تمام مسایل اثباتی کتاب درسی هندسه دوازدهم

۱. اگر A و B ماتریس‌های $m\times n$ و r یک عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $r(A\pm B)=rA\pm rB$.

پاسخ: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ داریم:

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n})=r[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}=$$
$$[r(a_{ij}\pm b_{ij})]_{m\times n}=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}\pm[rb_{ij}]_{m\times n}=$$
$$r[a_{ij}]_{m\times n}\pm r[b_{ij}]_{m\times n}=rA\pm rB$$

۲. اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $(r\pm s)A=rA\pm sA$.

پاسخ: می‌دانیم $rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$ پس داریم:

$$(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]_{m\times n}=[(r\pm s)a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]_{m\times n}=$$
$$[ra_{ij}]_{m\times n}\pm[sa_{ij}]_{m\times n}=r[a_{ij}]_{m\times n}\pm s[a_{ij}]_{m\times n}=rA\pm sA$$

۳. اگر A و B ماتریس‌های $m\times n$ و r عدد حقیقی باشد، ثابت کنید: $A=B\Rightarrow rA=rB$.

پاسخ: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، چون $A=B$، پس به‌ازای هر i و j نتیجه می‌گیریم $a_{ij}=b_{ij}$ داریم:

$$rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}=[rb_{ij}]_{m\times n}=r[b_{ij}]_{m\times n}=rB$$

بنابراین $rA=rB$.

۴. با یک مثال نقض نشان دهید اگر $AB=AC$، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$. (قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.)

پاسخ: فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱&۳\\۲&۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱&۴\\-۲&-۱\end{bmatrix}$ داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۳\\۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۷\\۰&۷\end{bmatrix}$$
$$A\times C=\begin{bmatrix}۱&۲\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۴\\-۲&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۷\\۰&۷\end{bmatrix}$$

دیده می‌شود $AB=AC$ ولی $B\neq C$.

(توجه کنید پیدا کردن ماتریس‌های A و B و C که در شرایط مسئله صدق کند به نظر ساده نیست، ولی کافی است ماتریس A را طوری انتخاب کنید که دترمینان A برابر صفر باشد.)

۵. اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(AB=BA)$، ثابت کنید: $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$.

پاسخ:

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲=A^۲+AB+AB+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲$$

۶. **اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ باشند و داشته باشیم $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$، ثابت کنید $AB = BA$. (یعنی A و B تعویض‌پذیرند)**

پاسخ: ابتدا ماتریس $(A+B)^2$ را محاسبه می‌کنیم.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر فرض داریم:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (2)$$

$$(2)\,,\,(1) \text{ از} \Rightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Rightarrow AB = BA$$

۷. **ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصربه‌فرد است. (قضیهٔ یکتایی وارون)**

پاسخ: فرض کنیم ماتریس A وارون‌پذیر باشد و ماتریس‌های B و C وارون‌های ماتریس A باشند، در این صورت داریم:

$$AB = BA = I\ ,\ AC = CA = I$$

اکنون ثابت می‌کنیم $B = C$.

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

پس اگر A وارون‌پذیر باشد آنگاه فقط یک ماتریس وارون می‌تواند داشته باشد.

۸. **نشان دهید دترمینان ماتریس ۳×۳ که دارای دو سطر مساوی است، برابر صفر می‌باشد.**

پاسخ: ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ که دو سطر مساوی دارد را در نظر می‌گیریم. حاصل دترمینان A را برحسب سطر سوم محاسبه می‌کنیم.

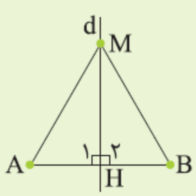
$$|A| = d(-1)^4 \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} + e(-1)^5 \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f(-1)^6 \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= d(0) - e(0) + f(0) = 0$$

۹. **ثابت کنید عمودمنصف یک پاره‌خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.**

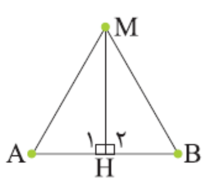
پاسخ: در اینجا یک قضیهٔ دوشرطی مطرح است. باید ثابت کنیم هر نقطه روی عمود منصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است و برعکس.

فرض کنید d عمودمنصف پاره‌خط AB است و M نقطه‌ای روی d باشد. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow MA = MB$$

برعکس فرض کنیم نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است. از M عمود MH را بر AB رسم می‌کنیم. داریم:



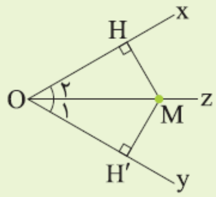
$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow AH = BH$$

پس MH عمودمنصف AB است، یعنی M روی عمودمنصف AB است.

۱۰. **نشان دهید نیمساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند.**

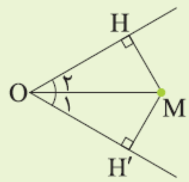
پاسخ: در اینجا یک قضیهٔ دوشرطی مطرح است. باید ثابت کنیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.

فرض کنیم Oz نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ باشد و M نقطه‌ای روی Oz باشد. عمودهای MH و MH' را بر اضلاع زاویهٔ xOy رسم می‌کنیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OM=OM\\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}}\overset{\Delta}{MOH}\cong\overset{\Delta}{MOH'}\Rightarrow MH=MH'$$

برعکس فرض کنیم نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ xoy به یک فاصله باشد. یعنی $MH=MH'$. از M به O وصل کرده داریم:



$$\left.\begin{array}{l}MH=MH'\\ OM=OM\\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}\overset{\Delta}{MOH}\cong\overset{\Delta}{MOH'}\Rightarrow\hat{O}_1=\hat{O}_2$$

پس M روی نیمساز زاویهٔ O قرار دارد.

۱۱. **مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را به دست آورید.**

پاسخ: معادلهٔ دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

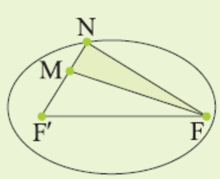
$$x^2+y^2+ax+by+c=0\Rightarrow(x^2+ax)+(y^2+by)+c=0$$

$$\Rightarrow(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c=0\Rightarrow(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

پس مرکز این دایره $O=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و شعاع آن $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ است.

۱۲. **یک نقطهٔ دلخواه مانند M درون بیضی در نظر بگیرید نشان دهید مجموع فواصل M از دو کانون بیضی کمتر از $2a$ است.**

پاسخ: فرض کنیم M درون بیضی با کانون‌های F و F' باشد. MF' را امتداد می‌دهیم تا بیضی را در N قطع کند، چون N روی بیضی است، پس $NF+NF'=2a$. داریم:

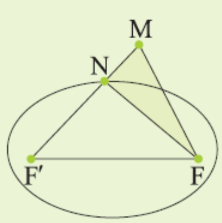


$$\overset{\Delta}{MNF}:MF<NF+MN\xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{به طرفین } MF'}MF+MF'<NF+MN+MF'$$

$$\xrightarrow{MN+MF'=NF'}MF+MF'<NF+NF'\Rightarrow MF+MF'<2a$$

۱۳. **یک نقطهٔ دلخواه مثل M بیرون بیضی در نظر بگیرید. نشان دهید مجموع فواصل M از دو کانون بزرگ‌تر از $2a$ است.**

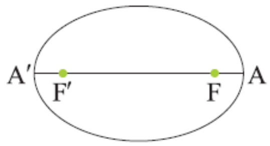
پاسخ: فرض کنیم M بیرون بیضی با کانون‌های F و F' باشد و MF' بیضی را در N قطع کند، چون N روی بیضی است، پس $NF+NF'=2a$. داریم:



$$\overset{\Delta}{MNF}:NF<MF+MN\xrightarrow[\text{را اضافه می‌کنیم}]{\text{به طرفین } NF'}NF+NF'<MF+MN+NF'$$

$$\xrightarrow[NF+NF'=2a]{MN+NF'=MF'}2a<MF+MF'$$

۱۴. در بیضی با کانون‌های F و F' ثابت کنید $FA = F'A'$.



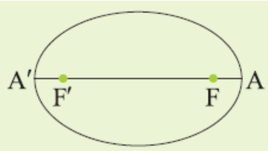
پاسخ: می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر ۲a است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = ۲a \\ A' \in \text{بیضی} \Rightarrow A'F + A'F' = ۲a \end{array}\right\} \Rightarrow AF + AF' = A'F + A'F' \quad (۱)$$

از طرف دیگر $AF' = AF + FF'$ و $A'F = A'F' + FF'$ از (۱) داریم:

$$AF + AF + \cancel{FF'} = A'F' + \cancel{FF'} + A'F' \Rightarrow ۲AF = ۲A'F' \Rightarrow AF = A'F'$$

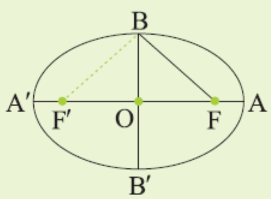
۱۵. نشان دهید طول قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است.



پاسخ: در صورتی‌که F و F' کانون‌های بیضی باشند و AA' قطر بزرگ بیضی آنگاه $AF = A'F'$ داریم:

$$A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = ۲a \xrightarrow{AF = A'F'} A'F' + AF' = ۲a \Rightarrow AA' = ۲a$$

۱۶. در بیضی با قطر بزرگ $AA' = ۲a$ و قطر کوچک $BB' = ۲b$ و فاصلهٔ کانونی $FF' = ۲c$ نشان دهید $a^۲ = b^۲ + c^۲$.



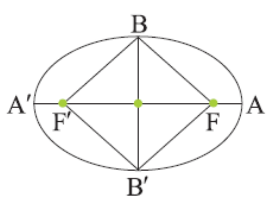
پاسخ: می‌دانیم در بیضی قطر BB' عمودمنصف FF' است، پس $BF = BF'$ داریم.

$$B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF = BF'} ۲BF = ۲a \Rightarrow BF = a$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF، $OB = b$ و $OF = c$ و $BF = a$ داریم:

$$\overset{\Delta}{OBF} : BF^۲ = OB^۲ + OF^۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

۱۷. در بیضی زیر که AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک و F و F' کانون‌های آن هستند، ثابت کنید محیط چهارضلعی $BFB'F'$ برابر ۴a است.



پاسخ: می‌دانیم قطر کوچک BB' عمودمنصف FF' است، پس $BF = BF'$ داریم:

$$B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF = BF'} ۲BF = ۲a \Rightarrow BF = a$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $BF' = B'F = B'F' = a$. پس چهارضلعی $BFB'F'$ لوزی به ضلع a است، پس محیط آن برابر ۴a است.

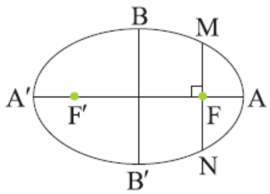
۱۸. نشان دهید اگر $\frac{c}{a} = ۱$ آنگاه بیضی تبدیل به پاره‌خط می‌شود.

پاسخ: اگر $\frac{c}{a} = ۱$ آنگاه $c = a$. از طرف دیگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بنابراین $b = ۰$، یعنی قطر کوچک بیضی طول صفر دارد؛ در نتیجه B و B' بر هم منطبق می‌شوند و بیضی به شکل پاره‌خط خواهد بود.

۱۹. نشان دهید اگر $\frac{c}{a}=0$ آنگاه بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

پاسخ: اگر $\frac{c}{a}=0$ آنگاه $c=0$ و چون $a^2=b^2+c^2$ پس $a=b$، یعنی طول قطر بزرگ و کوچک بیضی با هم برابرند؛ در نتیجه بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

۲۰. در بیضی شکل زیر با قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ ثابت کنید طول وتر MN که از کانون F گذشته و بر قطر بزرگ عمود است برابر $\frac{2b^2}{a}$ است.



پاسخ: طول پاره‌خط MF را در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFF' به دست می‌آوریم.

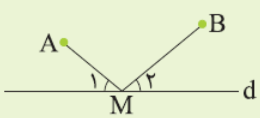
$$MF'^2=MF^2+FF'^2 \xrightarrow[\text{پس } MF'=2a-MF]{MF+MF'=2a} (2a-MF)^2=MF^2+(2c)^2$$

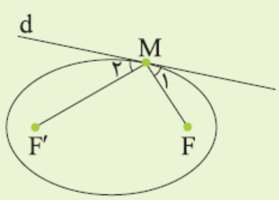
$$\Rightarrow 4a^2+MF^2-4a.MF=MF^2+4c^2 \Rightarrow a.MF=a^2-c^2$$

$$\xrightarrow{a^2-c^2=b^2} a.MF=b^2 \Rightarrow MF=\frac{b^2}{a} \Rightarrow MN=2MF=\frac{2b^2}{a}$$

۲۱. نشان دهید اگر از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی بتابد، انعکاس نور از کانون بعدی آن می‌گذرد. (خاصیت بازتابندگی بیضی)

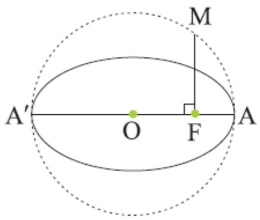
پاسخ: می‌دانیم اگر کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A به نقطهٔ B با عبور از نقطهٔ M روی خط d مسیر AMB باشد، آنگاه $\widehat{M}_1=\widehat{M}_2$. (مسئلهٔ هرون)





حال فرض کنیم خط d در نقطهٔ M بر بیضی با کانون‌های F و F' مماس باشد. در این صورت هر نقطه روی خط d انتخاب کنیم مجموع فاصله‌های آن نقطه از دو کانون F و F' بیشتر از $2a$ است، زیرا این نقاط بیرون بیضی هستند و فقط در نقطهٔ M این مجموع برابر $2a$ است. پس مجموع فواصل M از F و F' مینیمم است، در نتیجه $\widehat{M}_1=\widehat{M}_2$. پس بنابر ویژگی آینه‌های تخت اگر از کانون F شعاع نوری بر بیضی بتابد، بازتابش آن از کانون F' می‌گذرد، زیرا زاویه تابش و بازتابش برابرند.

۲۲. در شکل قطر دایره برابر قطر بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



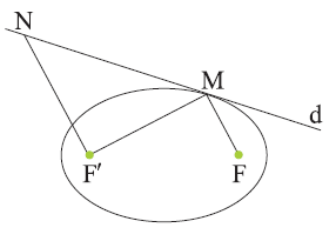
پاسخ: چون قطر دایره برابر قطر بیضی است، پس شعاع دایره مساوی $a = \frac{۲a}{۲} = \frac{AA'}{۲}$ است. از O به M وصل می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\overset{\Delta}{OMF} : OM^۲ = MF^۲ + OF^۲ \xrightarrow{OM=a\,,\,OF=c} a^۲ = MF^۲ + c^۲$$

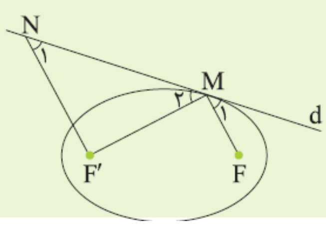
$$MF^۲ = a^۲ - c^۲ \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} MF^۲ = b^۲ \Rightarrow MF = b$$

پس MF مساوی نصف قطر کوچک بیضی است.

۲۳. در بیضی شکل زیر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. از کانون F' خطی موازی MF رسم می‌کنیم تا d را در N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$. (F کانون بعدی است)

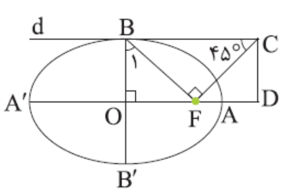


پاسخ: بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی $\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$ است. داریم:

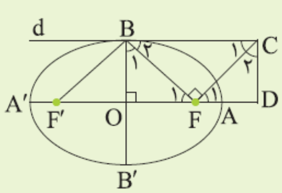


$$\left.\begin{matrix} MF \parallel NF' \\ \text{مورب } d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{N}_۱ = \widehat{M}_۱ \xrightarrow{\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲} \widehat{N}_۱ = \widehat{M}_۲ \Rightarrow NF' = MF'$$

۲۴. در بیضی زیر AA' و BB' دو قطرند و خط d در نقطهٔ B مماس بر بیضی است. اگر CD بر امتداد قطر بزرگ عمود باشد و $B\hat{F}C = ۹۰^\circ$ و $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، آنگاه مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



پاسخ: مثلث‌های $\overset{\Delta}{OBF}$ و $\overset{\Delta}{BFC}$ و $\overset{\Delta}{FCD}$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند، زیرا $\hat{B}_۱ = \hat{F}_۱ = \hat{B}_۲ = \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = \hat{F}_۱ = ۴۵^\circ$.
چون $OB = b$، پس $OF = FD = CD = b$. داریم:

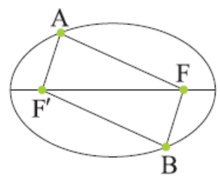


$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{b=c} a^۲ = ۲b^۲ \Rightarrow a = \sqrt{۲}b\ ,\ AF = OA - OF = a - c$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{FD - AF}{AF} = \frac{b-(a-c)}{a-c} = \frac{b-a+c}{a-c} = \frac{b-\sqrt{۲}b+b}{\sqrt{۲}b-b}$$

$$= \frac{۲b-\sqrt{۲}b}{\sqrt{۲}b-b} = \frac{\sqrt{۲}b(\sqrt{۲}-۱)}{b(\sqrt{۲}-۱)} = \sqrt{۲}$$

۲۵. در بیضی شکل زیر $BF = AF'$ نشان دهید $AF \parallel BF'$. (F و F' دو کانون بیضی هستند.)

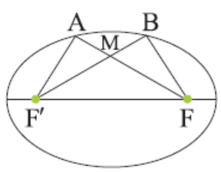


پاسخ: می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون بیضی برابر ۲a است.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = ۲a \\ B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = ۲a \end{array}\right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{BF = AF'} AF = BF'$$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل آن دو به دو مساوی‌اند، پس $AF \parallel BF'$.

۲۶. در بیضی شکل زیر $AF' = BF$، نشان دهید $MF = MF'$. (F و F' دو کانون بیضی هستند.)



پاسخ: می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون بیضی برابر ۲a است.

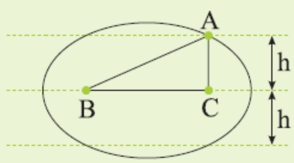
$$\left.\begin{array}{l} A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = ۲a \\ B \in \text{بیضی} \Rightarrow BF + BF' = ۲a \end{array}\right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{AF' = BF} AF = BF'$$

پس:

$$\left.\begin{array}{l} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AFF'} \cong \overset{\Delta}{BFF'} \Rightarrow A\hat{F}F' = B\hat{F'}F \Rightarrow MF = MF'$$

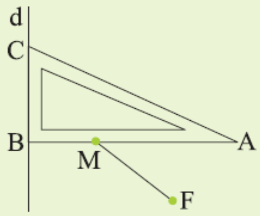
۲۷. فرض کنید از مثلث ABC اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث داده شده باشد با استفاده از خـواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

پاسخ: فرض کنیم $AH = h$ و $BC = a$ و P مساوی محیط مثلث باشد. بنابر فرض $AB + AC + BC = P \Rightarrow AB + AC = P - a$.



چون P و a ثابت هستند، پس $AB + AC$ ثابت است و چون نقاط B و C ثابت هستند، پس مجموع فواصل نقطهٔ A از دو نقطهٔ ثابت B و C مقدار ثابت $P - a$ است، در نتیجه مکان هندسی رأس A روی یک بیضی به کانون‌های B و C و مقدار ثابت $P - a$ است. از طرف دیگر رأس A روی دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ h از آن قرار دارد، بنابراین برای رسم مثلث ابتدا بیضی با کانون‌های B و C و مقدار ثابت $P - a$ را رسم می‌کنیم. سپس دو خط موازی با خط BC و به فاصلهٔ h از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو خط با بیضی رأس A است و $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث مطلوب است.

۲۸. به کمک یک گونیا سهمی با کانون F و خط هادی d را رسم کنید. طریقهٔ رسم را توضیح دهید.

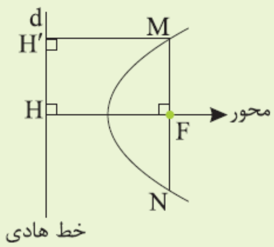


پاسخ: یک گونیا انتخاب کرده و ضلع قائم BC را در راستای خط هادی d قرار می‌دهیم. نخی به طول ضلع قائم بعدی (یعنی AB) انتخاب کرده یک سر نخ را به کانون F و سر دیگر را به نقطهٔ A می‌بندیم و با یک مداد نخ را به صورت کشیده درمی‌آوریم تا نخ به ضلع AB بچسبد. در این صورت نقطهٔ M نوک مداد روی سهمی است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\text{طول نخ} = AB = MA + MB \\ \text{طول نخ} = MA + MF\end{array}\right\} \Rightarrow MF = MB \Rightarrow M \text{ روی سهمی است}$$

اکنون با حرکت گونیا در راستای خط هادی به طوری‌که نخ همواره کشیده بوده و به ضلع AB چسبیده باشد، سهمی رسم می‌شود.

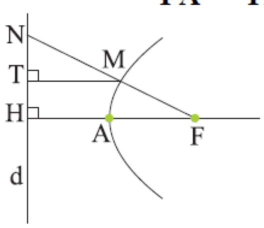
۲۹. خطی از کانون یک سهمی موازی با خط هادی آن رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط M و N قطع کند. نشان دهید طول وتر MN برابر ۴a است.



پاسخ: از M عمود MH' را بر خط هادی d رسم می‌کنیم. در این صورت چهارضلعی $MH'HF$ مستطیل است. از طرف دیگر M روی سهمی است، پس $MF = MH'$ بنابراین چهارضلعی $MH'HF$ مربع است در نتیجه $MF = FH = ۲a$ پس:

$MN = ۲MF = ۴a$

۳۰. در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا d را در N قطع کند و عمود MT را بر d رسم می‌کنیم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$.



پاسخ: می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی برابر است.

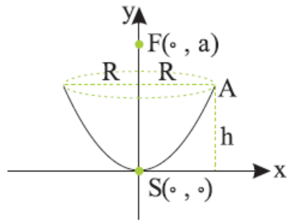
$$M \in \text{سهمی} \Rightarrow MF = MT \ , \ A \in \text{سهمی} \Rightarrow AF = AH$$

چون MT و FH بر خط d عمودند، پس $MT \parallel FH$ با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \Rightarrow \frac{NT}{TH} = \frac{MN}{MF} \xrightarrow{MF=MT} \frac{NT}{TH} = \frac{MN}{MT} \\ MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{MN}{FN} \xrightarrow{FH=۲AF} \frac{FN}{۲AF} = \frac{MN}{MT} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{FN}{۲AF} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{FN}{AF} = \frac{۲NT}{TH}$$

۳۱. شکل زیر یک دیش مخابراتی است. ثابت کنید $a = \frac{R^۲}{۴h}$.

hendese_beigi

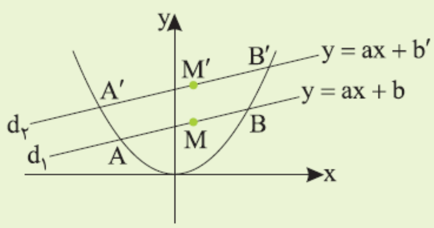


پاسخ: با توجه به شکل نقطهٔ A به مختصات (R , h) است. در ضمن از مقابل این دیش یک سهمی قائم با رأس $S(\circ,\circ)$ است و معادلهٔ این سهمی به صورت زیر است.

$$x^{۲} = ۴ay \xrightarrow{A\in \text{سهمی}} R^{۲} = ۴ah \Rightarrow a = \frac{R^{۲}}{۴h}$$

۳۲. سهمی $y = x^{۲}$ را خطوط موازی $y = ax + b$ (a ثابت و b متغیر) قطع می‌کند. ثابت کنید وسط وترهای ایجادشده روی خطی موازی محور سهمی قرار دارند.

پاسخ: سهمی را با خطوط موازی $y = ax + b$ قطع می‌دهیم.



$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = x^{۲} \end{cases} \Rightarrow x^{۲} = ax + b \Rightarrow x^{۲} - ax - b = \circ$$

در صورتی‌که A و B نقاط برخورد خط با سهمی باشند و M نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \xrightarrow{x_A + x_B = S = \frac{a}{۲}} x_M = \frac{a}{۲}$$

اکنون اگر خط‌ها موازی $y = ax + b$ را با سهمی قطع دهیم دیده می‌شود طول نقطهٔ وسط وترهای ایجادشده روی سهمی همگی برابر $\frac{a}{۲}$ است، پس مکان هندسی این نقاط خط $x = \frac{a}{۲}$ است که خطی موازی با محور سهمی است.

۳۳. سهمی با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F عبور کند و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس.

پاسخ: فرض کنیم M نقطه‌ای روی سهمی باشد. دایره‌ای به مرکز M گذرا از F رسم می‌کنیم. درواقع MF شعاع این دایره است. چون M روی سهمی است، پس $MF = MH$، در نتیجه فاصلهٔ M تا خط d برابر شعاع دایره است. پس دایره به مرکز M و شعاع MF بر خط هادی d مماس است.

برعکس فرض کنیم دایره‌ای از کانون F گذشته و بر خط هادی d مماس است. پس مرکز دایره از کانون و خط هادی به یک فاصله است؛ در نتیجه بنابر تعریف سهمی مرکز دایره روی سهمی قرار دارد.

۳۴. اگر $\vec{a}=(a_1 , a_2 , a_3)$ و $\vec{b}=(b_1 , b_2 , b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند و $0\le\theta\le\pi$ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. آنگاه ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

پاسخ: می‌دانیم $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ داریم:

$$\begin{array}{l}\vec{a}=(a_1 , a_2 , a_3)\\ \vec{b}=(b_1 , b_2 , b_3)\end{array}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1 , a_2+b_2 , a_3+b_3)$$

در صورتی‌که θ زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد آنگاه بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+2|a||b|\cos\theta$$

$$\Rightarrow a_1^2+b_1^2+2a_1b_1+a_2^2+b_2^2+2a_2b_2+a_3^2+b_3^2+2a_3b_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3=2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

۳۵. سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید به طوری‌که $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$. ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

پاسخ: بردارهای $\vec{a}=(1 , -2 , 3)$، $\vec{b}=(2 , 1 , 1)$ و $\vec{c}=(0 , 0 , 1)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=(1 , -2 , 3).(2 , 1 , 1)=2-2+3=3$$

$$\vec{a}.\vec{c}=(1 , -2 , 3).(0 , 0 , 1)=0+0+3=3$$

دیده می‌شود $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۳۶. ثابت کنید $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a}=(x , y , z)$ داریم:

$$\vec{a}.\vec{a}=(x , y , z).(x , y , z)=x^2+y^2+z^2=|\vec{a}|^2$$

۳۷. نشان دهید دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد و برعکس.

پاسخ: در صورتی‌که θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0\xleftrightarrow{|\vec{a}|\neq0 , |\vec{b}|\neq0}\cos\theta=0\xleftrightarrow{0\le\theta\le\pi}\theta=90^\circ$$

(توجه کنید وقتی بین رابطه‌ها علامت دوشرطی ($\Leftrightarrow$) قرار می‌دهیم یعنی قضیه و عکس قضیه با هم ثابت شده است.)

۳۸. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض‌اند. نشان دهید: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$.

پاسخ: فرض کنیم $\vec{a}=(x\,,\,y\,,\,z)$، $\vec{b}=(x'\,,\,y'\,,\,z')$ و $\vec{c}=(x''\,,\,y''\,,\,z'')$ داریم:

$$\vec{b}+\vec{c}=(x'+x''\,,\,y'+y''\,,\,z'+z'')$$

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=(x\,,\,y\,,\,z).(x'+x''\,,\,y'+y''\,,\,z'+z'')=$$

$$xx'+xx''+yy'+y'y''+zz'+zz''=(xx'+yy'+zz')+(xx''+yy''+zz'')=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

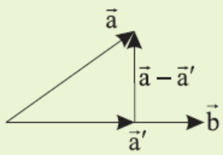
۳۹. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، ثابت کنید: (نامساوی کشی ـ شواتز) $|\vec{a}.\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$.

پاسخ: اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$|\cos\theta|\leq ۱\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\leq|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}.\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$$

۴۰. دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند. اگر بردار $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، نشان دهید: $\vec{a}'=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$.

پاسخ: در شکل $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ است و بردار $\vec{a}-\vec{a}'$ بر b عمود است پس داریم:



$$(\vec{a}-\vec{a}')\perp\vec{b}\Rightarrow(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=۰\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}'.\vec{b}=۰\quad(۱)$$

از طرف دیگر $\vec{a}'$ در امتداد $\vec{b}$ است پس $\vec{a}'\parallel\vec{b}$ پس $\vec{a}'=m\vec{b}$ در نتیجه:

$$(۱)\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}-m\vec{b}.\vec{b}=۰\xrightarrow{\vec{b}.\vec{b}=|\vec{b}|^۲}m=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\quad(۲)$$

بنابراین:

$$\vec{a}'=m\vec{b}\xrightarrow{\text{از }(۲)}\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

۴۱. نشان دهید اگر دو بردار $\vec{a}$ و b بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر قائم یکی از آنها بر امتداد دیگری بردار صفر است.

پاسخ: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند پس $\vec{a}.\vec{b}=۰$ بنابراین:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{۰}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\vec{۰}$$

۴۲. دو بردار $\vec{a}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ و $\vec{b}=(x'\ ,\ y'\ ,\ z')$ مفروض‌اند. ثابت کنید: $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰$.

پاسخ: ابتدا بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=(yz'-y'z)i-(xz'-x'z)j+(xy'-x'y)k$$

اکنون:

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=(x\ ,\ y\ ,\ z).(yz'-y'z\ ,\ -xz'+x'z\ ,\ xy'-x'y)=$$
$$xyz'-xy'z-xyz'+x'yz+xy'z-x'yz=۰$$

۴۳. نشان دهید اگر $\vec{b}\,||\,\vec{a}$ آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ خود بردار $\vec{a}$ است.

پاسخ: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی‌اند پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مضرب یکدیگرند. فرض کنیم $\vec{a}=m\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{m\vec{b}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=\frac{m|\vec{b}|^۲}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}=m\vec{b}=\vec{a}$$

پس $\vec{a}'=\vec{a}$.

۴۴. اگر $\vec{a}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ و $\vec{b}=(x'\ ,\ y'\ ,\ z')$ دو بردار غیر صفر و θ زاویهٔ بین آنها باشد آنگاه نشان دهید:
$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$.

پاسخ: ابتدا مختصات بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\vec{a}=(x\ ,\ y\ ,\ z)\\ \vec{b}=(x'\ ,\ t'\ ,\ z')\end{matrix}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=(yz'-y'z)i-(xz'-x'z)j+(xy'-x'y)k$$

اکنون اندازهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=(yz'-y'z)^۲+(xz'-x'z)^۲+(xy'-x'y)^۲=$$

$$y^۲z'^۲+y'^۲z^۲-۲yz'y'z+x^۲z'^۲+x'^۲z^۲-۲xz'x'z+x^۲y'^۲+x'^۲y^۲-۲xx'yy'$$

حال عبارت $x^۲x'^۲+y^۲y'^۲+z^۲z'^۲$ را اضافه و کم می‌کنیم

$$(x^۲x'^۲+y^۲y'^۲+z^۲z'^۲+y^۲z'^۲+y'^۲z^۲+x^۲z'^۲+x'^۲z^۲+x^۲y'^۲+x'^۲y^۲)-(x^۲x'^۲+y^۲y'^۲+z^۲z'^۲$$
$$+۲yz'y'z+۲xz'x'z+۲xx'yy')=$$
$$(x^۲+y^۲+z^۲)(x'^۲+y'^۲+z'^۲)-(xx'+yy'+zz')^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲-(\vec{a}.\vec{b})^۲=$$
$$|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲-|a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲(۱-\cos^۲\theta)=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\sin^۲\theta\Rightarrow$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\sin^۲\theta\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

hendese_beigi

۴۵. اگر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی باشند ثابت کنید: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ و برعکس.

پاسخ: فرض کنیم θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0\xleftrightarrow{|\vec{a}|\neq 0\ ,\ |\vec{b}|\neq 0}\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0 \text{ یا } \theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۴۶. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، نشان دهید: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

پاسخ: اگر θ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\\ \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

۴۷. اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ آنگاه ثابت کنید: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

پاسخ: طرفین فرض را یکبار در بردار $\vec{a}$ و بار دیگر در بردار $\vec{b}$ ضرب خارجی می‌کنیم.

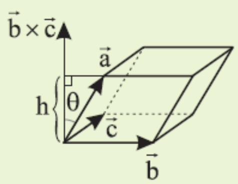
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\xrightarrow{\vec{a}\times}\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{0}\Rightarrow\vec{0}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}\quad(1)$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\xrightarrow{\vec{b}\times}\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{0}\Rightarrow\vec{b}\times\vec{a}+\vec{0}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow$$

۴۸. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه یال همرس یک متوازی‌السطوح باشند، ثابت کنید: $|\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=$ حجم متوازی‌السطوح.

پاسخ: متوازی‌السطوح نوعی منشور است پس حجم آن مساوی حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است. در شکل بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ که عمود بر صفحهٔ $\vec{b}$ و $\vec{c}$ رسم شده و ارتفاع h اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}\times\vec{c}$ است. اگر θ زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ باشد داریم:



$$\cos\theta=\frac{h}{|\vec{a}|}\Rightarrow h=|\vec{a}|\cos\theta\ ,\ \text{مساحت قاعده}=|\vec{b}\times\vec{c}|$$

اکنون می‌نویسیم:

$$\text{حجم}=(\text{ارتفاع})(\text{مساحت قاعده})=|a||b\times c|\cos\theta=|a.(b\times c)|$$