

۱ تابع هزینه شرکتی $C(x) = 18x + 40$ و تابع درآمد آن $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ است. بیشترین مقدار سود را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$P(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x - 18x - 40 = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 40$$

پاسخ: ۱

$$x = \frac{-12}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 12 \Rightarrow P(12) = -\frac{1}{4} \times 12^2 + 12(12) - 40 = 38$$

۲ معادله $\frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} = 1$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ روش اول:

$$\frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x(x-1)}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \frac{3x+1+x^2-x-x^2+1}{x^2-1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج}$$

روش دوم:

$$\frac{3x+1+x^2-x}{x^2-1} = 1 \Rightarrow x^2+2x+1 = x^2-1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج}$$

روش سوم:

$$(x^2-1)\left(\frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1}\right) = (x^2-1) \times 1 \Rightarrow 3x+1+x^2-x = x^2-1 \Rightarrow 2x = -2$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج}$$

۳ معادله ریاضی عبارت توصیفی «سه برابر پول شخصی به اضافه نصف آن ۲۸۰۰۰ تومان می‌شود» کدام است؟

$$\frac{3x}{2} + x = 28000 \quad (2)$$

$$3x + \frac{x}{2} = 28000 \quad (1)$$

$$\frac{3x}{2} + x = 14000 \quad (4)$$

$$3x + \frac{x}{2} = 14000 \quad (3)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

سوال امتحانات نهایی متوسطه-دهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ روش اول:

$$\begin{aligned}(x+4)(x-3) &= 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \\ x_1 + x_2 &= -4 + 3 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 &= -4 \times 3 = -12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0\end{aligned}$$

روش دوم:

۵ معادله‌های درجه دوم زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید.

الف) روش تجزیه $x^2 - 3x = 0$ ب) روش کلی (Δ) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

سوال امتحانات نهایی متوسطه-دهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\text{الف) } x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-5-7}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

$$\text{۱) } x^2 + 3x - 4 = 0$$

۶ با استفاده از اتحادها، معادله‌های زیر را حل کنید:

از اتحاد یک جمله‌ی مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x \dots)(x \dots) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \dots) = 0 \text{ یا } (x \dots) = 0 \Rightarrow x = \dots \text{ یا } x = \dots$$

$$\text{۲) } 4x^2 - (2-x)^2 = 0$$

با استفاده از اتحاد عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow \dots$$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی‌های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

پاسخ: ۱

$$\text{۱) } x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$-4 \otimes + 1 = -4 \quad \checkmark$$

$$-4 \oplus + 1 = -3$$

$$+4 \otimes - 1 = -4 \quad \checkmark$$

$$+4 \oplus - 1 = +3 \quad \checkmark$$

$$+2 \otimes - 2 = -4 \quad \checkmark$$

$$+2 \oplus - 2 = 0$$

از اتحاد یک جمله‌ی مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Rightarrow (x-1) = 0 \text{ یا } (x+4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -4$$

$$\text{۲) } 4x^2 - (2-x)^2 = 0$$

با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow (3x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ یا } x = -2$$

طرف دو تساوی‌های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده کامل کنید:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \dots + \dots + \frac{1}{4} \\ \text{ب) } (2 + \dots)^2 &= \dots + 12xy + \dots \\ \text{پ) } (x - 2y)(\dots + \dots) &= x^2 - 4y^2 \\ \text{ث) } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \dots + \dots + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

$$(2 + 2xy)^2 = 4 + 12xy + 4x^2y^2$$

$$(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$$

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$$

پاسخ: ۱ الف) اتحاد مربع دو جمله‌ای

ب) اتحاد مربع دو جمله‌ای

پ) اتحاد مزدوج

ت) اتحاد جمله‌ی مشترک

ث) اتحاد مربع دو جمله‌ای

۸ به ازای چه مقدار k ، معادله‌ی $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$t = -3 \Rightarrow \frac{4 - (-3)}{2 - 2(-3)} = \frac{3(-3)^2 + k}{\underbrace{((-3)^2 + 1)^2}_{10} - 68} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27 + k}{32} \Rightarrow \frac{(27 + k) \times 1}{32 \times 1} = \frac{7 \times 4}{8 \times 4} = .$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow \frac{27 + k - 28}{32} = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

۹ هنگامی‌که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیش‌تری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \times 4(x+3)}{x \times 4(x+3)} + \frac{1 \times 4x}{(x+3) \times 4x} - \frac{1 \times x(x+3)}{4 \times x(x+3)} = .$$

$$\Rightarrow \frac{4x + 12 + 4x - x^2 - 3x}{4x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 5x + 12}{4x(x+3)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x + 12 = .$$

$$\Rightarrow \Delta = 25 + 48 = 73 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2}$$

پاسخ: ۱

مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

پاسخ: ۱

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{1 \times 12(k+2)}{k \times 12(k+2)} + \frac{1 \times 12k}{(k+2) \times 12k} - \frac{5 \times k(k+2)}{12 \times k(k+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{12k + 24 + 12k - 5k^2 - 10k}{12k(k+2)} = 0 \Rightarrow -5k^2 + 14k + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 14^2 - 4(-5)(24) = 676 > 0 \text{ معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$k = \frac{-14 \pm \sqrt{676}}{-10} \begin{cases} k = 4 \rightarrow \text{دو عدد زوج طبیعی متوالی : } 4, 4+2 \Rightarrow 4, 6 \\ k = -\frac{6}{5} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{3x-5}{x+3} = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \quad (\text{پ})$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2} \quad (\text{ث})$$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2} \quad (\text{ج})$$

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$\text{الف)} \quad \frac{3x-5}{x+3} = 1 \Rightarrow \frac{(3x+5) \times (1)}{(x+3) \times (1)} - \frac{1 \times (x+3)}{1 \times (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x+5-x-3}{x+3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\text{ب)} \quad \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \Rightarrow \frac{(3x-2) \times (x+3)}{x \times (x+3)} + \frac{(2x+5) \times x}{(x+3) \times x} - \frac{5 \times x(x+3)}{1 \times x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+9x-2x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\text{پ)} \quad \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \Rightarrow \frac{2+x}{x+2} - (x+3) = 0 \Rightarrow \frac{(x+2) \times 1}{(x+2) \times 1} - \frac{(x+3) \times (x+2)}{1 \times (x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+2-x^2-5x-6}{(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{(x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2-4x-4=0 \quad \text{یا} \quad x^2+4x+4=0 \quad \text{اتحاد مربع ۲ جمله‌ای}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر}} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

پس معادله جواب ندارد

یا این‌که

$$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow x=-2 \quad \text{غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\text{ت)} \quad \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \frac{(x^2-2x+2) \times 1}{x(x-2) \times 1} - \frac{(1+x) \times (x-2)}{x \times (x-2)} - \frac{(x-1) \times x}{(x-2) \times x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+2-x^2+2x-2-x^2+2x-2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+4}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x^2=4$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2 \Rightarrow x = -2 \quad \text{یا} \quad x = +2 \quad \text{غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\text{ث)} \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{3 \times (x+3)(x-2)}{(x-1) \times (x+3) \times (x-2)} - \frac{2 \times (x-1)(x-2)}{(x+3) \times (x-1)(x-2)} - \frac{4 \times (x-1)(x+3)}{(x-2) \times (x-1)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+3x-18-2x^2+6x-4-4x^2-8x+12}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2+x-10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2+x-10=0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(-3)(-10) = 1 - 120 = -119$$

معادله ریشه ندارد $\Delta < 0$

$$\text{ج)} \quad \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$

نشان دهید در هر معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد $\frac{11 \times 1}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$(a + b + c = 0)$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 1 = 0$ و دیگری $x = -\frac{1}{2}$ است.

$\Rightarrow \frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 4}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0$

پاسخ: ۱

پس معادله جواب ندارد. $\Delta = -8 < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = (a - c)^2$$

معادله ۲ ریشه دارد $\Delta = (a - c)^2 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a - c) \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a} \Rightarrow x = \frac{a + c + a - c}{2a} = \frac{2a}{2a}$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = \frac{a + c - a + c}{2a} = \frac{2c}{2a} \Rightarrow x = \frac{c}{a}$$

با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است.

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

پاسخ: ۱

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

نشان دهید در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -\frac{c}{a}$ و دیگری $x = -1$ است.

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

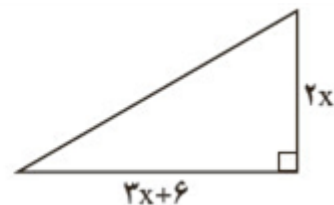
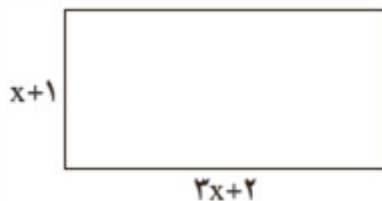
$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2$$

پاسخ: ۱

معادله ۲ ریشه دارد $\Delta = (a - c)^2 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a + c) \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a - c + a - c}{2a} \text{ یا } x = \frac{-a - c - a + c}{2a} \\ x = \frac{-2c}{2a} & x = \frac{-2a}{2a} \\ x = \frac{-c}{a} & x = -1 \end{cases}$$

مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چه قدر است؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 6x \Rightarrow \cancel{3x^2} + 5x + 2 - \cancel{3x^2} - 6x = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$$

پاسخ: ۱

عرض \times طول = مساحت مستطیل

$$\text{مساحت مستطیل} = (3x + 2)(x + 1) = 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x^2 + 5x + 2$$

$$\text{طول مستطیل} = 3x + 2 \Rightarrow 3 \times 2 + 2 = 8$$

$$\text{عرض مستطیل} = x + 1 \Rightarrow 2 + 1 = 3$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(3x + 6)(\cancel{2}x) = 3x^2 + 6x$$

معادله‌ی $3x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه‌ی ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 > 0 \text{ ریشه دارد } 2$$

پاسخ: ۱

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4} \text{ یا } x_2 = -1 \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{5}{4} \times (-1) = \frac{-5}{4}$$

همان $c \rightarrow -5$
همان $a \rightarrow 2$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{نتیجه:}$$

$$x^2 - x = 0 \quad (۱)$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (۳)$$

$$3x^2 - x + 4 = 0 \quad (۵)$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + 17x - 18 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (۶)$$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$۱) x^2 - x = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1 \Rightarrow \text{معادله ریشه دارد} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$۲) 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0 \quad \text{معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = -1$$

$$۳) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0 \quad \text{معادله ریشه مضاعف دارد.}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$۴) x^2 + 17x - 18 = 0$$

$$\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 361 > 0 \quad \text{معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{361}}{2 \times 1} \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -18$$

$$۵) 3x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(+4) = -47 < 0 \quad \text{معادله ریشه ندارد}$$

$$۶) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(+1)(-1) = 7$$

$$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \text{ یا } x = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$$

جوابهای معادله‌ی $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

پاسخ: ۱) با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

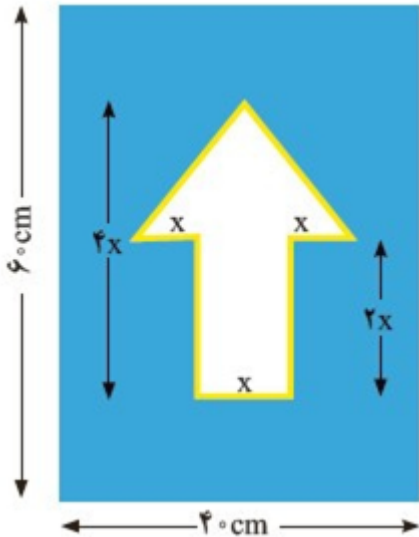
بنابراین:

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک‌طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه 1 cm^2 برچسب سفید ۳۰ تومان و هزینه 1 cm^2 برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینه‌ی برچسب‌های سفید و آبی $27/000$ تومان شده است. (الف) اندازه‌ی x چه قدر است؟

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه‌رو علاوه بر چسب سفید و آبی از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه‌ی 1 cm^2 آن ۱۰۰ تومان است، هزینه‌ی رنگ‌آمیزی تابلو $34/800$ تومان می‌شود. در این حالت اندازه‌ی x چه قدر است؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی‌های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

مساحت مستطیل سفید + مساحت مثلث سفید = مساحت فلش (الف)

$$= \frac{1}{2} \times 2x \times x + x \times 2x = 5x^2 \xrightarrow[\text{سفید}]{\text{هزینه برچسب}} 5x^2 \times 30 = 150x^2$$

$$\text{هزینه برچسب آبی} \xrightarrow{\text{آبی}} 2400 - 5x^2 = 60 \times 60 - 5x^2 = 2400 - 5x^2 = \text{مساحت قسمت آبی}$$

$$(2400 - 5x) \times 10 = 24000 - 50x^2$$

$$\text{مجموع هزینه ها} = 27/000 \Rightarrow 150x^2 + 24000 - 50x^2 = 27000$$

$$100x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm \sqrt{30} \Rightarrow x = +\sqrt{30}$$

$$\text{ب) } 2a + 3x + 2(2x) = \frac{5}{2}x + 3x + 4x = 12x \xrightarrow[\text{زرد}]{\text{هزینه برچسب}}$$

$$12x \times 100 = 1200x$$

$$\text{هزینه رنگ‌آمیزی تابلو: } 150x^2 + 24000 - 50x^2 + 1200x = 34800$$

$$100x^2 + 1200x - 10800 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x + 18)(x - 6) = 0$$

$$x = -18 \text{ یا } x = 6$$

$$a^2 = \left(x + \frac{x}{2}\right)^2 + (2x)^2$$

$$a^2 = \frac{25}{4}x^2 \xrightarrow{\text{جذر}} a = \pm \frac{5}{2}x$$

$$a = \frac{5}{2}x$$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$x = 2 \text{ یا } x = -3$$

پاسخ: ۱

$$x - 2 = 0 \text{ یا } x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{از اتحاد}} x^2 + (-2 + 3)x + (-2)(3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$$

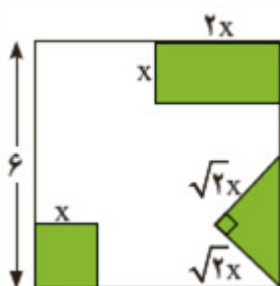
یا

$$x - 2 = 0 \text{ یا } x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \xrightarrow{\text{به کمک ضرب}} x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

از مربعی به ضلع ۶ cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24 cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چه قدر است؟

۲۱



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$6^2 = 36 = \text{مساحت مربع بزرگ}$$

$$x^2 = \text{مساحت مربع کوچک}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = x \times 2x = 2x^2$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times x^2 = x^2$$

$$\text{مجموع قسمت‌های رنگی} = x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\text{مساحت باقی‌مانده} = \text{مساحت رنگی} - \text{مساحت مربع بزرگ}$$

$$36 - 4x^2 = 24 \Rightarrow \frac{36 - 4x^2}{4} = \frac{12}{4} \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow[\text{غ ق ق}]{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = +\sqrt{3}$$

پاسخ: ۱

$$\text{الف) } 2x^2 - 8 = 0$$

$$\text{ب) } x^4 - 2x^2 = 0$$

$$\text{ث) } 2x^2 - 8x = 0$$

$$\text{ج) } \frac{x^2}{3} = x$$

$$\text{خ) } x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\text{ذ) } (x-3)^2 = 4$$

$$\text{ب) } (x+2)(x-3) = x-3$$

$$\text{ت) } x^2 = x - \frac{1}{4}$$

$$\text{ج) } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{ح) } x^2 = 5 - x^2$$

$$\text{د) } 9x^2 + 3x - 2 = 0$$

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

$$\text{الف) } 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = +2 \text{ یا } x = -2$$

پاسخ: ۱

(روش دوم: فاکتورگیری)

$$\text{ب) } (x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$$

$$\text{روش دوم} \rightarrow x^2 - x - 6 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$$

$$\text{پ) } x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر}} x = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = +\sqrt{2} \text{ یا } x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{ت) } x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \text{ اتحاد مربع دو جمله ای}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = \frac{1}{2} \text{ ریشه ی مضاعف}$$

(روش دوم، ضرب طرفین در عدد ۴ و بعد استفاده از اتحاد جمله مشترک)

$$\text{ث) } 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

$$\text{ج) } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ اتحاد جمله مشترک}$$

$$(x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = 2$$

$$\text{ح) } \frac{x^2}{3} = x \xrightarrow{\times 3} x^2 = 3x$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 3$$

$$\text{خ) } x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2} = \frac{5}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{جذر}} x = +\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ یا } x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{ذ) } x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ اتحاد مربع ۲ جمله ای}$$

$$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = -2 \text{ ریشه مضاعف}$$

$$\text{د) } 9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0 \text{ اتحاد جمله مشترک}$$

$$(3x+2)(3x-1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$$

$$\text{ذ) } (x-3)^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x-3 = +2 \text{ یا } x-3 = -2 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } x = 1$$

حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره‌ی آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن a شماره‌ی حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف موردنظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می‌شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a = 4$) و دارای دو نقطه است ($n = 2$). حال با توجه به توضیح فوق:

الف) جدول زیر را کامل کنید:

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
	آب
$3x^3 + 1$	
	ذرت

ب) الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.
 پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟
 ت) با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
$2x + 1$	آب
$3x^3 + 1$	آب
$4x^2 + 12 + 11x$	ذرت

پاسخ: ۱ الف)

ب) $4x^2 + 28 + 1 + 12 + 12 + 2x + 28 + 1 + 32 + 3x^3$

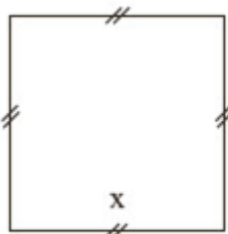
پ) پاسخ به عهده‌ی دانش‌آموز

ت) سلام $28 + 1 + 27 + 15$

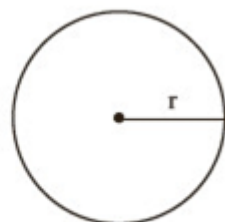
من دوست تو هستم.

$$28 + 4x^2 + 15 + 31 + 30 + 4x^2 + 4x^2 + 15 + 30 + 10 + 29x + 28$$

۲۴) اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۶ باشد، طول ضلع مربع چه قدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

مساحت مربع $= x^2$

پاسخ: ۱

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \right)^2 = \cancel{\pi}^1 \times \frac{1}{\cancel{2}^1 \cancel{\pi}^1} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{2} = 6 \Rightarrow \frac{3}{2} x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

اگر $P(x) = ۲۰۰(-x^۲ - ۵۴۰x + ۱۱۲۰۰۰)$ سود حاصل از فروش تعداد x کالای تولیدی یک شرکت باشد، این شرکت با فروش چند کالا، نه سود و نه ضرر می‌کند؟

۱) ۸۰۰

۲) ۷۰۰

۳) ۱۶۰

۴) ۱۴۰

سراسری-انسانی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۵۴۰x - ۱۱۲۰۰۰ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۵۴۰ \pm \sqrt{(۵۴۰)^۲ + ۴(۱۱۲۰۰۰)}}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۵۴۰ \pm \sqrt{۷۳۹۶۰۰}}{۲} \Rightarrow x = \frac{-۵۴۰ \pm ۸۶۰}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۶۰ \text{ ق ق} \\ x = -۷۰۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

توجه: دانستن اینکه $۱۱۲۰۰۰ = ۱۶۰ \times ۷۰۰$ می‌تواند به شما کمک کند تا به جای حل معادله درجه ۲ از تجزیه استفاده کنید!

یک کیک را ابتدا بین افراد حاضر در یک مهمانی به طور مساوی تقسیم کردیم. سپس چهار نفر این مهمانی را ترک کردند و دوباره کیک به همان اندازه قبل را بین نفرات باقیمانده تقسیم کردیم که $\frac{1}{3}$ بیشتر از قبل به هر نفر رسید. اگر نصف کیک را بین نفرات ابتدایی تقسیم می‌کردیم به هر نفر چه سهمی از کیک می‌رسید؟

$$\frac{1}{24} \quad (۴)$$

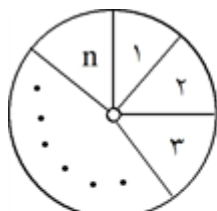
$$\frac{1}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۲)$$

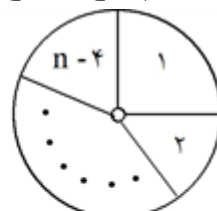
$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

سراسری-انسانی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



حالت اول
سهم هر نفر = $\frac{1}{n}$



حالت دوم
سهم هر نفر = $\frac{1}{n-4}$

$$\text{طبق فرض: } \frac{1}{n-4} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{n-4} = \frac{3+n}{3n} \Rightarrow 3n = 3n - 12 + n^2 - 4n$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n - 12 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \text{ق ق } n = 6 \\ \text{غ ق } n = -2 \end{cases}$$

پس در ابتدا ۶ نفر در مهمانی حضور داشته و اگر نصف کیک را بین این ۶ نفر تقسیم کنیم، سهم هر نفر برابر است با:

$$\frac{1}{2} \div 6 = \frac{1}{12}$$

روش دوم: (استفاده از گزینه‌ها)

اگر گزینه‌ها را در ۲ ضرب کنیم، سهم هر نفر در حالت اول به دست می‌آید و با معکوس کردنش، تعداد نفرات در حالت اول مشخص می‌شود. یعنی:

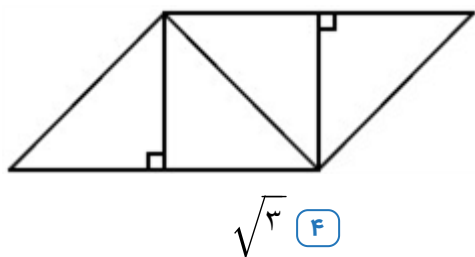
گزینه ۱: $\frac{1}{6} \Leftarrow 3 \text{ نفر} \Leftarrow \text{غ.ق.ق.}$ (شرط خروج ۴ نفر از مهمانی محقق نمی‌شود). (رد گزینه ۱)

گزینه ۲: $\frac{1}{16} \Leftarrow 8 \text{ نفر} \Leftarrow$ باید $\frac{1}{8-4} = \frac{1}{4}$ با $\frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$ برابر باشد که نیست. (رد گزینه ۲)

گزینه ۳: $\frac{1}{12} \Leftarrow 6 \text{ نفر} \Leftarrow$ باید $\frac{1}{6-4} = \frac{1}{2}$ با $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ برابر باشد که هست. (تأیید گزینه ۳)

گزینه ۴: $\frac{1}{24} \Leftarrow 12 \text{ نفر} \Leftarrow$ باید $\frac{1}{12-4} = \frac{1}{8}$ با $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ برابر باشد که نیست. (رد گزینه ۴)

در شکل مقابل که از کنار هم قرار گرفتن ۴ مثلث یکسان تشکیل شده است، مساحت متوازی‌الاضلاع از مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه ۳ واحد بیشتر است. اندازه قطر مربع کدام است؟



۱) ۲

۲) $\sqrt{2}$

۳) ۳

۴) $\sqrt{3}$

سراسری-انسانی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مساحت هر مثلث قائم الزاویه} = x \\ \text{مساحت متوازی الاضلاع} = 4x \end{array} \right\}, 4x = x + 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \text{قطر مربع} = 2 \Rightarrow (\text{قطر مربع})^2 = 4 \Rightarrow \frac{(\text{قطر مربع})^2}{2} = 2 \Rightarrow \text{مساحت مربع} = 2 \times 1 = 2$$

۲۸ دو شیر A و B به یک استخر متصل هستند. شیر A، ۱۵ ساعت دیرتر از شیر B استخر را پر می‌کند. اگر دو شیر باز باشند، استخر در ۴ ساعت پر می‌شود. چند شیر از نوع A به استخر اضافه کنیم تا وقتی همه شیرها به طور همزمان باز باشند، استخر در یک ساعت پر شود؟

۱) ۱۵

۲) ۱۴

۳) ۱۶

۴) ۱۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} B \text{ شیر} = x \text{ ساعت} & \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{4} \\ A \text{ شیر} = x+15 \text{ ساعت} & \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$x^2 + 15x = 4x + 60 \Rightarrow x^2 + 11x - 60 = 0 \Rightarrow (x+15)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4$$

پس شیر B، ۵ ساعته و شیر A، ۲۰ ساعته استخر را پر می‌کنند و در یک ساعت $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$ یعنی $\frac{1}{4}$ استخر پر

$$n \left(\frac{1}{20} \right) = \frac{3}{4} \Rightarrow n = 15$$

می‌شود و $\frac{3}{4}$ خالی است.

۲۹ مثلی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $-x^2 + 2x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۰/۷۵

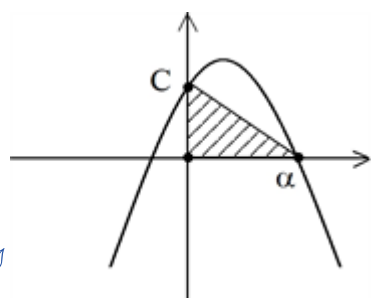
۲) ۰/۸

۳) ۱/۲

۴) ۱/۲۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\frac{\alpha \times C}{2} = C^2 \Rightarrow \alpha = 2C$$

$$-(2C)^2 + 2(2C) + C = 0 \Rightarrow -4C^2 + 5C = 0 \Rightarrow 4C^2 = 5C$$

$$4C = 5 \Rightarrow C = \frac{5}{4} = 1.25$$

حسن و امیر در شهر A ساکن هستند. حسن برای رفتن به شهر B، ابتدا ۱۵ کیلومتر در جهت جنوب و سپس ۱۵ کیلومتر در جهت شرق می‌پیماید. امیر برای رفتن به شهر B در مسیر اول ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن a کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۷ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. در مجموع دو نفر کمترین مسافت را طی می‌کنند. کدام فرد و چند کیلومتر کمتر مسافت را برای رسیدن به شهر B طی می‌کند؟

۴ امیر، ۳

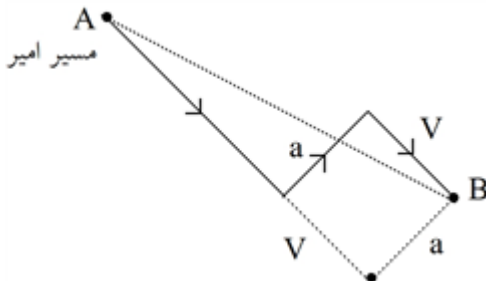
۳ حسن، ۳

۲ امیر، ۶

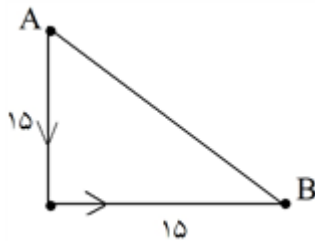
۱ حسن، ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= (14 + V)^2 + a^2 \\ AB^2 &= 15^2 + 15^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 21^2 + a^2 &= 2 \times 15^2 \\ 441 + a^2 &= 450 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$



$$\text{مسافت امیر} = 14 + 3 + 7 = 24$$

$$\text{مسافت حسن} = 15 + 15 = 30$$

پس امیر ۱۶ کیلومتر کمتر طی کرده است.

۳۱ راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

۴ ۶/۵

۳ ۵/۴

۲ ۴/۳

۱ ۳/۲

سراسری-انسانی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کل مسافت ۲۰۰ کیلومتر است اگر سرعت حالت اول را V در نظر بگیریم در حالت دوم

سرعت ۲۰ - V است و اگر زمان اولیه t باشد زمان دوم $t + \frac{50}{60}$ بر حسب ساعت است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{200}{V-20} &= \frac{200}{V} + \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{200}{V-20} = \frac{200}{V} + \frac{200}{240} \Rightarrow \frac{1}{V-20} = \frac{1}{V} + \frac{1}{240} \\ \Rightarrow V^2 - 20V - 4800 &= 0 \Rightarrow (V+60)(V-80) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V = -60 \text{ غ ق} \\ V = 80 \text{ ق ق} \end{cases} \\ \Rightarrow \text{نسبت خواسته شده} &= \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{سرعت دوم} = 80 - 20 = 60 \end{aligned}$$

مثلی که رؤس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + c = 0$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟ ($c \neq 0$)

۴ $-2/75$

۳ $-1/75$

۲ $2/75$

۱ $1/75$

سراسری-انسانی-۱۴۰۲ تیرماه

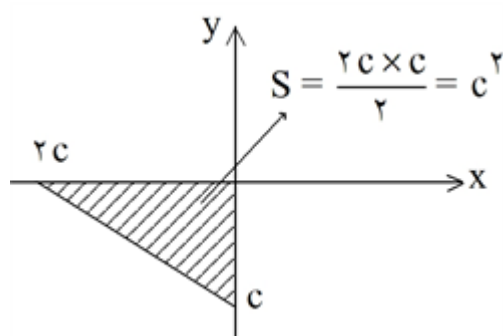
پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون مساحت مثلث برابر c^2 است. پس ریشه معادله $x^2 + 5x + c = 0$ باید برابر $2c$ باشد.

$$\xrightarrow{2c} (2c)^2 + 5(2c) + c = 0$$

جایگزین می‌کنیم

$$\Rightarrow 4c^2 + 11c = 0 \Rightarrow c(4c + 11) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 & \text{غ ق ق} \\ c = -\frac{11}{4} = -2/75 \end{cases}$$



۳۳ رضا و علی به ترتیب در دو شهر A و B ساکن هستند. رضا برای رفتن به شهر B در مسیر اول، ۱۴ کیلومتر را در جهتی می‌پیماید که با طی کردن ۷ کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۹ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می‌رسد. علی برای رفتن به شهر A تصمیم دارد ابتدا a کیلومتر به سمت شمال و به همان اندازه به سمت غرب بپیماید تا به شهر A برسد. مقدار a کدام است؟

۴ ۲۳

۳ ۲۱

۲ ۱۷

۱ ۱۵

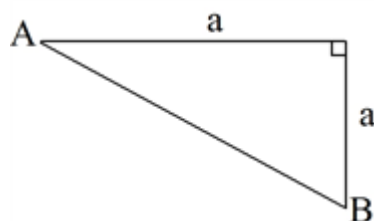
سراسری-انسانی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. رضا دو مسیر اول و سوم خود را عمود بر مسیر دوم طی کرده پس در یک راستا می‌باشد و می‌توان گفت برای رسیدن از شهر A به شهر B اضلاع قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه به طول‌های ۷ و ۱۴

$$AB^2 = 23^2 + 7^2 = 529 + 49 = 578$$

$$23 = 14 + 9 \text{ طی کرده است پس:}$$

از طرفی برای علی داریم:



$$\Rightarrow AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow 2a^2 = 578$$

$$\Rightarrow a^2 = 289 \xrightarrow{a>0} a = 17$$

یک شرکت تولیدی، هر واحد کالای خود را ۱۲۰ ریال می‌فروشد. اگر $C(x) = x^2 - 40x + 3600$ تابع هزینه x واحد کالا باشد، به ازای چه تعداد فروش کالا، شرکت به نقطه سر به سر خود می‌رسد؟

۱۸۰ (۴)

۹۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۰ (۱)

سراسری-انسانی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

$$\text{هزینه} = \text{درآمد} \Rightarrow x^2 - 40x + 3600 = 120x$$

پاسخ: (۴) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - 160x + 3600 = 0 \Rightarrow (x - 180)(x + 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +180 \\ x = -20 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس از فروش ۱۸۰ کالا، به نقطه سر به سر می‌رسد.

(۳۵) به ازای چند مقدار k ، جواب معادله $\frac{5-t}{3+2t} = \frac{7t+1}{k^2-(2t+1)^2}$ برابر ۴ است؟

هیچ مقداری از k (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-انسانی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: (۲) گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$t = 4 \Rightarrow \frac{5-4}{3+8} = \frac{29}{k^2-81} \Rightarrow \frac{1}{11} = \frac{29}{k^2-81} \Rightarrow k^2 - 81 = 29 \times 11$$

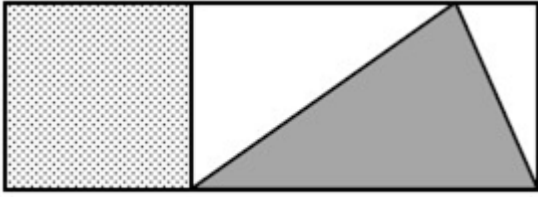
$$k^2 = 81 + 29 \times 11$$

دو مقدار برای k وجود دارد. \Rightarrow یک عدد مثبت

$$k^2 = 400 \Rightarrow k = \pm 20 \quad \text{محاسبه } k:$$

در شکل مقابل، مساحت مربع از $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث سایه‌خورده به اندازه $\frac{4}{3}$ واحد مربع، بیشتر است. نسبت مساحت

مربع به مساحت مستطیل بزرگ، کدام است؟



$$\frac{1}{5} \quad \text{F}$$

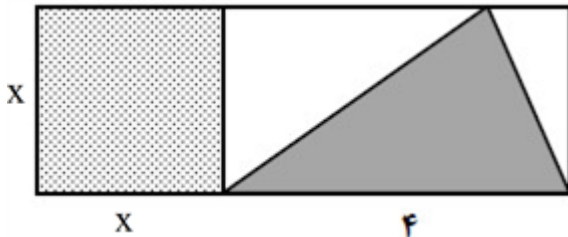
$$\frac{1}{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{3}{4} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{۱}$$

سراسری-انسانی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_1 = \frac{4 \times x}{2} = 2x \quad \text{مساحت مثلث}$$

$$S_2 = x^2 \quad \text{مساحت مربع}$$

$$S_2 = \frac{1}{6} S_1 + \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{x}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow 3x^2 = x + 4$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حکم} = \frac{x^2}{(4+x)x} = \frac{x}{4+x} = \frac{\frac{4}{3}}{4+\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

تابع هزینه برای تولید تعداد x کالا از یک محصول، به صورت خطی است. به ازای هزینه‌های ۸۵۰ و ۱۰۰۰ تومانی به ترتیب ۲۰ و ۲۵ کالا تولید می‌شود. اگر شرکت هر کالا را ۵۵ تومان بفروشد، این شرکت، حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

$$۱۲ \quad \text{F}$$

$$۱۱ \quad \text{۳}$$

$$۱۰ \quad \text{۲}$$

$$۹ \quad \text{۱}$$

سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱

$$\begin{matrix} A(20, 850) \\ B(25, 1000) \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{1000 - 850}{25 - 20} = \frac{150}{5} = 30$$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = ax + b \Rightarrow y = mx + n \xrightarrow[m=30]{x=25, y=1000} 1000 = 30 \times 25 + n \Rightarrow n = 250$$

$$y = 30x + 250 \Rightarrow c(x) = 30x + 250, R(x) = 55x$$

$$P(x) = 55x - 30x - 250 \Rightarrow P(x) = 25x - 250 \xrightarrow{P(x)=0} 25x - 250 = 0$$

$$\Rightarrow 25x = 250 \Rightarrow x = 10$$

پس با فروش یازدهمین کالا سوددهی آغاز می‌شود.

ضرایب معادله $۲kx^۲ - ۴x - ۴k - ۵ = ۰$ صحیح هستند. اگر حاصل ضرب ریشه‌های این معادله دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۷ (۳)

۲۸ (۴)

سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ به شرط $\Delta > ۰$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر

$$\frac{c}{a} \text{ است. بنابراین: } ۲kx^۲ - ۴x - ۴k - ۵ = ۰$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{-(۴k + ۵)}{۲k} = -۲ - \frac{۵}{۲k}$$

چون ضرایب معادله صحیح هستند پس $۲k$ عددی صحیح است. از طرفی حاصل ضرب ریشه‌ها باید بیش‌ترین

مقدار را داشته باشد، پس $۲k$ حداکثر مقدار صحیح منفی یعنی $۲k = -۱$ باشد. پس $k = -\frac{۱}{۲}$ در نتیجه:

$$k = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow -x^۲ - ۴x - ۳ = ۰$$

$$\Delta = (-۴)^۲ - ۴(-۱)(-۳) = ۱۶ - ۱۲ = ۴$$

۳۹ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲ + ۷x - ۳ = ۰$ و $\alpha > ۰$ باشد، حاصل $|\alpha + ۲\beta| + |\alpha| - |\beta|$ کدام است؟

 β (۴) $-\beta$ (۳) $-۲\alpha - ۳\beta$ (۲) $۲\alpha + ۳\beta$ (۱)

سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون $\alpha > ۰$ و از طرفی $p = \frac{c}{a} = -۳$ پس ریشه دیگر $\beta < ۰$ است و $|\beta| = -\beta$

$$\Rightarrow |\alpha + ۲\beta| + \alpha - (-\beta) = |\alpha + \beta + \beta| + \alpha + \beta$$

$$\text{جمع ریشه: } \alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} = -۷ \Rightarrow \text{عبارت} = |-۷ + \beta| - ۷ = ۷ - \beta - ۷ = -\beta$$

می‌خواهیم دورتادور باغچه‌ای به شکل مستطیل که طول آن، دو برابر عرض آن است را حصار بکشیم، به طوری که بازدیدکنندگان به یک متری باغچه نزدیک نشوند. اگر مساحت زمین محصور شده، $\pi + 1$ برابر بیشتر از مساحت

باغچه باشد، طول باغچه چند متر است؟

۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۳

سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱

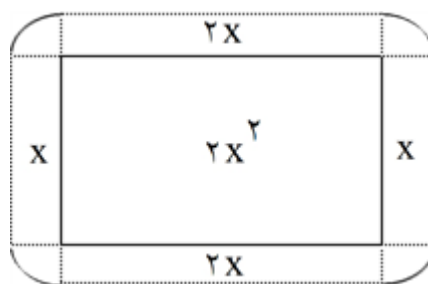
پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه طول ۲ برابر عرض است پس طول را $2x$ و عرض را x فرض می‌کنیم. چون دسترسی به باغچه یک متر است شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. (از ۴ رأس باغچه کمائی به شعاع یک رسم می‌کنیم که مساحت ۴ ربع دایره برابر یک دایره با شعاع ۱ است.)

$$S_{\text{باغچه}} = 2x^2, S_{\text{کل}} = 2x^2 + 4x + \pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{باغچه}} + \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) S_{\text{باغچه}}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + \pi = 2x^2 + \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) 2x^2 \Rightarrow 4x + \pi = \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) 2x^2 \Rightarrow \frac{4x + \pi}{2x^2} = \frac{18 + \pi}{18}$$

با توجه به گزینه‌ها $x = 3$ را انتخاب می‌کنیم که در معادله فوق صدق می‌کند. پس طول باغچه $2x = 6$ است.



۴۱ یک شرکت روزانه $720,000$ ریال برای تولید یک نوع کالا هزینه می‌کند. اگر $R(x) = 2200x + 10x^2$ تابع درآمد روزانه شرکت حاصل از فروش x واحد از همین کالا باشد، نقطه سربه‌سر کدام است؟

۱) ۹۰۰

۲) ۴۰۰

۳) ۱۸۰

۴) ۸۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{سود} = 2200x + 10x^2 - 720000 \Rightarrow \text{سود} = \text{هزینه} - \text{درآمد}$$

در نقطه سر به سر سود برابر صفر است.

$$\Rightarrow 10x^2 + 2200x - 720000 = 0 \Rightarrow x^2 + 220x - 72000 = 0 \Rightarrow (x + 400)(x - 180) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -400 & \text{غ ق ق} \\ x = 180 & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

به ازای چند مقدار m ، تابع $y = (1 - 18m)x^2 + 8(m^2 + 1)x + 11$ در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ دارای ماکسیمم است؟

۴ تمام مقادیر m

۳ هیچ مقدار m

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی

$$y = (1 - 18m)x^2 + 8(m^2 + 1)x + 11$$

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تابع درجه دوم وقتی ماکسیمم دارد که ضریب x منفی باشد. بنابراین:

$$1 - 18m < 0 \Rightarrow 1 < 18m \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

طول نقطه ماکسیمم همان طول رأس سهمی $x_s = -\frac{b}{2a}$ است. بنابراین:

$$\frac{1}{2} = \frac{-8(m^2 + 1)}{2(1 - 18m)} \Rightarrow -8m^2 - 8 = 1 - 18m \Rightarrow -8m^2 + 18m - 9 = 0 \Rightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4(8)(9) = 324 - 288 = 36$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{18+6}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} > \frac{1}{18} \text{ ق ق} \\ m_2 = \frac{18-6}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} > \frac{1}{18} \text{ ق ق} \end{cases}$$

۴۳ به ازای چند مقدار m ، $x = 2$ جواب معادله $\frac{x+1}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{2m^2}{x(x-3)}$ است؟

۴ هیچ مقداری از m

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

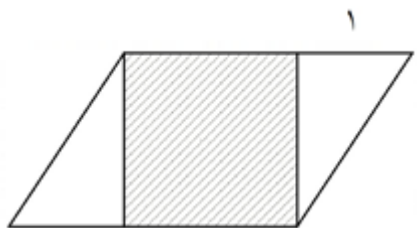
کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{2m^2}{x(x-3)} \Rightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-3)}{x(x-3)} = \frac{2m^2}{x(x-3)} \Rightarrow x^2 + x - 2x + 6 = 2m^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6 - 2m^2 = 0 \xrightarrow{x=2} 4 - 2 + 6 - 2m^2 = 0 \Rightarrow 8 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

در شکل مقابل، مساحت مربع هاشورخورده از $\frac{3}{4}$ مساحت یکی از مثلث‌ها به اندازه $\frac{27}{32}$ واحد مربع بیشتر است. اندازه قاعده متوازی‌الاضلاع، کدام است؟



$$\frac{5}{2} \quad \text{ف}$$

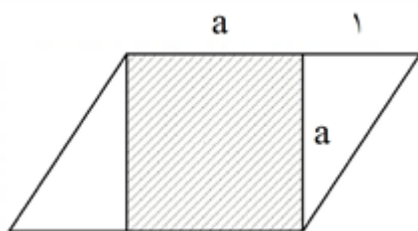
$$\frac{17}{8} \quad \text{۳}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{9}{8} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث} \times \frac{3}{4} &= \text{مساحت مربع} + \frac{27}{32} \\ a^2 &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1 \times a}{2} \right) + \frac{27}{32} \Rightarrow a^2 = \frac{3a}{8} + \frac{27}{32} \\ \Rightarrow 32a^2 - 12a - 27 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4(32)(-27) = 144 + 3456 = 3600$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3600} = 60 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{12+60}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8} \Rightarrow \text{قاعده} = \frac{9}{8} + 1 = \frac{17}{8} \\ a_2 = \frac{12-60}{64} = -\frac{48}{64} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۴۵ محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکسیمم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

$$11/25 \quad \text{ف}$$

$$56/25 \quad \text{۳}$$

$$209 \quad \text{۲}$$

$$225 \quad \text{۱}$$

سراسری - انسانی - تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y = 15 \Rightarrow y = 15-x$$

$$S = xy = x(15-x) = -x^2 + 15x \Rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{15}{2} \Rightarrow y_s = 15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_{\max} = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = 56/25$$

روش دوم: اگر مجموع دو عبارت برابر مقدار ثابت باشد و از ما ماکزیمم حاصل‌ضربشان خواسته شد، در آن صورت هر دو عبارت برابر با نصف آن عدد ثابت‌اند.

$$x+y = 15 \Rightarrow x=y = \frac{15}{2} \Rightarrow \text{Max}(xy) = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = 56/25$$

یک شرکت تولیدی، هر واحد کالای خود را ۲۰۵ ریال می‌فروشد و $C(x) = x^2 + 2x + 600$ تابع هزینه x واحد از این نوع کالا برحسب ریال است. اگر تولید این شرکت در یک روز به بیشترین مقدار نقطه سربه‌سر برسد، درآمد شرکت چند هزار ریال است؟

۱۱/۴ (۴)

۲۶ (۳)

۴۱ (۲)

۴۲/۲ (۱)

سراسری-انسانی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای محاسبه نقطه (نقاط) سربه‌سر باید توابع هزینه و درآمد را با یکدیگر برابر قرار دهیم:

$$x^2 + 2x + 600 = 205x \Rightarrow x^2 - 203x + 600 = 0 \Rightarrow (x - 200)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 200 \text{ یا } x = 3$$

چون بیشترین مقدار نقطه سربه‌سر خواسته شده، پس $x = 200$ قابل قبول است.

$$R(x) = 205x \Rightarrow R(200) = 205(200) = 41000$$

۴۷ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 2$ ، کدام است؟

-۱/۵ (۴)

-۳ (۳)

-۶/۵ (۲)

-۱۸ (۱)

سراسری-انسانی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طرفین معادله را در $k.m.$ مخرج‌ها یعنی $(x-2)(x+3)$ ضرب می‌کنیم:

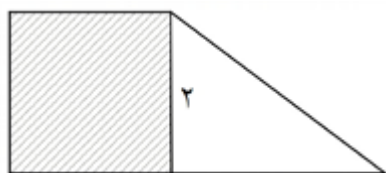
$$x(x+3) - 3(x-2) = 2(x-2)(x+3) \Rightarrow x^2 + 3x - 3x + 6 = 2(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + 2x - 18 = 0$$

چون دلتای این معادله مثبت است پس دو ریشه دارد و چون ریشه‌های مخرج نیستند دو ریشه قابل قبول است.

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{18}{1} = -18$$

۴۸ در شکل مقابل، مساحت مربع از $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت دوزنقه، کدام است؟



۷ (۴)

۶/۵ (۳)

۵/۵ (۲)

۵ (۱)

سراسری-انسانی-تیرماه ۱۴۰۱

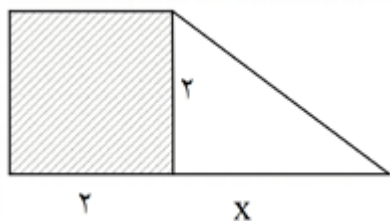
پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر طول ضلع مثلث را مطابق شکل، x بنامیم:

$$\text{مساحت مربع} = 4$$

$$\text{مساحت مثلث قائم الزاویه} = \frac{1}{2}(2 \times x) = x$$

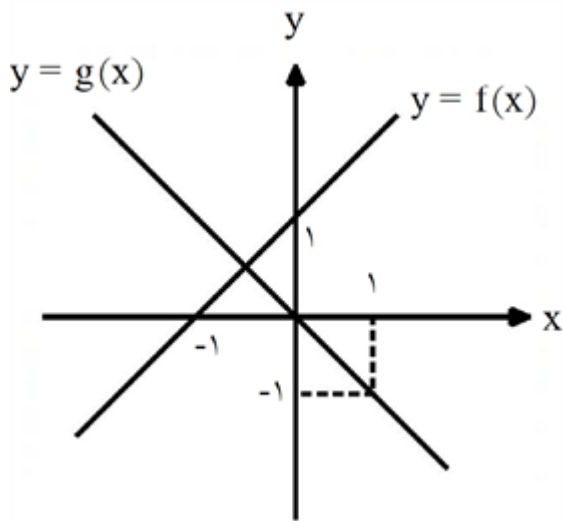
$$4 = \frac{x}{2} + 3 \Rightarrow 1 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2$$

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{(2+2+2)}{2} \times 2 = 7$$



فرض کنید نمودار تابع‌های خط راست $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در صفحه‌ی مختصات مطابق شکل زیر داده شده باشند.

قدرمطلق اختلاف جواب‌های معادله‌ی $\frac{f'(x)}{g(x)} = 2$ ، کدام است؟



$$3\sqrt{3} \quad \text{۴}$$

$$2\sqrt{3} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \\ g(x) &= -x \end{aligned} \Rightarrow f'(x) = 2g(x) \Rightarrow x' + 2x + 1 = -2x$$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow x' + 4x + 1 = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{12}}{1} = 2\sqrt{3}$$

معادله‌ی $\frac{ax^2 + 2x}{x+1} = x^2 - x$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز است. کدام نامساوی زیر همواره برقرار است؟

$a < 1$ (۴)

$a \leq 1$ (۳)

$a \geq -2$ (۲)

$a < -2$ (۱)

سراسری-انسانی-۱۴۰۰

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{ax^2 + 2x}{x+1} = x^2 - x = x(x-1) \Rightarrow \text{طرفین وسطین: } x(ax^2 + 2) = x(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow x((a-1)x^2 + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ (a-1)x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{a-1} (*) \end{cases}$$

واضح است که $x = 0$ یک ریشه‌ی معادله است. از طرفی چون معادله‌ی داده شده دارای ۳ ریشه است، لذا می‌بایست معادله‌ی (*) دارای ۲ ریشه باشد همچنین هیچ کدام برابر ۱- نباشند (چون $x = -1$ ریشه‌ی مخرج است). یعنی:

$$\begin{cases} x^2 = -\frac{3}{a-1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{a-1} < 0 \Rightarrow a-1 < 0 \Rightarrow a < 1 \\ \frac{3}{a-1} \neq -1 \Rightarrow a-1 \neq -3 \Rightarrow a \neq -2 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها کامل‌ترین پاسخ، گزینه‌ی ۱ است.

روش تستی: اگر $a = 1$ باشد، داریم:

$$\frac{x^2 + 2x}{x+1} = x^2 - x \Rightarrow \text{طرفین وسطین: } x^2 + 2x = x^2 - x \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

یعنی معادله یک ریشه خواهد داشت که مطلوب ما نیست. بنابراین گزینه‌هایی که شامل $a = 1$ می‌باشند، رد می‌شود: (رد گزینه‌ی ۲ و ۳)

از طرفی اگر $a = -2$ آن‌گاه یکی از ریشه‌های معادله $x = -1$ خواهد بود که باز هم مطلوب ما نیست. (رد گزینه‌ی ۴)

$$P(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 18x - 40 = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 40$$

$$x = \frac{-12}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 12 \Rightarrow P(12) = -\frac{1}{4} \times 12^2 + 12(12) - 40 = 38$$

روش اول:

$$\frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x(x-1)}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \frac{3x+1+x^2-x-x^2+1}{x^2-1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج}$$

روش دوم:

$$\frac{3x+1+x^2-x}{x^2-1} = 1 \Rightarrow x^2+2x+1 = x^2-1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج}$$

روش سوم:

$$(x^2-1)\left(\frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1}\right) = (x^2-1) \times 1 \Rightarrow 3x+1+x^2-x = x^2-1 \Rightarrow 2x = -2$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -4 + 3 = 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = -4 \times 3 = -12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

روش اول:

روش دوم:

$$\text{الف) } x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-5-7}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

$$۱) x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$-4 \otimes + 1 = -4 \quad \checkmark$$

$$-4 \oplus + 1 = -3$$

$$+4 \otimes - 1 = -4 \quad \checkmark$$

$$+4 \oplus - 1 = +3 \quad \checkmark$$

$$+2 \otimes - 2 = -4 \quad \checkmark$$

$$+2 \oplus - 2 = 0$$

از اتحاد یک جمله‌ی مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 4) = 0 \Rightarrow (x - 1) = 0 \text{ یا } (x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -4$$

$$۲) 4x^2 - (2 - x)^2 = 0$$

با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2 - x))(2x + (2 - x)) = 0 \Rightarrow (3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ یا } x = -2$$

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

$$(2 + 3xy)^2 = 4 + 12xy + 9x^2y^2$$

$$(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$$

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$$

الف) اتحاد مربع دو جمله‌ای

ب) اتحاد مربع دو جمله‌ای

پ) اتحاد مزدوج

ت) اتحاد جمله‌ی مشترک

ث) اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$t = -3 \Rightarrow \frac{4 - (-3)}{2 - 2(-3)} = \frac{3(-3)^2 + k}{\underbrace{((-3)^2 + 1)}_{10} - 68} \Rightarrow \frac{9}{8} = \frac{27 + k}{32} \Rightarrow \frac{(27 + k) \times 1}{32 \times 1} - \frac{9 \times 4}{8 \times 4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{27 + k - 36}{32} = 0 \Rightarrow k - 9 = 0 \Rightarrow k = 9$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \times 4(x+3)}{x \times 4(x+3)} + \frac{1 \times 4x}{(x+3) \times 4x} - \frac{1 \times x(x+3)}{4 \times x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x + 12 + 4x - x^2 - 3x}{4x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 5x + 12}{4x(x+3)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 25 + 48 = 73 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2}$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{1 \times 12(k+2)}{k \times 12(k+2)} + \frac{1 \times 12k}{(k+2) \times 12k} - \frac{5 \times k(k+2)}{12 \times k(k+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{12k + 24 + 12k - 5k^2 - 10k}{12k(k+2)} = 0 \Rightarrow -5k^2 + 14k + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 14^2 - 4(-5)(24) = 676 > 0. \text{ معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$k = \frac{-14 \pm \sqrt{676}}{-10} \begin{cases} k = 4 \rightarrow \text{دو عدد زوج طبیعی متوالی: } 4, 4+2 \Rightarrow 4, 6 \\ k = \frac{-6}{5} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{الف)} \quad \frac{3x-5}{x+3} = 1 \Rightarrow \frac{(3x+5) \times (1)}{(x+3) \times (1)} - \frac{1 \times (x+3)}{1 \times (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x+5-x-3}{x+3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\text{ب)} \quad \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \Rightarrow \frac{(3x-2) \times (x+3)}{x \times (x+3)} + \frac{(2x+5) \times x}{(x+3) \times x} - \frac{5 \times x(x+3)}{1 \times x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{3x^2} + 9x - \cancel{2x} - 6 + \cancel{2x^2} + 5x - \cancel{5x^2} - 15x}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\text{پ)} \quad \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \Rightarrow \frac{2+x}{x+2} - (x+3) = 0 \Rightarrow \frac{(x+2) \times 1}{(x+2) \times 1} - \frac{(x+3) \times (x+2)}{1 \times (x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+2-x^2-5x-6}{(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{(x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2-4x-4=0 \text{ یا } x^2+4x+4=0 \text{ اتحاد مربع ۲ جمله‌ای}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر}} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \text{ غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\Rightarrow \text{پس معادله جواب ندارد}$$

یا این‌که

$$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow x=-2 \text{ غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\text{ت)} \quad \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \frac{(x^2-2x+2) \times 1}{x(x-2) \times 1} - \frac{(1+x) \times (x-2)}{x \times (x-2)} - \frac{(x-1) \times x}{(x-2) \times x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{x} + 2 - \cancel{x^2} + \cancel{x} - 2 + \cancel{x} - 2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+4}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x^2=4$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = +2 \text{ غ ق چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\text{ث)} \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{3 \times (x+3)(x-2)}{(x-1) \times (x+3) \times (x-2)} - \frac{2 \times (x-1)(x-2)}{(x+3) \times (x-1)(x-2)} - \frac{4 \times (x-1)(x+3)}{(x-2) \times (x-1)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+3x-18-2x^2+6x-4-4x^2-8x+12}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2+x-10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2+x-10=0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(-3)(-10) = 1 - 120 = -119$$

$$\Rightarrow \Delta = -119 < 0 \text{ معادله ریشه ندارد}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\downarrow \text{ف - (x-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{11 \times 1}{(x-2)(x+2) \times 1} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{11-x^2-5x-6-2x^2+4x+3x-6}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2+2x-1}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow -3x^2+2x-1=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \text{ پس معادله جواب ندارد.}$$

$$b = -a - c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = (a - c)^2$$

$\Delta = (a - c)^2 > 0 \rightarrow$ معادله ۲ ریشه دارد

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a - c) \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a} \Rightarrow x = \frac{a + c + a - c}{2a} = \frac{2a}{2a}$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = \frac{a + c - a + c}{2a} = \frac{2c}{2a} \Rightarrow x = \frac{c}{a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2$$

$\Delta = (a - c)^2 > 0 \rightarrow$ معادله ۲ ریشه دارد

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a - c + a - c}{2a} \text{ یا } x = \frac{-a - c - a + c}{2a} \\ x = \frac{-2c}{2a} & x = \frac{-2a}{2a} \\ x = \frac{-c}{a} & x = -1 \end{cases}$$

$$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 6x \Rightarrow \cancel{3x^2} + 5x + 2 - \cancel{3x^2} - 6x = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$$

عرض \times طول = مساحت مستطیل

$$\text{مساحت مستطیل} = (3x + 2)(x + 1) = 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x^2 + 5x + 2$$

$$\text{طول مستطیل} = 3x + 2 \Rightarrow 3 \times 2 + 2 = 8$$

$$\text{عرض مستطیل} = x + 1 \Rightarrow 2 + 1 = 3$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(3x + 6)(\cancel{2}x) = 3x^2 + 6x$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 > 0 \text{ ریشه دارد } 2$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} \text{ یا } x_2 = -1 \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = \frac{-5}{2} \rightarrow c \text{ همان } -5$$

$$2 \rightarrow a \text{ همان } 2$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{نتیجه:}$$

$$۱) x^2 - x = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1 \Rightarrow \text{معادله ریشه دارد} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$۲) 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0. \text{ معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = -1$$

$$۳) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0. \text{ معادله ریشه مضاعف دارد.}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$۴) x^2 + 17x - 18 = 0$$

$$\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 361 > 0. \text{ معادله ۲ ریشه دارد.}$$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{361}}{2 \times 1} \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -18$$

$$۵) 3x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(+4) = -47 < 0. \text{ معادله ریشه ندارد}$$

$$۶) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4(+1)(-1) = 7$$

$$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \text{ یا } x = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$$

۱۸) با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

بنابراین:

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

مساحت مستطیل سفید + مساحت مثلث سفید = مساحت فلش (الف)

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \times 2x \times \cancel{\frac{1}{2}} x + x \times 2x = 5x^2 \xrightarrow[\text{سفید}]{\text{هزینه برجسب}} 5x^2 \times 30 = 150x^2$$

$$\text{هزینه برجسب} \xrightarrow{\text{آبی}} 5x^2 - 2400 = 60 \times 40 - 5x^2 = \text{فلش - مستطیل تابلو} = \text{مساحت قسمت آبی}$$

$$(2400 - 5x) \times 10 = 24000 - 50x^2$$

$$\text{مجموع هزینه ها} = 27/000 \Rightarrow 150x^2 + 24000 - 50x^2 = 27000$$

$$100x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm \sqrt{30} \Rightarrow \text{غ ق ق ق} \Rightarrow x = +\sqrt{30}$$

$$\text{ب) } 2a + 2x + 2(2x) = \cancel{\frac{5}{2}} x + 2x + 4x = 12x \xrightarrow[\text{زرد}]{\text{هزینه برجسب}}$$

$$12x \times 100 = 1200x = \text{تومان}$$

$$150x^2 + 24000 - 50x^2 + 1200x = 34800$$

$$100x^2 + 1200x - 10800 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x + 18)(x - 6) = 0$$

$$x = -18 \text{ یا } x = 6$$

$$a^2 = \left(x + \frac{x}{2}\right)^2 + (2x)^2$$

$$a^2 = \frac{25}{4}x^2 \xrightarrow{\text{جذر}} a = \pm \frac{5}{2}x \text{ غ ق ق ق}$$

$$a = \frac{5}{2}x$$

$$x = 2 \text{ یا } x = -3$$

$$x - 2 = 0 \text{ یا } x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{از اتحاد}} x^2 + (-2 + 3)x + (-2)(3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$$

یا

$$x - 2 = 0 \text{ یا } x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \xrightarrow{\text{به کمک ضرب}} x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{مساحت مربع بزرگ} = 6^2 = 36$$

$$\text{مساحت مربع کوچک} = x^2$$

$$\text{مساحت مستطیل} = x \times 2x = 2x^2$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times x^2 = x^2$$

$$\text{مجموع قسمت‌های رنگی} = x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\text{مساحت باقی‌مانده} = \text{مساحت رنگی} - \text{مساحت مربع بزرگ}$$

$$36 - 4x^2 = 24 \Rightarrow \frac{36 - 4x^2}{4} = \frac{24}{4} \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow[\text{غ ق ق}]{\text{جذر}} x = \pm \sqrt{3}$$

$$x = +\sqrt{3}$$

الف) $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = +2 \text{ یا } x = -2$

(روش دوم: فاکتورگیری)

ب) $(x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0$
 $\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$

روش دوم $\longrightarrow x^2 - x - 6 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$

پ) $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر}} x = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = +\sqrt{2} \text{ یا } x = -\sqrt{2} \end{cases}$

ت) $x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ اتحاد مربع دو جمله ای

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ یا } x = \frac{1}{2}$ ریشه ی مضاعف

(روش دوم، ضرب طرفین در عدد ۴ و بعد استفاده از اتحاد جمله مشترک)

ث) $2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$

ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$ اتحاد جمله مشترک

$(x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = 2$

چ) $\frac{x^2}{3} = x \xrightarrow{\times 3} x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 3$

ح) $x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2} = \frac{5}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{x^2} \xrightarrow{\text{جذر}} x = +\sqrt{\frac{5}{x^2}} \text{ یا } x = -\sqrt{\frac{5}{x^2}}$

خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$ اتحاد مربع ۲ جمله ای

$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = -2$ ریشه مضاعف

د) $9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$ اتحاد جمله مشترک

$(3x+2)(3x-1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$

ذ) $(x-3)^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x-3 = +2 \text{ یا } x-3 = -2 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } x = 1$

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
$2x + 1$	آب
$3x^3 + 1$	آپ
$4x^2 + 12 + 11x$	ذرت

۲۳ الف)

ب) $4x^2 + 28 + 8 + 12 + 12 + 2x + 28 + 1 + 32 + 3x^3$

پ) پاسخ به عهده‌ی دانش‌آموز

ت) سلام $28 + 1 + 27 + 15$

من دوست تو هستم. $28 + 4x^2 + 15 + 31 + 30 + 4x^2 + 4x^2 + 15 + 30 + 10 + 29x + 28$

$x^2 = \text{مساحت مربع}$

۲۴

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \right)^2 = \cancel{\pi}^1 \times \frac{1}{2\cancel{\pi}} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

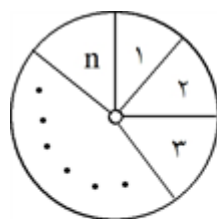
$$\Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{2} = 6 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

۲۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 540x - 112000 = 0 \Rightarrow x = \frac{-540 \pm \sqrt{(540)^2 + 4(112000)}}{2}$$

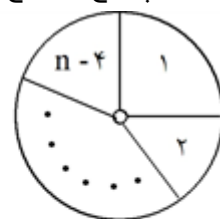
$$\Rightarrow x = \frac{-540 \pm \sqrt{739600}}{2} \Rightarrow x = \frac{-540 \pm 860}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 160 \\ \text{غ ق ق } x = -700 \end{cases}$$

توجه: دانستن اینکه $112000 = 160 \times 700$ می‌تواند به شما کمک کند تا به جای حل معادله درجه ۲ از تجزیه استفاده کنید!



حالت اول

$$\text{سهم هر نفر} = \frac{1}{n}$$



حالت دوم

$$\text{سهم هر نفر} = \frac{1}{n-4}$$

$$\text{طبق فرض: } \frac{1}{n-4} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{n-4} = \frac{3+n}{3n} \Rightarrow 3n = 3n - 12 + n^2 - 4n$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n - 12 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} n = 6 \text{ ق ق} \\ n = -2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

پس در ابتدا ۶ نفر در مهمانی حضور داشته و اگر نصف کیک را بین این ۶ نفر تقسیم کنیم، سهم هر نفر برابر است با:

$$\frac{1}{6} \div 6 = \frac{1}{12}$$

روش دوم: (استفاده از گزینه‌ها)

اگر گزینه‌ها را در ۲ ضرب کنیم، سهم هر نفر در حالت اول به دست می‌آید و با معکوس کردنش، تعداد نفرات در حالت اول مشخص می‌شود. یعنی:

گزینه ۱: $\frac{1}{6} \Leftarrow 3 \text{ نفر} \Leftarrow \text{غ.ق.ق.}$ (شرط خروج ۴ نفر از مهمانی محقق نمی‌شود.) (رد گزینه ۱)

گزینه ۲: $\frac{1}{16} \Leftarrow 8 \text{ نفر} \Leftarrow$ باید $\frac{1}{8-4} = \frac{1}{4}$ با $\frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$ برابر باشد که نیست. (رد گزینه ۲)

گزینه ۳: $\frac{1}{12} \Leftarrow 6 \text{ نفر} \Leftarrow$ باید $\frac{1}{6-4} = \frac{1}{2}$ با $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ برابر باشد که هست. (تأیید گزینه ۳)

گزینه ۴: $\frac{1}{24} \Leftarrow 12 \text{ نفر} \Leftarrow$ باید $\frac{1}{12-4} = \frac{1}{8}$ با $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ برابر باشد که نیست. (رد گزینه ۴)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

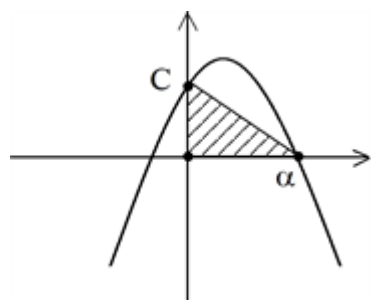
$$\left. \begin{array}{l} \text{مساحت هر مثلث قائم الزاویه} = x \\ \text{مساحت متوازی الاضلاع} = 4x \end{array} \right\}, 4x = x + 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مربع} = 2 \times 1 = 2 = \frac{(\text{قطر مربع})^2}{2} \Rightarrow (\text{قطر مربع})^2 = 4 \Rightarrow \text{قطر مربع} = 2$$

$$\begin{aligned}
 B \text{ شیر} = x \text{ ساعت} & \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{4} \\
 A \text{ شیر} = a \text{ ساعت} (x+15) & \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{4} \\
 x^2 + 15x = 4x + 60 & \Rightarrow x^2 + 11x - 60 = 0 \Rightarrow x(x+15) = 60 \Rightarrow x = 5
 \end{aligned}$$

پس شیر B، ۵ ساعته و شیر A، ۲۰ ساعته استخر را پر می‌کنند و در یک ساعت $\frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ یعنی $\frac{1}{4}$ استخر پر می‌شود

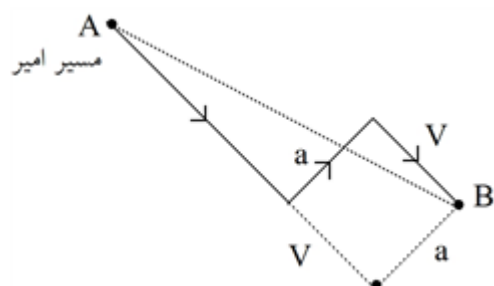
$$n \left(\frac{1}{20} \right) = \frac{3}{4} \Rightarrow n = 15 \quad \text{و } \frac{3}{4} \text{ خالی است.}$$



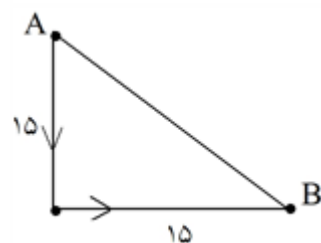
$$\frac{\alpha \times C}{2} = C^2 \Rightarrow \alpha = 2C$$

$$-(2C)^2 + 2(2C) + C = 0 \Rightarrow -4C^2 + 5C = 0 \Rightarrow 4C^2 = 5C$$

$$4C = 5 \Rightarrow C = \frac{5}{4} = 1.25$$



$$\begin{aligned}
 AB^2 &= (14 + V)^2 + a^2 \\
 AB^2 &= 15^2 + 15^2 \\
 441 + a^2 &= 450 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3
 \end{aligned}$$



$$\text{مسافت امیر} = 14 + 3 + 7 = 24$$

$$\text{مسافت حسن} = 15 + 15 = 30$$

پس امیر ۱۶ کیلومتر کمتر طی کرده است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کل مسافت ۲۰۰ کیلومتر است اگر سرعت حالت اول را V در نظر بگیریم در حالت دوم سرعت

$V - 20$ است و اگر زمان اولیه t باشد زمان دوم $t + \frac{50}{60}$ بر حسب ساعت است. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 \frac{200}{V-20} &= \frac{200}{V} + \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{200}{V-20} = \frac{200}{V} + \frac{200}{240} \Rightarrow \frac{1}{V-20} = \frac{1}{V} + \frac{1}{240} \\
 \Rightarrow V^2 - 20V - 4800 &= 0 \Rightarrow (V+60)(V-80) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V = -60 \text{ ق ق} \\ V = 80 \text{ ق ق} \end{cases} \\
 \Rightarrow \text{نسبت خواسته شده} &= \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{سرعت دوم} = 80 - 20 = 60
 \end{aligned}$$

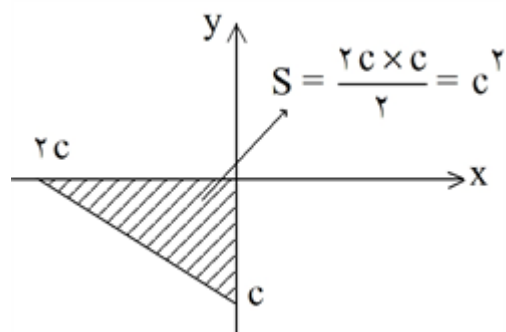
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون مساحت مثلث برابر c^2 است. پس ریشه معادله $x^2 + 5x + c = 0$ باید برابر $2c$ باشد.

$$\xrightarrow{2c} (2c)^2 + 5(2c) + c = 0$$

جایگزین می کنیم

$$\Rightarrow 4c^2 + 11c = 0 \Rightarrow c(4c + 11) = 0$$

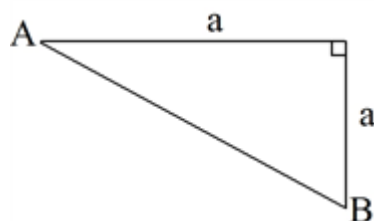
$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 & \text{غ ق ق} \\ c = -\frac{11}{4} = -2.75 \end{cases}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. رضا دو مسیر اول و سوم خود را عمود بر مسیر دوم طی کرده پس در یک راستا می باشد و می توان گفت برای رسیدن از شهر A به شهر B اضلاع قائمه یک مثلث قائم الزاویه به طول های ۷ و $23 = 14 + 9$ طی کرده است پس:

$$AB^2 = 23^2 + 7^2 = 529 + 49 = 578$$

از طرفی برای علی داریم:



$$\Rightarrow AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow 2a^2 = 578$$

$$\Rightarrow a^2 = 289 \xrightarrow{a>0} a = 17$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{هزینه} = \text{درآمد} \Rightarrow x^2 - 40x + 3600 = 120x$$

$$x^2 - 160x + 3600 = 0 \Rightarrow (x - 180)(x + 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +180 \\ x = -20 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس از فروش ۱۸۰ کالا، به نقطه سربه سر می رسد.

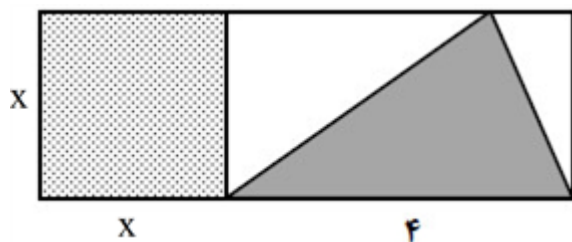
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$t = 4 \Rightarrow \frac{5-4}{3+8} = \frac{29}{k^2-81} \Rightarrow \frac{1}{11} = \frac{29}{k^2-81} \Rightarrow k^2 - 81 = 29 \times 11$$

$$k^2 = 81 + 29 \times 11$$

دو مقدار برای k وجود دارد. \Rightarrow یک عدد مثبت

$$k^2 = 400 \Rightarrow k = \pm 20 \quad \text{محاسبه k:}$$



$$S_1 = \frac{4 \times x}{2} = 2x$$

$$S_2 = x^2$$

$$S_2 = \frac{1}{6}S_1 + \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{x}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow 3x^2 = x + 4$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حکم} = \frac{x^2}{(4+x)x} = \frac{x}{4+x} = \frac{\frac{4}{3}}{4+\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} A(20, 850) \\ B(25, 1000) \end{aligned} \Rightarrow m = \frac{1000 - 850}{25 - 20} = \frac{150}{5} = 30$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = ax + b \Rightarrow y = mx + n \xrightarrow[m=30]{x=25, y=1000} 1000 = 30 \times 25 + n \Rightarrow n = 250$$

$$y = 30x + 250 \Rightarrow c(x) = 30x + 250, R(x) = 55x$$

$$P(x) = 55x - 30x - 250 \Rightarrow P(x) = 25x - 250 \xrightarrow{P(x)=0} 25x - 250 = 0$$

$$\Rightarrow 25x = 250 \Rightarrow x = 10$$

پس با فروش یازدهمین کالا سوددهی آغاز می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرط $\Delta > 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$

$$2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$$

است. بنابراین:

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{-(4k+5)}{2k} = -2 - \frac{5}{2k}$$

چون ضرایب معادله صحیح هستند پس $2k$ عددی صحیح است. از طرفی حاصل ضرب ریشه‌ها باید بیش‌ترین مقدار راداشته باشد، پس $2k$ حداکثر مقدار صحیح منفی یعنی $2k = -1$ باشد. پس $k = -\frac{1}{2}$ در نتیجه:

$$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$$

$$|\alpha + 2\beta| + |\alpha| - |\beta|$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون $\alpha > 0$ و از طرفی $\frac{c}{a} = -3$ پس ریشه دیگر $\beta < 0$ است و $|\beta| = -\beta$

$$\Rightarrow |\alpha + 2\beta| + \alpha - (-\beta) = |\alpha + \beta + \beta| + \alpha + \beta$$

$$\text{جمع ریشه} : \alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} = -7 \Rightarrow \text{عبارت} = |-7 + \beta| - 7 = 7 - \beta - 7 = -\beta$$

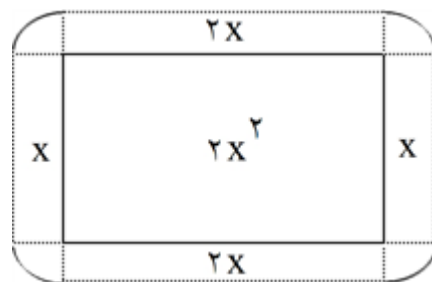
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه طول ۲ برابر عرض است پس طول را $2x$ و عرض را x فرض می‌کنیم. چون دسترسی به باغچه یک متر است شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. (از ۴ رأس باغچه کمانی به شعاع یک رسم می‌کنیم که مساحت ۴ ربع دایره برابر یک دایره با شعاع ۱ است).

$$S_{\text{باغچه}} = 2x^2, S_{\text{کل}} = 2x^2 + 6x + \pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{باغچه}} + \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) S_{\text{باغچه}}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + \pi = 2x^2 + \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) 2x^2 \Rightarrow 6x + \pi = \left(1 + \frac{1}{18}\pi\right) 2x^2 \Rightarrow \frac{6x + \pi}{2x^2} = \frac{18 + \pi}{18}$$

با توجه به گزینه‌ها $x = 3$ را انتخاب می‌کنیم که در معادله فوق صدق می‌کند. پس طول باغچه $2x = 6$ است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{سود} = 10x^2 + 2200x - 720000 \Rightarrow \text{سود} = \text{هزینه} - \text{درآمد}$$

در نقطه سر به سر سود برابر صفر است.

$$\Rightarrow 10x^2 + 2200x - 720000 = 0 \Rightarrow x^2 + 220x - 72000 = 0 \Rightarrow (x + 400)(x - 180) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -400 & \text{ق ق غ} \\ x = 180 & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = (1 - 18m)x^2 + 8(m^2 + 1)x + 11$$

تابع درجه دوم وقتی ماکسیمم دارد که ضریب x^2 منفی باشد. بنابراین:

$$1 - 18m < 0 \Rightarrow 1 < 18m \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

طول نقطه ماکسیمم همان طول رأس سهمی $x_s = -\frac{b}{2a}$ است. بنابراین:

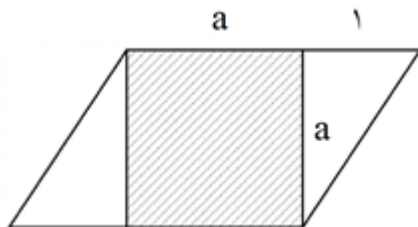
$$\frac{1}{2} = \frac{-8(m^2 + 1)}{2(1 - 18m)} \Rightarrow -8m^2 - 8 = 1 - 18m \Rightarrow -8m^2 + 18m - 9 = 0 \Rightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4(8)(9) = 324 - 288 = 36$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{18+6}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} > \frac{1}{18} & \text{ق ق ق} \\ m_2 = \frac{18-6}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} > \frac{1}{18} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{2m^2}{x(x-3)} \Rightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-3)}{x(x-3)} = \frac{2m^2}{x(x-3)} \Rightarrow x^2 + x - 2x + 6 = 2m^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6 - 2m^2 = 0 \xrightarrow{x=2} 4 - 2 + 6 - 2m^2 = 0 \Rightarrow 8 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$



$$\text{مساحت مثلث} \times \frac{2}{3} = \text{مساحت مربع}$$

$$a^2 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1 \times a}{2} \right) + \frac{27}{32} \Rightarrow a^2 = \frac{2a}{8} + \frac{27}{32}$$

$$\Rightarrow 32a^2 - 12a - 27 = 0$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4(32)(-27) = 144 + 3456 = 3600$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3600} = 60 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{12+60}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8} \Rightarrow \text{قاعده} = \frac{9}{8} + 1 = \frac{17}{8} \\ a_2 = \frac{12-60}{64} = -\frac{48}{64} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y = 15 \Rightarrow y = 15-x$$

$$S = xy = x(15-x) = -x^2 + 15x \Rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{15}{2} \Rightarrow y_s = 15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_{\max} = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = 56.25$$

روش دوم: اگر مجموع دو عبارت برابر مقدار ثابت باشد و از ما ماکزیمم حاصل ضربشان خواسته شد، در آن صورت هر دو عبارت برابر با نصف آن عدد ثابت‌اند.

$$x+y=15 \Rightarrow x=y=\frac{15}{2} \Rightarrow \text{Max}(xy) = \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} = 56.25$$

$$x^2 + 2x + 600 = 205x \Rightarrow x^2 - 203x + 600 = 0 \Rightarrow (x-200)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 200 \text{ یا } x = 3$$

چون بیشترین مقدار نقطه سربه‌سر خواسته شده، پس $x = 200$ قابل قبول است.

$$\text{تابع درآمد: } R(x) = 205x \Rightarrow R(200) = 205(200) = 41000$$

$$x(x+3) - 3(x-2) = 2(x-2)(x+3) \Rightarrow x^2 + 3x - 3x + 6 = 2(x^2 + x - 6)$$

$$x^2 + 2x - 18 = 0$$

چون دلتای این معادله مثبت است پس دو ریشه دارد و چون ریشه‌های مخرج نیستند دو ریشه قابل قبول است.

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{18}{1} = -18$$

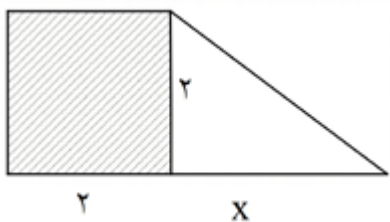
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر طول ضلع مثلث را مطابق شکل، x بنامیم:

$$۴ = \text{مساحت مربع}$$

$$\text{مساحت مثلث قائم الزاویه} = \frac{1}{2}(2 \times x) = x$$

$$۴ = \frac{x}{2} + ۳ \Rightarrow ۱ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = ۲$$

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{(2+2+2)}{2} \times 2 = ۶$$



$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \\ g(x) &= -x \end{aligned} \Rightarrow f^2(x) = 2g(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2x$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{12}}{1} = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{ax^2 + 2x}{x+1} = x^2 - x = x(x-1) \Rightarrow x(ax^2 + 2) = x(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow x((a-1)x^2 + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ (a-1)x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{a-1} (*) \end{cases}$$

واضح است که $x = 0$ یک ریشه‌ی معادله است. از طرفی چون معادله‌ی داده شده دارای ۳ ریشه است، لذا می‌بایست

معادله‌ی (*) دارای ۲ ریشه باشد هم‌چنین هیچ کدام برابر ۱- نباشند (چون $x = -1$ ریشه‌ی مخرج است). یعنی:

$$\begin{cases} x^2 = -\frac{3}{a-1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{a-1} < 0 \Rightarrow a-1 < 0 \Rightarrow a < 1 \\ \frac{3}{a-1} \neq -1 \Rightarrow a-1 \neq -3 \Rightarrow a \neq -2 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها کامل‌ترین پاسخ، گزینه‌ی ۱ است.

روش تستی: اگر $a = 1$ باشد، داریم:

$$\frac{x^2 + 2x}{x+1} = x^2 - x \Rightarrow \text{طرفین وسطین} : x^2 + 2x = x^2 - x \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

یعنی معادله یک ریشه خواهد داشت که مطلوب ما نیست. بنابراین گزینه‌هایی که شامل $a = 1$ می‌باشند، رد می‌شود:

(رد گزینه‌ی ۲ و ۳)

از طرفی اگر $a = -2$ آن‌گاه یکی از ریشه‌های معادله $x = -1$ خواهد بود که باز هم مطلوب ما نیست. (رد گزینه‌ی ۴)

۳	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴

