائم تابع  $f$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$  (۲)  $\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$  (۳)  $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$  (۴) مجانب قائم نمی‌تواند داشته باشد.

۱۰. تابع  $f(x) = \frac{x^2+2}{3x+2x^2}$  مجانب خود را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

- (۱)  $(1, \frac{2}{5})$  (۲)  $(-1, -3)$  (۳)  $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$  (۴)  $(\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$



برای دریافت پاسخ‌نامه تشریحی برای ۱۰۰٪ و آزمون فصل، رمزیننه مقابل را با گوشی هوشمند خود اسکن کنید یا به سایت مهروماه، صفحه مربوط به این کتاب مراجعه نمایید.



## مشتق پذیری و پیوستگی



۱۲۹۸. اگر  $f(x)$  ضابطه تابعی باشد که  $f(100) = 35$  و  $f'(100) = 3$ ، مقدار تقریبی  $f(102)$  چقدر است؟

- ۴۱ (۱)      ۴۲ (۲)      ۴۰ (۳)      ۴۳ (۴)

۱۲۹۹. اگر در تابع  $f$  داشته باشیم:  $f'(5) = 4$  و  $f(5) = 7$ ، مقدار  $f(6)$  به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک تر است؟

- ۵ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۱ (۳)      ۸ (۴)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۳۰۰. اگر  $f(x) = 5x^2$ ، کدام یک از تساوی های زیر درست است؟

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5h + 20 \quad (۱)$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5h - 20 \quad (۲)$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 5h + 20 \quad (۳)$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 5h - 20 \quad (۴)$$

۱۳۰۱. اگر داشته باشیم:  $f(2+h) - f(2) = 2h^2 + 5h$ ، مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

- ۳ (۱)      -۵ (۲)      ۲ (۳)      ۵ (۴)

۱۳۰۲. مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  به صورت  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12$  بیان شده است،  $k$  کدام است؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)

۱۳۰۳. اگر  $f'(-2) = 2$ ، مقدار  $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{f(t) - f(-2)}{2(t+2)}$  کدام است؟

- ۲ (۱)      -۱ (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

۱۳۰۴.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$  مربوط به مشتق چند تابع در  $x = 2$  است؟

- (۱) فقط یک تابع      (۲) بی شمار تابع      (۳) مربوط به مشتق نیست.      (۴) هیچ کدام

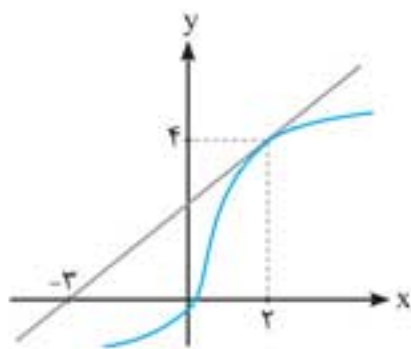
۱۳۰۵. با توجه به نمودار مقابل حاصل  $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f - f(x)}{x - 2}$  کدام است؟

- (۱)  $1/25$

- (۲)  $0/8$

- (۳)  $-0/8$

- (۴) وجود ندارد.



۱۳۰۶. اگر  $f(x) = [x] + [-x]$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{f(x)(f(x)+1)}{x - \sqrt{2}}$  کدام است؟

- (۱) صفر      (۲) -۱      (۳)  $\sqrt{2}$       (۴) موجود نیست.

۱۳۰۷. فرض کنید تابع  $f$  در  $x = 1$  مشتق پذیر است و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - h}{h} = 3$ ، مقدار  $f(1) + f'(1)$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

۱۳۰۸. اگر تابع  $f$  در  $x = 1$  مشتق پذیر باشد،  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt{x} - 1}$  کدام است؟

- (۱)  $f'(1)$       (۲)  $2f'(1)$       (۳) صفر      (۴)  $\frac{1}{2}f'(1)$

۱۳۰۹. اگر تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشد، مقدار  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $af'(a)$       (۲)  $f'(a) - af(a)$       (۳)  $f(a) - af'(a)$       (۴)  $af(a)$

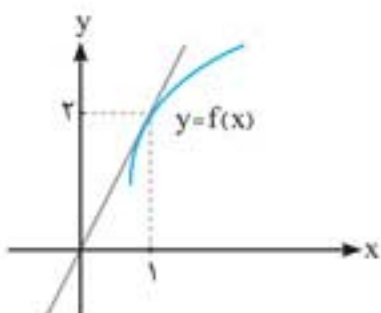
۱۳۱۰. قسمتی از نمودار  $y = f(x)$  به صورت شکل مقابل است  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 8}{x - 1}$  کدام است؟

- (۱) ۱۸

- (۲) ۲۴

- (۳) ۱۶

- (۴) ۴۸



۱۳۱۱. اگر شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه  $A(1, 2)$  برابر ۳ باشد، حد کسر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 4}{x^2 - 3x + 2}$  کدام است؟

- (۱) ۱۲      (۲) -۱۲      (۳) ۶      (۴) ۴

۱۳۱۲. اگر تابع  $f$  در  $x = 1$  مشتق پذیر باشد و  $f'(1) = 2$  در این صورت حاصل حد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h}$  برابر چند است؟

- (۱) ۳      (۲) ۶      (۳) ۱۲      (۴) ۴

۱۵۱۹. برد تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$  برابر است با:

- (۱)  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}]$  (۲)  $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$  (۳)  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$  (۴)  $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{4}]$

۱۵۲۰. اگر  $f(x) = [x] - x$  و  $g(x) = x^2 + 2x$ ، آن‌گاه برد تابع  $g \circ f$  کدام است؟

- (۱)  $(-1, 0)$  (۲)  $[-1, 0]$  (۳)  $(-1, 0]$  (۴)  $[-1, 0)$

۱۵۲۱. برد تابع  $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$  برابر است با:

- (۱)  $(-4, 0)$  (۲)  $\mathbb{R} - (-4, 0)$  (۳)  $\mathbb{R} - [-4, 0]$  (۴)  $\mathbb{R}$

۱۵۲۲. برد تابع  $y = [\frac{2x}{x^2+1}]$  شامل چند عدد صحیح است؟ ( | نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

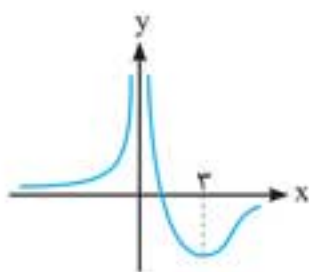
۱۵۲۳. نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax+2}{x^2+bx}$  به صورت مقابل است. دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

- (۱)  $(-2, 2)$

- (۲)  $(-2, 0)$

- (۳)  $(2, 0)$

- (۴)  $(2, 2)$



(ریاضی خارج ۹۰)

۱۵۲۴. تابع  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$  از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

- (۱) مینیمم نسبی (۲) ماکزیمم نسبی (۳) ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی (۴) فاقد اکسترمم نسبی

(ریاضی ۹۱)

۱۵۲۵. اگر  $a > 0$  و ثابت و  $x$  متغیر باشد، مینیمم مقدار  $\frac{3a+x}{\sqrt[3]{a^2x}}$  کدام است؟

- (۱)  $2a$  (۲)  $3a$  (۳) ۳ (۴) ۴

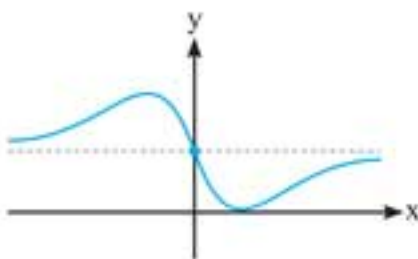
۱۵۲۶. شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$  است. دوتایی مرتب  $(a, b)$  کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

- (۱)  $(1, -2)$

- (۲)  $(1, 2)$

- (۳)  $(2, -4)$

- (۴)  $(2, 4)$



(ریاضی خارج ۹۱)

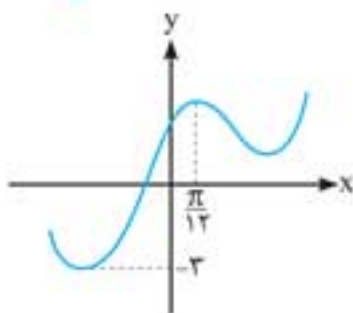
۱۵۲۷. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos 4x + b \sin 2x$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۲

- (۲) -۲

- (۳) ۳

- (۴) -۳



(ریاضی خارج ۹۵)

۱۵۲۸. طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = (x-1)^2 \sqrt[3]{x^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

(ریاضی ۹۸)

۱۵۲۹. فاصله نقطه می نیمم مطلق تابع  $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$  از خط مجانب قائم آن کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

(ریاضی خارج ۹۸)

۱۵۳۰. فاصله نقطه ماکسیمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{2x-x^2}{(x+1)^2}$  از خط مجانب افقی آن، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$



$$= \frac{\cos 45^\circ - \cos 135^\circ}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(90^\circ + 45^\circ)}{2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 45^\circ}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴۸۳. گزینه ۴ کافی است در هر کدام از گزینه‌ها مقدار تابع را در نقاط

مشخص شده مانند  $0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{4}, 2\pi$  بررسی کنید. گزینه ۱ نادرست

است زیرا  $f(0) = 2\sin 0 - 1 = -1$  در حالی که در شکل  $f(0) = 1$  است.

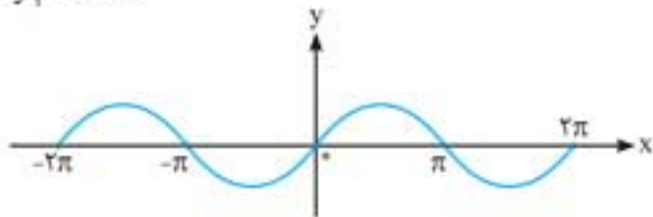
گزینه ۲ نیز نادرست است زیرا  $f(0) = 2\cos 0 + 1 = 3$  در حالی که در

شکل  $f(0) = 1$  است. در گزینه ۳ مقدار تابع در  $x = 0$  برابر  $-2$  است پس

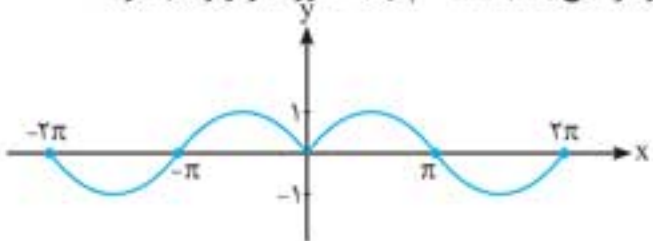
نادرست است. در گزینه ۴ همه مقادیر داده شده در شکل در تابع صدق می‌کنند.

۴۸۴. نمودار تابع  $y = \sin|x| + 1$  را در مراحل زیر رسم می‌کنیم.

$y_1 = \sin x$

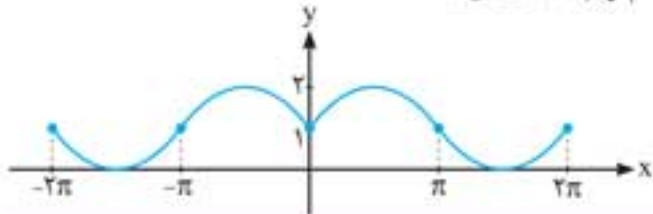


حال سمت چپ نمودار بالا را حذف و قرینه سمت راست را در سمت چپ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع  $y_2 = \sin|x|$  به صورت زیر رسم شود:

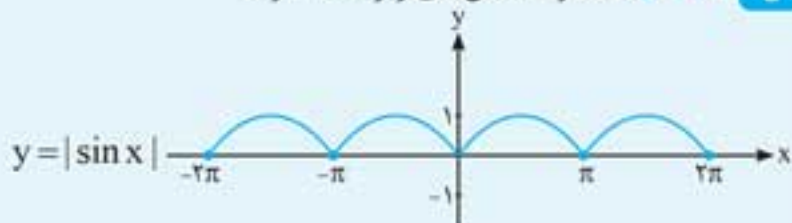


حال نمودار تابع فوق را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار

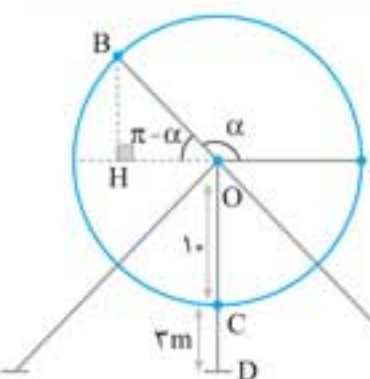
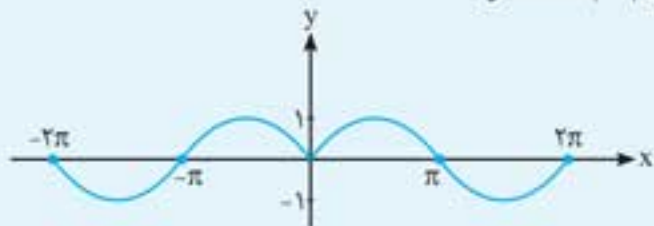
تابع  $y_3 = \sin|x| + 1$  به دست آید:



هشدار: به تفاوت شکل‌های زیر دقت شود.



$y = \sin|x|$  (سیبیل)



۴۸۵. گزینه ۳ با توجه به شکل رسم شده،

در  $\triangle OBH$  می‌توان سینوس زاویه  $\pi - \alpha$  را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{OB} = \frac{BH}{1}$$

$$\Rightarrow BH = 1 \cdot \sin \alpha$$

۴۷۸. گزینه ۱ با استفاده از اتحاد مزدوج، می‌توان کسر داده شده را به صورت زیر ساده کرد:

$$\frac{\tan^2 25^\circ - \tan^2 20^\circ}{1 - \tan^2 25^\circ \times \tan^2 20^\circ}$$

$$= \frac{\tan 25^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 25^\circ \times \tan 20^\circ} \times \frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \times \tan 20^\circ}$$

$$= \tan(25^\circ - 20^\circ) \times \tan(25^\circ + 20^\circ) = \tan 5^\circ \times \tan 45^\circ = \tan 5^\circ$$

۴۷۹. گزینه ۳ از روابط بیان شده برای  $\tan$  و  $\cot$  نتیجه می‌گیریم که:

$$f(x) = \cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

$$\Rightarrow f(22/5^\circ) = 2 \cot 44^\circ = 2 \times 1 = 2$$

$$g(x) = \frac{2}{\tan x + \cot x} = \frac{2}{\frac{2}{\sin 2x}} = \sin 2x$$

$$\Rightarrow g(22/5^\circ) = \sin 44^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین کسر داده شده برابر است با:

$$\frac{f(22/5^\circ)}{g(22/5^\circ)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

۴۸۰. گزینه ۴ با استفاده از رابطه  $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$  به محاسبه  $\tan x$

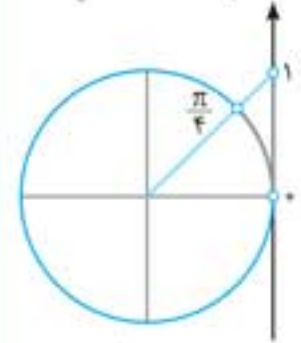
می‌پردازیم:

$$\sin 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow 2 + 2 \tan^2 x = 6 \tan x$$

$$\xrightarrow{+2} \tan^2 x - 3 \tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \frac{3 \pm 2/2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x \approx \frac{5/2}{2} = 2/6 \\ \tan x \approx \frac{0/8}{2} = 0/4 \end{cases}$$



در حالتی که  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  است مقدار  $\tan x$  در بازه  $(0, 1)$  قرار دارد در نتیجه  $\tan x = 0/4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  قابل قبول است.

۴۸۱. گزینه ۳ می‌دانیم که شیب خط  $ax + by + c = 0$  برابر  $m = -\frac{a}{b}$

است در نتیجه:

$$(3 \sin \theta)x + (\Delta \cos \theta)y = 1 \Rightarrow m = -\frac{3 \sin \theta}{\Delta \cos \theta} = \frac{3}{\Delta}$$

$$\Rightarrow -\sin \theta = \Delta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta = -\Delta \cos \theta$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$A = \frac{-2 \sin \theta + 7 \cos \theta}{\Delta \cos \theta + 4 \sin \theta} = \frac{-2(-\Delta \cos \theta) + 7 \cos \theta}{\Delta \cos \theta + 4(-\Delta \cos \theta)}$$

$$= \frac{1 \cdot \cos \theta + 7 \cos \theta}{\Delta \cos \theta - 2 \cdot \cos \theta} = \frac{17 \cos \theta}{-1 \Delta \cos \theta} = -\frac{17}{1 \Delta}$$

۴۸۲. گزینه ۲ با استفاده از رابطه توان شکن یعنی  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

به محاسبه عبارت داده شده می‌پردازیم.

$$\cos^2 22/5^\circ - \cos^2 67/5^\circ = \frac{1 + \cos 44^\circ}{2} - \frac{1 + \cos 134^\circ}{2}$$