



p30konkor.com

زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

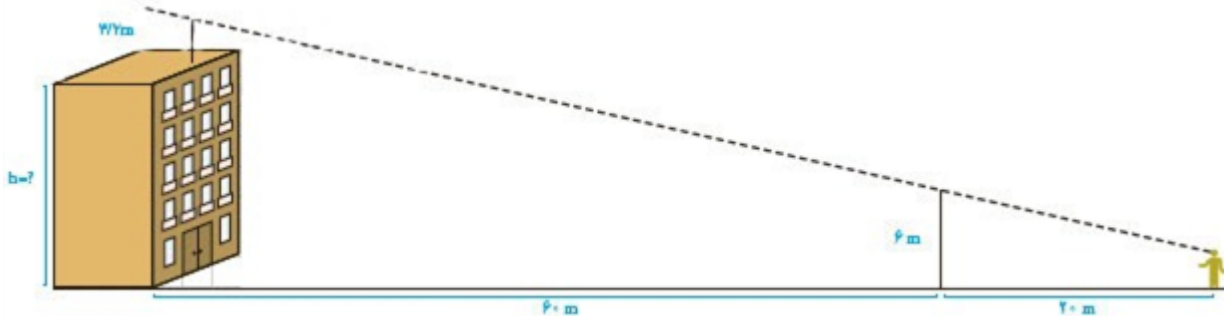
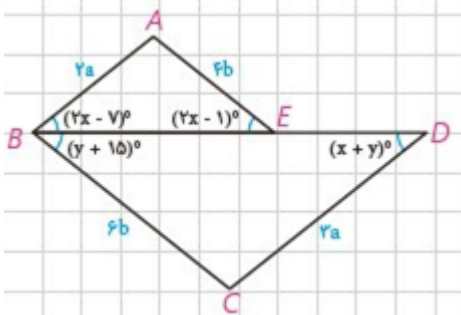
تاریخ برگزاری :

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

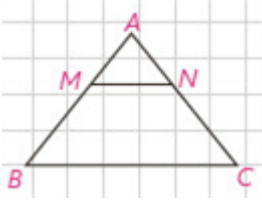
عنوان آزمون : هندسه ۱۰ - فصل ۲

ردیف	لطفاً پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- اگر <math>\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}</math> باشد، مقدار <math>\frac{a}{b}</math> برابر <math>\frac{5}{4}</math> است.</p>	<p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p>
۲	<p>ثابت کنید اگر در یک دوزنقه قائم الزاویه قطرها بر هم عمود باشند، آن گاه ارتفاع دوزنقه واسطه هندسی بین دو قاعده است.</p>	<p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم</p>
۳	<p>مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع <math>\frac{3}{2}</math> متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می بیند. اگر بدانیم فاصله چشم ناظر از زمین <math>\frac{1}{6}</math> متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه تالس کمک بگیرید.)</p> 	<p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)</p>
۴	<p>در شکل روبه رو می دانیم <math>BE = 2 DE</math> است. اولاً <math>x</math> و <math>y</math> را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.</p> 	<p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)</p>



۵

در شکل روبه‌رو  $MN \parallel BC$  است و مساحت دوزنقه‌ی  $MNCB$  هشت برابر مساحت مثلث  $AMN$  است. نسبت  $\frac{MB}{MA}$  را به دست آورید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)

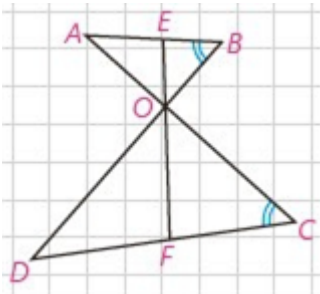
۶

در شکل روبه‌رو  $EF = 10 \text{ cm}$  نیمساز دو زاویه‌ی متقابل به رأس  $O$  است و  $\angle B = \angle C$ .

الف) چرا مثلث‌های  $OAB$  و  $OCD$  متشابه‌اند؟

ب) اگر  $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت  $\frac{OE}{OF}$  چه قدر است؟

ج) طول‌های  $OE$  و  $OF$  را به دست آورید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)



قضیه فیثاغورس می‌گوید اگر زاویه‌ی A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه  $a^2 = b^2 + c^2$ .  
الف) عکس این قضیه را بنویسید.

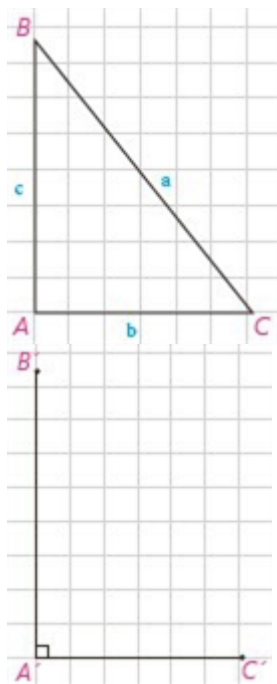
ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه‌ی  $a^2 = b^2 + c^2$  بین اندازه‌ی طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های  $A'B'$  و  $A'C'$  را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که  $\widehat{A'} = 90^\circ$  و  $A'C' = AC$  و  $A'B' = AB$

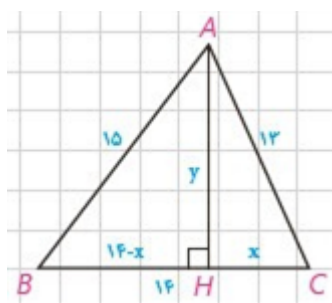
۳) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث  $A'B'C'$ ، اندازه‌ی پاره‌خط  $B'C'$  را به دست آورید و ثابت کنید  $B'C' = BC$

۴) توضیح دهید چرا  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید  $\widehat{A} = 90^\circ$ .  
ج) قضیه‌ی فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان نمایید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)

در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

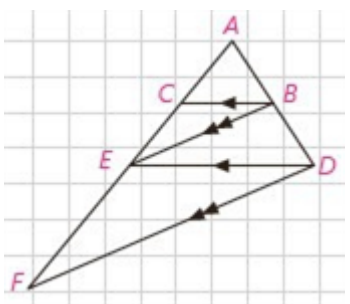
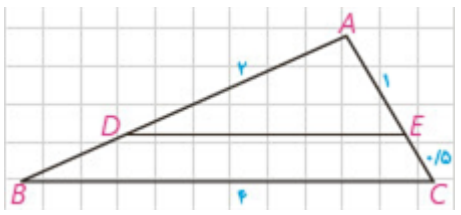
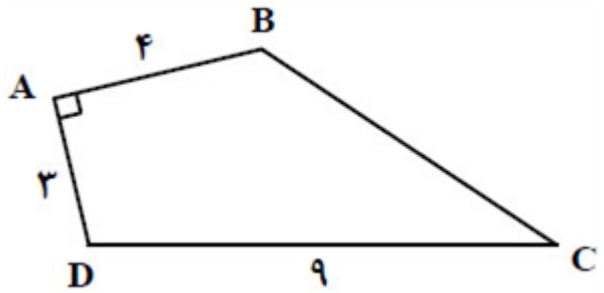


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)

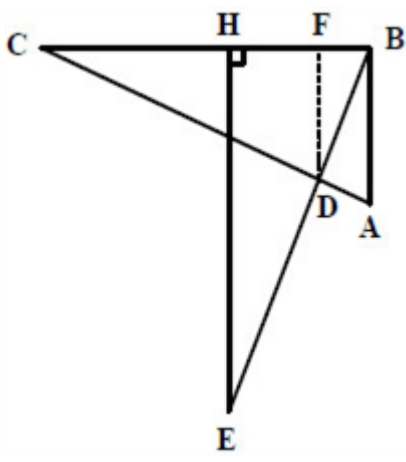
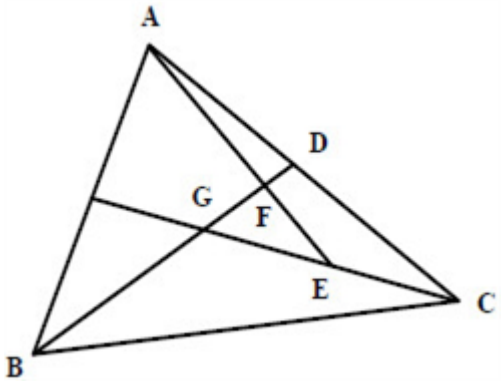
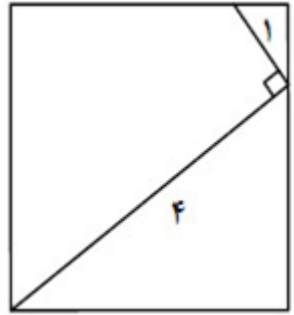
۷

۸

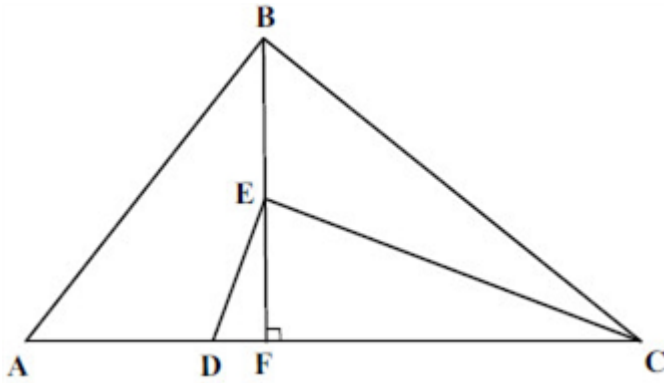


	<p>در شکل مقابل می‌دانیم <math>BC \parallel DE</math> و <math>BE \parallel DF</math>، به کمک قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه‌ی تناسب‌ها با یک‌دیگر، ثابت کنید:</p> <p><math>AE^2 = AC \cdot AF</math> (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)</p>  <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)</p>	۹
	<p>در شکل مقابل <math>DE \parallel BC</math>؛ با توجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به دست آورید.</p>  <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)</p>	۱۰
	<p>در مثلث ABC میانه AM و نیم‌سازهای دو زاویه <math>\widehat{AMC}</math> و <math>\widehat{AMB}</math> را رسم کنید، این دو نیم‌ساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی</p>	۱۱
	<p>اندازه‌ی سه ضلع مثلثی <math>AB = ۱۶</math> و <math>AC = ۲۲</math> و <math>BC = ۱۹</math>، سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیم‌ساز درونی زاویه‌ی <math>\widehat{A}</math> بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی</p>	۱۲
	<p>سه ضلع مثلثی ۷، ۱۲ و ۱۶ سانتی‌مترند، اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیم‌ساز درونی زاویه‌ی کوچک‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی</p>	۱۳
	<p>در چهارضلعی ABCD، از نقاط B و D دو پاره‌خط به‌ترتیب موازی AD و AB طوری رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در نقطه M (درون چهارضلعی) قطع کنند. اگر <math>\widehat{BDC} = ۲\widehat{BDM}</math> باشد، فاصله نقطه M از وسط ضلع BC چقدر است؟</p>  <p>۳ (۴)      ۲/۵ (۳)      ۲ (۲)      ۱/۵ (۱)</p> <p>سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳</p>	۱۴



	<p>نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و BC در مثلث ABC انتخاب شده‌اند. اگر <math>BN = 3NC</math> و مساحت مثلث ABC، ۳ برابر مساحت مثلث BMN باشد، مقدار <math>\frac{BM}{AM}</math> کدام است؟</p> <p>۱) <math>\frac{0}{75}</math>    ۲) <math>\frac{0}{8}</math>    ۳) <math>\frac{1}{25}</math>    ۴) <math>\frac{1}{4}</math></p> <p>سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳</p>	۱۵
	<p>در شکل مقابل، دو مثلث ABC و BEH همنهشت هستند. اگر <math>AB = 4</math>، <math>EH = 8</math> و <math>DF \parallel EH</math> باشد، اندازه BF کدام است؟</p>  <p>۱) <math>\frac{1}{4}</math>    ۲) <math>\frac{1}{6}</math>    ۳) <math>\frac{2}{4}</math>    ۴) <math>\frac{2}{6}</math></p> <p>سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳</p>	۱۶
	<p>در شکل مقابل، G مرکز ثقل مثلث ABC است. اگر <math>GE = EC</math> باشد، مقدار <math>\frac{BD}{FD}</math> کدام است؟</p>  <p>۱) ۹    ۲) ۸    ۳) ۶    ۴) ۵</p> <p>سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳</p>	۱۷
	<p>مساحت مربع شکل زیر، چقدر است؟</p>  <p>۱) <math>\frac{13}{31}</math>    ۲) <math>\frac{7}{29}</math>    ۳) <math>\frac{8}{41}</math>    ۴) <math>\frac{10}{24}</math></p> <p>سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳</p>	۱۸

در شکل مقابل،  $\widehat{ABC} = \widehat{CED} = 90^\circ$  است. اگر  $AD = 3$ ،  $EF = 4$  و  $DF = 1$  باشد، اندازه BC کدام است؟



$8\sqrt{5}$  (۴)

$6\sqrt{3}$  (۳)

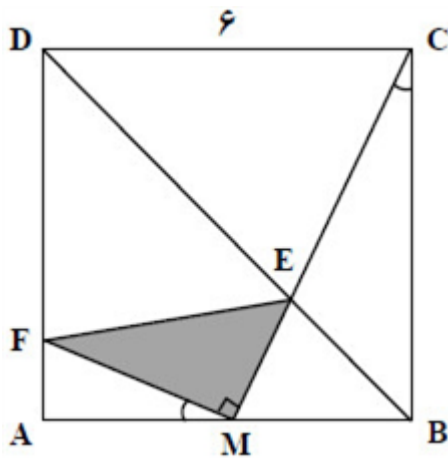
$10\sqrt{2}$  (۲)

$4\sqrt{6}$  (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۹

در مربع شکل مقابل، نقطه M وسط ضلع AB و  $\widehat{BCE} = \widehat{AMF}$  است. مساحت مثلث سایه خورده کدام است؟



$3/25$  (۴)

$3/75$  (۳)

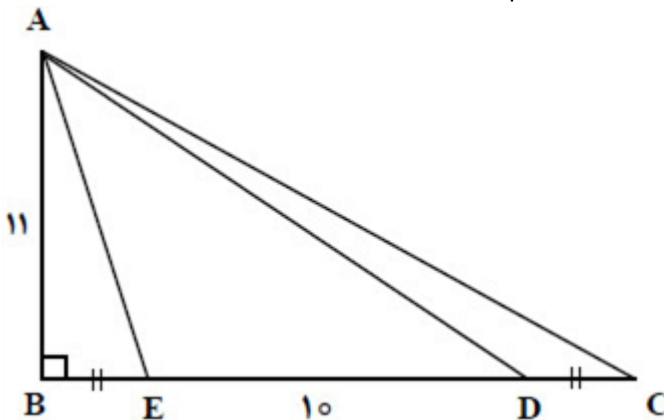
$4/25$  (۲)

$4/75$  (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۰

در شکل مقابل،  $\widehat{DAE} = \widehat{ACD}$  و  $BE = DC$  است. اندازه DC کدام می تواند باشد؟



۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۱

وسط های اضلاع یک لوزی رئوس کدام چهارضلعی هستند؟

مربع (۴)

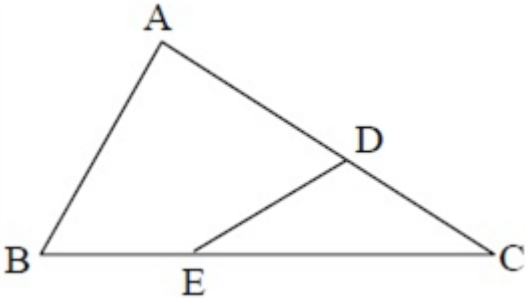
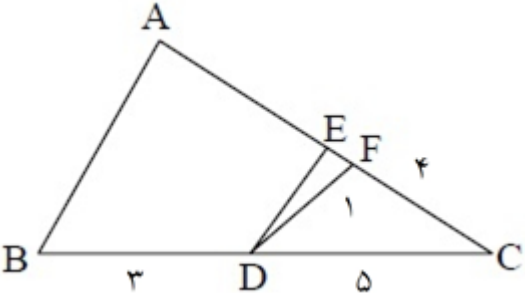
متوازی الاضلاع (۳)

لوزی (۲)

مستطیل (۱)

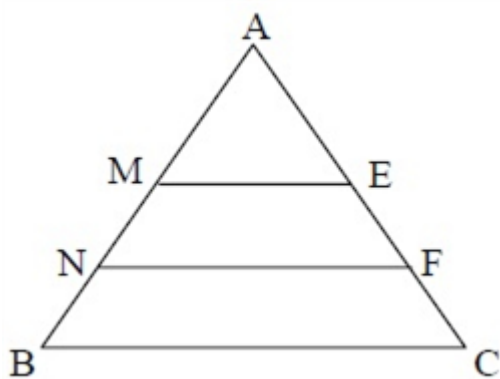
۲۲

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دهم

	<p>اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل مساوی باشند، آن‌گاه وسط‌های دو قطر و وسط‌های دو ضلع مقابل دیگر رئوس کدام چهارضلعی خواهند بود؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ متوازی‌الاضلاع    <input type="radio"/> ۲ لوزی    <input type="radio"/> ۳ مستطیل    <input type="radio"/> ۴ دوزنقه </p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم</p>	۲۳
	<p>در یک چهارضلعی وسط‌های دو ضلع مقابل را به هم وصل کرده‌ایم. در این صورت دو پاره‌خط ایجاد شده کدام ویژگی را دارند؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ مساویند    <input type="radio"/> ۲ عمودند    <input type="radio"/> ۳ منصفند    <input type="radio"/> ۴ عمود منصفند </p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم</p>	۲۴
	<p>در شکل مقابل <math>\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}</math> است. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث DEC کدام است؟</p>  <p> <input type="radio"/> ۱ <math>\frac{9}{2}</math>    <input type="radio"/> ۲ <math>\frac{7}{2}</math>    <input type="radio"/> ۳ <math>\frac{7}{3}</math>    <input type="radio"/> ۴ <math>\frac{9}{4}</math> </p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم</p>	۲۵
	<p>در شکل مقابل زاویه B مساوی <math>\widehat{F}</math> می‌باشد. اگر <math>AB \parallel DE</math> باشد، آن‌گاه نسبت <math>\frac{FD}{ED}</math> کدام است؟</p>  <p> <input type="radio"/> ۱ <math>\frac{4}{5}</math>    <input type="radio"/> ۲ <math>\frac{3}{5}</math>    <input type="radio"/> ۳ <math>\frac{2}{5}</math>    <input type="radio"/> ۴ <math>\frac{2}{3}</math> </p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم</p>	۲۶



اگر در مثلث ABC داشته باشیم  $AM = MN = NB$  و  $AE = EF = FC$  ، آنگاه مجموع  $ME + NF$  کدام است؟



$$\frac{2}{3}BC \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{2}BC \quad \text{۳}$$

$$2BC \quad \text{۲}$$

$$BC \quad \text{۱}$$

۲۷

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم

یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟

$$4 \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{۱}$$

۲۸

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم

دو مثلث متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها  $\frac{4}{9}$  است. اگر اضلاع مثلث کوچک ۳، ۴ و ۵ باشد، محیط مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

$$18 \quad \text{۴}$$

$$27 \quad \text{۳}$$

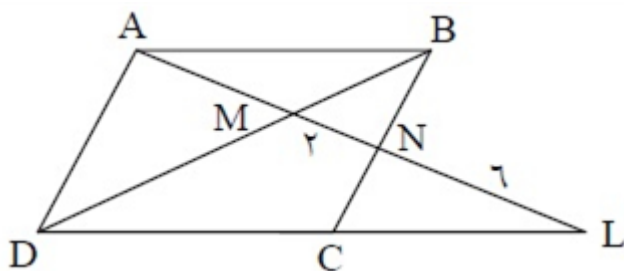
$$16 \quad \text{۲}$$

$$12 \quad \text{۱}$$

۲۹

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم

در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است. طول پاره خط AM چقدر است؟



$$3 \quad \text{۴}$$

$$4 \quad \text{۳}$$

$$2\sqrt{3} \quad \text{۲}$$

$$2 \quad \text{۱}$$

۳۰

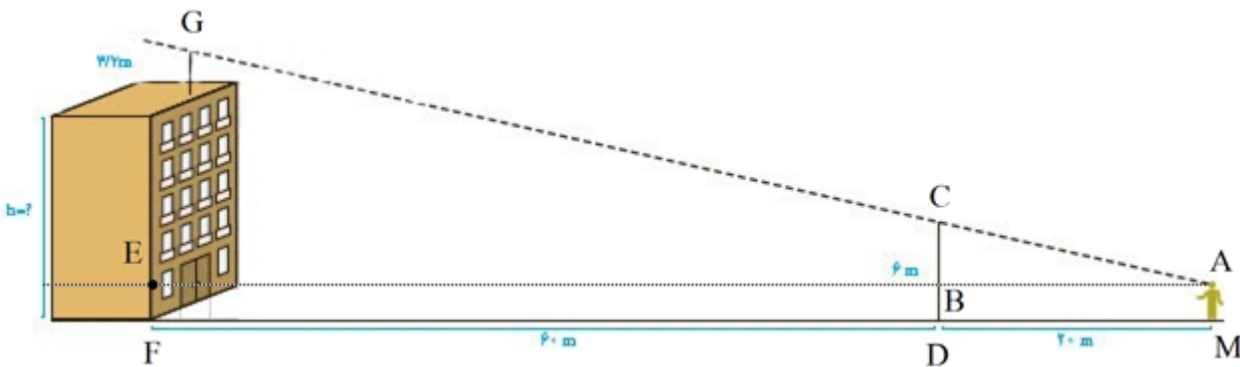
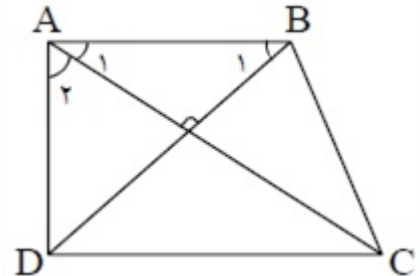
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دهم



فرض کنیم در ذوزنقه قائم‌الزاویه ABCD قطرهای AC و BD بر هم عمود باشند.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 &= 90^\circ \\ \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2 \quad \left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 &= 90^\circ \\ \widehat{A}_1 &= \widehat{D} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ADC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \times DC$$



با توجه به راهنمای مسئله خط راست را رسم می‌کنیم و نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم، چون AE را موازی MF رسم کردیم، پس اندازه‌های زیر را داریم:

$$BD = 1/6 \Rightarrow BC = 4 - 1/6 = 4/4$$

$$EF = 1/6$$

در مثلث AEG دو خط BC و EG موازیند، پس داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EG} \Rightarrow \frac{20}{80} = \frac{4/4}{x} \Rightarrow x = \frac{4/4 \times 80}{20} = 17/6$$

$$\text{بلندی ساختمان} = (17/6 - 3/2) + 1/6 = 16$$

ارتفاع ساختمان ۱۶ متر است.

$$BE = 2DE \Rightarrow \frac{BE}{DB} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{AB}{DC} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{AE}{BC} = \frac{4b}{6b} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

اندازه‌ی اضلاع مثلث‌ها با هم متناسب‌اند، در نتیجه، مثلث‌های ABE و BCD متشابه‌اند و زاویه‌هایشان با هم برابر

$$\angle A = \angle C \text{ و } \angle D = \angle ABE \text{ و } \angle E = \angle CBD \text{ است.}$$

$$\angle D = \angle ABE \Rightarrow (x + y)^\circ = (2x - 7)^\circ \Rightarrow y = x - 7 \quad (1) \quad \text{بنابراین می‌توان نوشت:}$$

$$\angle E = \angle CBD \Rightarrow (2x - 1)^\circ = (y + 15)^\circ \Rightarrow y = 2x - 16 \quad (2)$$

$$2x - 16 = x - 7 \Rightarrow x = 9, y = 2 \quad \text{با توجه به ۱ و ۲ داریم:}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \text{با توجه به ۱ نسبت تشابه } \triangle BCD \text{ به } \triangle BAE \text{ برابر } \frac{3}{2} \text{ است. در نتیجه، نسبت مساحت‌ها برابر است با } \frac{9}{4}$$

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = K^2 \quad (۱)$$

۵

از طرف دیگر بنا بر فرض داریم:

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{MNCB}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{MNCB} + S_{\triangle AMN}} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم  $K^2 = \frac{1}{9}$  پس  $K = \frac{1}{3}$  داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{1}{3 - 1} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{2}{1}$$

$$\left. \begin{matrix} \widehat{AOB} = \widehat{DOC} \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle OCD$$

۶ (الف)

(ب) می‌دانیم نسبت نیمسازهای نظیر در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه برابر است پس:

$$\frac{OE}{OF} = \frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{OE}{OF} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OE + OF}{OF} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{10}{OF} = \frac{5}{3} \Rightarrow OF = 6, OE = 4 \quad (ج)$$

(الف) اگر در مثلثی مربع یک ضلع با حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است، یعنی اگر در مثلث

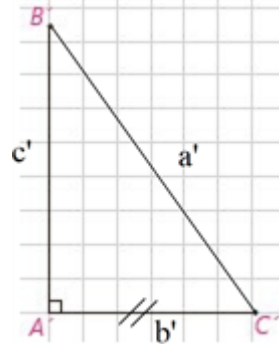
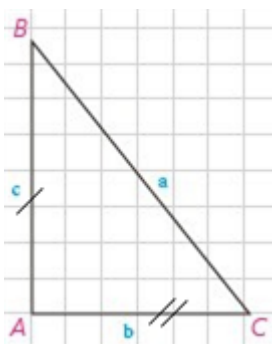
۷

به طول اضلاع  $a, b, c$  یکی از رابطه‌های زیر برقرار باشد:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{یا} \quad b^2 = a^2 + c^2 \quad \text{یا} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.

(ب)



-۱

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \text{طبق فرض}$$

-۲

$$\widehat{A'} = 90^\circ \Rightarrow a'^2 = b'^2 + c'^2$$

$$(B'C')^2 = (A'B')^2 + (A'C')^2 \xrightarrow[A'C'=b]{A'B'=c} (B'C')^2 = c^2 + b^2$$

-۳

$$\xrightarrow{c^2 + b^2 = a^2} (B'C')^2 = (BC)^2 \Rightarrow B'C' = BC$$

-۴

$$\left. \begin{matrix} AB = A'B' \text{ طبق فرض مساله} \\ AC = A'C' \text{ طبق فرض مساله} \end{matrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle A'BC' \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ$$

از قسمت استفاده می‌کنیم  $BC = B'C'$

(ج) مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع با حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.



$$\begin{aligned} \triangle ABH : AB^2 &= BH^2 + AH^2 \Rightarrow 225 = (14 - x)^2 + y^2 \Rightarrow 225 - (14 - x)^2 = 169 - x^2 \\ \triangle ACH : AC^2 &= CH^2 + AH^2 \quad 169 = x^2 + y^2 \\ \Rightarrow 225 - 169 - \cancel{x^2} + 28x &= 169 - \cancel{x^2} \Rightarrow 28x = 140 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$169 = x^2 + y^2 \xrightarrow{x=5} 169 = 25 + y^2 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow y = 12$$

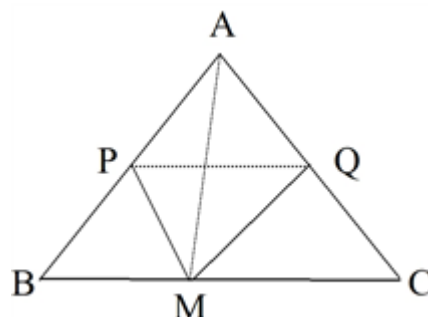
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (12)(14) = 84$$

$$\begin{aligned} BC \parallel DE &\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \cdot AF \\ BE \parallel DF &\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \end{aligned}$$

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{2}{DB} = \frac{1}{\cdot/5} \Rightarrow DB = 1 \Rightarrow AB = 2 + 1 = 3$$

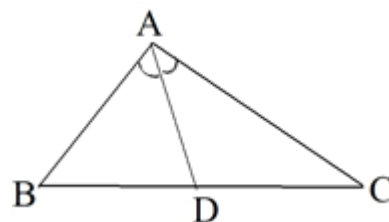
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{DE}{4} \Rightarrow DE = \frac{8}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \triangle AMC \xrightarrow{\text{نیمساز MQ}} \frac{MA}{MC} &= \frac{AQ}{QC} \quad (\cdot/25) \\ \triangle AMB \xrightarrow{\text{نیمساز MP}} \frac{MA}{MB} &= \frac{AP}{PB} \quad (\cdot/25) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{MC=MB} \frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC \quad (\cdot/25)$$

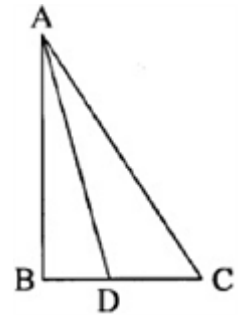


$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &= \frac{AB}{AC} \\ \Rightarrow \frac{BD}{DC+BD} &= \frac{AB}{AC+AB} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC+AB} \\ \Rightarrow \frac{BD}{19} &= \frac{16}{38} \Rightarrow BD = 8 \\ \Rightarrow DC &= 19 - 8 = 11 \end{aligned}$$

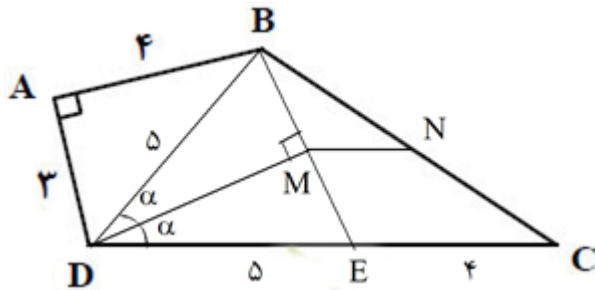
نیمساز زاویه  $\hat{A}$  ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. بنابراین:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{12}{16} = \frac{BD}{7 - BD} \Rightarrow BD = 3 \quad DC = 7 - 3 = 4$$



۱۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. BM را امتداد می دهیم تا ضلع DC را در E قطع کند. بنابر فرض سؤال DM نیمساز زاویه  $\widehat{BDE}$  است. پس در مثلث BDE پاره خط DM هم نیمساز و هم ارتفاع است. در نتیجه مثلث BDE متساوی الساقین است.



$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow BD = 5$$

$$\triangle BDE \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow BD = DE$$

$$\xrightarrow{BD=5} DE = 5$$

$$EC = DC - DE = 9 - 5 = 4$$

اکنون N را وسط ضلع BC در نظر می گیریم. طول پاره خط MN مورد سؤال است.

$$BM = ME = 3$$

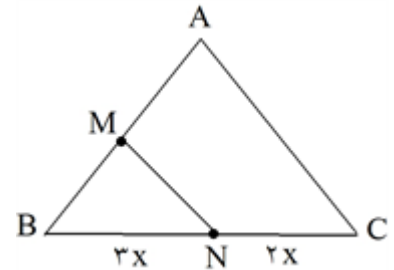
از طرف دیگر در مثلث متساوی الساقین BDE ارتفاع DM میانه هم هست پس:  
بنابراین:

$$\triangle BEC : \frac{BM}{ME} = \frac{BN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{EC} = \frac{BM}{BE} \Rightarrow \frac{MN}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow MN = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض  $NC = 3BN$ ،  $BN$  را برابر  $x$  و  $NC$  را برابر  $3x$  در نظر می‌گیریم و به صورت زیر از مساحت سینوسی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}BN \times BM \sin \widehat{B}}{\frac{1}{2}BC \times AB \sin \widehat{B}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(3x)(BM)}{(5x)(AB)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{تفصیل از مخرج}} \frac{BM}{AB - BM} = \frac{5}{9 - 5} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{5}{4} = 1/25$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle BEH$  همنهشت‌اند پس  $\triangle ABC$  قائم‌الزاویه است و  $BC = EH = 8$  و  $AB = BH = 4$

$$AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

همچنین:

پس:

$$\triangle BEH : DF \parallel EH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DF}{EH} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{DF}{8} = \frac{BF}{4}$$

$$\Rightarrow DF = 2BF \quad (1)$$

از طرف دیگر دو مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $BEH$  همنهشت‌اند، پس  $\widehat{E} = \widehat{C}$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel EH \\ \text{مورب BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E} \xrightarrow{\widehat{E} = \widehat{C}} \widehat{B}_1 = \widehat{C} \xrightarrow{\widehat{A} + \widehat{C} = 90^\circ} \widehat{B}_1 + \widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 = 90^\circ$$

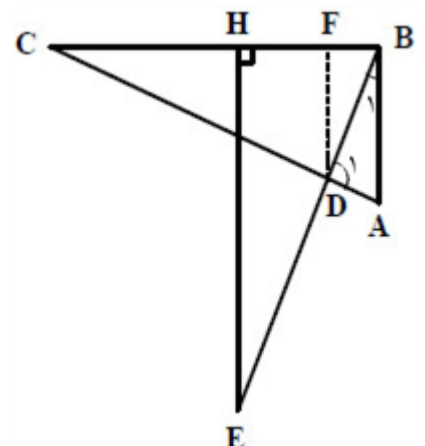
در نتیجه  $BD$  ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  است پس با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.

$$\triangle ABC : AB \times BC = BD \times AC \Rightarrow 4 \times 8 = BD \times 4\sqrt{5} \Rightarrow BD = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle BDF : BD^2 = BF^2 + DF^2 \xrightarrow{\text{از (1)}} \left( \frac{8}{\sqrt{5}} \right)^2 = BF^2 + (2BF)^2 \Rightarrow \frac{64}{5} = 5BF^2$$

بنابراین:

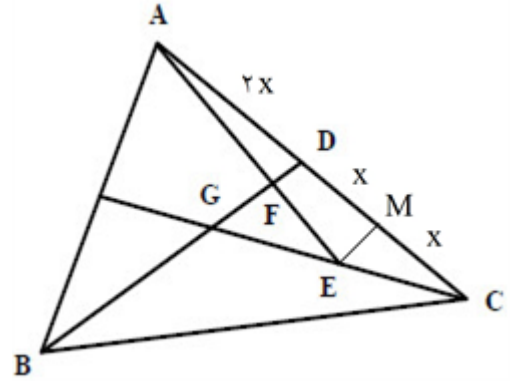
$$\Rightarrow BF^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow BF = \frac{8}{5} = 1/6$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون G مرکز ثقل مثلث ABC است پس BD میانه این مثلث است. در نتیجه:

$$\frac{GD}{BD} = \frac{1}{3}, AD = DC$$

اکنون از نقطه E خطی موازی میانه BD رسم می‌کنیم تا AC را در M قطع کند.



$$\triangle GDC : EM \parallel GD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EC}{EG} = \frac{CM}{DM} \xrightarrow{EC=EG} 1 = \frac{CM}{DM} \Rightarrow CM = DM$$

با فرض  $CM = DM = x$  نتیجه می‌گیریم  $AD = 2x$ . بنابراین:

$$\triangle AEM : FD \parallel EM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AM} = \frac{FD}{EM} \Rightarrow \frac{2x}{3x} = \frac{FD}{EM} \Rightarrow EM = \frac{2}{3}FD \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\triangle GDC : EM \parallel DG \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CM}{CD} = \frac{EM}{GD} \Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{EM}{GD} \Rightarrow GD = 2EM \xrightarrow{(1)} GD = 2\left(\frac{2}{3}FD\right)$$

$$\Rightarrow GD = \frac{4}{3}FD$$

$$\text{چون } \frac{GD}{BD} = \frac{1}{3} \text{ پس } \frac{4}{3}FD = \frac{1}{3}BD \text{ در نتیجه } \frac{BD}{FD} = 4$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض چهارضلعی ABCD مربع است. با توجه به شکل می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{MND} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 90^\circ \\ \triangle DNC : \widehat{C} = 90^\circ &\Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{N}_2 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{N}_1$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle DNC$  و  $\triangle BMN$  با داشتن دو زاویه مساوی متشابه هستند پس:

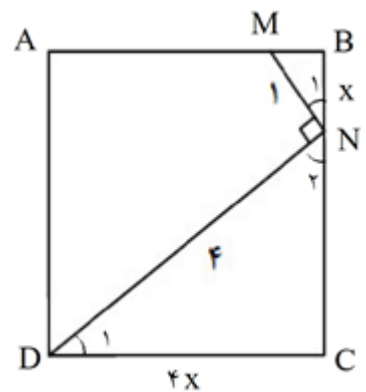
$$\frac{DN}{MN} = \frac{DC}{BN} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{DC}{BN} \xrightarrow{BN=x} DC = 4x$$

$$BC = DC = 4x \xrightarrow{BN=x} NC = 3x \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\triangle DNC : DN^2 = DC^2 + NC^2 \Rightarrow 4^2 = (4x)^2 + (3x)^2 \Rightarrow 16 = 25x^2 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABCD} = DC^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25} = 10\frac{6}{25}$$

پس طول ضلع مربع مساوی  $\frac{16}{5}$  . پس:



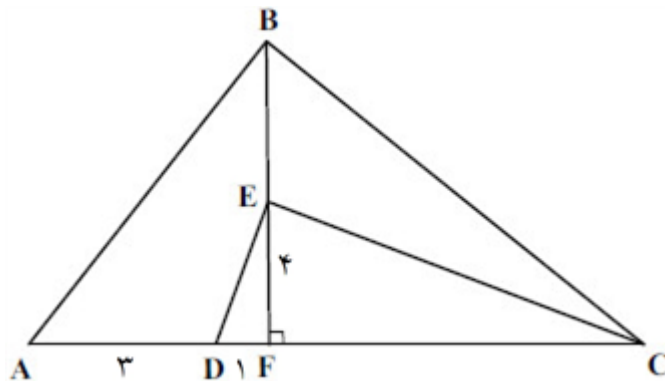
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.

$$\triangle DEC : EF^2 = DF \times FC \Rightarrow 4^2 = 1 \times FC$$

$$\Rightarrow FC = 16$$

$$\triangle ABC : BF^2 = AF \times FC$$

$$\Rightarrow BF^2 = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow BF = 8$$



$$\triangle BFC : BC^2 = BF^2 + FC^2 \Rightarrow BC^2 = 8^2 + 16^2 = 8^2(1 + 4) \Rightarrow BC = 8\sqrt{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه M وسط ضلع مربع است پس  $AM = BM = ۳$ .

از طرف دیگر:

$$BM \parallel DC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \triangle BME \sim \triangle DEC$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{CE} = \frac{BM}{DC} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

$$\triangle BCM: CM^2 = BC^2 + BM^2 = ۶^2 + ۳^2 = ۴۵$$

$$\Rightarrow CM = ۳\sqrt{۵} \quad (۲)$$

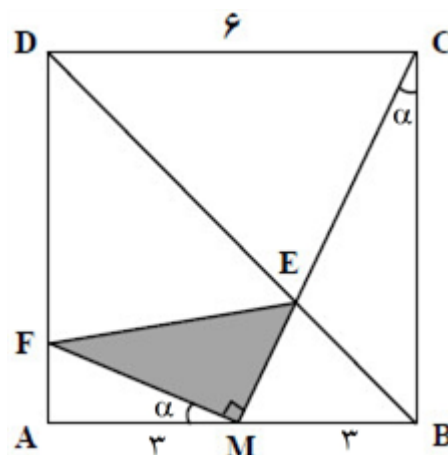
$$(۲), (۱) \text{ از } \Rightarrow ME = \sqrt{۵}, CE = ۲\sqrt{۵}$$

در ضمن دو مثلث قائم الزاویه BCM و AMF دارای زاویه حاده مساوی  $\alpha$  هستند پس متشابهند داریم.

$$\triangle AMF \sim \triangle BCM \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{MF}{MC} \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{MF}{۳\sqrt{۵}} \Rightarrow MF = \frac{۳}{۲}\sqrt{۵}$$

$$S_{MFE} = \frac{۱}{۲} ME \times MF = \frac{۱}{۲} \left( \sqrt{۵} \times \frac{۳}{۲}\sqrt{۵} \right) = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$

بنابراین:





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$\triangle ABE : AE^2 = AB^2 + BE^2 = 11^2 + x^2 \\ \Rightarrow AE = \sqrt{121 + x^2} \quad (۱)$$

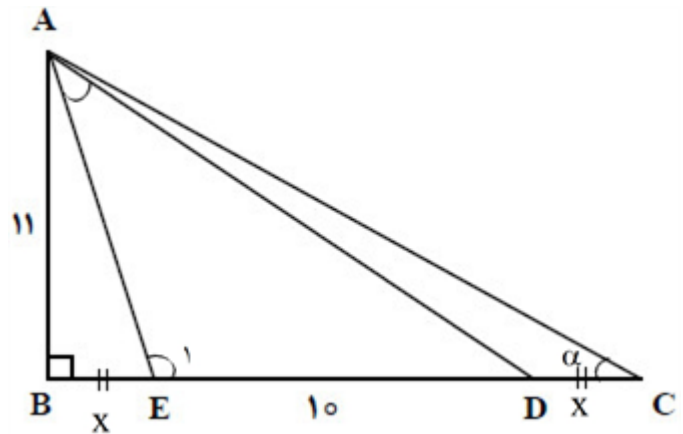
از طرف دیگر دو مثلث AEC و AED متشابهند زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \\ \widehat{DAE} = \widehat{ACD} = \alpha \end{array} \right\} \xrightarrow{(ج)} \rightarrow$$

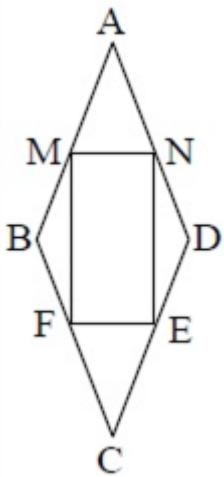
$$\triangle AEC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow AE^2 = ED \times EC \xrightarrow{(۱)} 121 + x^2 = 10(10 + x)$$

$$\Rightarrow 121 + x^2 = 100 + 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \end{cases}$$

در گزینه‌ها  $x = 7$  وجود دارد.



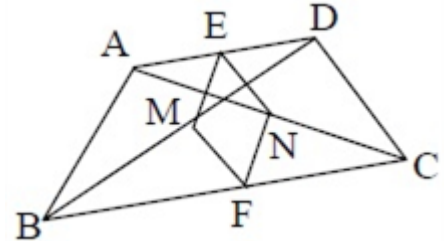
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا در لوزی قطرهای برهم عمودند، پس وسط‌های اضلاع لوزی رئوس یک مستطیل می‌باشند.



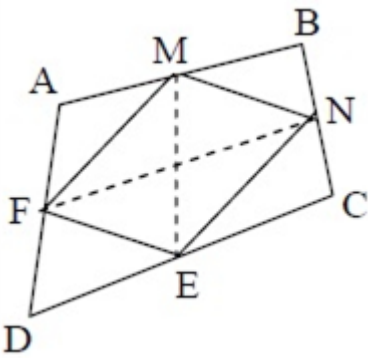
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم در چهارضلعی ABCD داشته باشیم  $AB = DC$  و نقاط E و F وسطهای اضلاع AD و BC بوده و نقاط M و N وسطهای دو قطر AC و BD باشند.

$$\left. \begin{array}{l} MF = \frac{DC}{2} \\ NF = \frac{AB}{2} \\ EN = \frac{DC}{2} \\ ME = \frac{AB}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{AB=DC} MF = NF = EN = EM$$

پس چهارضلعی MENF لوزی است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم این دو پاره‌خط همواره قطرهای یک متوازی‌الاضلاع هستند و در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.



(ME و NF منصف یکدیگرند.)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع‌های  $AH$  و  $DH'$  را رسم می‌کنیم. ۲۵

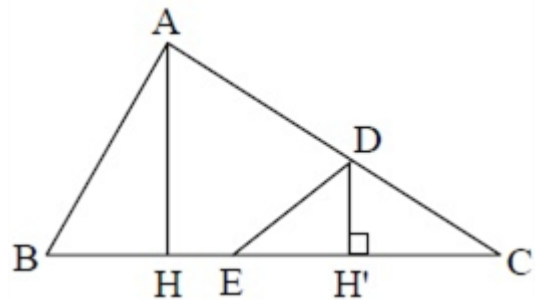
$$AH \parallel DH' \Rightarrow \frac{AH}{DH'} = \frac{AC}{CD} = ۳$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{۳}{۱} \xrightarrow[\text{از مخرج}]{\text{تفضیل}} \frac{BC}{EC} = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{۱}{۳}AH \times BC}{\frac{۱}{۳}OH' \times EC} = \frac{AH}{OH'} \times \frac{BC}{EC} = ۳ \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

راه حل دوم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{۱}{۳}AC \times BC \times \sin C}{\frac{۱}{۳}DC \times EC \times \sin C} = \frac{AC}{DC} \times \frac{BC}{EC} = ۳ \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$\left. \begin{array}{l} ED \parallel AB \\ \text{مورب } BC \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{EDC} = \widehat{B} \xrightarrow{\widehat{B} = \widehat{F}} \widehat{EDC} = \widehat{F} \\ \widehat{C} = \widehat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle FDC \sim \triangle EDC$$

$$\Rightarrow \frac{FD}{ED} = \frac{CF}{DC} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} ME \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{ME}{BC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ME = \frac{۱}{۳}BC$$

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{AB} = \frac{NF}{BC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow NF = \frac{۲}{۳}BC$$

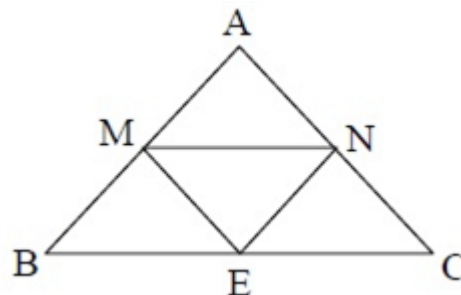
از جمع دو رابطه بالا نتیجه می‌گیریم:

$$ME + NF = BC$$

۲۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر وسط‌های اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم، آن‌گاه مثلث به چهار مثلث همنهشت تقسیم می‌شود. داریم:

$$\left. \begin{aligned} MN &= \frac{1}{2} BC \\ NE &= \frac{1}{2} AB \\ ME &= \frac{1}{2} AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{محیط MNE} = \frac{1}{2} (\text{محیط ABC})$$



۲۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. محیط مثلث کوچک‌تر ۱۲ می‌باشد. در صورتی  $p$  و  $p'$  محیط این مثلث‌ها و  $s$  و  $s'$  مساحت آن‌ها باشند، داریم:

$$\frac{s}{s'} = \left( \frac{p}{p'} \right)^2 \Rightarrow \frac{4}{9} = \left( \frac{12}{p'} \right)^2 \Rightarrow p'^2 = \frac{12 \times 12 \times 9}{4} \Rightarrow p' = 36 \times 9 \Rightarrow p' = 18$$

۳۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \triangle AMB \text{ و } \triangle MDL : AB \parallel DL &\Rightarrow \frac{AM}{ML} = \frac{BM}{MD} \\ \triangle AMD \text{ و } \triangle BMN : BN \parallel AD &\Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{MN}{AM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{ML} = \frac{MN}{AM}$$

$$\Rightarrow AM^2 = MN \times ML = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow MA = 4$$



# پاسخنامه کلیدی

۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴

