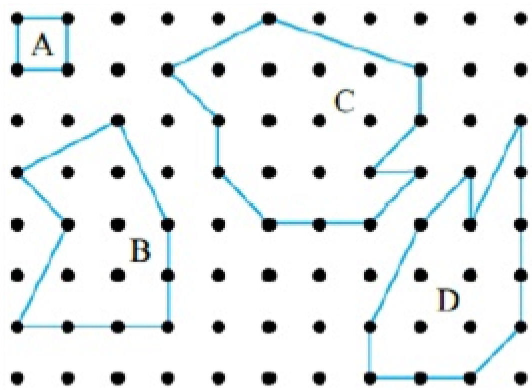
نام و نام خانوادگی : عنوان آزمون : هندسه ۱۰ -فصل ۳

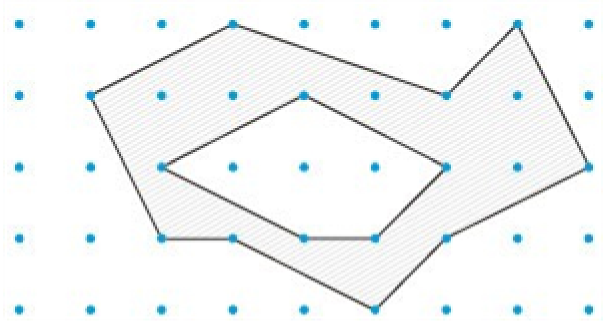
پایه تحصیلی : زمان آزمون :

نام دبیر : تاریخ برگزاری

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	مستطیلی با رأس‌های (۰, ۰)، (۰, ۴)، (۳, ۴) و (۳, ۰) رسم کنید و مساحت آن را با استفاده از قضیهٔ پیک به‌دست آورید. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۲	مساحت هر یک از شکل‌های زیر را به کمک قضیهٔ پیک به دست آورید.  سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۳	الف) تعداد نقطه‌های مرزی چندضلعی‌های شبکه‌ای چه مقدارهایی ممکن است باشند؟ ب) تعداد نقطه‌های درونی چندضلعی‌های شبکه‌ای چه مقدارهایی ممکن است باشند؟ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۴	مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن‌را رسم کنید. در حالتی‌که نقاط مرزی بیش‌ترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن‌را نیز رسم کنید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)	
۵	یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن‌را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آن‌ها را مقایسه کنید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)	

۶

با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مساحت چندضلعی داخلی را از مساحت چندضلعی بیرونی کم کنید.)

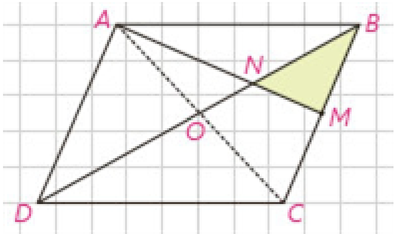


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)

۷

در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

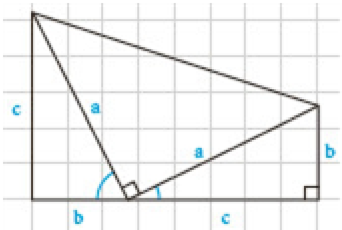
$$S_{\text{BMN}} = \frac{۱}{۱۲} S_{\text{ABCD}}$$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)

۸

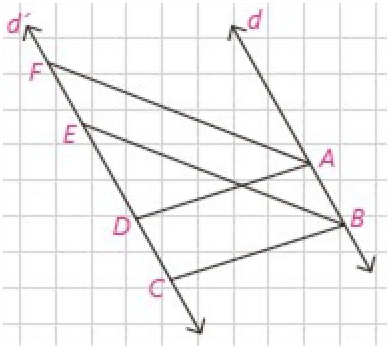
مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



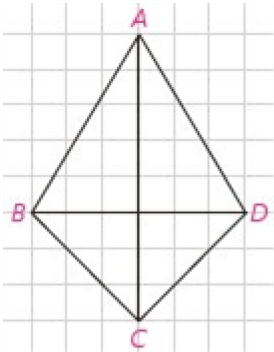
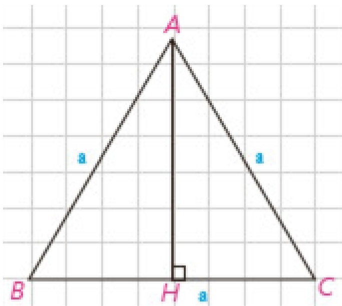
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)

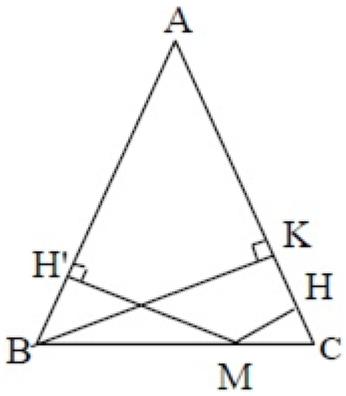
۹

در شکل دو خط d و 'd موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چه‌قدر است؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)

۱۰	در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ و $\mathrm{BC} = \mathrm{CD}$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)	
۱۱	یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه‌ی درونی می‌تواند داشته باشد؟ مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)	
۱۲	الف) فرض کنیم اندازه‌ی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه است؛ چرا؟ ب) به کمک قضیه‌ی فیثاغورس نشان دهید $\mathrm{AH} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-هندسه (۱)	
۱۳	ثابت کنید هر گاه وسطهای اضلاع مربعی را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک مربع می‌باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-سوم دبیرستان-سوم ریاضی	

۱۴	اگر در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داشته باشیم $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = ۳$ و $\widehat{B} = ۷۵^\circ$ ، آن‌گاه مجموع فاصله‌های نقطهٔ دلخواه M از دو ضلع AB و AC کدام است؟  ۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۱۵	کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ ۱) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش منصف یک‌دیگر هستند، مستطیل است. ۲) متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش منصف و مساویند، مربع است. ۳) لوزی که قطرهای مساوی دارد، مربع است. ۴) چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود بوده و مساوی باشند، مربع است. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۱۶	اگر در یک ذوزنقه دو ساق با قاعده کوچک برابر بوده و قطر با قاعده بزرگ برابر باشد، آن‌گاه اندازه یکی از زوایای این ذوزنقه کدام است؟ ۱) ۶۸ ۲) ۷۲ ۳) ۷۴ ۴) ۷۵ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۱۷	اگر در ذوزنقه ABCD داشته باشیم $\frac{\mathrm{AB}}{۲} = \mathrm{AD} = \mathrm{DC} = \mathrm{BC}$ ، آن‌گاه کوچک‌ترین زاویه ذوزنقه کدام است؟ ۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۱۸	اگر در مثلث ABC از نقطهٔ D پای نیمساز زاویهٔ A دو خط به موازات دو ضلع دیگر ترسیم کنیم تا آن دو ضلع را در M و N قطع کند، آن‌گاه پاره‌خط‌های AD و MN کدام ویژگی را دارا هستند؟ ۱) مساویند ۲) منصفند ۳) عمودند ۴) عمودمنصفند سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	
۱۹	اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی محدب یکی اضافه کنیم، آن‌گاه به تعداد قطرهای آن چقدر اضافه می‌شود؟ ۱) n ۲) $n-۱$ ۳) $n+۱$ ۴) $۲\mathrm{n}-۱$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم	

۲۰. اگر مجموع زوایای داخلی یک $n+k$ ضلعی محدب و یک $n-k$ ضلعی محدب ۱۴۴۰ درجه باشد آن‌گاه k کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم

۲۱. مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۸ است. این چندضلعی حداکثر چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۲۴ (۲) ۸ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دهم

۲۲. در مثلث ABC، طول دو میانه عمود بر هم رسم شده از رأس‌های B و C به ترتیب، ۱۲ و ۹ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۵۴ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۳. از رئوس دو سر قطر کوچک یک متوازی‌الاضلاع، خط‌هایی عمود بر قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا سه پاره‌خط روی آن ایجاد شود و امتداد این خطوط ضلع مقابل را قطع کند. اگر طول پاره‌خط وسطی روی قطر بزرگ نصف طول پاره‌خط‌های کناری باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کوچک حاصل از دو عمود رسم شده چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ساخته شده در شکل است؟

(۱) ۳ (۲) ۲/۵ (۳) ۲ (۴) ۱/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۴. در یک لوزی، هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه بزرگ‌تر لوزی، چند درجه است؟

(۱) ۱۵۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۱۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۵. در مثلث ABC، میانه‌های رسم شده از رأس‌های B و C بر هم عمودند. اگر طول میانه رسم شده از رأس C برابر ۴/۵ و مساحت این مثلث برابر ۱۸ باشد، نسبت طول میانه‌های رسم شده از دو رأس B و C کدام است؟

(۱) $\frac{۱۷}{۹}$ (۲) $\frac{۱۹}{۹}$ (۳) $\frac{۵}{۳}$ (۴) $\frac{۴}{۳}$

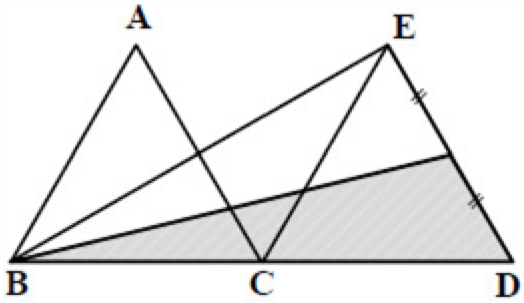
سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۲۶. در یک لوزی هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه کوچک‌تر در هر مثلث حاصل از رسم قطرهای این لوزی چند درجه است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۳۰ (۴) ۴۵

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۲۷ در شکل مقابل، مثلث‌های ABC و CDE متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ سانتی‌متر هستند. مساحت ناحیه هاشورخورده چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۲۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می‌کند، ۶/۴ و ۳/۶ سانتی‌متر است. مجموع اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه در این مثلث، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۲۹ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نقاط M و N وسط اضلاع BC و CD هستند. اگر $AB = ۸$ و فاصلهٔ A از ضلع CD برابر ۶ واحد باشد، مساحت مثلث AMN کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

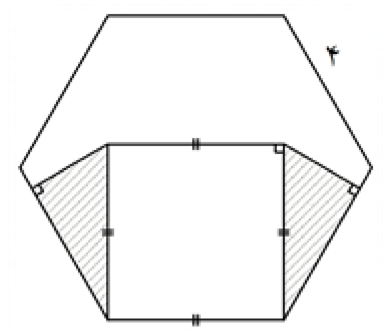
سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۳۰ در یک nضلعی، با کم شدن یک ضلع، ۱۶ قطر از تعداد قطرهای آن کم می‌شود. اگر دو ضلع کم شود، چند قطر از تعداد قطرها کم می‌شود؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۳۱ در شش‌ضلعی منتظم زیر، مساحت ناحیه هاشورخورده چند سانتی‌متر مربع است؟

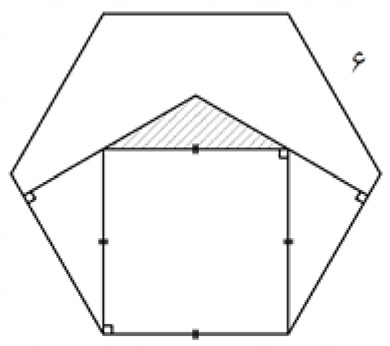


۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۲

در شش‌ضلعی منتظم زیر، مساحت ناحیه هاشورخورده چند سانتی‌متر مربع است؟

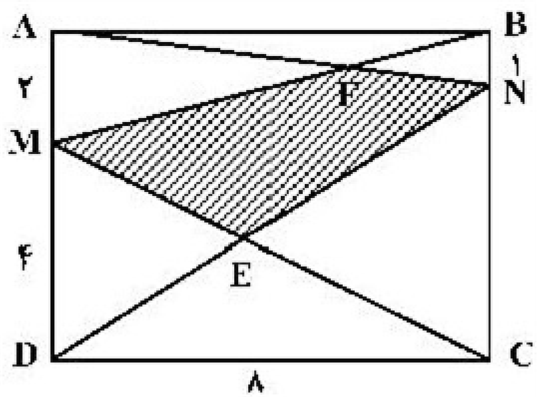


۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۳۳

مستطیل ABCD مطابق شکل زیر مفروض است. مساحت چهارضلعی MENF، کدام است؟



۱) $\frac{۱۰۴}{۹}$ ۲) ۱۳ ۳) $\frac{۴۷}{۳}$ ۴) ۱۶

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۳۴

طول یک مستطیل ۲ واحد کم‌تر از ۱/۵ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

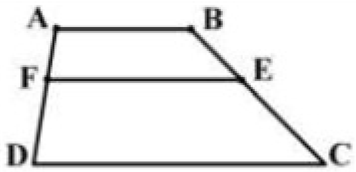
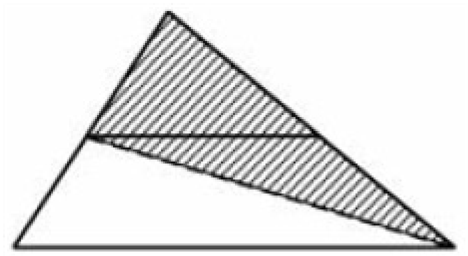
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

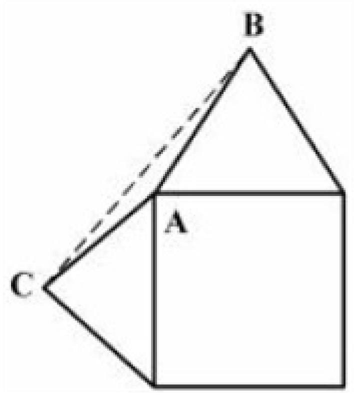
۳۵

در یک چهارضلعی، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، یک مربع ایجاد شده است. الزاماً نوع این چهارضلعی کدام است؟

۱) محاطی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) محیطی ۴) مستطیل

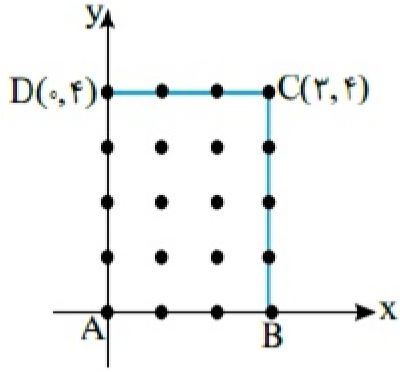
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۶	در ذوزنقه ABCD ، قاعده‌ی بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعده‌ی کوچک است و $AF = \frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$، کدام است؟  (۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$ (۲) $\frac{۷}{۱۵}$ (۳) $\frac{۸}{۱۵}$ (۴) $\frac{۳}{۵}$ کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی	
۳۷	در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC ، کدام است؟ (۱) کم‌تر از ۱ (۲) بیش‌تر از ۱ (۳) مساوی ۱ (۴) بستگی به ضلع سوم دارد. کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی	
۳۸	در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟  (۱) $\frac{۳}{۴}$ (۲) $\frac{۷}{۸}$ (۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$ (۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$ کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی	

۳۹	بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟  ۱) $\sqrt{۳} - ۱$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$ کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی	

پاسخنامه تشریحی

۱ با رسم مستطیل معلوم می‌شود که ۱۴ نقطه مرزی و ۶ نقطه درونی در این مستطیل وجود دارد، پس $b = ۱۴$ و $i = ۶$. به این ترتیب:



$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ \Rightarrow S = \frac{۱۴}{۲} + ۶ - ۱ = ۱۲$$

۲ در چندضلعی A تعداد نقطه‌های مرزی $b = ۴$ و تعداد نقطه‌های درونی $i = ۰$ است. بنابراین:

$$S_A = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۴}{۲} + ۰ - ۱ = ۱$$

در چندضلعی B تعداد نقطه‌های مرزی $b = ۹$ و تعداد نقطه‌های درونی $i = ۵$ است. بنابراین:

$$S_B = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۹}{۲} + ۵ - ۱ = \frac{۱۷}{۲}$$

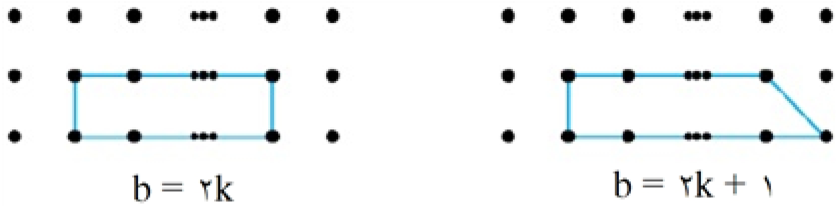
در چندضلعی C تعداد نقطه‌های مرزی $b = ۱۱$ و تعداد نقطه‌های درونی $i = ۹$ است. بنابراین:

$$S_C = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۱۱}{۲} + ۹ - ۱ = \frac{۲۷}{۲}$$

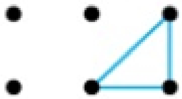
در چندضلعی D تعداد نقطه‌های مرزی $b = ۱۲$ و تعداد نقطه‌های درونی $i = ۴$ است. بنابراین:

$$S_D = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۱۲}{۲} + ۴ - ۱ = ۹$$

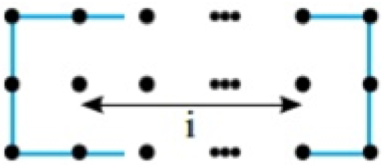
۳ الف) چون هر چندضلعی شبکه‌ای دست کم ۳ رأس دارد و تعداد نقطه‌های مرزی از تعداد رأس‌ها کم‌تر نیست، پس تعداد نقطه‌های مرزی هیچ چندضلعی شبکه‌ای صفر، ۱ یا ۲ نیست. اکنون ثابت می‌کنیم هر عدد طبیعی مانند b که $b \geq ۳$ ممکن است تعداد نقطه‌های مرزی چندضلعی‌ای شبکه‌ای باشد. اگر b زوج باشد، $b = ۲\mathrm{k}$ ، مستطیلی با طول $k - ۱$ و عرض ۱ ویژگی مورد نظر را دارد. اگر b فرد باشد، مثلاً $b = ۲\mathrm{k} + ۱$ ، ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه که قاعده‌هایش k و $k - ۱$ هستند، ویژگی مورد نظر را دارد.



ب) ممکن است چندضلعی‌ای شبکه‌ای، اصلاً نقطه‌ای درونی نداشته باشد، مثلاً قائم‌الزاویهٔ شکل روبه‌رو هیچ نقطهٔ درونی ندارد.



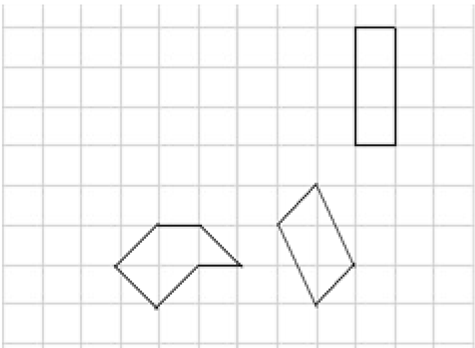
از طرف دیگر، اگر i عددی طبیعی باشد، مستطیل به طول $i + ۱$ و عرض ۲ دقیقاً i نقطهٔ درونی دارد.



بنابراین هر عدد حسابی می‌تواند تعداد نقطه‌های درونی چندضلعی‌ای شبکه‌ای باشد.

فرمول پیک: مساحت چندضلعی شبکه‌ای که b نقطهٔ مرزی و i نقطهٔ درونی دارد از فرمول $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ به دست می‌آید.

۴



b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰
$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$	۳	۳	۳

۵ مساحت به روش معمول: $S = m \times n$

مساحت به کمک قضیه پیک:

$$b = ۲m + ۲n$$

$$i = (m + ۱)\times(n + ۱) - (۲m + ۲n) = \mathrm{mn} - m - n + ۱$$

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۲m + ۲n}{۲} - ۱ + (\mathrm{mn} - m - n + ۱) = m + n - ۱ + \mathrm{mn} - m - n + ۱ = \mathrm{mn}$$

۶ ابتدا مساحت چندضلعی بزرگتر را به دست می‌آوریم.

$$b = ۹, i = ۱۳ \Rightarrow S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۹}{۲} - ۱ + ۱۳ = \frac{۳۳}{۲}$$

حال مساحت چندضلعی کوچکتر را پیدا می‌کنیم.

$$b' = ۵, i' = ۳ \Rightarrow S' = \frac{b'}{۲} - ۱ + i' = \frac{۵}{۲} - ۱ + ۳ = \frac{۹}{۲}$$

$$\text{مساحت قسمت سایه‌زده} = S - S' = \frac{۳۳}{۲} - \frac{۹}{۲} = ۱۲$$

۷

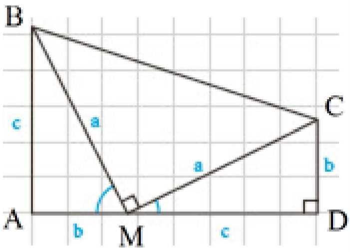
$$\Delta \mathrm{ABC} \cong \Delta \mathrm{ACD} \Rightarrow S_{\mathrm{ABC}} = \frac{۱}{۲} S_{\mathrm{ABCD}} \;\; (۱)$$

میانه‌های هر مثلث آن‌را به شش قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند:

$$\Delta \mathrm{ABC}\,; \mathrm{BM} = \mathrm{MC}, \mathrm{AO} = \mathrm{OC} \Rightarrow S_{\mathrm{MNB}} = \frac{۱}{۶} S_{\mathrm{ABC}} \;\; (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow S_{\mathrm{MNB}} = \frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲} S_{\mathrm{ABCD}}\right) = \frac{۱}{۱۲} S_{\mathrm{ABCD}}$$

۸



$$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(\mathrm{AB} + \mathrm{CD}) \times \mathrm{AD} = \frac{۱}{۲}(b+c)(b+c) = \frac{۱}{۲}(b+c)^{۲}$$

$$S_{\mathrm{ABCD}} = S_{\mathrm{ABM}} + S_{\mathrm{ABM}} + S_{\mathrm{CDM}} + S_{\mathrm{MBC}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\mathrm{bc} + \frac{۱}{۲}\mathrm{bc} + \frac{۱}{۲}a^{۲} = \mathrm{bc} + \frac{۱}{۲}a^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(b+c)^{۲} = \mathrm{bc} + \frac{۱}{۲}a^{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} (b+c)^{۲} = ۲\mathrm{bc} + a^{۲} \Rightarrow b^{۲} + \cancel{۲\mathrm{bc}} + c^{۲} = \cancel{۲\mathrm{bc}} + a^{۲} \Rightarrow b^{۲} + c^{۲} = a^{۲}$$

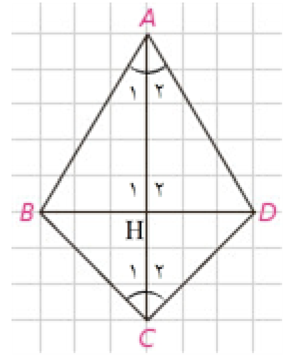
به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه می‌رسیم.

۹ فرض کنیم فاصله‌ی دو خط موازی 'd و d برابر h باشد در این صورت:

$$S_{\mathrm{ABCD}} = S_{\mathrm{ABEF}} = \mathrm{AB} \times h$$

پس مساحت هر دو متوازی‌الاضلاع برابر S است.

۱۰



$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{AB}=\mathrm{AD} \\ \angle A_۱=\angle A_۲ \\ \mathrm{AH}=\mathrm{AH} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\mathrm{ABH}\cong\Delta\mathrm{ADH} \Rightarrow \angle H_۱=\angle H_۲=۹۰^\circ$$

پس قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند.

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{AB}=\mathrm{AD} \\ \mathrm{CB}=\mathrm{CD} \\ \mathrm{AC}=\mathrm{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\mathrm{ABC}\cong\Delta\mathrm{ACD} \Rightarrow \widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲\ ,\ \widehat{C}_۱=\widehat{C}_۲$$

پس قطر AC نیمساز زاویه‌های A و C است.

$$\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD} \Rightarrow S_{\mathrm{ABCD}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}=\frac{۱}{۲}\times۸\times۶=۲۴$$

در ضمن از همنهشتی دو مثلث ABH و ADH نتیجه می‌گیریم $\mathrm{DH}=\mathrm{BH}$ پس قطر AC عمودمنصف BD است.

۱۱ حداقل صفر، یعنی شامل هیچ نقطه‌ی درونی نباشد.

۱۲ الف)

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{AH}=\mathrm{AH} \\ \mathrm{AB}=\mathrm{AC} \\ \widehat{H}=\widehat{H}=۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta\mathrm{ABH}\cong\Delta\mathrm{ACH} \Rightarrow \mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\frac{a}{۲}$$

ب)

$$\Delta\mathrm{ABH}; \angle H=۹۰^\circ \Rightarrow \mathrm{AH}^۲+\mathrm{BH}^۲=\mathrm{AB}^۲ \Rightarrow \mathrm{AH}^۲=a^۲-\left(\frac{a}{۲}\right)^۲=\frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow \mathrm{AH}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AH}\times\mathrm{BC} \Rightarrow S_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times a=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۱۳ فرض: ABCD مربع و M و E و F و N وسط اضلاع

حکم: MEFN مربع

برهان: بنا به فرض $\left.\begin{matrix} MB = BE \\ \widehat{B} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Longleftarrow$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{MBE} \Longleftarrow \widehat{E}_۱ = ۴۵^\circ$

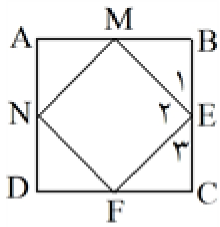
بنا به فرض $\left.\begin{matrix} CE = CF \\ \widehat{C} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Longleftarrow$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{CEF} \Longleftarrow \widehat{E}_۳ = ۴۵^\circ$

$\widehat{E}_۱ + \widehat{E}_۲ + \widehat{E}_۳ = ۱۸۰^\circ$ نیم صفحه است $\widehat{E} \Rightarrow \widehat{E}_۲ = ۹۰^\circ$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد زاویه‌های M و N و F هم ۹۰° هستند.

$\overset{\triangle}{MBE} \cong \overset{\triangle}{CFE}$(ض ز ض) $\Rightarrow ME = EF$ اجزای نظیر

چهارضلعی که همه‌ی زوایای آن قائمه باشند و دو ضلع مجاورش برابر باشند مربع است.



۱۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$\widehat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \widehat{C} = ۷۵^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۳۰^\circ$

$$\left.\begin{matrix} MH + MH' = BK \\ \widehat{A} = ۳۰ \Rightarrow BK = \frac{AC}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH + MH' = \frac{۳}{۲}$$

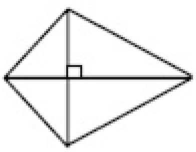
۱۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱ نادرست است، زیرا منصف بودن قطرهای متوازی‌الاضلاع ویژگی همیشگی آن است.

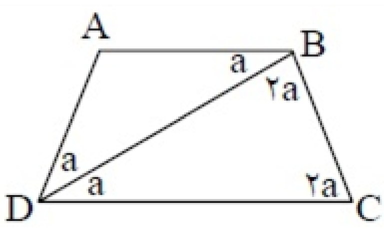
گزینه ۲ نادرست است، زیرا مساوی بودن قطرهای متوازی‌الاضلاع مستطیل بودن آن را به‌وجود می‌آورد.

گزینه ۴ نادرست است، زیرا متوازی‌الاضلاعی که این خصوصیات را داشته باشد، مربع است.

مثال نقض گزینهٔ ۴ چهارضلعی مقابل است.

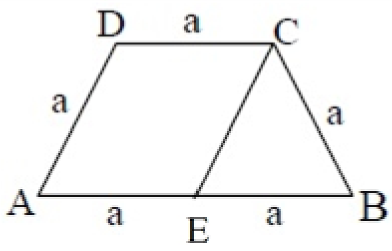


۱۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر زاویه $B\widehat{D}C$ برابر a باشد، آن‌گاه مطابق شکل داریم:

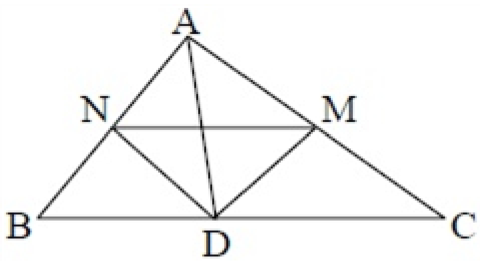


$\overset{\triangle}{BDC} : a + ۲a + ۲a = ۱۸۰ \Rightarrow a = ۳۶ \Rightarrow \widehat{C} = ۲a = ۷۲^\circ$

۱۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این ذوزنقه متساوی‌الساقین است. اگر CE را موازی AD ترسیم کنیم، آن‌گاه ذوزنقه به یک لوزی و یک مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌شود. پس $\widehat{B} = 60$.



۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی ANDM متوازی‌الاضلاع است ولی از آن‌جایی که AD نیمساز است، نتیجه می‌گیریم این چهارضلعی لوزی می‌باشد و در لوزی قطرها عمودمنصف یک‌دیگرند.



۱۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تعداد قطرهای $n+1$ ضلعی - تعداد قطرهای n ضلعی $= \frac{1}{2}(n+1)(n-2) - \frac{1}{2}n(n-3) = n-1$

۲۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

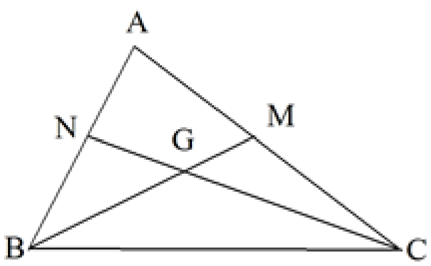
$$(n+k-2)180 + (k-n-2)180 = 1440 \Rightarrow 2k - 4 = 8 \Rightarrow k = 6$$

۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی این چندضلعی شبکه‌ای باشد، آن‌گاه بنابر فرمول پیک:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 8 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 9 = \frac{b}{2} + i \Rightarrow b = 18 - 2i$$

با توجه به اینکه بیشترین تعداد نقاط مرزی یعنی b زمانی اتفاق می‌افتد که کمترین تعداد نقاط درونی یعنی i را داشته باشیم و کمترین مقدار i برابر صفر است، پس بیشترین مقدار b مساوی ۱۸ است.

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در صورتی‌که G محل تلاقی دو میانهٔ BM و CN باشد آنگاه خواهیم داشت:



$$\mathrm{BG} = \frac{2}{3}\mathrm{BM} = \frac{2}{3}(12) = 8\,,\ \mathrm{CG} = \frac{2}{3}\mathrm{CN} = \frac{2}{3}(9) = 6$$

$$S_{\mathrm{BGC}} = \frac{1}{2}\mathrm{BG} \times \mathrm{CG} = \frac{1}{2}(8)(6) = 24$$

در ضمن می‌دانیم:

$$S_{\mathrm{BGC}} = \frac{1}{3}S_{\mathrm{ABC}} \Rightarrow S_{\mathrm{ABC}} = 3S_{\mathrm{BGC}} = 3 \times 24 = 72$$

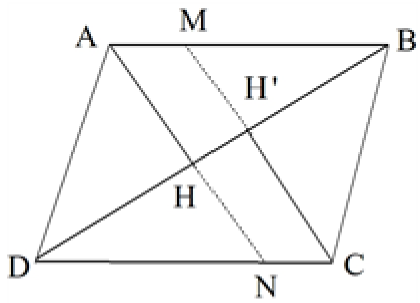
۲۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که اگر $HH'=x$ آنگاه $BH'=DH=۲x$. در ضمن AH و CH' بر قطر BD عمودند پس موازیند. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

$$AH \parallel MH' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MH'}{AH}=\frac{BH'}{BH} \Rightarrow \frac{MH'}{AH}=\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}\ (۱)$$

به همین ترتیب $\frac{NH}{CH'}=\frac{۲}{۳}$ پس دو ذوزنقهٔ AMH'H و CNHH' چون دارای ارتفاع مشترک HH' و قاعده‌های مساویند پس هم‌مساحتند، داریم:

$$\frac{\text{مساحت کوچکترین مثلث}}{\text{مساحت متوازی الاضلاع}}=\frac{S_{BMH'}}{S_{AMCN}}=\frac{\frac{۱}{۲}MH'\times BH'}{۲S_{AMH'H}}=\frac{\frac{۱}{۲}MH'\times BH'}{۲\left(\frac{۱}{۲}HH'(MH'+AH)\right)}$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{از}}\frac{\frac{۱}{۲}MH'(۲x)}{(x)\left(MH'+\frac{۳}{۲}MH'\right)}=\frac{MH'}{\frac{۵}{۲}MH'}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow \text{مساحت متوازی الاضلاع}=\frac{۵}{۲}(\text{مساحت مثلث})$$



۲۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. با توجه به شکل داریم:

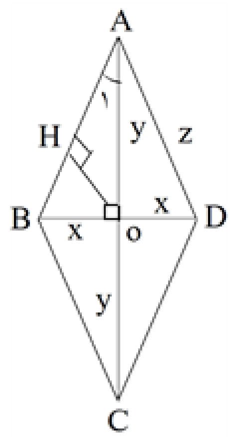
$$AB^{۲}=AC\times BD\Rightarrow z^{۲}=(۲x)(۲y)\Rightarrow z^{۲}=۴xy\Rightarrow xy=\frac{z^{۲}}{۴}\ (۱)$$

از طرف دیگر اگر ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB را رسم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}OH\times AB=\frac{۱}{۲}OA\times OB\Rightarrow OH\times z=xy\Rightarrow OH=\frac{xy}{z}$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{از}} OH=\frac{\frac{z^{۲}}{۴}}{z}\Rightarrow OH=\frac{z}{۴}\Rightarrow OH=\frac{AB}{۴}$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه OAB ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است پس یک زاویهٔ حادهٔ این مثلث ۱۵° است پس $\widehat{A}_{۱}=۱۵^\circ$ پس $\widehat{A}=۳۰^\circ$ در نتیجه: $\widehat{B}=۱۵۰^\circ$.



۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر G نقطه تلاقی میانه‌ها باشد آنگاه داریم:

$$CG=\frac{۲}{۳}CN\xrightarrow{CN=۴/۵}CG=\frac{۲}{۳}(۴/۵)=۳$$

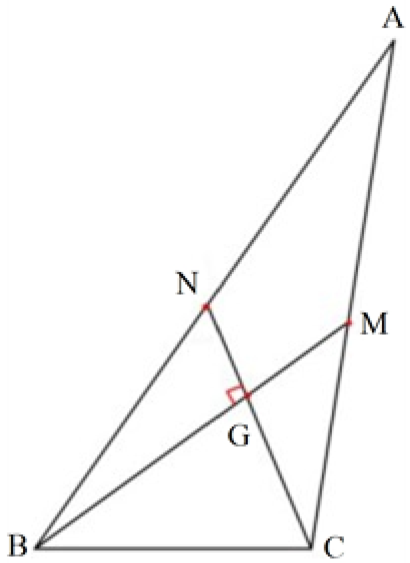
از طرف دیگر مساحت مثلث BGC مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC است.

$$S_{BGC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}=\frac{۱}{۳}(۱۸)=۶$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}CG\times BG=۶\Rightarrow\frac{۱}{۲}(۳)\times BG=۶\Rightarrow BG=۴$$

$$\xrightarrow{BG=\frac{۲}{۳}BM}BM=۶$$

بنابراین: $\frac{BM}{CN}=\frac{۶}{۴/۵}=\frac{۴}{۳}$



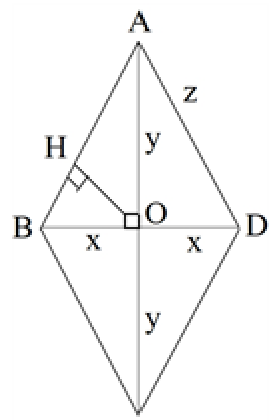
۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. با توجه به شکل و فرض سؤال می‌نویسیم:

$$AB^۲=AC\times BD\Rightarrow z^۲=(۲x)(۲y)\Rightarrow z^۲=۴xy\Rightarrow xy=\frac{z^۲}{۴}\ (۱)$$

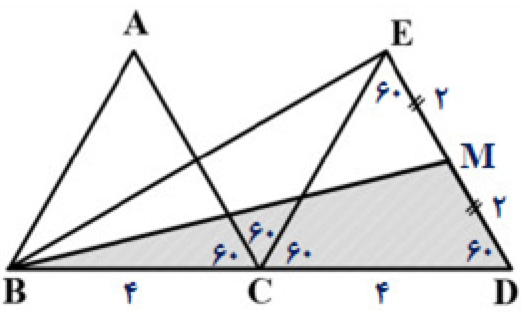
با رسم ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB نتیجه می‌گیریم.

$$\frac{۱}{۲}OH\times z=\frac{۱}{۲}xy\Rightarrow OH=\frac{xy}{z}\xrightarrow{\text{از }(۱)}OH=\frac{\frac{z^۲}{۴}}{z}\Rightarrow OH=\frac{z}{۴}$$

چون ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB مساوی $\frac{۱}{۴}$ وتر است پس یک زاویهٔ این مثلث ۱۵° است.

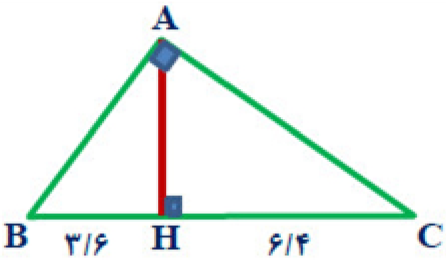


۲۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



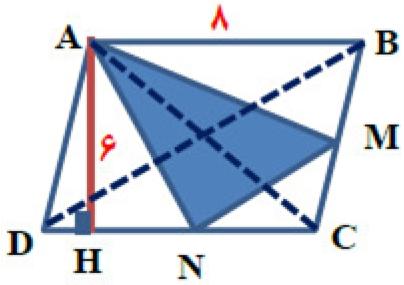
$$S_{\Delta BDM} = \frac{۱}{۲} \times MD \times BD \times \sin ۶۰$$
$$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$S_{\Delta BDM} = ۳\sqrt{۳}$$

۲۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۳/۶ \times ۱۰ \Rightarrow AB = ۶ \\ AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow AC^۲ = ۶/۴ \times ۱۰ \Rightarrow AC = ۸ \end{cases}$$
$$\Rightarrow AB + AC = ۱۴$$

۲۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$S_{ABCD} = DC \times AH = ۸ \times ۶ = ۴۸$$
$$S_{ABM} = S_{ACM} = S_{ACN} = S_{ADN} \Rightarrow S_{AMCN} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$
$$= \frac{۱}{۲} \times ۴۸ = ۲۴$$

$$\frac{MC}{BC} = \frac{۱}{۲}, MN \parallel BD \xrightarrow{\text{Tales}} S_{MNC} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ S_{BDC} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲} S_{ABCD}\right) = ۶$$
$$S_{AMN} = ۲۴ - ۶ \Rightarrow S_{AMN} = ۱۸$$

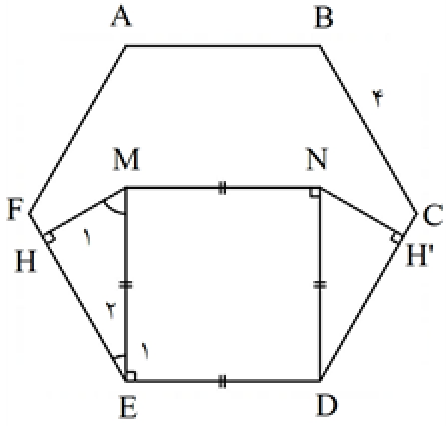
۳۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد قطرهای یک nضلعی محدب از رابطهٔ $\frac{n(n-۳)}{۲}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲} - \frac{(n-۱)(n-۴)}{۲} = ۱۶ \Rightarrow \frac{(n^۲ - ۳n) - (n^۲ - ۵n + ۴)}{۲} = ۱۶$$
$$\Rightarrow ۲n - ۴ = ۳۲ \Rightarrow ۲n = ۳۶ \Rightarrow n = ۱۸$$

جواب مسئله برابر اختلاف تعداد قطرهای ۱۸ضلعی و ۱۶ضلعی است، بنابراین داریم:

$$\frac{۱۸ \times ۱۵}{۲} - \frac{۱۶ \times ۱۳}{۲} = ۱۳۵ - ۱۰۴ = ۳۱$$

۳۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی MNDE مربع به ضلع ۴ است پس $\widehat{E}_{۱} = ۹۰^{\circ}$. در ضمن هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است پس $\widehat{E}_{۲} = ۳۰^{\circ}$ در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHE زاویهٔ $\widehat{M}_{۱}$ برابر ۶۰° می‌شود بنابراین:



$$M\overset{\triangle}{E}H : \widehat{M}_{۱} = ۶۰^{\circ} \Rightarrow \mathrm{HE} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{ME} \xrightarrow{\mathrm{ME}=۴} \mathrm{HE} = ۲\sqrt{۳}$$

$$M\overset{\triangle}{E}H : \widehat{E}_{۲} = ۳۰^{\circ} \Rightarrow \mathrm{MH} = \frac{۱}{۲}\mathrm{ME} \xrightarrow{\mathrm{ME}=۴} \mathrm{MH} = ۲$$

پس:
$$S_{\mathrm{MEH}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{MH} \times \mathrm{EH} = \frac{۱}{۲}(۲(۲\sqrt{۳})) = ۲\sqrt{۳}$$

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{\mathrm{NDH'}} = ۲\sqrt{۳}$ بنابراین مجموع مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $۴\sqrt{۳}$ است.

۳۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال چهارضلعی BCFE مربع است. پس

$$\widehat{E}_{۱} = ۹۰^{\circ}$$

از طرف دیگر هر زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین:

$$\widehat{E}_{۱} + \widehat{E}_{۲} = ۱۲۰^{\circ} \xrightarrow{\widehat{E}_{۱}=۹۰^{\circ}} \widehat{E}_{۲} = ۳۰^{\circ} \Rightarrow \widehat{B}_{۱} = ۶۰^{\circ}$$

چون $\widehat{B}_{۳} = ۹۰^{\circ}$ و $\widehat{B}_{۱} = ۶۰^{\circ}$ پس: $\widehat{B}_{۲} = ۳۰^{\circ}$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\widehat{C}_{۲} = ۳۰^{\circ}$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۱۲۰° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعده‌ی BC را رسم کنیم. AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه:

$$\mathrm{BK} = \mathrm{KC} = \frac{\mathrm{BC}}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

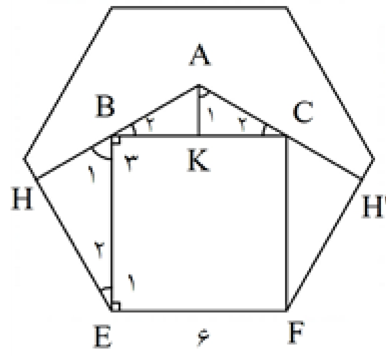
$$\widehat{A}_{۱} = \frac{\widehat{A}}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰^{\circ}$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AKC ضلع KC روبرو به زاویه‌ی ۶۰° است. پس:

$$\mathrm{KC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{AC} \Rightarrow ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{AC} = \frac{۶}{\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$

و AK روبرو به زاویه‌ی ۳۰° است. پس:
$$\mathrm{AK} = \frac{۱}{۲}\mathrm{AC} = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳}) \Rightarrow \mathrm{AK} = \sqrt{۳}$$

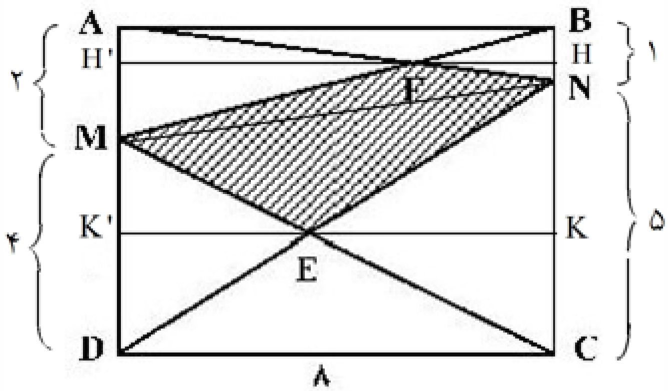
بنابراین:
$$S_{\mathrm{ABC}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{AK} \times \mathrm{BC} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۶) = ۳\sqrt{۳}$$



۳۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از نقطه‌ی F عمود HH' و از نقطه‌ی E عمود KK' را بر عرض‌های مستطیل وارد می‌کنیم.

$$BN \parallel AM \Rightarrow \overset{\triangle}{BFN} \sim \overset{\triangle}{AFM} \Rightarrow \frac{FH}{FH'} = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{FH}{HH'} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{HH'=۸} FH = \frac{۸}{۳}$$



پس: $S_{BFN} = \frac{۱}{۲}FH \times BN = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۸}{۳}\right)(۱) = \frac{۴}{۳}$

$$NC \parallel MD \Rightarrow \overset{\triangle}{ENC} \sim \overset{\triangle}{MDE} \Rightarrow \frac{EK}{EK'} = \frac{۵}{۴} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{EK}{KK'} = \frac{۵}{۹} \xrightarrow{KK'=۸} EK = \frac{۴۰}{۹}$$

پس: $S_{ENC} = \frac{۱}{۲}EK \times NC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴۰}{۹} \times ۵ = \frac{۱۰۰}{۹}$

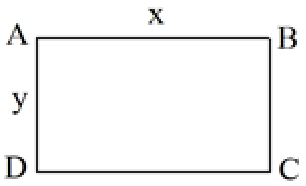
حال پاره‌خط MN را رسم می‌کنیم در این صورت دو ذوزنقه ABNM و MNCD ایجاد می‌شود. با استفاده از قضیه شبه پروانه داریم.

$$ABNM\ \text{ذوزنقه} \Rightarrow S_{MFN} = \sqrt{S_{FBN} \times S_{AFM}} = \sqrt{S_{FBN} \times ۴S_{FBN}} = ۲S_{FBN} = \frac{۸}{۳}$$

$$MNCD\ \text{ذوزنقه} \Rightarrow S_{MEN} = \sqrt{S_{ENC} \times S_{MED}} = \sqrt{S_{ENC} \times \frac{۱۶}{۲۵}S_{ENC}} = \frac{۴}{۵}S_{ENC} = \frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۰۰}{۹}\right) = \frac{۸۰}{۹}$$

بنابراین: $S_{MENF} = S_{MFN} + S_{MEN} = \frac{۸}{۳} + \frac{۸۰}{۹} = \frac{۱۰۴}{۹}$

۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طول مستطیل را x و عرض آن‌را y درنظر می‌گیریم. بنابر فرض سؤال $x = ۱/۵y - ۲$، داریم:



$$S_{ABCD} = ۱۹۲ \Rightarrow xy = ۱۹۲ \Rightarrow \left(\frac{۳}{۲}y - ۲\right)y = ۱۹۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}y^۲ - ۲y - ۱۹۲ = ۰ \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} ۳y^۲ - ۴y - ۳۸۴ = ۰$$

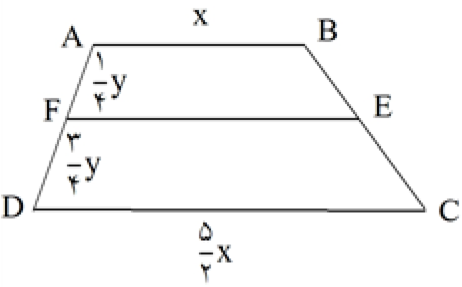
این معادله را از دستور 'b حل می‌کنیم.

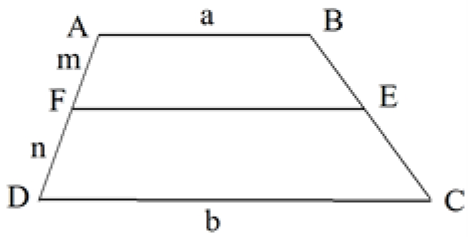
$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۱۵۲}}{۳} = \frac{۲ \pm ۳۴}{۳} \Rightarrow y = ۱۲$$

پس $x = ۱۶$ در نتیجه: $\text{محیط مستطیل} = ۲(x+y) = ۲(۱۶+۱۲) = ۵۶$

۳۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این‌که در مستطیل این اتفاق می‌افتد قضیه کتاب درسی است. مثال نقض هر سه گزینه‌ی دیگر مربع است که از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن یک نقطه به وجود می‌آید.

۳۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



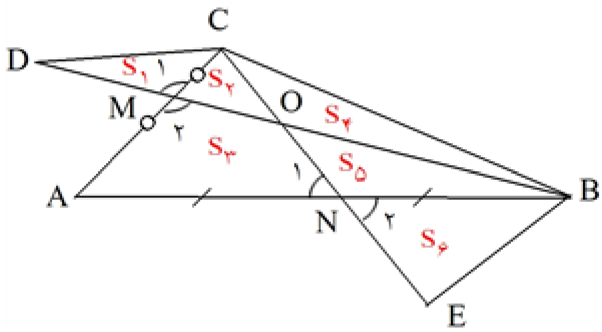


$$\mathrm{EF} = \frac{\mathrm{na} + \mathrm{mb}}{m+n}$$

$$\mathrm{EF} = \frac{\frac{۳}{۴}xy + \frac{۵}{۸}xy}{y} = \frac{۱۱}{۸}x$$

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CD}} = \frac{\frac{۱۱}{۸}x}{\frac{۵}{۲}x} = \frac{۱۱\times ۲}{۵\times ۸} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

۳۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم با رسم میانه در هر مثلثی، مثلث اولیه به دو مثلث هم‌مساحت تبدیل می‌شود.



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{BM}\ \text{میانه} : S_۲ + S_۴ = S_۳ + S_۵ \\ \mathrm{CN}\ \text{میانه} : S_۲ + S_۳ = S_۴ + S_۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S_۲ = S_۵$$

مثلث‌های DMC و MAB با یکدیگر هم‌نهشت هستند بنا بر حالت زیر:

می‌دانیم دو مثلث هم‌نهشت مساحت‌های یکسانی دارند.

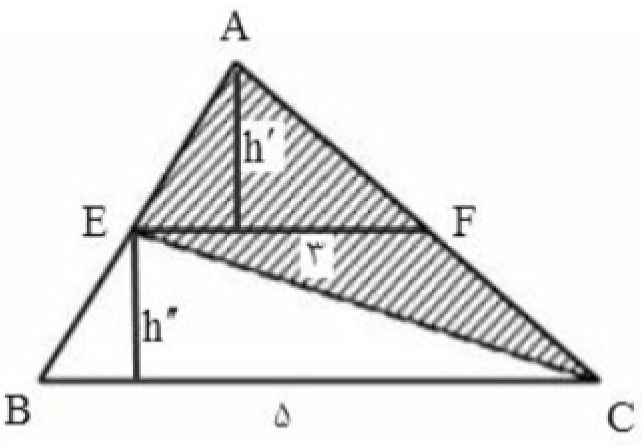
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{MD} = \mathrm{MB} \\ \mathrm{MC} = \mathrm{MA} \\ \widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\triangle}{A}B \cong M\overset{\triangle}{D}C \Rightarrow S_۱ = S_۳ + S_۵ \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{NB} = \mathrm{NA} \\ \mathrm{NE} = \mathrm{NC} \\ \widehat{N}_۱ = \widehat{N}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} N\overset{\triangle}{B}E \cong N\overset{\triangle}{A}C \Rightarrow S_۶ = S_۲ + S_۳ \quad (II)$$

از آن‌جا که $S_۲ = S_۵$ و از روابط (I) و (II) نتیجه می‌گیریم که $S_۱ = S_۶$

$$\frac{S_{\mathrm{DBC}}}{S_{\mathrm{EBC}}} = \frac{S_۱ + S_۲ + S_۴}{S_۶ + S_۵ + S_۴} = \frac{S_۶ + S_۵ + S_۴}{S_۶ + S_۵ + S_۴} = ۱$$

۳۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



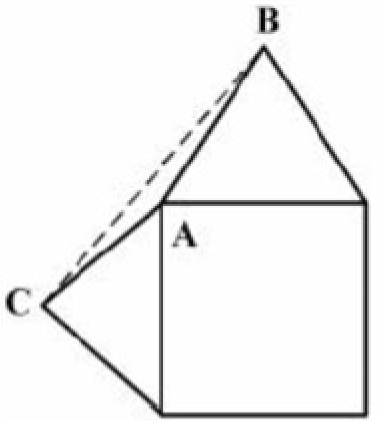
$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}}=\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BEC}}}{S_{\mathrm{BCFE}}}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{\mathrm{BCFE}}}=\frac{۳}{۸}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\mathrm{BCFE}}}=\frac{۹}{۱۶}$$

$$\frac{۳}{۸}+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۳۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\mathrm{Sin}\,۱۵۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\mathrm{Sin}\,۳۰^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

پاسخنامه کلیدی

۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۹	۱	**۲**	۳	۴
۲۰	۱	۲	**۳**	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	۱	**۲**	۳	۴
۲۴	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	**۴**
۲۶	۱	**۲**	۳	۴
۲۷	۱	**۲**	۳	۴
۲۸	۱	۲	**۳**	۴
۲۹	۱	۲	۳	**۴**
۳۰	۱	**۲**	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	**۴**
۳۲	**۱**	۲	۳	۴
۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۳۴	۱	**۲**	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	**۴**
۳۶	**۱**	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	**۳**	۴
۳۸	۱	۲	۳	**۴**
۳۹	۱	۲	**۳**	۴