منبع: کنکور سراسری

۱ خط به معادلهٔ $y = 3x - 2$ در نقطهٔ $x = 2$ بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \to 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x-2}$، کدام است؟

۱) ۳　　　۲) ۶

۳) ۱۲　　　۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲ اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

۱) ۶-　　　۲) ۳-

۳) $-\frac{3}{2}$　　　۴) $-\frac{3}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳ مشتق چپ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطهٔ $x = 0$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۴ تابع با ضابطهٔ $y = x\sqrt{x^2}$ ازنظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.　　　۲) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر　　　۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & ;\ x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ;\ x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $3 - \sqrt{2}$　　　۲) $2 - \sqrt{2}$

۳) $2 - 2\sqrt{2}$　　　۴) $3 - 2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax^{3}+bx & ; x<1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x\geq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} & ; x\geq 1 \\ ax^{2}+bx & ; x<1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۸ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} 1+a\cos \pi x & ; x>1 \\ bx^{2}+x & ; x\leq 1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۱
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) -۱
۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۹ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left||x|-1\right|$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۱۰ اگر $f(x)=1-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ در نقطهٔ $x=\alpha$ مشتق ندارد، مقدار $f'_{+}(\alpha)-f'_{-}(\alpha)$ کدام است؟

۱) -1
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) تعریف‌نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۲ اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطهٔ زاویه‌دار آن عمود برهم باشند، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۱\}$
۲) $\{۱\}$
۳) $\{-۱, ۱\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; \text{گویا } x \\ ۰ & ; \text{گنگ } x \end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) هیچ نقطه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-۱)^{[x]} \cos \frac{\pi x}{۲}$ روی بازهٔ $[۰, ۴]$ دارای چند نقطهٔ زاویه‌دار است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left[x + \frac{۱}{۳}\right] + [x]$ روی بازهٔ $(۰, ۳)$ در چند نقطه، مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left[\frac{۱}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

۱) $[۰, ۱]$
۲) $(-۱, ۰)$
۳) $[۱, +\infty)$
۴) $(-\infty, -۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۷ مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطهٔ $x = -۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$
۲) -۵
۳) -۴
۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۸ اگر θ زاویهٔ بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [۲ + \cos \frac{x}{۲}]\sin ۲x$ در نقطهٔ $x = \pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۹ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۳x + |x|$ و $g(x) = \frac{۳}{۴}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۰ تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-۹}{h} = \frac{۳}{۲}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳

۳) ۳/۵ ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱ اگر θ زاویهٔ دو مماس چپ و راست در نقطهٔ گوشه نمودار تابع $y = |\ln x|$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

۳) صفر ۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۲ اگر تابع f در $x = ۴$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to ۴} \frac{f(x)+۷}{x-۴} = \frac{-۳}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(۲x)}{x}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۳ اگر تابع f در $x = -۲$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h\to ۰} \frac{f(-۲+h)+۳}{h} = \frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $x^۲ f(x)$ در $x = -۲$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ مشتق عبارت $\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$ به ازای $x = -8$ کدام است؟

۱) -1
۲) $\frac{-1}{2}$
۳) 1
۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۵ اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$، مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

۱) 1
۲) 2
۳) 3
۴) 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۶ اگر $f(x) = \frac{x+\sqrt{2x}}{x-1}\cot\frac{\pi}{x}$، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

۱) $-\pi$
۲) $\frac{-\pi}{2}$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۷ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، حاصل $f'(x)\cdot g'(f(x))$ کدام است؟

۱) -1
۲) 1
۳) x
۴) $\frac{1}{2}x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۸ اگر $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$ و $f(x) = \sin^2\pi x$، مشتق تابع fog به ازای $x = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{5}{8}$
۳) $\frac{3}{4}\pi$
۴) $\frac{5}{8}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۹ اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin\pi x$، شیب خط مماس بر منحنی تابع gof در نقطهٔ تلاقی آن با محور xها، روی بازهٔ $(0, \pi)$ کدام است؟

۱) $-\pi$
۲) $\frac{-\pi}{2}$
۳) π
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۰ اگر $h(0) = 2h'(0) = -g(1) = -g'(1) = f'(-1) = 1$، مقدار مشتق تابع $fogoh$ در صفر کدام است؟

۱) -2
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۱ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

۱) $-x + \sqrt{1+x^2}$
۲) $x - \sqrt{1+x^2}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
۴) $\sqrt{1+x^2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۲ مشتق $f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطهٔ $x = 1$ برابر -2 است، شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) 3
۴) 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۳۳ اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$، در نقطهٔ $x = 2$ کدام است؟

۱) -1
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۴ اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2}\cos \pi x$ باشد، مشتق $y = f(f(x))$ در $x = \frac{1}{3}$، چند برابر $3\sqrt{3}$ است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$
۲) $\frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi^2}{8}$
۴) $\frac{\pi^2}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۳۵ اگر $f(x) = x + \sqrt{x+1}$، مقدار مشتق $f\left(\sin \frac{x}{2}\right)$ در $x = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) 1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۶ اگر $\frac{۳}{۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}$ و $f(x) = \sqrt{۵ - x^۲}$، آنگاه $(gof)'(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۷ اگر $-\frac{۱}{۳} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$، مشتق $f(\sqrt{|x| + ۳})$ در نقطهٔ $x = -۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۳۸ اگر $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، مشتق تابع $f(\tan x)$ با شرط $|x| < \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sin x}$ ۲) $\frac{۱}{\cos x}$

۳) $\sin x$ ۴) $\cos x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۳۹ مشتق تابع $y = \cos^۲(\tan^{-۱} x)$، به ازای $x = ۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴۰ مشتق تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{۳} + \tan^{-۱}\frac{x}{۲})$ در نقطهٔ $x = ۲\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۴۱ اگر هزینهٔ چاپ تعداد x کتاب حسابان به‌صورت $C(x) = ۸۰۰۰۰۰ + ۱۵۰x + ۷۵۰۰۰\sqrt[۳]{x}$ باشد، هزینهٔ چاپ ۱۰۰۱اُمین کتاب برابر کدام است؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۳۷۵

۳) ۴۰۰ ۴) ۴۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۴۲ به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $y = (m-2)x + 3$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = tan^{-1}\frac{1}{x}$ است؟

۱) $0 < m < 1$
۲) $0 < m < 2$
۳) $1 < m < 2$
۴) $2 < m < 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۴۳ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = (x+2)e^{1-x}$ در نقطهٔ $x = 1$ با خطی که این نقطهٔ تماس را به مبدأ مختصات وصل کند، زاویهٔ α می‌سازد. $tan\,\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴۴ خط مماس بر نمودار $y^3 + 3xy^2 - 3x^3y = 1$ در نقطهٔ $(1,1)$ از کدام نواحی صفحهٔ مختصات می‌گذرد؟

۱) اول و سوم
۲) اول و چهارم
۳) اول و دوم و سوم
۴) اول و دوم و چهارم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۵ اگر $f(x) = xe^x\,,\, x > 0$، آنگاه خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول e واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{e}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۶ از رابطهٔ $x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطهٔ $(1,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$
۲) $\frac{8}{6}$
۳) $\frac{11}{6}$
۴) $\frac{13}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۴۷ از رابطهٔ $x^2y + y^2 + 3 = 0$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطهٔ $(2,-1)$ کدام است؟

۱) -11
۲) -9
۳) -8
۴) -6

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۸ اگر $f(x) = x + e^x$ باشد، معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ تلاقی آن با محور xها کدام است؟

۱) $2y - x = -1$
۲) $2y + x = 1$
۳) $y - 2x = 1$
۴) $y + 2x = 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \ln x$ مفروض است. معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطهٔ تلاقی آن با نیمساز ربع اول کدام است؟

۱) $y + 2x = 3$
۲) $2x - y = 1$
۳) $2x + y = 3$
۴) $2y - x = 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۰ عرض از مبدأ خط قائم بر نمودار $x^3 + y^3 = 3xy + 3$ در نقطهٔ $(1, 2)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + e^{2x}$ مفروض است. معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1}، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $3y - x = -1$
۲) $y - 3x = -3$
۳) $2y - x = -2$
۴) $2y + x = 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۲ خط قائم بر نمودار $x^2y - \ln(2x - y) = 12$ در نقطهٔ $(2, 3)$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -5
۲) -4
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۳ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) $\frac{-1}{2}$
۲) $\frac{-1}{3}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۵۴ اگر $f(x) = x^3 - 2x \ , \ x > 1$ و خط به معادلهٔ $10y = x + m$ مماس بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آنگاه m کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۵۵ اگر $f(x) = x - \frac{1}{x} \ , \ x > 0$، به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $2y - x = a$ مماس بر نمودار تابع f^{-1} است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۶ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \ , \ x > -2$ و خط به معادلهٔ $5y + x = b$ یکی از قائم‌های نمودار تابع f^{-1} باشد، b کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۲۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۵۷ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و خط به معادلهٔ $4y + 5x = a$ قائم بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آنگاه a کدام است؟

۱) ۳۴
۲) ۳۶
۳) ۴۶
۴) ۴۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۵۸ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \ ; \ x > -2$، خط قائم بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۹ اگر $x > 0$ و $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطهٔ تلاقی آن با نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۶۰ خط مماس بر نمودار تابع با ضابطهٔ $y+\frac{\pi}{۴}=tan^{-۱}\sqrt{۳x-۵}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۶۱ خط مماس بر منحنی تابع f، در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، به معادلهٔ $۲y+x=۷$ می‌باشد. اگر $g(x)=\frac{۱}{x}f^{-۱}(x)$ آنگاه $g'(۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۶۲ اگر $f(x)=x^۳-x^۲+۲x$ باشد، معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $x=۲$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y+۳x=۷$
۲) $y-۳x=-۵$
۳) $۳y+x=۵$
۴) $۳y-x=۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۶۳ اگر $f^{-۱}$ وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد و $g(x)=\sqrt{۲xf^{-۱}(x)}$، $f(۴)=۲$ و $f'(۴)=\frac{۱}{۳}$ آنگاه $g'(۲)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۶۴ مشتق تابع $y=tan^۲(\frac{\pi}{۳}+sin^{-۱}x)$، به ازای $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کدام است؟

۱) $-۱۶\sqrt{۳}$
۲) $-۱۲\sqrt{۳}$
۳) $-۸\sqrt{۳}$
۴) $-۴\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۶۵ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، آن‌گاه $(f^{-۱})'(\frac{۳}{۵})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۵}{۶۴}$
۲) $\frac{۳۲}{۲۵}$
۳) $\frac{۲۵}{۳۲}$
۴) $\frac{۶۴}{۱۲۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۶ مشتق تابع $f(x) = tan(\frac{\pi}{۶} + sin^{-۱}\sqrt{x})$، در نقطهٔ $x = \frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

۲) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۷ به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+۲)y = mx$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{۱ + x^۲}$ است؟

۱) $m > -۱$

۲) $m < -۱$

۳) $m > ۱$

۴) $m < ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۶۸ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ;x \geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & ;x < ۰ \end{cases}$، مشتق اول و دوم تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ چگونه است؟

۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم دارد.

۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.

۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد.

۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۶۹ از تساوی $y = \sqrt[۳]{x}$، مقدار $y'' y^۵$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{-۴}{۹}x$

۲) $\frac{-۱}{۳}x$

۳) $\frac{-۲}{۹}$

۴) $\frac{-۲}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۷۰ اگر $f'(۰) = g(۰) = ۱$ و $f(x) = x + ۱ + (g(x))^۵$، مقدار $f''(۰)$ برابر کدام است؟

۱) $۴g''(۰)$

۲) $۵g''(۰)$

۳) $۴g''(۰) + ۲۰$

۴) $۵g''(۰) + ۲۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۱ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲}{x-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۷۲ خط گذرا از دو نقطهٔ $(۱, ۲)$ و $(-۱, ۳)$، بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}$ وقتی $x \to ۳$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۷۳ تابع f زوج است. اگر خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۳$ مماس بر نمودار در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن باشد، آنگاه معادلهٔ خط قائم بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱- واقع بر آن کدام است؟

۱) $y - ۲x - ۱ = ۰$
۲) $۲y - x + ۱ = ۰$
۳) $y + ۲x + ۱ = ۰$
۴) $۲y + x + ۳ = ۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۷۴ به ازای کدام مقدار a، منحنی به معادلهٔ $ay = x^۲ + ۵x + ۴$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۷۵ به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۴$ بر منحنی به معادلهٔ $y = (m + ۳)x^۲ + mx$، مماس است؟

۱) ۱۸ و ۲-
۲) ۲۲ و ۲-
۳) ۲۲ و ۲
۴) ۱۱ و ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۷۶ به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ax^۲ + ۴x$، بر هم مماس‌اند؟

۱) ۴-
۲) ۳-
۳) ۲-
۴) ۱-

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷۷ نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = -x^۴ + ۲x^۲ + x$ و $g(x) = x + ۱$ در چند نقطه بر هم مماس هستند و نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) یک نقطه - قاطع
۲) یک نقطه - غیرقاطع
۳) دو نقطه - قاطع
۴) دو نقطه - غیرقاطع

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۷۸ خط گذرنده از مبدأ مختصات، بر منحنی به معادلهٔ $y = (x+1)(x+4)$ در ناحیهٔ اول مماس است، شیب این خط کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۷۹ خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱-، از منحنی به معادلهٔ $y = x^3 + ax^2 + 2x$ را به هم وصل کند، بر این منحنی مماس است. a کدام است؟

۱) ۱ و ۱-
۲) ۲ و ۱-
۳) ۲ و ۱
۴) ۱ و ۲-

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸۰ خط گذرا از دو نقطه به طول‌های ۱ و $-\frac{1}{2}$ واقع بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{1}{x^2}$، در نقطه‌ای با کدام طول بر این منحنی مماس است؟

۱) ۲-
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) نشدنی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۸۱ از نقطهٔ $A(0,-1)$ دو خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + x$ رسم شده است، شیب مثبت این مماس کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۸۲ از نقطهٔ $A(0,-2)$ دو خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^2 - 1$ رسم شده است. مساحت مثلث با رأس‌های A و دو نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{5}{2}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۸۳ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطهٔ $(-1,0)$ می‌گذرد. α کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۸۴ از نقطهٔ $A(0, \alpha)$ دو خط مماس عمود بر هم، بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ رسم شده است. α کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{9}{4}$
۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸۵ از نقطهٔ M به عرض ۴ واقع بر محور yها، خطی مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = -x^2 + 2x$ با شیب مثبت رسم شده است، عرض نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) -۸
۲) -۶
۳) -۵
۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۸۶ از نقطهٔ $A(2, -1)$، دو خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ رسم شده است. زاویهٔ بین این دو خط مماس، کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{\pi}{3}$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) $tan^{-1}2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۸۷ از نقطهٔ $A(2, 9)$، دو خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 2x + 5$ رسم شده است. تانژانت زاویهٔ بین این دو خط مماس کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{5}{12}$
۲) $\frac{7}{10}$
۳) $\frac{8}{11}$
۴) $\frac{7}{6}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۸۸ به ازای کدام مقدار a خط به معادلهٔ $y = -3x + 2$، بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^2+a}{x-2}$، مماس است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۹ امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{sin\, x}{1+cos\, x}$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{3}$ با نیمساز ربع سوم، زاویهٔ α می‌سازد. $tan\, \alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۲
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۹۰ اگر θ زاویهٔ بین دو مماس چپ و راست در نقطهٔ گوشهٔ نمودار تابع $y=\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3}}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱	○○●○	۱۱	○○●○	۲۱	○○○●	۳۱	○○●○	۴۱	○○●○	۵۱	●○○○
۲	●○○○	۱۲	○○●○	۲۲	○○●○	۳۲	●○○○	۴۲	○○●○	۵۲	○●○○
۳	●○○○	۱۳	●○○○	۲۳	○○○●	۳۳	○○●○	۴۳	○●○○	۵۳	○●○○
۴	●○○○	۱۴	○●○○	۲۴	●○○○	۳۴	○○●○	۴۴	●○○○	۵۴	○○●○
۵	○○●○	۱۵	○○○●	۲۵	○○●○	۳۵	○○●○	۴۵	○○●○	۵۵	○●○○
۶	○●○○	۱۶	○○○●	۲۶	○○○●	۳۶	●○○○	۴۶	○○○●	۵۶	○○●○
۷	○○○●	۱۷	○●○○	۲۷	○●○○	۳۷	○●○○	۴۷	●○○○	۵۷	○○●○
۸	○○○●	۱۸	○○●○	۲۸	○○○●	۳۸	○●○○	۴۸	○○○●	۵۸	○○○●
۹	○○○●	۱۹	●○○○	۲۹	●○○○	۳۹	●○○○	۴۹	○○○●	۵۹	●○○○
۱۰	○○●○	۲۰	○○●○	۳۰	○●○○	۴۰	○●○○	۵۰	○○○●	۶۰	●○○○

۶۱	●○○○	۷۱	○○○●	۸۱	○○●○
۶۲	●○○○	۷۲	○●○○	۸۲	●○○○
۶۳	○○●○	۷۳	○●○○	۸۳	○○○●
۶۴	●○○○	۷۴	○○○●	۸۴	○○○●
۶۵	●○○○	۷۵	○●○○	۸۵	●○○○
۶۶	○●○○	۷۶	○●○○	۸۶	○○●○
۶۷	●○○○	۷۷	○○○●	۸۷	○○●○
۶۸	○●○○	۷۸	○○○●	۸۸	○●○○
۶۹	○○●○	۷۹	●○○○	۸۹	○●○○
۷۰	○●○○	۸۰	○○●○	۹۰	○○●○

منبع: کنکور سراسری

۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس، هم در معادلهٔ خط مماس و هم در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y = 3x - 2$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(2) = 3$ است. با جایگذاری $x = 2$ در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس نیز برابر است با:

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)(f(x)-4)}{x-2}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to 2} f(x)}_{f(2)} \times \underbrace{\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-4}{x-2}}_{f'(2)} = f(2) \times f'(2) = 4 \times 3 = 12$$

۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

طبق تعریف مشتق، حد خواسته‌شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -1$ است یعنی:

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

گام دوم

به ازای $x = -1$ عبارت $\left(x^2 - x - 2\right)$ برابر صفر می‌شود و تابع $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 7x}$ نیز در $x = -1$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبهٔ مشتق در نقطهٔ $x = -1$، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $\left(x^2 - x - 2\right)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و درنهایت مقدار آن را به ازای $x = -1$ به دست آوریم:

$$x = -1 \ : \ f'(x) = (2x - 1)\sqrt[3]{x^2 - 7x} \Rightarrow f'(-1)$$
$$= (-2 - 1)\sqrt[3]{(-1)^2 - 7(-1)} = (-3)\sqrt[3]{8} = -3 \times 2 = -6$$

۳ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید همواره نامنفی باشد.

ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.

ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

گام دوم

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1-x^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x^2\leq 1 \quad\Rightarrow\quad -1\leq x\leq 1 \quad\Rightarrow\quad D_f=[-1,1]$$

تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است (باتوجه‌به اینکه گزینهٔ "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج حذف شود:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

چون داریم:

$$x\to 0^- \quad\Rightarrow\quad x<0 \quad\Rightarrow\quad |x|=-x$$

بنابراین:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-0}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰) \quad ; \quad ۰ \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ مشـتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسـته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(۰) = f'_+(۰)$

گام دوم

چون $x^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است پس $D_f = R$.

اکنون ضابطهٔ تابع را به ازای $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تعیین می‌کنیم:

$$y = x\sqrt{x^۲} = x|x| = \begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x^۲ \\ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x^۲ \end{cases}$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۰^+} y = \lim_{x\to ۰^+} x^۲ = ۰ \\ \lim_{x\to ۰^-} y = \lim_{x\to ۰^-} -x^۲ = ۰ \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق‌پذیری تابع را بررسی می‌کنیم:

$$y' = \begin{cases} ۲x & ; \ x > ۰ \\ -۲x & ; \ x < ۰ \end{cases} \Rightarrow y'_-(۰) = y'_+(۰) = ۰$$

پس تابع در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق‌پذیر است.

۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) $f'(1)$ موجود است؛ یعنی در $x=1$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.

ب) تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$$

ج) تابع در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(1)=f'_-(1)$$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه $1-\sqrt{2}<1$ است، برای محاسبهٔ $f(1-\sqrt{2})$ باید از ضابطهٔ مربوط به xهای کوچک‌تر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x-\frac{1}{x}\right)=1-1=0\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+ax+b=a+b+1\\ f(1)=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)} a$$

$$+b+1=0 \Rightarrow a+b=-1\,(I)$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطهٔ $x=1$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{x^2} & ;x>1\\ 2x+a & ;x<1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=f'_-(1) \Rightarrow 1+1=2+a \Rightarrow a+2=2 \Rightarrow a=0$$

با جایگذاری در رابطهٔ I مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$a+b=-1 \Rightarrow 0+b=-1 \Rightarrow b=-1$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به ازای $x<1$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$x<1 \ : \quad f(x)=x^2-1$$

$$\Rightarrow f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2-1=1-2\sqrt{2}+2-1=2-2\sqrt{2}$$

۶ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} ۲\sqrt{۴x-۳} = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} ax^۳ + bx = a+b \\ f(۱) = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)} a+b=۲ \qquad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} ۳ax^۲ + b & ; \ x < ۱ \\ ۲\times \frac{۴}{۲\sqrt{۴x-۳}} & ; \ x > ۱ \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که $f'_-(۱)$ و $f'_+(۱)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱) \Rightarrow ۳a+b = \frac{۴}{\sqrt{۴-۳}} \Rightarrow ۳a+b=۴ \qquad (II)$$

دو معادلهٔ I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۳a+b=۴ \\ a+b=۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲a=۲ \Rightarrow a=۱ \xrightarrow{(I)} ۱+b=۲ \Rightarrow b=۱$$

۷ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ R مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \dfrac{۲\sqrt{x}}{x} = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} ax^۲ + bx = a + b \\ f(۱) = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)} a + b = ۲ \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{۳}{۲}} & ;x > ۱ \\ ۲ax + b & ;x < ۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۱) = -(۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -۱ \\ f'_-(۱) = ۲a + b \end{array}\right\} \xrightarrow{f'_+(۱)=f'_-(۱)} ۲a + b = -۱ \qquad (II)$$

دو رابطهٔ I و II را به‌صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = ۲ \\ ۲a + b = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = ۳ \Rightarrow a = -۳ \xrightarrow{(I)} -۳ + b = ۲ \Rightarrow b = ۵$$

۸ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ R مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشـتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسـته و مشـتق‌پذیر است. کافی است پیوسـتگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط مقادیر a و b را به دست می‌آوریم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} ۱ + a\cos \pi x = ۱ + a\cos \pi = ۱ + a(-۱) = ۱ - a \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} bx^۲ + x = b(۱)^۲ + ۱ = b + ۱ \\ f(۱) = b(۱)^۲ + ۱ = b + ۱ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} ۱ - a = b + ۱ \Rightarrow a = -b \qquad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

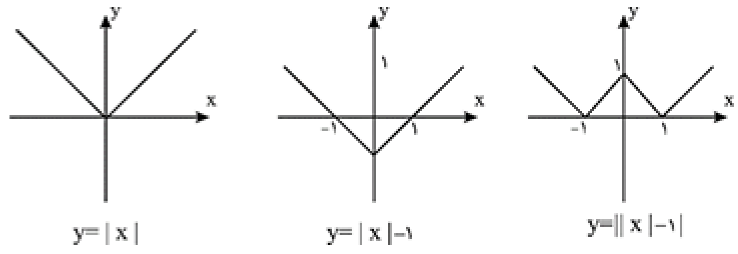
$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin \pi x\,; & x > ۱ \\ ۲bx + ۱\,; & x < ۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۱) = -a\pi \sin \pi = ۰ \\ f'_-(۱) = ۲b + ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{f'_+(۱) = f'_-(۱)} ۲b + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲b = -۱ \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(I)} a = -\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۹ **گزینه ۴**

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشـخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



باتوجه‌به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x = ۱, x = ۰, x = -۱$ نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قـدر مطلق نیز مشـتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلقی دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x| - ۱|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$۱) |x| \quad : \quad x = ۰$$

$$۲) ||x| - ۱| \quad : \quad |x| - ۱ = ۰ \Rightarrow |x| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

تابع در سه نقطهٔ $x = ۱, x = ۰, x = -۱$ مشتق‌ناپذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۱۰ **گزینه ۳**

برای تعیین ضابطهٔ تابع $f(f(x))$، کافی است در ضابطهٔ $f(x)$ به‌جای متغیر x تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم:

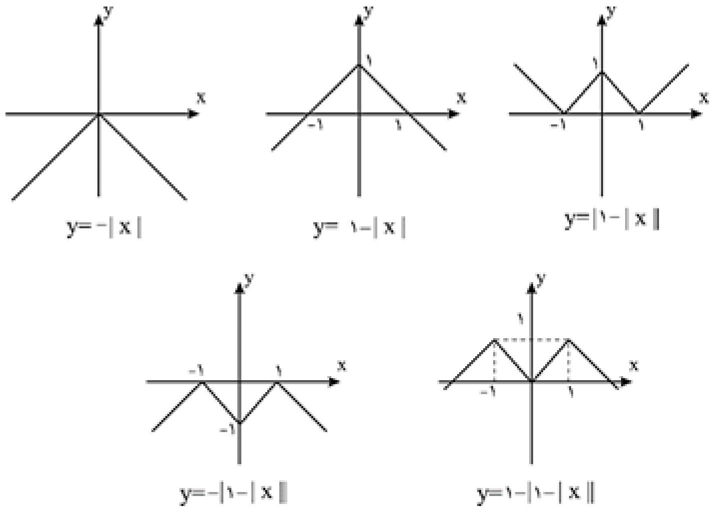
$$f(x) = ۱ - |x| \quad \Rightarrow \quad f(f(x)) = ۱ - |f(x)| = ۱ - |۱ - |x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$۱)|x| \; : \quad x = ۰$$

$$۲)|۱ - |x|| \; : \quad ۱ - |x| = ۰ \quad \Rightarrow \quad |x| = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = \pm ۱$$

علاوه‌برآن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y = |۱ - |x||$، دارای سه نقطهٔ مشتق‌ناپذیر $x = -۱, x = ۱, x = ۰$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

توابع شامل قـدر مطلق در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشـتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در $x = 0$ مشتق ندارد پس $\alpha = 0$ است.

گام دوم

به ازای $x > 0$ و $x < 0$ ضابطهٔ مشـتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را تعیین می‌کنیم سـپس حاصـل عبارت $f'_+(0) - f'_-(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$x > 0 \ : \ |x| = x \ \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x} \ \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$
$$\Rightarrow f'_+(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2\times 1} = \frac{1}{2}$$
$$x < 0 \ : \ |x| = -x \ \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x} \ \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$
$$\Rightarrow f'_-(0) = \frac{-1}{2\sqrt{1-0}} = \frac{-1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

۱۲ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) در توابع دارای عبارت قـدر مطلقی، ریشهٔ سادهٔ عبارت درون قدر مطلق نقطهٔ زاویه‌دار یا مشـتق‌ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x) = |x|(x+a)$ نقطهٔ زاویه‌دار تابع، نقطهٔ $x = 0$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطهٔ $x = 0$ برابر $f'_+(0)$ و شیب مماس چپ در نقطهٔ $x = 0$ برابر $f'_-(0)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطهٔ $x = 0$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(0) \cdot f'_+(0) = -1$

گام دوم

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = x(x+a) = x^2 + ax$$
$$\Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_+(0) = 2(0) + a = 0 + a = a$$
$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)(x+a) = -x^2 - ax$$
$$\Rightarrow f'(x) = -2x - a \Rightarrow f'_-(0) = -2(0) - a = 0 - a = -a$$
$$f'_+(0) f'_-(0) = -1 \ \Rightarrow \ a(-a) = -1 \ \Rightarrow \ -a^2 = -1 \ \Rightarrow \ a^2 = 1 \ \Rightarrow \ a = \pm 1$$

۱۳ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف‌شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطهٔ مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطهٔ آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;\ x\ \text{گویا} \\ 0 & ;\ x\ \text{گنگ} \end{cases} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & ;\ x\ \text{گویا} \\ 0 & ;\ x\ \text{گنگ} \end{cases} \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=0$ مشتق دارد.

۱۴ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

ب) یک نقطه روی نمودار تابع را نقطهٔ زاویه‌دار گوییم هرگاه مماس چپ و راست در آن نقطه موجود و دارای شیب نابرابر باشند. دقت کنید که حداقل یکی از مماس‌ها باید قائم نباشد. یادآوری می‌کنیم که تابع در نقاط زاویه‌دار مشتق‌ناپذیر است.

گام دوم

بازهٔ $[0,4]$ را به زیربازه‌هایی تقسیم می‌کنیم که $[x]$ روی آن‌ها پیوسته باشد، سپس ضابطهٔ تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم.

$$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow f(x)=(-1)^0\cos\frac{\pi x}{2}=\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(x)=(-1)^1\cos\frac{\pi x}{2}=-\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$2\le x<3 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow f(x)=(-1)^2\cos\frac{\pi x}{2}=\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$3\le x<4 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow f(x)=(-1)^3\cos\frac{\pi x}{2}=-\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$x=4 \Rightarrow [x]=4 \Rightarrow f(x)=(-1)^4\cos\frac{\pi x}{2}=\cos\frac{\pi x}{2}$$

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هر زیربازه پیوسته و مشتق‌پذیر است. زاویه‌دار بودن نقاط مرزی؛ یعنی نقاط

$x=۱$, $x=۲$, $x=۳$ را بررسی می‌کنیم:

$$x=۱: \begin{cases} \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} \cos\frac{\pi x}{۲}=\cos\frac{\pi}{۲}=۰ \\ \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} -\cos\frac{\pi x}{۲}=-\cos\frac{\pi}{۲}=۰ \\ f(۱)=۰ \end{cases}$$

پس تابع در $x=۱$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲} & ;x<۱ \\ \frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲} & ;x>۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(۱)=-\frac{\pi}{۲} \\ f'_+(۱)=\frac{\pi}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow f'_-(۱)\neq f'_+(۱)$$

مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x=۱$ موجود و نابرابر است پس یک نقطهٔ زاویه‌دار تابع محسوب می‌شود.

$$x=۲: \begin{cases} \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} -\cos\frac{\pi x}{۲}=-\cos\frac{۲\pi}{۲}=-\cos\pi=۱ \\ \lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} \cos\frac{\pi x}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۲}=\cos\pi=-۱ \\ f(۲)=-۱ \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته نیست پس بحث زاویه‌دار بودن آن منتفی است.

$$x=۳: \begin{cases} \lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-} \cos\frac{\pi x}{۲}=\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰ \\ \lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} -\cos\frac{\pi x}{۲}=-\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰ \\ f(۳)=۰ \end{cases}$$

پس تابع در $x=۳$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲} ;x<۳ \\ \frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲} ;x>۳ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(۳)=\frac{\pi}{۲} \\ f'_+(۳)=-\frac{\pi}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow f'_-(۳)\neq f'_+(۳)$$

مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x=۳$ موجود و نابرابر است پس یک نقطهٔ زاویه‌دار تابع محسوب می‌شود. تابع درمجموع دو نقطهٔ زاویه‌دار دارد.

۱۵ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) تابع $y=[f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

ب) هرکدام از دو تابع $\left[x+\frac{۱}{۳}\right]$ و $[x]$ روی بازهٔ $(۰,۳)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x)=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(۰,۳)$، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

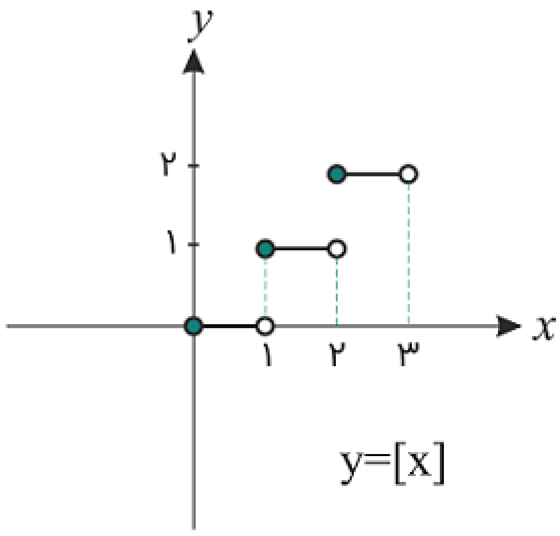
$$۱)\quad y=[x]:\quad x\in Z\,,\ x\in(۰,۳)\ \Rightarrow\ x=۱\,,\ x=۲$$

$$۲)\quad y=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]:\quad x+\frac{۱}{۳}\in Z\,,\ x\in(۰,۳)\ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}\,,\ x=\frac{۵}{۳}\,,\ x=\frac{۸}{۳}$$

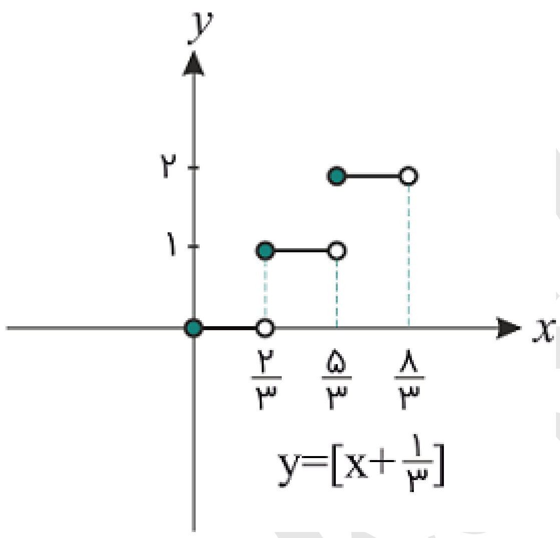
بنابراین تابع $f(x)$ درمجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]$ و $y=[x]$، نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



نقاط ناپیوستگی: $x=۱\,,\ x=۲$



نقاط ناپیوستگی: $x=\frac{۲}{۳}\,,\ x=\frac{۵}{۳}\,,\ x=\frac{۸}{۳}$

بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

۱۶ **گزینه ۴**

روش اول:

تابع $y=[f(x)]$ به ازای مقادیری که عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است؛ بنابراین تابع روی بازه‌ای مشتق‌پذیر است که خروجی آن فقط یک مقدار باشد.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x\in[0,1] \Rightarrow 0\le x\le 1 \Rightarrow \frac{1}{x}\in[1,\infty)$$

$x=0$ ریشهٔ مخرج کسر است. به ازای $0<x\le 1$، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع در این بازه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x\in(-1,0) \Rightarrow -1<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}\in(-\infty,-1)$$

در این بازه، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x\in[1,+\infty) \Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow 0<\frac{1}{x}\le 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases}0 & ;0<\frac{1}{x}<1\\ 1 & ;\frac{1}{x}=1\end{cases}$$

تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته است بنابراین روی بازهٔ $[1,+\infty)$ مشتق‌ناپذیر می‌شود.

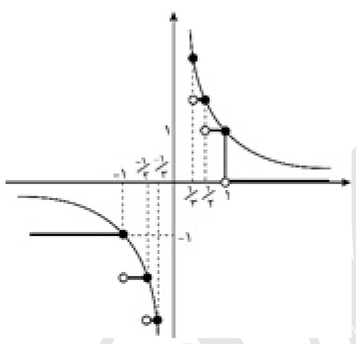
بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x\in(-\infty,-1) \Rightarrow x<-1 \Rightarrow -1<\frac{1}{x}<0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=-1$$

تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ روی بازهٔ $(-\infty,-1)$، یک تابع ثابت است پس روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

روش دوم:

با رسم نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$، بازهٔ مشتق‌پذیری آن را مشخص می‌کنیم:



همان‌طوری که مشاهده می‌کنید از میان گزینه‌ها، تابع تنها در بازهٔ $(-\infty,-1)$ برابر تابع ثابت $f(x)=-1$ است، درنتیجه روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۷ **گزینه ۲**

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \to (-۳)^+$ داریم:

$$x \to (-۳)^+ \Rightarrow x > -۳ \Rightarrow [x] = -۳, |x| = -x$$
$$\Rightarrow f(x) = (-۳ + x)\sqrt[۳]{۹x} = (x-۳)\sqrt[۳]{۹x}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{۹x} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۸۱x^۲}}(x-۳)$$
$$\Rightarrow f'_+(-۳) = \sqrt[۳]{-۲۷} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۷۲۹}}(-۶) = -۳ + \frac{۹}{۳\times۹}(-۶) = -۳ - ۲ = -۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۸ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب $m_۱$ و $m_۲$ برابر است با:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱m_۲}\right|$$

گام دوم

به ازای $x = \pi$ مقدار $\sin ۲x$ برابر با صفر است؛ ازطرفی $۲ + \cos\frac{x}{۲}$ نیز همواره کران‌دار است؛ بنابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \pi$ پیوسته است.

باتوجه‌به گام اول، شیب مماس چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = \pi$ برابر با مقدار مشتق چپ و راست تابع در این نقطه است.

قبل از محاسبهٔ مشتق راست و چپ تابع، ضابطهٔ تابع را وقتی $x \to \pi^+$ و وقتی $x \to \pi^-$ تعیین می‌کنیم.

$$x \to \pi^+ : x > \pi \Rightarrow \frac{x}{۲} > \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos\frac{x}{۲} < ۰ \Rightarrow ۲ + \cos\frac{x}{۲} < ۲$$
$$\Rightarrow [۲ + \cos\frac{x}{۲}] = ۱ \Rightarrow f(x) = \sin ۲x$$
$$\Rightarrow f'(x) = ۲\cos ۲x \Rightarrow f'_+(\pi) = ۲\cos ۲\pi = ۲ \Rightarrow m_۱ = ۲$$
$$x \to \pi^- : x < \pi \Rightarrow \frac{x}{۲} < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos\frac{x}{۲} > ۰ \Rightarrow ۲ + \cos\frac{x}{۲} > ۲$$
$$\Rightarrow [۲ + \cos\frac{x}{۲}] = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲\sin ۲x$$
$$\Rightarrow f'(x) = ۴\cos ۲x \Rightarrow f'_-(\pi) = ۴\cos ۲\pi = ۴ \Rightarrow m_۲ = ۴$$

بنابراین $\tan\theta$ برابر است با:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱m_۲}\right| = \left|\frac{۲-۴}{۱+۸}\right| = \left|\frac{-۲}{۹}\right| = \frac{۲}{۹}$$

۱۹ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.

ب) مشتق تابع $gof(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع gof را در نقطهٔ $x = ۰$ به‌طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۴x \Rightarrow f'(x) = ۴ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_+(۰) = f'_+(۰)g'_+(f(۰)) = ۴(\frac{۳}{۴} + a) = ۳ + ۴a$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_-(۰) = f'_-(۰)g'_-(f(۰)) = ۲(\frac{۳}{۴} - a) = \frac{۳}{۲} - ۲a$$

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، تابع gof در $x = ۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \Rightarrow ۶a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۲۰ **گزینه ۳**

باتوجه‌به عبارت $\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-۹}{h} = \frac{۳}{۲}$، $f(۲) = ۹$ و $f'(۲) = \frac{۳}{۲}$ می‌شود.

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + x\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}} \Rightarrow g'(۲) = \sqrt{f(۲)} + ۲\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}$$

$$\Rightarrow g'(۲) = \sqrt{۹} + ۲ \times \frac{\frac{۳}{۲}}{۲\sqrt{۹}} = ۳ + \frac{۱}{۲} = ۳/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

حاصل $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ مقادیر شیب راست و چپ تابع در این نقطه هستند.

گام دوم

$$f'_+(1) = (\ln x)' = \frac{1}{x} = 1 = m$$
$$f'_-(1) = (-\ln x)' = -\frac{1}{x} = -1 = m'$$
$$\tan\theta = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| = \left|\frac{1-(-1)}{1+(1)(-1)}\right| = \left|\frac{2}{1-1}\right| = \infty$$

۲۲ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع f در $x = 4$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{3}{2}\ ,\ f(4) = -7$$

گام دوم

$$\left(\frac{f(2x)}{x}\right)' = \frac{2f'(2x)x-f(2x)}{x^2}$$
$$\xrightarrow{x=2} \frac{2f'(4)\times 2-f(4)}{4} = \frac{2(-\frac{3}{2})(2)-(-7)}{4}$$
$$= \frac{-6+7}{4} = \frac{1}{4}$$

۲۳ گزینه ۴

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-2} -4f(-2) + 4f'(-2) = -4(-3) + 4(\frac{1}{2}) = 12 + 2 = 14$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم مشتق تابع $y = u^n$ که u تابعی برحسب x است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = nu'u^{n-1}$$

گام دوم

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \Rightarrow y = \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow y' = 2 \times \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow y'$$

$$= 2\left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=-8} y' = 2\left(-\frac{16}{64} - \frac{2}{3\times(-2)}\right)\left(\frac{16}{-8} - 4\right) = 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(-2-4)$$

$$= 2\left(\frac{1}{12}\right)(-6) = -\frac{12}{12} = -1$$

۲۵ **گزینه ۳**

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ است. این عبارت را در تابع $f(x)$ جایگذاری کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} \xrightarrow{\cos^2 x = 1-\sin^2 x} f(x) = \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{(-2\sin x\cos x)(1+\sin^2 x) - (2\sin x\cos x)(1-\sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2} = \frac{(-\sin 2x)(1+\sin^2 x + 1 - \sin^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(1+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = -\frac{8}{9}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 3\left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۶ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$

گام دوم

به ازای $x = ۲$ حاصل $cot\,\frac{\pi}{x}$ برابر صفر و تابع $g(x) = \frac{x+\sqrt{۲x}}{x-۱}$ در $x = ۲$ پیوسته است پس عبارت $cot\,\frac{\pi}{x}$ در محاسبهٔ $f'(۲)$ عامل صفرشونده محسوب می‌شود. برای محاسبهٔ $f'(۲)$ کافی است مشتق تابع $cot\,\frac{\pi}{x}$ را در $g(x)$ ضرب کنیم و حاصل را به ازای $x = ۲$ به دست آوریم.

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{۲x}}{x-۱} cot\,\frac{\pi}{x} \quad , \quad \left(cot\,\frac{\pi}{x}\right)' = -\left(-\frac{\pi}{x^۲}\right)\left(۱+cot^۲\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(cot\,\frac{\pi}{x}\right)' g(x) = -\left(-\frac{\pi}{x^۲}\right)\left(۱+cot^۲\frac{\pi}{x}\right)\left(\frac{x+\sqrt{۲x}}{x-۱}\right)$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{\pi}{۴}\left(۱+cot^۲\frac{\pi}{۲}\right)\left(\frac{۲+\sqrt{۴}}{۲-۱}\right) = \frac{\pi}{۴}(۱+۰)\left(\frac{۴}{۱}\right) = \frac{\pi}{۴}\times ۴ = \pi$$

۲۷ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $gof(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنهٔ تعریف تابع $gof(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، ابتدا ضابطهٔ $gof(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطهٔ $g(f(x))$ کافی است در ضابطهٔ $g(x)$ به‌جای متغیر x ضابطهٔ $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-۱,۱), D_g = R \Rightarrow D_{gof} = (-۱,۱)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{۱+(f(x))^۲}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{\frac{۱-x^۲}{۱-x^۲}+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}} = x \quad ; -۱ < x < ۱$$

$$\Rightarrow y = gof(x) = x \Rightarrow f'(x)g'(f(x)) = y' = ۱; -۱ < x < ۱$$

۲۸ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم $fog(x)=f(g(x))$ و $(fog)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، حاصل $y'(۲)=(fog(۲))'$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹} \Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲\sqrt{۵x-۹}}=\frac{۵}{۸\sqrt{۵x-۹}}$$

$$f(x)=\sin^{۲}\pi x \Rightarrow f'(x)=۲\times\pi\times\cos\pi x\times\sin\pi x=\pi(۲\sin\pi x\cos\pi x)$$

$$=\pi\sin ۲\pi x$$

$$\xrightarrow{g(x)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}} f'(g(x))=\pi\sin ۲\pi\left(\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}\right)=\pi\sin\frac{\pi\sqrt{۵x-۹}}{۲}$$

پس داریم:

$$y'=\frac{۵}{۸\sqrt{۵x-۹}}\times\pi\sin\frac{\pi\sqrt{۵x-۹}}{۲}$$

درنتیجه $y'(۲)$ برابر است با:

$$y'(۲)=\frac{۵}{۸\sqrt{۱۰-۹}}\times\pi\sin\frac{\pi\sqrt{۱۰-۹}}{۲}=\frac{۵\pi}{۸}\sin\frac{\pi}{۲}=\frac{۵\pi}{۸}$$

۲۹ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) می‌دانیم $gof(x)=g(f(x))$ و $(gof)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$ است.

ب) شیب خط مماس در یک نقطه برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) عرض نقطهٔ تلاقی منحنی تابع $f(x)$ با محور xها برابر صفر است ($f(x)=\circ$).

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ gof را تعیین می‌کنیم:

$$\xrightarrow[g(x)=\sin\pi x]{f(x)=\cos x} y=gof(x)=g(f(x))=\sin(\pi\cos x)$$

با صفر قرار دادن مقدار تابع، نقطهٔ تلاقی منحنی با محور xها را تعیین می‌کنیم:

$$y=\circ \Rightarrow \sin(\pi\cos x)=\circ \Rightarrow \pi\cos x=k\pi\ ;k\in Z \Rightarrow \cos x=k\ ;k\in Z$$

می‌دانیم $-۱\le\cos x\le ۱$ است، پس مقادیر قابل‌قبول برای k برابر با $۱,-۱,\circ$ است و چون $x\in(\circ,\pi)$ پس تنها $k=\circ$ قابل‌قبول است. داریم:

$$k=\circ \Rightarrow \cos x=\circ \xrightarrow{x\in(\circ,\pi)} x=\frac{\pi}{۲}$$

حالا مقدار مشتق تابع $gof(x)$ را در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ حساب می‌کنیم:

$$y=gof(x)=\sin(\pi\cos x) \Rightarrow y'=(-\pi\sin x)\cos(\pi\cos x)$$

$$\Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\left(-\pi\sin\frac{\pi}{۲}\right)\cos\left(\pi\cos\frac{\pi}{۲}\right)=-\pi\cos\circ=-\pi\times ۱=-\pi$$

۳۰ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

می‌دانیم $gof(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y = fogoh(x)$ را در نقطهٔ $x = ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = fogoh(x) = f(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow y' = (g(h(x)))' \times f'(g(h(x))) = h'(x) \times g'(h(x)) \times f'(g(h(x)))$$

$$\xrightarrow{x=۰} y'(۰) = h'(۰) \times g'(h(۰)) \times f'(g(h(۰)))$$

$$\xrightarrow{h(۰)=۱ \;,\; ۲h'(۰)=۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times g'(۱) f'(g(۱))$$

$$\xrightarrow{-g(۱)=۱ \;,\; -g'(۱)=۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times (-۱) f'(-۱)$$

$$\xrightarrow{f'(-۱)=۱} \quad y'(۰) = \frac{۱}{۲}(-۱)(۱) = -\frac{۱}{۲}$$

۳۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و با فرض اینکه $u = x + \sqrt{۱ + x^۲}$ است، مشتق تابع $f\left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right)$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(u) = \frac{۱}{u}$$

$$y = f\left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right)' f'\left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right)$$

$$= \left(۱ + \frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\right)$$

$$= \left(۱ + \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\right) = \left(\frac{\sqrt{۱+x^۲}+x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

۳۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

ب) شیب خط قائم بر نمودار تابع در یک نقطه، قرینه و معکوس شیب خط مماس است و شیب خط مماس برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

طبق قسمت ب از گام اول، شیب خط قائم بر نمودار تابع در نقطه‌ای به طول ۲ برابر است با:

$$m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{f'(۲)}$$

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم مشتق تابع $f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)$ در نقطهٔ $x=۱$ برابر ۲- است و با در نظر گرفتن $u=\sqrt[۳]{۶x+۲}$ مقدار $f'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$u=\sqrt[۳]{۶x+۲}\Rightarrow u'=\frac{۱}{۳}(۶)(۶x+۲)^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{(۶x+۲)^۲}}$$

$$y=f\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)\Rightarrow y'=\frac{۲}{\sqrt[۳]{(۶x+۲)^۲}}f'\left(\sqrt[۳]{۶x+۲}\right)$$

$$\xrightarrow[y'=-۲]{x=۱}-۲=\frac{۲}{\sqrt[۳]{(۶+۲)^۲}}f'\left(\sqrt[۳]{۶+۲}\right)\Rightarrow -۲=\frac{۲}{۴}f'(۲)\Rightarrow f'(۲)=-۴$$

بنابراین شیب خط قائم در نقطهٔ $x=۲$ برابر است با:

$$m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{f'(۲)}=-\frac{۱}{-۴}=\frac{۱}{۴}$$

۳۳ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه‌به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \Rightarrow u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = \big(f(x) + xf'(x)\big) f'(xf(x))$$

اکنون ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} \Rightarrow f'(x) = -\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$$

بنابراین داریم:

$$y' = \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{xf(x)+۲}}\right)$$

$$= \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۳}{۲}x - x\sqrt{x+۲} + ۲}}\right)$$

$$\Rightarrow y'(۲) = \left(\frac{۳}{۲} - ۲ - \frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-۴+۲}}\right) = (-۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۳۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$y=f(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y'=f'(x)f'(f(x))$$

ابتدا لازم است ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست آوریم، داریم:

$$f(x)=\sin^{۲}\pi x-\frac{۱}{۲}\cos\pi x$$
$$\Rightarrow \quad f'(x)=۲\pi\cos\pi x\ \sin\pi x+\frac{\pi}{۲}\sin\pi x=\pi(۲\sin\pi x\ \cos\pi x)+\frac{\pi}{۲}\sin\pi x$$
$$=\pi\sin ۲\pi x+\frac{\pi}{۲}\sin\pi x$$

قبل از محاسبهٔ مقدار $y'\left(\frac{۱}{۳}\right)$، مقادیر $f'\left(\frac{۱}{۳}\right)$ و $f'\left(f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'\left(\frac{۱}{۳}\right)=\pi\sin\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۳}=\pi\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)+\frac{\pi}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{۳\pi}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\,\frac{\pi}{۴}$$
$$f\left(\frac{۱}{۳}\right)=\sin^{۲}\frac{\pi}{۳}-\frac{۱}{۲}\cos\frac{\pi}{۳}=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$
$$f'\left(f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right)=f'\left(\frac{۱}{۲}\right)=\pi\sin\pi+\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}=۰+\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

بعد از انجام این محاسبات طاقت‌فرسا، می‌رسیم به محاسبه $y'\left(\frac{۱}{۳}\right)$:

$$y'\left(\frac{۱}{۳}\right)=f'\left(\frac{۱}{۳}\right)f'\left(f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right)=f'\left(\frac{۱}{۳}\right)f'\left(\frac{۱}{۲}\right)=\left(۳\sqrt{۳}\,\frac{\pi}{۴}\right)\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\left(۳\sqrt{۳}\right)\frac{\pi^{۲}}{۸}$$

پس حاصل $y'\left(\frac{۱}{۳}\right)$، برابر $\frac{\pi^{۲}}{۸}$ $۳\sqrt{۳}$ است.

۳۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f\left(\sin\frac{x}{۲}\right)$ را با فرض $u = \sin\frac{x}{۲}$ و باتوجه‌به گام اول، تعیین می‌کنیم:

$$u = \sin\frac{x}{۲} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}$$

$$f(x) = x + \sqrt{x+۱} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}$$

$$y = f\left(\sin\frac{x}{۲}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}\right)f'\left(\sin\frac{x}{۲}\right)$$

باتوجه‌به ضابطهٔ $f'(x)$، ضابطهٔ $f'\left(\sin\frac{x}{۲}\right)$ برابر است با:

$$f'\left(\sin\frac{x}{۲}\right) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{\sin\frac{x}{۲}+۱}}$$

با تشکیل ضابطهٔ y'، مقدار $y'(۰)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \left(\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{\sin\frac{x}{۲}+۱}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y'(۰) = \left(\frac{۱}{۲}\cos ۰\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{\sin ۰+۱}}\right) = \frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

۳۶ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{g(x)-g(۲)}{x-۲} = g'(۲)$$

ب) می‌دانیم:

$$(gof)'(۱) = f'(۱)g'(f(۱))$$

گام دوم

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$، مقادیر $f(۱)$ و $f'(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{۵-x^۲} \Rightarrow f(۱) = \sqrt{۵-۱} = ۲$$

$$f'(x) = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}} = \frac{-x}{\sqrt{۵-x^۲}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{-۱}{\sqrt{۵-۱}} = \frac{-۱}{\sqrt{۴}} = -\frac{۱}{۲}$$

پس مقدار $(gof)'(۱)$ برابر است با:

$$(gof)'(۱) = f'(۱)g'(f(۱)) \xrightarrow{f(۱)=۲} (gof)'(۱) = f'(۱)\times g'(۲) = -\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲} = -\frac{۳}{۴}$$

۳۷ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$$

ب) اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)$ در همسایگی نقطهٔ $x=-۱$ محاسبه می‌شود بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-۱}\ |x|=-x\ \Rightarrow\ f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)=f\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول می‌توان چنین نوشت:

$$y=f\left(\sqrt{۳-x}\right)\ \Rightarrow\ y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}f'\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

$$\Rightarrow\ y'(-۱)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳+۱}}f'\left(\sqrt{۳+۱}\right)=\frac{-۱}{۲\times ۲}f'(۲)$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=-\frac{۱}{۳}}\ y'(-۱)=\left(-\frac{۱}{۴}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۱۲}$$

۳۸ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) باتوجه‌به تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

ب) اگر $y = f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

ج) می‌دانیم:

$$|x| < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول و با در نظر گرفتن $u = tanx$، داریم:

$$y = f(\tan x) \Rightarrow y' = (tanx)'f'(\tan x) \Rightarrow y' = \left(۱+\tan^۲ x\right)\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}$$

می‌دانیم $۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ است پس:

$$y' = \frac{۱}{\cos^۲ x}\sqrt{\cos^۲ x} = \frac{۱}{\cos^۲ x}|\cos x| \xrightarrow{-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos x>۰} y' = \frac{\cos x}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{\cos x}$$

۳۹ **گزینه ۱**

$$y = \cos^۲(\tan^{-۱} x) \Rightarrow y' = -۲(\tan^{-۱} x)' \sin(\tan^{-۱} x)\cos(\tan^{-۱} x)$$

$$\Rightarrow y' = -۲\left(\frac{۱}{۱+x^۲}\right)\sin(\tan^{-۱} x)\cos(\tan^{-۱} x)$$

$$\Rightarrow y'(۱) = -۲(\frac{۱}{۲})\sin(\tan^{-۱}(۱))\cos(\tan^{-۱}(۱))$$

$$= -۲ \times \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴} = -۱ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴۰ **گزینه ۲**

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{۳} + \tan^{-۱}\frac{x}{۲}) \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{x^۲}{۴}}\cos(\frac{\pi}{۳} + \tan^{-۱}\frac{x}{۲})$$

$$\Rightarrow f'(۲\sqrt{۳}) = \cos(\frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}) \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}\cos\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۸}(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۱۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۴۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

طبق فرمول آهنگ تغییر در علم اقتصاد، هزینهٔ تولید یک واحد اضافی؛ مثلاً چاپ $(n+1)$اُمین کتاب، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C(n+1)-C(n)\simeq C'(n)$$

گام دوم

طبق گام قبل هزینهٔ چاپ ۱۰۰۱اُمین کتاب برابر است با:

$$C(1001)-C(1000)\simeq C'(1000)$$

از تابع $C(x)$ مشتق گرفته و مقدار آن را به ازای $x=1000$ محاسبه می‌کنیم:

$$C(x)=800000+150x+75000x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow\quad C'(x)=150+75000\times\frac{1}{3}\times x^{-\frac{2}{3}}=150+\frac{25000}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \text{هزینهٔ چاپ ۱۰۰۱اُمین کتاب}=C'(1000)=150+\frac{25000}{\sqrt[3]{1000^2}}=150+\frac{25000}{100}=150$$

$$+250=400$$

۴۲ **گزینه ۳**

$$y=\tan^{-1}\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}}=\frac{-1}{1+x^2}\ (x\neq 0)$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار مشتق=شیب‌خط}} m-2=\frac{-1}{1+x^2}:x\neq 0\Rightarrow x^2>0\Rightarrow 1+x^2>1$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{1+x^2}<1\Rightarrow -1<\frac{-1}{1+x^2}<0\Rightarrow -1<m-2<0\Rightarrow 1<m<2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۴۳ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ می‌گذرد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)$$

ج) معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ می‌گذرد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$$

د) اگر دو خط با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ داشته باشیم و α زاویهٔ بین آن‌ها باشد، آنگاه داریم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$$

گام دوم

ابتدا مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=۱$ تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=(x+۲)e^{۱-x}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^{۱-x}-(x+۲)e^{۱-x}$$

$$m_{\text{مماس}}=f'(۱)=e^{۱-۱}-(۱+۲)e^{۱-۱}=e^{۰}-۳e^{۰}=-۲$$

$$f(۱)=(۱+۲)e^{۱-۱}=۳e^{۰}=۳\times۱=۳$$

معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱,۳)$، با شیب $m=-۲$ به‌صورت زیر است:

$$y-۳=-۲(x-۱)\quad\Rightarrow\quad y=-۲x+۲+۳=-۲x+۵$$

معادلهٔ خطی که نقطهٔ $(۱,۳)$ را به مبدأ مختصات وصل می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۳-۰}{۱-۰}(x-۰)\quad\Rightarrow\quad y=۳x$$

حال تانژانت زاویهٔ بین دو خط $y=-۲x+۵$ و $y=۳x$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{۳-(-۲)}{۱+۳(-۲)}\right|=\left|\frac{۳+۲}{۱-۶}\right|=\left|\frac{۵}{-۵}\right|=۱\quad\Rightarrow\quad\tan\alpha=۱$$

۴۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) مشتق تابع ضمنی $f(x,y)=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

ب) شیب خط مماس در نقطهٔ $(1,1)$ برابر مشتق تابع در این نقطه است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

گام دوم

همهٔ عبارات را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم تا اینکه یک تابع ضمنی به فرم $f(x,y)=0$ داشته باشیم. با استفاده از قسمت (الف) از گام اول، مشتق تابع و سپس معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم.

$$y^3+3xy^2-3x^3y-1=0$$

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{0+3y^2-9x^2y}{3y^2+6xy-3x^3} = \frac{9x^2y-3y^2}{3y^2+6xy-3x^3}$$

$$\Rightarrow\ m_{\text{مماس}} = y'(1,1) = \frac{9-3}{3+6-3} = \frac{6}{6} = 1$$

$$y-1=m(x-1)\ \Rightarrow\ y-1=x-1\ \Rightarrow\ y=x$$

خط $y=x$ نیمساز ربع اول و سوم است پس از نواحی اول و سوم دستگاه مختصات عبور می‌کند.

۴۵ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) $(e,\alpha)\in f^{-1}$ و $(\alpha,e)\in f$ است پس:

$$\left(f^{-1}\right)'(e)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

ب) خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند برابر است با:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

گام دوم

$f(x)$ را برابر e فرض کرده و مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=xe^x\xrightarrow{(\alpha,e)\in f}\alpha e^\alpha=e\Rightarrow\alpha=1$$

بنابراین:

$$(1,e)\in f\Rightarrow(e,1)\in f^{-1}$$

با محاسبهٔ مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$ و باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، شیب خط مماس را در نقطهٔ $x=e$ به دست می‌آوریم:

$$f(x)=xe^x\Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$
$$\Rightarrow f'(1)=e(1+1)=2e$$
$$m_{\text{مماس}}=\left(f^{-1}\right)'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}$$

معادله خط مماس بر تابع f^{-1} در نقطهٔ $(e,1)$ واقع بر آن را تشکیل می‌دهیم:

$$y-1=\frac{1}{2e}(x-e)\Rightarrow y-1=\frac{x}{2e}-\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{x}{2e}+\frac{1}{2}\xrightarrow{x=0}y=\frac{1}{2}$$

۴۶ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

مشتق تابع ضمنی $f(x,y)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، ابتدا با مشتق‌گیری از رابطهٔ داده‌شده، ضابطهٔ $\frac{dy}{dx}$ را و سپس با مشتق‌گیری مجدد از $\frac{dy}{dx}$، ضابطهٔ $\frac{d^2y}{dx^2}$ را تعیین می‌کنیم و درنهایت مقدار آن را در نقطهٔ $(1,2)$ به دست می‌آوریم.

$$f(x,y) = x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 0 - 2\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0}{x^2 - 2y - 0 + 0} = -\frac{2xy - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2 - 2y}$$

$$\Rightarrow y'(1,2) = -\frac{4 - \frac{1}{\sqrt{1}}}{1-4} = -\frac{3}{-3} = +1$$

در محاسبهٔ $\frac{d^2y}{dx^2}$، دقت کنید که مشتق متغیر x نسبت به x برابر با ۱ و مشتق متغیر y برابر با y' است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{-\frac{1}{2}} - 2xy}{x^2 - 2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2y - 2xy')(x^2-2y) - (2x - 2y')(x^{-\frac{1}{2}} - 2xy)}{(x^2-2y)^2}$$

$$\xrightarrow[y'=1]{x=1,\,y=2} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\frac{1}{2} - 4 - 2)(1-4) - (2-2)(1-4)}{(1-4)^2} = \frac{(-\frac{13}{2})(-3) - 0}{9} = \frac{\frac{13}{2}\times 3}{9} = \frac{\frac{13}{2}}{3} = \frac{13}{6}$$

۴۷ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

مشتق تابع ضمنی $f(x,y)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

گام دوم

$\frac{d^2y}{dx^2}$ مشتق دوم y نسبت به x است. باتوجه‌به گام اول، ابتدا مشتق اول y نسبت به x را در نقطهٔ $(2,-1)$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x,y) = x^2y + y^2 + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2xy+0+0}{x^2+2y+0} = -\frac{2xy}{x^2+2y}$$

$$y'(2,-1) = -\frac{-4}{4-2} = 2$$

مشتق دوم تابع را به‌صورت مستقیم تعیین می‌کنیم. به یاد داشته باشید $\frac{dx}{x} = 1$ و $\frac{dy}{x} = y'$ است.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-2y-2xy')(x^2+2y)-(2x+2y')(-2xy)}{(x^2+2y)^2}$$

اکنون مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در نقطهٔ $(2,-1)$ به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[y'(2,-1)=2]{x=2\,,y=-1} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2-8)(4-2)-(4+4)(4)}{(4-2)^2}$$

$$= \frac{(-6)(2)-(8)(4)}{2^2} = \frac{-12-32}{4} = -\frac{44}{4} = -11$$

۴۸ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ عبور می‌کند برابر است با:

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$$

ب) شیب‌خط قائم بر منحنی تابع در یک نقطه برابر است با معکوس و قرینهٔ شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه.

ج) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

د) اگر f^{-1} وارون تابع مشتق‌پذیر f و $(\alpha, \beta) \in f$ باشد؛ آنگاه $(\beta, \alpha) \in f^{-1}$ است و داریم:

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

گام دوم

فرض می‌کنیم $x = \alpha$ نقطهٔ تلاقی منحنی تابع f^{-1} با محور xها است پس $(\alpha, \circ) \in f^{-1}$ و درنتیجه $(\circ, \alpha) \in f$ است. با جایگذاری مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع f، مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x + e^x \xrightarrow{(\circ,\alpha)\in f} \alpha = \circ + e^\circ = \circ + 1 = 1$$

بنابراین $(\circ, 1) \in f$ و $(1, \circ) \in f^{-1}$ است. برای نوشتن معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} لازم است ابتدا مقدار مشتق تابع f^{-1} را در این نقطه محاسبه کنیم که باتوجه‌به قسمت (د) از گام اول داریم:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(\circ)}$$

$$f'(x) = 1 + e^x \Rightarrow f'(\circ) = 1 + e^\circ = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{1}{2}$$

اکنون شیب‌خط قائم و سپس معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$y - \circ = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 \Rightarrow y + 2x = 2$$

۴۹ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

نقاط تلاقی تابع f^{-1} با نیمساز ربع اول یا همان خط $y = x$، همان نقاط تلاقی تابع f با نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است.

گام دوم

نقطهٔ تلاقی تابع f با نیمساز ربع اول را به دست می‌آوریم:

$$x + \ln x = x \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین نقطهٔ $A(1,1)$ روی تابع f و همچنین روی تابع f^{-1} قرار دارد.

$$(f^{-1}(1))' = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \xrightarrow{\times 2} 2y - 2 = x - 1 \Rightarrow 2y - x = 1$$

۵۰ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از مشتق ضمنی، شیب خط مماس را تعیین می‌کنیم. شیب خط قائم، قرینه و معکوس شیب خط مماس است.

گام دوم

$$x^3 + y^3 = 3xy + 3 \Rightarrow x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 3(y + y'x) = 0$$

$$\xrightarrow{x=1\,,\,y=2} 3 + 12y' - 3(2 + y') = 0 \Rightarrow 3 + 12y' - 6 - 3y' = 0$$

$$\Rightarrow 9y' = 3 \Rightarrow y' = \frac{1}{3} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{1}{3} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -3$$

$$y - y_0 = m'(x - x_0) \xrightarrow[m'=-3]{x_0=1\,,\,y_0=2} y - 2 = -3(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -3x + 3 \Rightarrow y = -3x + 5 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = 5$$

۵۱ **گزینه ۱**

$$A\left|\begin{matrix}1\\?\end{matrix}\right. \in f^{-1} \Leftrightarrow A'\left|\begin{matrix}?\\1\end{matrix}\right. \in f \Rightarrow x + e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

$$f'(x) = 1 + 2e^{2x}$$

$$m = \left(f^{-1}(x)\right)'_{x=1} = \left(\frac{1}{f'(x)}\right)_{x=0} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y - 0 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow 3y - x = -1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۲ **گزینه ۲**

$$x^2y - \ln(2x-y) - 12 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2xy - \frac{2}{2x-y}}{x^2 - \frac{-1}{2x-y}}$$

$$\xrightarrow{(2,3)} y' = m_{\text{مماس}} = -\frac{2\times 2\times 3 - \frac{2}{4-3}}{2^2 - \frac{-1}{4-3}} = -\frac{10}{5} = -2 \Rightarrow m'_{\text{قائم}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط قائم} : y - 3 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{تقاطع با محور } x\text{ها}} \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x = -4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

ج) اگر $(\alpha,\beta)\in f$ و f تابعی معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $(\beta,\alpha)\in f^{-1}$ است و داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

د) برای به دست آوردن عرض از مبدأ یک خط، $x=0$ در نظر گرفته می‌شود.

هـ) نقطه‌ای به طول ۲ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد بنابراین $(2,\alpha)\in f^{-1}$ و $(\alpha,2)\in f$ است.

گام دوم

با حل معادلهٔ $f(\alpha)=2$ مقدار α را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{(\alpha,2)\in f}\alpha+\sqrt{\alpha}=2\Rightarrow\alpha=1$$

بنابراین $(1,2)\in f$ و $(2,1)\in f^{-1}$ است داریم:

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطهٔ $x=2$ یا همان $\left(f^{-1}\right)'(2)$ برابر است با:

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{2}{3}$$

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطهٔ $(2,1)$ به‌صورت زیر است:

$$y-1=\frac{2}{3}(x-2)\Rightarrow y-1=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

اکنون عرض از مبدأ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\xrightarrow{x=0}y=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

۵۴ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی نمودار، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) اگر $(\alpha,\beta)\in f$ و f معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $(\beta,\alpha)\in f^{-1}$ و $\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$ است.

گام دوم

با استاندارد کردن معادلهٔ خط، شیب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$10y=x+m \Rightarrow y=\frac{1}{10}x+\frac{m}{10} \Rightarrow \text{شیب خط}=\frac{1}{10}$$

فرض می‌کنیم خط داده‌شده در نقطهٔ (β,α) بر نمودار تابع f^{-1} مماس باشد. طبق گام اول داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=m_{\text{مماس}} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}=m_{\text{مماس}}$$

پس:

$$f(x)=x^3-2x \Rightarrow f'(x)=3x^2-2$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{3\alpha^2-2}=\frac{1}{10} \Rightarrow 3\alpha^2-2=10 \Rightarrow 3\alpha^2=12 \Rightarrow \alpha^2=4$$

$$\xrightarrow{\alpha>1} \alpha=2$$

از طرفی چون $(\alpha,\beta)\in f$ است، پس:

$$f(x)=x^3-2x \xrightarrow[\alpha=2]{(\alpha,\beta)\in f} \beta=f(2)=(2)^3-2(2)=8-4=4$$

بنابراین خط در نقطهٔ $(4,2)$ بر نمودار تابع f^{-1} مماس شده است پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط نیز صدق می‌کند و داریم:

$$10y=x+m \xrightarrow{x=4,y=2} 20=4+m \Rightarrow m=16$$

۵۵ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) اگر $(\alpha,\beta)\in f$ و f معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $(\beta,\alpha)\in f^{-1}$ است و داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

گام دوم

فرض می‌کنیم خط به معادلهٔ $2y-x=a$ در نقطهٔ (β,α) بر نمودار تابع f^{-1} مماس شده است؛ بنابراین با استاندارد کردن معادلهٔ خط داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=m_{\text{مماس}}$$

با استاندارد کردن معادلهٔ خط داریم:

$$2y-x=a \Rightarrow 2y=x+a \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{1}{2}$$

از طرفی مطابق با قسمت (ب) از گام اول داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}=m_{\text{مماس}}$$

بنابراین:

$$f(x)=x-\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(\alpha)=1+\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha^2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow 1+\frac{1}{\alpha^2}=2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2}=1 \Rightarrow \alpha^2=1$$
$$\xrightarrow{\alpha>0} \alpha=1$$

$(\alpha,\beta)\in f$ است پس داریم:

$$\xrightarrow{f(x)=x-\frac{1}{x}} f(1)=1-1=0$$

بنابراین خط داده‌شده، در نقطهٔ $(0,1)$ بر نمودار تابع f^{-1} مماس است پس مختصات این نقطه در معادلـهٔ خط صدق می‌کند و داریم:

$$2y-x=a \xrightarrow{x=0,y=1} 2-0=a \Rightarrow a=2$$

۵۶ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) خط $5y+x=b$ در نقطهٔ فرضی (β,α) قائم بر نمودار تابع f^{-1} است پس این خـط در نقطه (β,α) بر خط مماس رسم شده بر نمودار تابع f^{-1} عمود است.

ب) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است.

ج) شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) اگر نقطهٔ $(\alpha,\beta)\in f$ و f معکوس‌پذیر باشد آنگاه $(\beta,\alpha)\in f^{-1}$ است و داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

گام دوم

با استاندارد کردن معادلهٔ خط قائم، شیب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$5y+x=b\ \Rightarrow\ 5y=-x+b\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{b}{5}\ \Rightarrow\ m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{5}$$

بنابراین:

$$m_{\text{مماس}}=-\frac{1}{m_{\text{قائم}}}=-\frac{1}{-\frac{1}{5}}=5$$

طبق قسمت (ج) از گام اول داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=m_{\text{مماس}}=5$$

همچنین:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$$
$$\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{5}{(\alpha+2)^2}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ قسمت (د) از گام اول، مقدار α را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}=5\ \Rightarrow\ \frac{1}{\frac{5}{(\alpha+2)^2}}=5\ \Rightarrow\ (\alpha+2)^2=25$$

$$\xrightarrow{\alpha>-2}\ \alpha+2=5\ \Rightarrow\ \alpha=3$$

چون $(\alpha,\beta)\in f$ است پس داریم:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}\ \xrightarrow{\alpha=3}\ \beta=f(3)=\frac{6-1}{3+2}=\frac{5}{5}=1\ \Rightarrow\ \beta=1$$

مختصات نقطهٔ $(1,3)$ در ضابطهٔ تابع معکوس و معادلهٔ خط قائم صدق می‌کند و داریم:

$$5y+x=b\ \xrightarrow{x=1,y=3}\ 15+1=b\ \Rightarrow\ b=16$$

۵۷ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) خط $۴y+۵x=a$ در نقطهٔ فرضی (β,α)، قائم بر نمودار تابع $f^{-۱}$ است، پس این خط در نقطهٔ (β,α) عمود بر خط مماس رسم‌شده بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در این نقطه است.

ب) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است.

ج) اگر $(\beta,\alpha)\in f^{-۱}$ باشد، آنگاه $(\alpha,\beta)\in f$ است و داریم:

$$\left(f^{-۱}\right)'(\beta)=\frac{۱}{f'(\alpha)}$$

د) شیب خط مماس رسم‌شده بر نمودار تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

با استاندارد کردن معادلهٔ خط قائم، شیب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$۴y+۵x=a \Rightarrow ۴y=-۵x+a \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{a}{۴} \Rightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{۵}{۴}$$

بنابراین:

$$m_{\text{مماس}}=-\frac{۱}{m_{\text{قائم}}}=-\frac{۱}{-\frac{۵}{۴}}=\frac{۴}{۵}$$

پس مشتق تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ (β,α) برابر است با:

$$\left(f^{-۱}\right)'(\beta)=m_{\text{مماس}}=\frac{۴}{۵}$$

اکنون باتوجه‌به رابطهٔ قسمت (ج) از گام اول، مقدار α را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(\alpha)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}}$$

$$\left(f^{-۱}\right)'(\beta)=\frac{۱}{f'(\alpha)} \Rightarrow \frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}}}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow ۱+\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$$

$$=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{به توان دو}} \alpha=۴$$

چون $(\alpha,\beta)\in f$ است، پس:

$$f(x)=x+\sqrt{x} \xrightarrow{\alpha=۴} \beta=f(۴)=۴+\sqrt{۴}=۴+۲=۶$$

پس خط $۴y+۵x=a$ در نقطهٔ $(۶,۴)$ بر نمودار تابع $f^{-۱}$ قائم است، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و داریم:

$$۴y+۵x=a \xrightarrow{x=۶,y=۴} ۱۶+۳۰=a \Rightarrow a=۴۶$$

۵۸ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) $(۱,\alpha)\in f^{-۱}$ و $(\alpha,۱)\in f$ است درنتیجه داریم:

$$\left(f^{-۱}\right)'(۱)=\frac{۱}{f'(\alpha)}$$

ب) خط قائم بر نمودار تابع در یک نقطه، عمود بر خط مماس بر نمودار تابع در همان نقطه است.

ج) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است.

د) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y-y_۱=m\left(x-x_۱\right)$$

گام دوم

$$(\alpha,۱)\in f \Rightarrow f(\alpha)=۱ \Rightarrow \frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۲}=۱ \Rightarrow ۲\alpha-۱=\alpha+۲ \Rightarrow \alpha=۳$$

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲(x+۲)-(۲x-۱)}{(x+۲)^۲}=\frac{۲x+۴-۲x+۱}{(x+۲)^۲}$$
$$=\frac{۵}{(x+۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha)=f'(۳)=\frac{۵}{(۳+۲)^۲}=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}$$

طبق رابطهٔ قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$\left(f^{-۱}\right)'(۱)=\frac{۱}{f'(\alpha)}=\frac{۱}{f'(۳)}=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}=۵$$

بنابراین:

$$m_{\text{مماس}}=۵$$

$$\Rightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{m_{\text{مماس}}} \Rightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{\left(f^{-۱}\right)'(۱)}=-\frac{۱}{۵}$$

معادلهٔ خط قائم با شیب $-\frac{۱}{۵}$ و گذرنده از نقطهٔ $(۱,۳)$ به‌صورت زیر است:

$$y-۳=-\frac{۱}{۵}(x-۱) \Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۵}x+\frac{۱}{۵} \Rightarrow y=-\frac{۱}{۵}x+\frac{۱۶}{۵}$$

در نقطهٔ تقاطع یک نمودار با محور xها $y=۰$ است بنابراین:

$$\xrightarrow{y=۰} -\frac{۱}{۵}x+\frac{۱۶}{۵}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۵}x=\frac{۱۶}{۵} \Rightarrow x=۱۶$$

۵۹ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط به ازای جایگذاری $x=0$ در معادلهٔ آن به دست می‌آید.

ب) معادلهٔ یک خط به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ج) شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) نیمساز ناحیهٔ اول، خط $y=x$ است.

هـ) اگر $(\alpha,\beta)\in f$ و $(\beta,\alpha)\in f^{-1}$ باشد آنگاه داریم:

$$(f^{-1})'(\beta)=-\frac{1}{f'(\alpha)}$$

گام دوم

معکوس هر نمودار، قرینهٔ آن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است، پس اگر معکوس تابع با خط $y=x$ برخورد داشته باشد خود تابع نیز در آن نقطه، با خط $y=x$ برخورد دارد. برای به دست آوردن نقطهٔ برخورد تابع f^{-1} با نیمساز ناحیهٔ اول کافی است محل برخورد تابع f با خط $y=x$ را به دست آوریم.

$$f(x)=2x-\frac{1}{x}\xrightarrow{f(x)=x}x=2x-\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{x}\Rightarrow x^2=1$$

$$\xrightarrow{x>0}x=1\Rightarrow f(1)=2-1=1\Rightarrow(1,1)\in f,(1,1)\in f^{-1}$$

باتوجه‌به قسمت (هـ) از گام اول داریم:

$$f(x)=2x-\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(1)=2+1=3$$

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{1}{3}$$

اکنون معادلهٔ خط مماس بر نمودار f^{-1} در نقطهٔ $(1,1)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1)$$

عرض از مبدأ این خط برابر است با:

$$\xrightarrow{x=0}y-1=\frac{1}{3}(0-1)=-\frac{1}{3}\Rightarrow y=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۶۰ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1,y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m\,(x-x_1)$$

ج) در نقطهٔ برخورد یک نمودار با محور yها، $x=0$ است.

د) مشتق تابع $y=\tan^{-1}u$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'=\frac{u'}{1+u^2}$$

گام دوم

$$y+\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\sqrt{3x-5}\xrightarrow{x=2}y+\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\sqrt{6-5}$$

$$\Rightarrow\ y+\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1\ \Rightarrow\ y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ y=0$$

نقطهٔ $(2,0)$ روی نمودار تابع قرار دارد. طبق گام اول شیب خط مماس را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{1+\left(\sqrt{3x-5}\right)^2}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{1+3x-5}=\frac{3}{\left(2\sqrt{3x-5}\right)(3x-4)}$$

$$m_{\text{مماس}}=y'(2)=\frac{3}{2(1)(2)}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ m=\frac{3}{4}$$

اکنون معادلهٔ خط مماس با شیب $m=\frac{3}{4}$ را در نقطهٔ $(2,0)$ تشکیل می‌دهیم:

$$y-0=\frac{3}{4}(x-2)\ \Rightarrow\ y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$

با جایگذاری $x=0$، محل برخورد خط با محور عرض‌ها مشخص می‌شود:

$$\xrightarrow{x=0}y=0-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ y=-\frac{3}{2}$$

۶۱ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر با مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) اگر f تابعی معکوس‌پذیر و $(\alpha,\beta)\in f$ باشد آنگاه: $(f^{-1})'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$

گام دوم

خط $۲y+x=۷$ در نقطه‌ای به طول $x=۳$ بر منحنی تابع $f(x)$ مماس شده است؛ پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ خط مماس و ضابطهٔ تابع صدق می‌کند. پس داریم:

$$۲y+x=۷\xrightarrow{x=۳}۲y+۳=۷\Rightarrow ۲y=۴\Rightarrow y=۲\Rightarrow (۳,۲)\in f$$

شیب‌خط مماس برابر است با:

$$۲y+x=۷\Rightarrow y=\frac{-x}{۲}-\frac{۷}{۲}\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

پس باتوجه‌به گام اول داریم: $f'(۳)=-\frac{۱}{۲}$

اکنون با استفاده از اطلاعات موجود، ابتدا ضابطهٔ $g'(x)$ و سپس مقدار $g'(۲)$ را می‌یابیم:

$$g(x)=\frac{۱}{x}f^{-۱}(x)\Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{x^۲}f'(x)+\frac{۱}{x}(f^{-۱})'(x)$$

$$\Rightarrow g'(۲)=-\frac{۱}{۴}f'(۲)+\frac{۱}{۲}(f^{-۱})'(۲)$$

چون $(۳,۲)\in f$ است؛ پس $(۲,۳)\in f^{-۱}$ می‌باشد؛ به‌عبارت‌دیگر: $f^{-۱}(۲)=۳$ همچنین طبق گام اول، داریم:

$$(f^{-۱})'(۲)=\frac{۱}{f'(۳)}=-۲$$

بنابراین:

$$g'(۲)=-\frac{۱}{۴}(۳)+\frac{۱}{۲}(-۲)=-\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۲}=-\frac{۷}{۴}$$

۶۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ عبور می‌کند برابر است با:

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$$

ب) شیب‌خط قائم بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر است با معکوس و قرینهٔ شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه $(m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}})$

ج) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

د) اگر $f^{-۱}$ وارون تابع مشتق‌پذیر f و $(\alpha, \beta) \in f$ باشد؛ آنگاه داریم: $(f^{-۱})'(\beta) = \frac{۱}{f'(\alpha)}$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطهٔ $(۲, \alpha)$ متعلق به تابع $f^{-۱}$ باشد؛ یعنی $(۲, \alpha) \in f^{-۱}$؛ بنابراین $(\alpha, ۲) \in f$ است. با جایگذاری مختصات نقطهٔ $(\alpha, ۲)$ در ضابطهٔ f مقدار α را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = x^۳ - x^۲ + ۲x \xrightarrow{(\alpha,۲)\in f} ۲ = \alpha^۳ - \alpha^۲ + ۲\alpha \Rightarrow \alpha^۳ - \alpha^۲ + ۲\alpha - ۲ = \circ$$

$$\Rightarrow \alpha^۲(\alpha - ۱) + ۲(\alpha - ۱) = \circ \Rightarrow (\alpha - ۱)(\alpha^۲ + ۲) = \circ \xrightarrow{\alpha^۲+۲\neq\circ} \alpha - ۱ = \circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱ \Rightarrow (۱, ۲) \in f \Rightarrow (۲, ۱) \in f^{-۱}$$

باتوجه‌به گام اول، برای نوشتن، معادلهٔ خط قائم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

محاسبهٔ مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $(۱, ۲)$:

$$f(x) = x^۳ - x^۲ + ۲x$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۲ \Rightarrow f'(۱) = ۳ - ۲ + ۲ = ۳$$

محاسبهٔ مقدار مشتق تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۲, ۱)$:

$$(f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۳}$$

محاسبهٔ شیب‌خط مماس بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۲, ۱)$:

$$m_{\text{مماس}} = (f^{-۱})'(۲) = \frac{۱}{۳}$$

محاسبهٔ شیب‌خط قائم بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۲, ۱)$:

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{۱}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = -۳$$

معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۲, ۱)$:

$$y - ۱ = -۳(x - ۲) \Rightarrow y - ۱ = -۳x + ۶ \Rightarrow y + ۳x = ۷$$

۶۳ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

اگر f^{-1} وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد و $(\alpha,\beta)\in f$ آنگاه داریم:

$$(f^{-1})'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

گام دوم

$g(x)$ به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع $\sqrt{2x}$ و $f^{-1}(x)$ است، با استفاده از فرمول مشتق توابع حاصل‌ضربی داریم:

$$g(x)=\sqrt{2x}f^{-1}(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x}}f^{-1}(x)+\sqrt{2x}(f^{-1})'(x)$$

$$\Rightarrow g'(2)=\frac{1}{\sqrt{4}}f^{-1}(2)+\sqrt{4}(f^{-1})'(2)$$

طبق صورت سؤال، $f(4)=2$ است؛ پس $(4,2)\in f$ و $(2,4)\in f^{-1}$ است. باتوجه‌به گام اول، داریم:

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(4)}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

$$\Rightarrow g'(2)=\frac{1}{2}(4)+2(3)=2+6=8$$

۶۴ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

می‌دانیم:

$$y=\tan^n u\Rightarrow y'=nu'(1+\tan^2 u)\tan^{n-1}u$$

$$y=\sin^{-1}x\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، مشتق تابع داده‌شده را تعیین می‌کنیم.

$$y=\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x)\Rightarrow y'=2(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x))\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}})(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}))\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})$$

$$=2(\frac{1}{\frac{1}{2}})(1+\tan^2\frac{2\pi}{3})\tan\frac{2\pi}{3}=4(1+3)(-\sqrt{3})$$

$$=4(4)(-\sqrt{3})=-16\sqrt{3}$$

۶۵ **گزینه ۱**

$$(a,b)\in f \Rightarrow (f^{-1})(b)=\frac{1}{f'(a)} \Rightarrow f^{-1}(\frac{۳}{۵})=x \Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{۳}{۵}=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow \frac{۹}{۲۵}=\frac{x^۲}{۱+x^۲} \Rightarrow x^۲=\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{۱+x^۲}-\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{۱+x^۲}}}{۱+x^۲}=\frac{۱}{(۱+x^۲)\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow f'(\frac{۳}{۴})=\frac{۱}{\frac{۲۵}{۱۶}\times\frac{۵}{۴}}=\frac{۶۴}{۱۲۵}$$

$$(f^{-1})'(b)=\frac{۱}{f'(a)} \Rightarrow (f^{-1})'(\frac{۳}{۵})=\frac{۱}{f'(\frac{۳}{۴})}=\frac{۱۲۵}{۶۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۶ **گزینه ۲**

نکته:

۱) مشتق تابع $y=sin^{-1}u$ که u تابعی از x است به‌صورت $y'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$ محاسبه می‌شود.

۲) مشتق تابع $y=tan\ u$ که u تابعی از x است از رابطهٔ $y'=u'(۱+tan^۲u)$ محاسبه می‌شود.

بنابراین داریم:

$$f(x)=(tan(\frac{\pi}{۶}+sin^{-1}\sqrt{x}))$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{۱-x}}\times(۱+tan^۲(\frac{\pi}{۶}+sin^{-1}\sqrt{x}))$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۱}{۴})=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}}\times(۱+tan^۲\underbrace{(\frac{\pi}{۶}+\underbrace{sin^{-1}(\frac{۱}{۲})}_{\frac{\pi}{۶}})}_{\frac{\pi}{۳}})=\frac{۲}{\sqrt{۳}}(۱+(\sqrt{۳})^۲)=\frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۷ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+۲)y = mx \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{m}{m+۲}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+۲}\right)$ است. کافی است ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{۱+x^۲} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}} = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$f'(x_{\circ}) = \frac{m}{m+۲} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{\circ}}{\sqrt{۱+x_{\circ}^۲}} = \frac{m}{m+۲}$$

می‌دانیم $-۱ < \frac{x_{\circ}}{\sqrt{۱+x_{\circ}^۲}} < ۱$ همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m+۲} > -۱ \Rightarrow \dfrac{m}{m+۲} + ۱ > \circ \Rightarrow \dfrac{m+m+۲}{m+۲} > \circ \Rightarrow m < -۲ \text{ یا } m > -۱ \\ \dfrac{m}{m+۲} < ۱ \Rightarrow \dfrac{m}{m+۲} - ۱ < \circ \Rightarrow \dfrac{m-m-۲}{m+۲} < \circ \Rightarrow m > -۲ \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های دو معادلهٔ فوق داریم: $m > -۱$

۶۸ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f'_+(0)=f'_-(0)$

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f''_+(0)=f''_-(0)$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)$ را برای $x\geq 0$ و $x<0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $\left(f^{-1}\right)'(x)$ و $\left(f^{-1}\right)''(x)$ در نقطهٔ $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & ;x<0\end{cases}$$

$$x\geq 0,y\geq 0\ \Rightarrow\ f(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ y=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف مثبت)}} y^2=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2\quad ;\quad x\geq 0$$

$$x<0,y<0\Rightarrow f(x)=-\sqrt{-x}\Rightarrow y=-\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف منفی)}} y^2=-x\Rightarrow x=-y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2\quad ;\quad x<0$$

پس ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\geq 0\\ -x^2 & ;x<0\end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

همچنین داریم:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\begin{cases}2x & ;x>0\\ -2x & ;x<0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \left(f^{-1}\right)'_+(0)=\left(f^{-1}\right)'_-(0)=0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$\left(f^{-1}\right)''(x)=\begin{cases}2 & ;x>0\\ -2 & ;x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(f^{-1}\right)''_+(0)=2\\ \left(f^{-1}\right)''_-(0)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \left(f^{-1}\right)''_+(0)\neq\left(f^{-1}\right)''_-(0)$$

بنابراین تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ مشتق دوم ندارد.

۶۹ گزینه ۳

برای سهولت در مشتق‌گیری به‌جای $\sqrt[3]{x}$، عبارت $x^{\frac{1}{3}}$ را قرار می‌دهیم. ضابطهٔ مشتق دوم یا همان y'' را تعیین کرده و حاصل $y''y^5$ را به دست می‌آوریم (دقت کنید y^5 مشتق پنجم تابع y نیست، مشتق پنجم را به‌صورت $y^{(5)}$ نمایش می‌دهند).

$$y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow y=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y''=(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

$$\Rightarrow y''y^5=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}(\sqrt[3]{x})^5=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\times\sqrt[3]{x^5}=-\frac{2}{9}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۷۰ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x+1+(g(x))^5 \Rightarrow f'(x)=1+5g'(x)(g(x))^4$$

$$\Rightarrow f'(0)=1+5g'(0)(g(0))^4$$

با توجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(0)=g(0)=1} 1=1+5g'(0)(1)^4 \Rightarrow 5g'(0)=0 \Rightarrow g'(0)=0$$

در محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $f''(x)$ با عبارت $g'(x)(g(x))^4$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(0)=0$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفر شوندهٔ تابع $f'(x)$ در نقطهٔ $x=0$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(0)=0+5g''(0)(g(0))^4$$

$$\xrightarrow[g(0)=1]{x=0} f''(0)=5g''(0)(1)^4=5g''(0)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۱ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۰ = m\,(x - x_۰)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^۲}{x-۱} \xrightarrow{x=۲} y\,(۲) = \frac{۲^۲}{۲-۱} = ۴$$

$$y' = \frac{۲x\,(x-۱) - x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{۲x^۲ - ۲x - x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲ - ۲x}{(x-۱)^۲}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'\,(۲) = \frac{۲^۲ - (۲\times ۲)}{(۲-۱)^۲} = \frac{۴-۴}{۱} = ۰$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$ به‌صورت زیر است:

$$y - y\,(۲) = y'\,(۲)\,(x-۲) \xrightarrow[x=۰]{y'(۲)=۰} y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = ۴$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$؛ یعنی خط $y = ۴$، دارای عرض ۴ است.

۷۲ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطهٔ $x=۳$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A\,(۱,۲)$ و $B\,(-۱,۳)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۳-۲}{-۱-۱}=\frac{۱}{-۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$y-y_A=m_{AB}\,(x-x_A)\;\Rightarrow\;y-۲=-\frac{۱}{۲}(x-۱)\;\Rightarrow\;y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(۳)=y(۳)=-\frac{۱}{۲}(۳)+\frac{۵}{۲}=-\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱\;\Rightarrow\;f(۳)=۱$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول $f'(۳)=\frac{-۱}{۲}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده‌شده را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}=\lim_{x\to ۳}-\frac{(f(x)+۵)(f(x)-۱)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}$$
$$-(f(x)+۵)\,\frac{(f(x)-f(۳))}{x-۳}$$
$$=\lim_{x\to ۳}-(f(x)+۵)\,(f'(۳))=-(f(۳)+۵)f'(۳)=-۶\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۳$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}=\frac{f^۲(۳)+۴f(۳)-۵}{۳-۳}=\frac{۱+۴-۵}{۳-۳}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}=\lim_{x\to ۳}\frac{۲f'(x)f(x)+۴f'(x)}{-۱}=\frac{۲f'(۳)f(۳)+۴f'(۳)}{-۱}$$
$$=\frac{۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۱)+۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{-۱}=\frac{-۱-۲}{-۱}=\frac{-۳}{-۱}=۳$$

۷۳ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) تابع f زوج است بنابراین داریم: $f(x)=f(-x)$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=۱$ برابر مشتق تابع در این نقطه است ($m_{\text{مماس}}=f'(۱)$).

ج) خط y در نقطهٔ $x=۱$ بر منحنی تابع f مماس است پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و تابع f صدق می‌کند ($y(۱)=f(۱)$).

د) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_{\circ},y_{\circ})$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})$$

ه) شیب خط قائم گذرا از نقطهٔ $x=-۱$ واقع بر منحنی، معکوس و قرینهٔ شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه است ($m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{m_{\text{مماس}}}=-\frac{۱}{f'(-۱)}$).

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول:

$$y=۲x-۳\xrightarrow{x=۱}y=۲-۳=-۱\Rightarrow f(۱)=-۱$$

و طبق قسمت الف از گام اول:

$$f(-۱)=f(۱)=-۱$$

می‌خواهیم معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f را در نقطهٔ $(-۱,-۱)$ بنویسیم؛ بنابراین طبق قسمت ه از گام اول لازم است ابتدا $f'(-۱)$ را محاسبه کنیم. شیب خط مماس داده‌شده در نقطهٔ $x=۱$ برابر ۲ و طبق قسمت ب از گام اول $f'(۱)=۲$ است.

اگر از طرفین رابطهٔ $f(x)=f(-x)$ مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$f(x)=f(-x)\Rightarrow f'(x)=-f'(-x)\Rightarrow f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-۱)$$
$$=-f'(۱)=-۲$$

بنابراین:

$$m_{\text{قائم}}=-\frac{۱}{f'(-۱)}=-\frac{۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$$

بدین ترتیب معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ $(-۱,-۱)$ به شیب $\frac{۱}{۲}$، به‌صورت زیر می‌شود:

$$y+۱=\frac{۱}{۲}(x+۱)\Rightarrow ۲y+۲=x+۱\Rightarrow ۲y-x+۱=\circ$$

۷۴ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) نیمساز ناحیهٔ اول دارای معادلهٔ $y = x$ است.

ب) یک خط و منحنی بر هم مماس هستند درصورتی‌که معادلهٔ تلاقی آن‌ها با یکدیگر، ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

معادلهٔ منحنی و خط $y = x$ را با یکدیگر تلاقی می‌دهیم:

$$ay = x^۲ + ۵x + ۴ \Rightarrow y = \frac{۱}{a}\left(x^۲ + ۵x + ۴\right) \xrightarrow{y=x} x = \frac{۱}{a}\left(x^۲ + ۵x + ۴\right)$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۵x + ۴ = ax \Rightarrow x^۲ + (۵ - a)x + ۴ = ۰$$

معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ باشد:

$$\xrightarrow{\Delta=۰} (۵ - a)^۲ - ۴(۱)(۴) = ۰ \Rightarrow (۵ - a)^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow (۵ - a)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵ - a = ۴ \Rightarrow a = ۱ \\ ۵ - a = -۴ \Rightarrow a = ۹ \end{cases}$$

در ناحیهٔ اول x و y مقادیر مثبتی دارند بنابراین مقداری از a قابل‌قبول است که به ازای آن x مثبت شود.

$$x^۲ + (۵ - a)x + ۴ = ۰$$
$$a = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \quad \text{غ ق ق}$$
$$a = ۹ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

پس فقط $a = ۹$ قابل‌قبول است.

۷۵ **گزینه ۲**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

یک خط و منحنی بر هم مماس هستند درصورتی‌که معادلهٔ تلاقی آن‌ها با یکدیگر، ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

معادلهٔ خط و منحنی را تلاقی می‌دهیم. یک معادلهٔ درجه‌دو تشـکیل می‌شود. می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ باشد.

$$۲x - ۴ = (m + ۳)x^۲ + mx \Rightarrow (m + ۳)x^۲ + (m - ۲)x + ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۰} (m - ۲)^۲ - (۴)(m + ۳)(۴) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ - ۱۶m - ۴۸ = ۰$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۲۰m - ۴۴ = ۰ \Rightarrow (m - ۲۲)(m + ۲) = ۰ \Rightarrow m = ۲۲ \quad \text{یا} \quad m = -۲$$

۷۶ **گزینه ۲**

معادلهٔ دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم، باید معادلهٔ به‌دست‌آمده ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow ax^۲+۴x=x^۲+۱ \Rightarrow (a-۱)x^۲+۴x-۱=۰$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta=۰$ باشد.

$$\xrightarrow{\Delta=۰} ۴^۲-۴(a-۱)(-۱)=۰ \Rightarrow ۱۶+۴(a-۱)=۰ \Rightarrow ۴(a-۱)=-۱۶$$
$$\Rightarrow a-۱=-۴ \Rightarrow a=-۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷۷ **گزینه ۴**

برای تعیین مماس یا متقاطع بودن دو نمودار، معادلات آن‌ها را باهم مساوی قرار می‌دهیم. اگر معادلهٔ حاصل، ریشهٔ مضاعف داشت دو منحنی بر هم مماس‌اند و اگر ریشهٔ ساده داشت متقاطع هستند.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow -x^۴+۲x^۲+x=x+۱ \Rightarrow -x^۴+۲x^۲-۱=۰ \xrightarrow{\times(-۱)}$$
$$x^۴-۲x^۲+۱=۰$$
$$\Rightarrow \left(x^۲-۱\right)^۲=۰ \Rightarrow ((x-۱)(x+۱))^۲=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲(x+۱)^۲=۰ \Rightarrow$$
$x=۱$ یا $x=-۱$

هر دو ریشهٔ به‌دست‌آمده ریشه‌های مضاعف هستند بنابراین نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در دو نقطه بر هم مماس‌اند و چون هیچ ریشهٔ ساده‌ای به دست نیامد پس غیرقاطع هستند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۷۸ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) معادلهٔ خط گذرا از مبدأ مختصات به‌صورت $y = mx$ است.

ب) خط و منحنی بر هم مماس‌اند بنابراین معادلهٔ تلاقی آن‌ها باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

ج) خط و منحنی در ناحیهٔ اول مماس‌اند پس طول نقطهٔ تماس یعنی مقدار x حتماً باید مثبت باشد.

گام دوم

$$mx = (x+۱)(x+۴) \Rightarrow mx = x^۲ + ۵x + ۴ \Rightarrow x^۲ + (۵-m)x + ۴ = ۰$$

معادلهٔ حاصل از درجهٔ دو است بنابراین در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ باشد:

$$\xrightarrow{\Delta=۰} (۵-m)^۲ - ۴(۱)(۴) = ۰ \Rightarrow (۵-m)^۲ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} ۵-m = ۴ \Rightarrow m = ۱ \\ ۵-m = -۴ \Rightarrow m = ۹ \end{cases}$$

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول داریم:

$$m = ۱: \quad x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \quad \text{غ ق ق}$$

$$m = ۹: \quad x^۲ - ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

پس فقط $m = ۹$ قابل‌قبول است.

۷۹ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ روی منحنی تابع قرار دارند بنابراین در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند.

ب) معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$$

ج) خط و منحنی بر هم مماس‌اند بنابراین معادلهٔ تلاقی آن‌ها باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

طبق قسمت الف از گام اول داریم:

$$y = x^۳ + ax^۲ + ۲x \Rightarrow \begin{cases} y(۱) = ۱ + a + ۲ = a + ۳ \\ y(-۱) = -۱ + a - ۲ = a - ۳ \end{cases}$$

معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۱, a+۳)$ و $B(-۱, a-۳)$ به‌صورت زیر است:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a - ۳ - a - ۳}{-۱ - ۱} = \frac{-۶}{-۲} = ۳$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - a - ۳ = ۳(x - ۱) = ۳x - ۳ \Rightarrow y = ۳x + a$$

اکنون با دو روش می‌توان مقدار a را محاسبه کرد.

روش اول:

برای به دست آوردن معادلهٔ تلاقی، معادلهٔ خط و منحنی را مساوی قرار می‌دهیم، داریم:

$$x^۳ + ax^۲ + ۲x = ۳x + a \Rightarrow x^۳ + ax^۲ - x - a = ۰ \Rightarrow x^۲(x + a) - (x + a) = ۰$$

$$\Rightarrow (x + a)(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \\ x = -a \end{cases}$$

طبق قسمت ج از گام اول، معادلهٔ تلاقی در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $a = ۱$ یا $a = -۱$ باشد.

روش دوم:

خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B، حتماً در یکی از این دو نقطه بر منحنی مماس می‌شود (در غیر این صورت خط و منحنی متقاطع می‌شود و معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف نخواهد داشت)؛ بنابراین شیب مماس بر منحنی در یکی از نقاط A یا B برابر شیب خط گذرنده از این دو نقطه است. می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است پس داریم:

$$y = x^۳ + ax^۲ + ۲x \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۲ax + ۲$$

$$y'(۱) = m_{AB} \Rightarrow ۳ + ۲a + ۲ = ۳ \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

$$y'(-۱) = m_{AB} \Rightarrow ۳ - ۲a + ۲ = ۳ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

بنابراین به ازای $a = ۱$ یا $a = -۱$، خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B بر منحنی مماس می‌شود.

۸۰ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) دو نقطهٔ $x_A = ۱$ و $x_B = -\frac{۱}{۲}$ روی منحنی تابع قرار دارند بنابراین در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند.

ب) معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$$

ج) خط بر منحنی مماس است بنابراین معادلهٔ تلاقی آن‌ها باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

مختصات دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$x_A = ۱ \Rightarrow y_A = \frac{۱}{۱} = ۱ \Rightarrow A(۱, ۱)$$

$$x_B = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y_B = \frac{۱}{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} = ۴ \Rightarrow B\left(-\frac{۱}{۲}, ۴\right)$$

بنابراین داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۴ - ۱}{-\frac{۱}{۲} - ۱} = \frac{۳}{-\frac{۳}{۲}} = -۲$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - ۱ = -۲(x - ۱) \Rightarrow y - ۱ = -۲x + ۲ \Rightarrow y = -۲x + ۳$$

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، معادلهٔ خط و منحنی را باهم مساوی قرار می‌دهیم:

$$-۲x + ۳ = \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow -۲x^۳ + ۳x^۲ = ۱ \Rightarrow ۲x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$(x - ۱)\left(۲x^۲ - x - ۱\right) = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۱)(x - ۱)(۲x + ۱) = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲(۲x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{ریشهٔ مضاعف} \\ x = \frac{-۱}{۲} & \text{ریشهٔ ساده} \end{cases}$$

بنابراین در نقطهٔ $x = ۱$ خط بر منحنی مماس می‌شود.

۸۱ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادله خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کنند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

گام دوم

نقطهٔ $A\left(0, -1\right)$ در ضابطـهٔ تابع صدق نمی‌کند، بنابراین خطوط مماس از نقطه‌ای خارج از منحنی بر تابع رسم می‌شود. نقطه‌ای فرضی با مختصات $B\left(\alpha, \alpha^2 + \alpha\right)$ بر روی منحنی y در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خطوط رسم شـده از نقطهٔ A، در این نقطه بر منحنی تابع مماس شود؛ بنابراین y'_B برابر شیب خط مماس بر منحنی خواهد بود.

$$B\left(\alpha, \alpha^2 + \alpha\right) \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = y'_B = 2\alpha + 1$$

معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ B برابر است با:

$$y - y_B = y'_B\left(x - x_B\right) \Rightarrow y - \alpha^2 - \alpha = \left(2\alpha + 1\right)\left(x - \alpha\right)$$

خط مماس از نقطهٔ A عبور می‌کند بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند، پس داریم:

$$-1 - \alpha^2 - \alpha = \left(2\alpha + 1\right)\left(-\alpha\right) \Rightarrow -1 - \alpha^2 - \alpha = -2\alpha^2 - \alpha \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

به ازای $\alpha = 1$، شیب مماس مثبت می‌شود پس داریم:

$$y'_B = 2\alpha + 1 \xrightarrow{\alpha = 1} y'_B = 2\left(1\right) + 1 = 2 + 1 = 3$$

۸۲ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(0, -2)$ در معادلهٔ تابع صدق نمی‌کند پس این نقطه خارج از منحنی قرار دارد. نقطهٔ $T(\alpha, \alpha^2 - 1)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خطوط رسم شده، در این نقطه بر منحنی مماس شوند. شیب و معادلهٔ این خط برابر است با:

$$y' = 2x \xrightarrow{T(\alpha, \alpha^2 - 1)} y'_T = 2\alpha$$

$$y - y_T = y'_T (x - x_T) \Rightarrow y - \alpha^2 + 1 = (2\alpha)(x - \alpha)$$

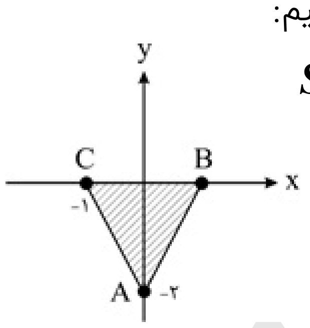
باید مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط صدق کند پس:

$$\xrightarrow{A(0,-2)} -2 - \alpha^2 + 1 = (2\alpha)(-\alpha) = -2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow B(1, 0)$$

$$\alpha = -1 \Rightarrow \alpha^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow C(-1, 0)$$

با مشخص کردن سه نقطهٔ A، B و C در یک دستگاه مختصات، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را محاسبه می‌کنیم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

۸۳ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطهٔ $A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبهٔ مشتق تابع در این نقطه، معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} \xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)} y'_A = \frac{2(\alpha+1)-(2\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2\alpha+2-2\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$y - y_A = y'_A(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x-\alpha)$$

خط مماس از نقطهٔ $(-1, 0)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-1, y=0} 0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1-\alpha) \Rightarrow -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = -\frac{3(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} \Rightarrow \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{\alpha+1}$$

دقت کنید که نقطهٔ $x = -1$ عضو دامنهٔ تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است بنابراین $\alpha \neq -1$ است (زیرا نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد) پس می‌توان عبارت $\alpha + 1$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$$

۸۴ **گزینه ۴**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) دو خط مماس عمود بر هم هستند؛ بنابراین اگر شیب دو خط مماس را m_1 و m_2 در نظر بگیریم، داریم $m_1m_2=-1$.

ب) معادلهٔ تلاقی خط مماس و منحنی دارای ریشه مضاعف است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطه (x_1,y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم شیب یکی از خطوط مماس رسم‌شده از نقطهٔ A برابر m باشد پس معادلهٔ این خط برابر است با:

$$y-\alpha=m(x-0)\Rightarrow y-\alpha=mx\Rightarrow y=mx+\alpha$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی، معادلهٔ تلاقی را به دست می‌آوریم:

$$mx+\alpha=\frac{1}{2}x^2+3\Rightarrow\frac{1}{2}x^2-mx+3-\alpha=0$$

چون خط بر منحنی مماس است طبق قسمت (ب) از گام اول، معادلهٔ تلاقی به‌دست‌آمده باید دارای ریشهٔ مضاعف باشد پس:

$$\Delta=0\Rightarrow(-m)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)(3-\alpha)=0\Rightarrow m^2-2(3-\alpha)=0\Rightarrow m^2$$

$$=2(3-\alpha)=6-2\alpha\Rightarrow m=\pm\sqrt{6-2\alpha}$$

شیب دو خط مماس را $m_1=\sqrt{6-2\alpha}$ و $m_2=-\sqrt{6-2\alpha}$ در نظر می‌گیریم. طبق قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$\xrightarrow{m_1m_2=-1}\left(\sqrt{6-2\alpha}\right)\left(-\sqrt{6-2\alpha}\right)=-1\Rightarrow-(6-2\alpha)=-1\Rightarrow6-2\alpha=1$$

$$\Rightarrow2\alpha=5\Rightarrow\alpha=\frac{5}{2}$$

۸۵ **گزینه ۱**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) نقطه M به عرض ۴، بر محور yها واقع است پس مختصات آن برابر $(۰,۴)$ است.

ب) معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطه $(x_۱,y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=m\left(x-x_۱\right)$$

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه بر روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ منحنی صدق نمی‌کند پس این نقطه خارج از منحنی قرار دارد. نقطهٔ $T\left(\alpha,-\alpha^۲+۲\alpha\right)$ را روی منحنی در نظر گرفته و فرض می‌کنیم خط رسم‌شده از نقطهٔ M، در این نقطه بر منحنی مماس باشد. شیب و درنتیجه معادلهٔ این خط برابر است با:

$$y'=-۲x+۲\xrightarrow{T\left(\alpha,-\alpha^۲+۲\alpha\right)}y'_T=-۲\alpha+۲$$

$$y-y_T=y'_T\,(x-x_T)\Rightarrow y+\alpha^۲-۲\alpha=(-۲\alpha+۲)\,(x-\alpha)$$

باید مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ خط صدق کند پس:

$$\xrightarrow{M(۰,۴)}\ ۴+\alpha^۲-۲\alpha=(-۲\alpha+۲)\,(-\alpha)\ \Rightarrow\ ۴+\alpha^۲-۲\alpha=۲\alpha^۲-۲\alpha$$

$$\Rightarrow\alpha^۲=۴\ \Rightarrow\ \alpha=\pm۲\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=۲\ \Rightarrow\ m=-۲\,(۲)+۲=-۴+۲=-۲ & \text{غ ق ق}\\ \alpha=-۲\ \Rightarrow\ m=-۲\,(-۲)+۲=۴+۲=۶\end{cases}$$

به ازای $\alpha=-۲$ شیب مثبت می‌شود پس عرض نقطهٔ تماس برابر است با:

$$y=-\alpha^۲+۲\alpha\ \xrightarrow{\alpha=-۲}\ y=-(-۲)^۲+۲\,(-۲)=-۴-۴=-۸$$

۸۶ **گزینه ۳**

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطه‌ای با مختصات $(x_۰, y_۰)$ عبور می‌کند برابر است با:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

ب) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

ج) تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب $m_۱$ و $m_۲$ برابر است با:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right|$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(۲, -۱)$ در معادلهٔ منحنی صدق نمی‌کند؛ بنابراین نقطهٔ A خارج از منحنی قرار دارد. نقطهٔ $B(\alpha, \frac{۱}{۲}\alpha^۲ - \alpha)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خطی که از نقطهٔ A می‌گذرد، در B بر منحنی تابع مماس می‌شود، پس شیب‌خط مماس برابر است با:

$$y = \frac{۱}{۲}x^۲ - x \Rightarrow y' = x - ۱ \xrightarrow{x=\alpha} m = \alpha - ۱$$

باتوجه‌به گام اول، معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y - (\frac{۱}{۲}\alpha^۲ - \alpha) = (\alpha - ۱)(x - \alpha)$$

مختصات نقطهٔ $A(۲, -۱)$ در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند، پس داریم:

$$\xrightarrow{x=۲\,,y=-۱} -۱ - \frac{۱}{۲}\alpha^۲ + \alpha = (\alpha - ۱)(۲ - \alpha) \Rightarrow -۱ - \frac{۱}{۲}\alpha^۲ + \alpha = ۳\alpha - \alpha^۲ - ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} \alpha^۲ - ۴\alpha + ۲ = ۰$$

ریشه‌های این معادله، طول نقاطی از منحنی است که خطوط مماس با منحنی تماس دارند. فرض می‌کنیم $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ دو ریشهٔ این معادله باشند؛ در این صورت داریم:

$$m_۱ = \alpha_۱ - ۱\,,\; m_۲ = \alpha_۲ - ۱$$

بنابراین:

$$\tan\theta = \left|\frac{(\alpha_۱ - ۱) - (\alpha_۲ - ۱)}{۱ + (\alpha_۱ - ۱)(\alpha_۲ - ۱)}\right| = \left|\frac{\alpha_۱ - \alpha_۲}{\alpha_۱\alpha_۲ - (\alpha_۱ + \alpha_۲) + ۲}\right|$$

باتوجه‌به معادله داریم:

$$\alpha_۱\alpha_۲ = ۲\,,\; \alpha_۱ + \alpha_۲ = ۴$$

پس:

$$\tan\theta = \left|\frac{\alpha_۱ - \alpha_۲}{۲ - ۴ + ۲}\right| = \left|\frac{\alpha_۱ - \alpha_۲}{۰}\right| \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۸۷ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) شیب‌خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر است با مقدار مشتق تابع در آن نقطه.

ب) تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب $m_۱$ و $m_۲$ برابر است با:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ A در ضابطهٔ تابع صدق نمی‌کند؛ پس این نقطه خارج از منحنی تابع قرار دارد. فرض می‌کنیم خط رسم‌شده از نقطهٔ A در نقطهٔ $(\alpha, -\alpha^۲ + ۲\alpha + ۵)$ بر منحنی تابع مماس شده است. برای یافتن شیب این خط مماس، مقدار $y'(\alpha)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y = -x^۲ + ۲x + ۵ \Rightarrow y' = -۲x + ۲ \Rightarrow y'(\alpha) = -۲\alpha + ۲$$

معادلهٔ این خط مماس برابر است با:

$$y - (-\alpha^۲ + ۲\alpha + ۵) = (-۲\alpha + ۲)(x - \alpha)$$

نقطهٔ A نیز روی خط مماس است؛ پس مختصات آن در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=۲\,,y=۹} ۹ + \alpha^۲ - ۲\alpha - ۵ = -۴\alpha + ۴ + ۲\alpha^۲ - ۲\alpha \Rightarrow \alpha^۲ - ۴\alpha = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \alpha - ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۴ \end{cases}$$

به ازای $\alpha = ۰$ و $\alpha = ۴$، شیب دو خط مماس به دست می‌آید:

$$\alpha = ۰ \xrightarrow{y'=-۲\alpha+۲} m_۱ = -۲(۰) + ۲ = ۲$$

$$\alpha = ۴ \xrightarrow{y'=-۲\alpha+۲} m_۲ = -۲(۴) + ۲ = -۶$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، تانژانت زاویهٔ بین دو خط مماس را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\theta = \left|\frac{۲+۶}{۱-۱۲}\right| = \left|\frac{۸}{-۱۱}\right| = \frac{۸}{۱۱}$$

۸۸ گزینه ۲

درصورتی‌که خط بر منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی دو منحنی، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^۲ + a}{x - ۲} \\ y &= -۳x + ۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x^۲+a}{x-۲} = -۳x + ۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + a = -۳x^۲ + ۸x - ۴ \Rightarrow ۴x^۲ - ۸x + (a + ۴) = ۰$$

برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف، $\Delta = ۰$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (-۸)^۲ - ۴(۴)(a + ۴) = ۰ \Rightarrow ۶۴ - ۱۶a - ۶۴ = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۹ **گزینه ۲**

باید شیب خط مماس بر نمودار را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{3}$ بیابیم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos x)-(-\sin x)\sin x}{(1+\cos x)^{2}}=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^{2}}$$

$$=\frac{1}{1+\cos x}\Rightarrow m_1=f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{3}$$

$$y=x\Rightarrow m_2=1$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{1-\frac{2}{3}}{1+(1)(\frac{2}{3})}\right|=\left|\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}\right|=\frac{1}{5}=0/2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۹۰ **گزینه ۳**

نکته: اگر x یک نقطهٔ گوشه برای تابع f باشد و مشتق چپ در این نقطه را m_1 و مشتق راست را m_2 در نظر بگیریم و θ زاویهٔ بین دو مماس چپ و راست در این نقطه باشد، در این صورت $\tan\theta$ را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع نقطهٔ $x=1$ یک نقطهٔ گوشه برای تابع f است، داریم:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}} & ;x\geq 1\\[2mm] -\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}} & ;x<1\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}(x-1)}{x^2+3} & ;x\geq 1\\[2mm] -\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}(x-1)}{x^2+3} & ;x<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_{+}(1)=\dfrac{1}{2}\\[2mm] f'_{-}(1)=\dfrac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\tan\theta=\left|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right|=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶