



۱ رأس سهمی به معادله $y = 2(x - 1)^2 - 3$ را مشخص کنید و به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دهم-خردادماه ۱۴۰۳

۲ در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هریک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیش‌ترین سود را داشته باشد؟

پ) بیش‌ترین سود روزانه‌ی این کارگاه چه‌قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

۳ اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیمم شود.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

۴ محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه‌ی یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را برحسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیمم می‌شود.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

۵ اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیمم مقدار سود را مشخص کنید.

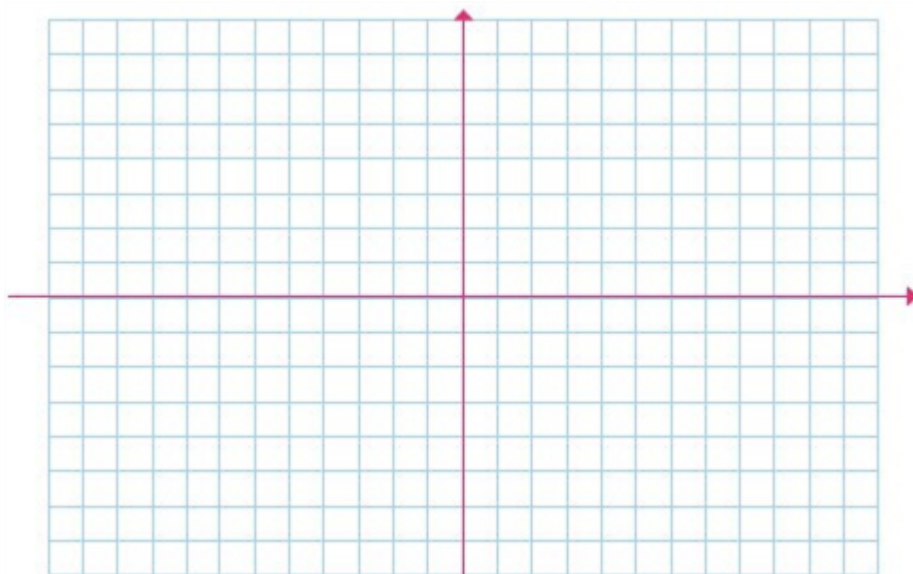
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

۶ نمودار سهمی‌های به معادله‌ی $y = x^2 - 2x$ و $y = -(x - 1)^2 + 1$ و $y = x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

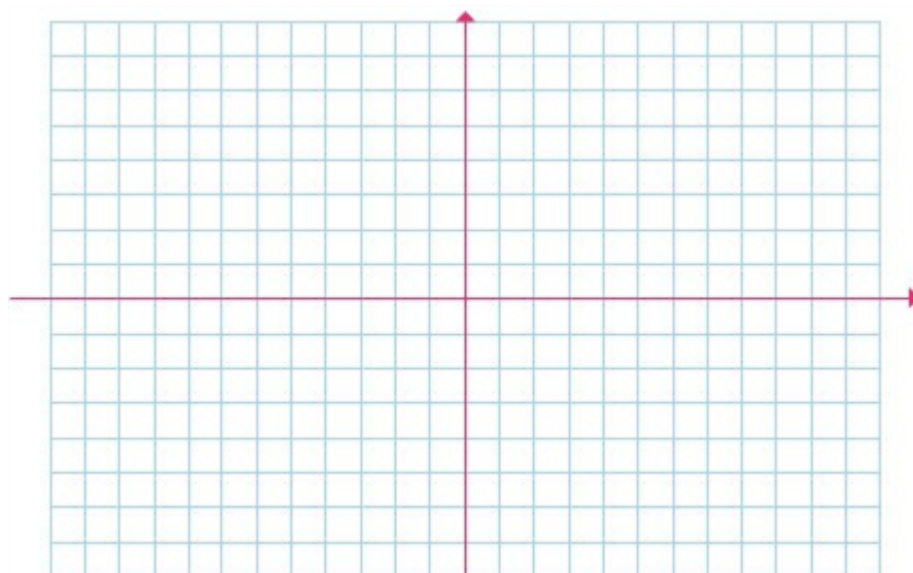


نمودار توابع $y = -x^2 + 6x + 10$ و $y = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

نمودار توابع درجهی دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

نقاط رأس سهمی‌هایی را که معادله‌های آنها داده شده است، مشخص کنید.

ب) $y = 4 - x^2$

الف) $y = x^2$

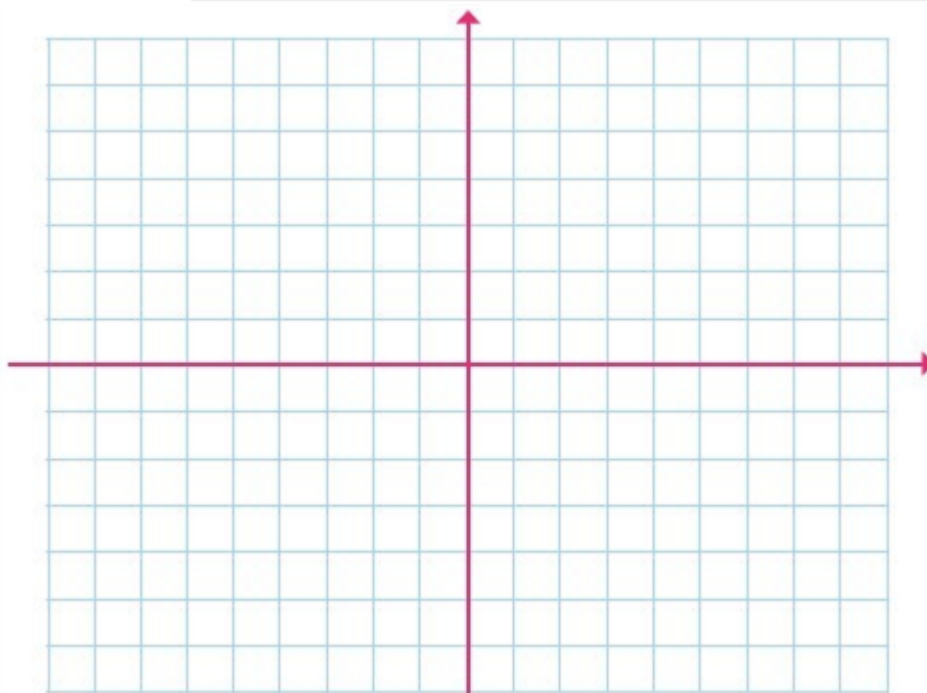
ت) $y = 2(x - 1)^2 + 1$

پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱		۳	۴	...
y			۴					...



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دهم-ریاضی و آمار (۱) انسانی

۱۱ مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + \left(a + \frac{4}{3}\right)x + 2 = 0$ با حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x - a = 0$ برابر است. محور تقارن سهمی $y = -ax^2 - \left(1 + \frac{5}{2}a\right)x - 1$ کدام است؟

$$x = -\frac{11}{8} \quad \text{۴}$$

$$x = \frac{11}{8} \quad \text{۳}$$

$$x = -\frac{3}{4} \quad \text{۲}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

۱۲ مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - ax - 1 = 0$ با حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$ برابر است. طول رأس سهمی $y = x^2 + (1 - 2a)x - 3$ کدام است؟

$$3 \quad \text{۴}$$

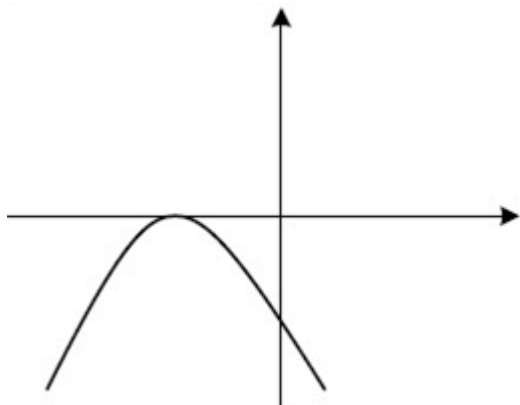
$$1/5 \quad \text{۳}$$

$$-3 \quad \text{۲}$$

$$-1/5 \quad \text{۱}$$

سراسری-انسانی-۱۴۰۲ تیرماه

به ازای کدام مقدار a ، شکل مقابل، نمودار تابع $y = -3x^2 - 3x + a$ است؟



$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

سراسری-انسانی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

رأس سهمی $y = -x^2 + bx + 3$ روی خط $y = 4$ واقع است. اگر محور تقارن سهمی از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور کند، مقدار b کدام است؟

-2 (۴)

-1 (۳)

1 (۲)

2 (۱)

سراسری-انسانی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

شیب خط $y = ax + b$ ، $-1/5$ برابر شیب خط $y = cx + d$ است. اگر دو خط در $x = -2$ روی محور x ها یکدیگر را قطع کنند، محور تقارن $f(x) = \left(\frac{c}{2}x + d\right)^2 - (ax + b)^2$ کدام است؟

$x = -\frac{7}{4}$ (۴)

$x = -\frac{3}{2}$ (۳)

$x = -3$ (۲)

$x = -2$ (۱)

سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱

خط $x = -1$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + 3x + c$ است. اگر رأس سهمی روی خط $y = 1$ قرار داشته باشد، مقدار ac کدام است؟

$-5/25$ (۴)

$-3/25$ (۳)

$3/75$ (۲)

$5/75$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

نمودار $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار $y = |x|$ ، نامنفی باشد؟

5 (۴)

4 (۳)

3 (۲)

2 (۱)

سراسری-انسانی-تیرماه ۱۴۰۱

فرض کنید تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x محصول از یک کالا به صورت $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $C(x) = ax + 18$ باشد. اگر بیشترین سود این شرکت به ازای تولید ۹ واحد کالا باشد، مقدار a کدام است؟

-39 (۴)

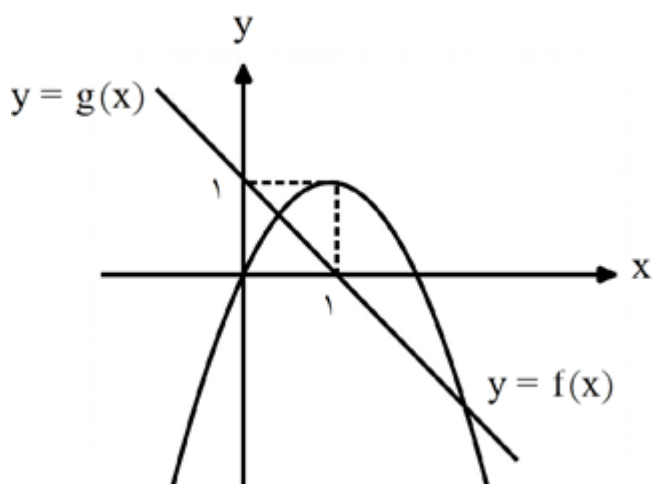
-21 (۳)

18 (۲)

21 (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه‌ی مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g'(x)$ ، کدام است؟



۲ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

سراسری-انسانی-۱۴۰۰

تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x واحد از یک کالای مصرفی به صورت $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x$ و تابع هزینه‌ی آن به

صورت $C(x) = 4x + b$ است. اگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی سر به سر تابع سود این شرکت، ۱۲ واحد کالا باشد، مقدار b کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

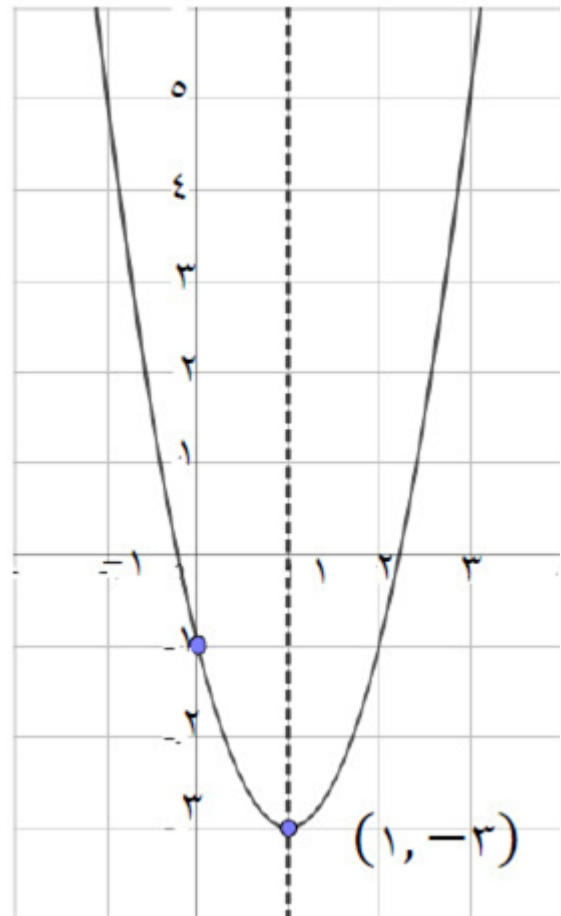
۵ (۱)

سراسری-انسانی-۱۴۰۰

روش اول: رأس: $(1, -3)$

x	0	1	2	3
y	-1	-3	-1	5

روش دوم:



الف) $R(x) = 200x$ درآمد

$$P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 160x - 100$$

ب) تابع سود، درجه‌ی ۲ و سهمی است، پس ماکزیمم در رأس آن اتفاق می‌افتد:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} \Rightarrow x = 80$$

یعنی ۸۰ لامپ در روز تولید کند تا بیش‌ترین سود را داشته باشد.

پ) $x = 80$ را در تابع سود جایگزین می‌کنیم.

$$P(80) = -80^2 + 160(80) - 100 \Rightarrow P(80) = 6300 \text{ کارگاه سود روزانه‌ی}$$

$$2x + a = 100 \Rightarrow a = 100 - 2x$$

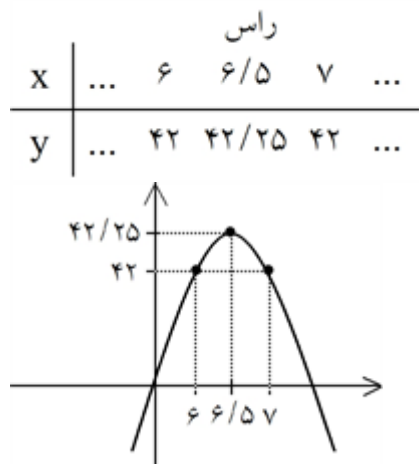
$$y = xa = x(100 - 2x) \Rightarrow y = 100x - 2x^2 \Rightarrow \text{درجه‌ی ۲ - سهمی}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} \Rightarrow x = 25 \xrightarrow{\text{جایگزین}} a = 100 - 2(25) \Rightarrow a = 50$$

$$y_{\max} = x \times a = 25 \times 50 = 1250$$

$$P = \frac{\cancel{y}(x+y)}{\cancel{y}} = \frac{26}{2} \Rightarrow x+y=13 \Rightarrow y=13-x$$

درجه ۲ سهمی $S = x \times y = x \times (13-x) \Rightarrow S = 13x - x^2$ مساحت مستطیل



$C(x)$ هزینه $R(x)$ درآمد $P(x)$ سود

$$P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 30x - (18x + 40) \Rightarrow P(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 12x - 40 \Rightarrow$$

درجه‌ی ۲ سهمی، ماکزیمم در رأس اتفاق می‌افتد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+12)}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = +12 \Rightarrow x = 12 \xrightarrow{\text{جایگزین}} P(+12) = \frac{-1}{2}(12)^2 + 12(12) - 40$$

$P(12) = 32$ ماکسیمم مقدار سود

$$* y = x^2 - 2x$$

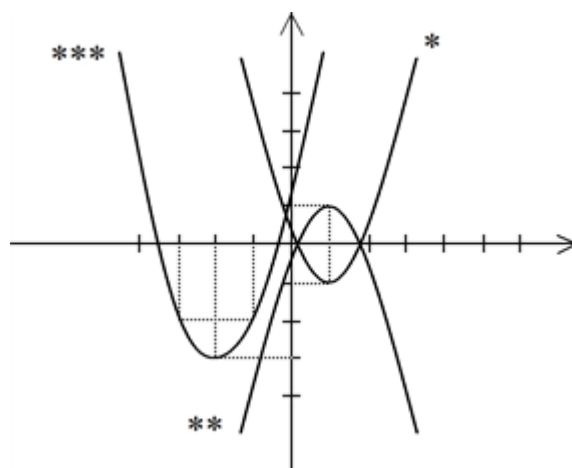
راس					
x	...	٠	١	٢	...
y	...	٠	-١	٠	...

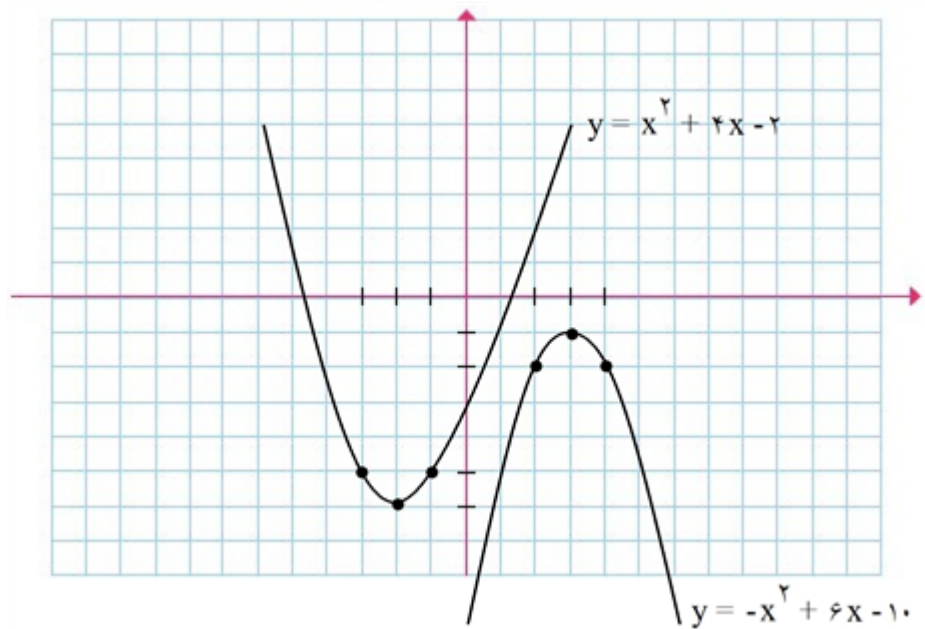
$$** y = -(x - 1)^2 + 1$$

راس					
x	...	٠	١	٢	...
y	...	٠	١	٠	...

$$*** y = x^2 + 4x + 1$$

راس					
x	...	-٣	-٢	-١	...
y	...	-٢	-٣	-٢	...





۷

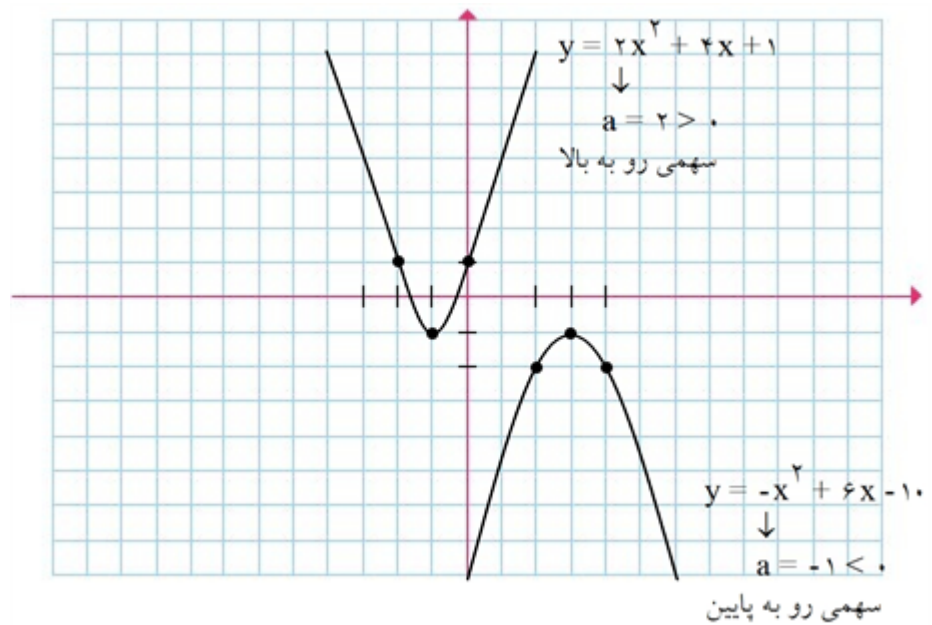
$$y = -x^2 + 6x - 10 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(1)} = 3 \text{ طول رأس}$$

	رأس				
x	...	۲	۳	۴	...
y	...	-۲	-۱	-۲	...

$$y = x^2 + 4x - 2 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2 \text{ طول رأس}$$

	رأس				
x	...	-۳	-۲	-۱	...
y	...	-۵	-۶	-۵	...

این دو سهمی نقطه برخورد ندارند (همدیگر را قطع نمی‌کنند).



۸

$$y = -x^2 + 6x - 10 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3 \text{ طول رأس}$$

	رأس				
x	...	۲	۳	۴	...
y	...	-۲	-۱	-۲	...

$$y = 2x^2 + 4x + 1 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1 \text{ طول رأس}$$

	رأس				
x	...	-۲	-۱	۰	...
y	...	۱	-۱	۱	...

الف) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{جایگزین}} y = 0^2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{رأس}(0, 0)$

ب) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-1)} \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{\text{جایگزین}} y = 4 - 0^2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \text{رأس}(0, 4)$

پ) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{جایگزین}} y = 2(1)^2 - 4(1) + 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \text{رأس}(1, -1)$

ت) $y = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 2 + 1$

$$y = 2x^2 - 4x + 3$$

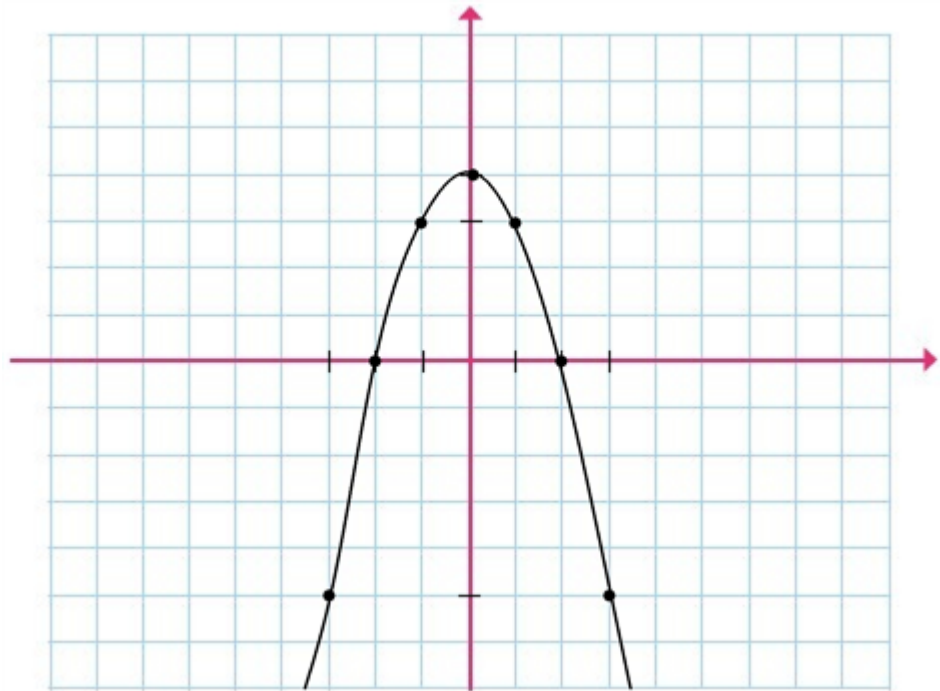
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{جایگزین}} y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{رأس}(1, 1)$$

توجه: طول رأس، همان قرینه‌ی عدد داخل پرانتز دارای توان ۲ است.

عرض رأس، همان عدد بعد از پرانتز دارای توان ۲ است.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	...

۱۰



$$\frac{-(a + \frac{4}{3})}{a} = -\frac{a}{3} \Rightarrow -a^2 = -3a - 4 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۱

$$\begin{cases} a = -1 & \text{محور تقارن} \\ x = -\frac{-(1 + \frac{4}{3}a)}{2(-a)} = \frac{1 - \frac{4}{3}}{2} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

(دلتای معادله اول منفی می شود) غ ق ق ق

$$x^2 - ax - 1 = 0 \Rightarrow S = a$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$ax^2 - 4x + a + 2 = 0 \Rightarrow P = \frac{a+2}{a} \Rightarrow a = \frac{a+2}{a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

به ازای $a = 2$ معادله $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$ به صورت $x^2 - 4x + 4 = 0$ می شود که ریشه ندارد. پس فقط $a = -1$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \text{طول راس سهمی} = \frac{-(1 - 2a)}{2 \times 1} = \frac{-(1 + 2)}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 9 + 12a = 0 \Rightarrow 12a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$y = 4 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow -\frac{b^2 + 12}{-4} = 4 \Rightarrow b^2 + 12 = 16$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \rightarrow \text{محور تقارن} : x = 1 \\ b = -2 \rightarrow \text{محور تقارن} : x = -1 \Rightarrow 4 \text{ گذرد. نمی گذرد.} \end{cases}$$

$$\text{محور تقارن} : x = -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{2(-1)} = \frac{b}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا با توجه به اطلاعات همه پارامترها را برحسب a می‌نویسیم:

$$a = -1/5c \Rightarrow a = -\frac{3}{5}c \Rightarrow c = -\frac{5}{3}a \xrightarrow[y=0]{x=-2} 0 = -2a + b \Rightarrow b = 2a$$

$$\xrightarrow[y=0]{x=-2} 0 = -2c + d \Rightarrow d = 2c \Rightarrow d = -\frac{10}{3}a$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(-\frac{1}{3}ax - \frac{4}{3}a\right)^2 - (ax + 2a)^2$$

در سهمی $y = a'x^2 + b'x + c'$ محور تقارن خط $x = -\frac{b'}{2a'}$ است پس در ضابطه $f(x)$ کافی است ضرایب a' و b' را

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a^2}{9}x^2 - a^2x^2 + \frac{8}{9}a^2x - 4a^2x + c'$$

به دست آوریم:

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{a^2}{9} - a^2\right)x^2 + \left(\frac{8}{9}a^2 - 4a^2\right)x + c'$$

$$\text{محور تقارن } x = \frac{-\left(\frac{8}{9} - 4\right)a^2}{2\left(\frac{1}{9} - 1\right)a^2} = \frac{\frac{28}{9}}{2 \times \frac{-8}{9}} = -\frac{28}{16} = -\frac{7}{4}$$

$$y = ax^2 + 3x + c$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶

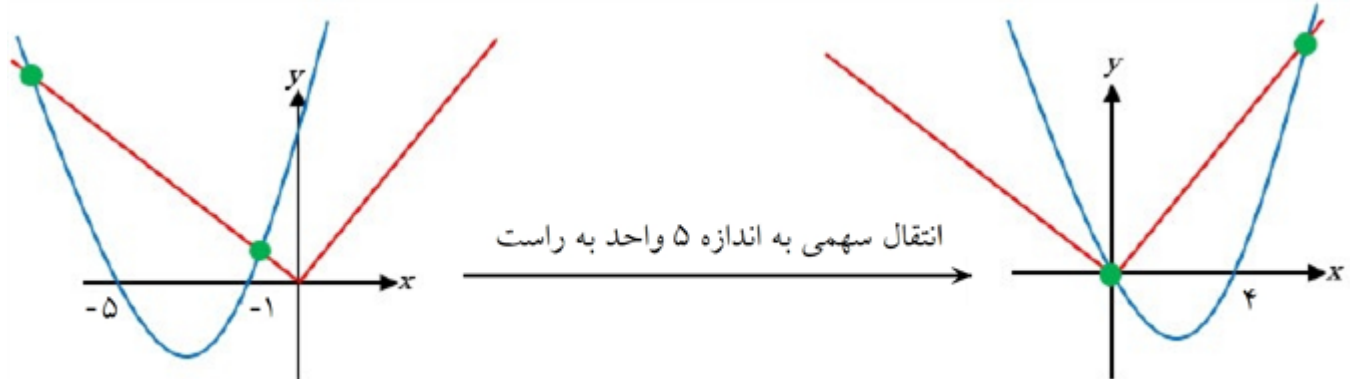
$$\text{معادله محور تقارن سهمی} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = \frac{-3}{2a} = -1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$y_s = 1, x_s = -1 \quad \text{رأس سهمی روی خط } y = 1 \text{ است پس:}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(-1)^2 + 3(-1) + c = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} - 3 + c = 1 \Rightarrow c = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow ac = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم نمودارهای توابع داده شده می‌توان به جواب رسید. ۱۷



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$P(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (30 - a)x - 18$$

$$x_S = 9 \Rightarrow \frac{-(30 - a)}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 9 \Rightarrow a = 21$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی هریک از توابع داده شده را به دست می‌آوریم: ۱۹

$$g(x) = -x + 1$$

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 1 \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x - 1)^2 + 1 = -x^2 + 2x \Rightarrow f(x) = g'(x) \Rightarrow -x^2 + 2x = (-x + 1)^2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$R(x) = C(x) \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 8x = 4x + b \Rightarrow x^2 - 16x + 4b = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 16 \\ x_1 - x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 14, x_2 = 2 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 14 \times 2 = 4b \Rightarrow b = 7$$

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴

