نام و نام خانوادگی : | عنوان آزمون : گسسته ۱۲ فصل ۱

پایه تحصیلی : | زمان آزمون :

نام دبیر : | تاریخ برگزاری

p30konkor.com

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	رقم یکان عدد $A = ۲! + ۴! + ۶! + ... + ۱۰۰!$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲ پاسخ: ۱ $A = ۲! + ۴! + \underbrace{۶! + \ldots + ۱۰۰!}_{\text{مضرب ۲ و ۵}} \Rightarrow A = ۲! + ۴! + ۱۰k, k \in Z$ $\Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۲ + ۲۴ + ۰ \Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۲۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۶$ (ص ۲۹)	
۲	اگر $a\|b$ و $b \neq ۰$، در این صورت ثابت کنید: $\|a\| \leq \|b\|$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲ پاسخ: ۱ $a\|b \Rightarrow b = aq, q \in Z \Rightarrow \|b\| = \|a\|\,\|q\|$ $q \in Z, q \neq ۰ \Rightarrow \|q\| \geq ۱ \Rightarrow \|a\|\,\|q\| \geq \|a\| \Rightarrow \|b\| \geq \|a\|$ (ص ۱۱)	
۳	ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل‌ضرب آنها کمتر نیست. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲ پاسخ: ۱ $a^۲ + b^۲ \geq -ab \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + ab \geq ۰ \Leftrightarrow ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲ab \geq ۰$ (ص ۷) $\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + (a^۲ + b^۲ + ۲ab) \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + (a+b)^۲ \geq ۰$ همواره برقرار	
۴	کدام‌یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟ ۱) $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ ۲) $۲x \overset{۵}{\equiv} ۳$ ۳) $۵x \overset{۷}{\equiv} ۱۰$ ۴) $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۰$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲ پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۵)	
۵	باقی‌مانده تقسیم عدد $(۹^{۱۰۰} - ۲^{۱۰۰} - ۷^{۱۰۰})$ بر ۱۴ کدام است؟ ۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲ پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)	

۶

عدد ۱۴۰۲ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

۱) $[5]$ ۲) $[2]$ ۳) $[0]$ ۴) $[1]$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)

۷

چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید.

- حاصل‌ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست - با درنظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل‌ضرب صفر است که گویا می‌شود. (ص ۵)

۸

چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید.

- با اضافه کردن یک واحد به حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست (ص ۳) $2k\times(2k+2)+1=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$

۹

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر a، b و c اعدادی طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$، در این صورت حاصل عبارت $([a,b],[a,c])$ برابر .... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ b (ص ۱۳)

۱۰

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر k عددی صحیح باشد، باقی مانده تقسیم $300-19k$ بر ۱۹ برابر با .... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ ۴ (ص ۱۴)

۱۱

معادلهٔ هم‌نهشتی $1402x \overset{9}{\equiv} 11$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ (ص ۳۰)

$$(1+4+0+2)x \overset{9}{\equiv} 1+1 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} -7 \xrightarrow{(7,9)=1} x \overset{9}{\equiv} -1 \Rightarrow x=9k-1$$

۱۲

باقی‌مانده تقسیم عدد $A=63^{14}+1$ را بر ۱۶ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $63 \overset{16}{\equiv} -1 \Rightarrow 63^{14} \overset{16}{\equiv} 1 \Rightarrow A \overset{16}{\equiv} 2 \Rightarrow r=2$ (ص ۲۱)

۱۳

اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری‌که $7|2k+1$، ثابت کنید: $49|4k^2-10k-6$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$7|2k+1 \Rightarrow \begin{cases} 49|4k^2+4k+1 \\ 49|14k+7 \end{cases} \Rightarrow 49|4k^2-10k-6$$ (ص ۱۶)

۱۴

به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b|a+2$، آن‌گاه b نیز عددی فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $b = 2k, b|a+2 \Rightarrow a+2 = \mathrm{bq} \Rightarrow a = 2t$

که با فرض سؤال در تناقض است. (ص ۱۶)

۱۵

برای هر دو عدد حقیقی x و y، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$2x^2 + 2\mathrm{xy} + y^2 \geq 4x - 4$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $2x^2 + 2\mathrm{xy} + y^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2\mathrm{xy} + y^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-2)^2 \geq 0$

این رابطه همواره برقرار است. (ص ۸)

۱۶

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) برای اعداد صحیح a، b و c که $a \neq 0$، اگر $a|b+c$ آن‌گاه $a|b$ یا $a|c$.

ج) معادلهٔ هم‌نهشتی $\mathrm{ax} \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$.

د) اگر داشته باشیم $(a,b) = 1$ آن‌گاه می‌گوییم؛ a و b نسبت به هم اول‌اند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ الف) نادرست (ص ۵) ب) نادرست (ص ۱۱) ج) درست (ص ۲۵) د) درست (ص ۱۳)

۱۷

در معادله سیاله $15x + 19y = 7$، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x درنظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه‌حل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $15x \overset{19}{\equiv} 7 \Rightarrow 15x \overset{19}{\equiv} 45 \xrightarrow{(15,19)=1} x \overset{19}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 19k + 3$

$\xrightarrow{k=5} x = 98$ (ص ۲۸)

۱۸

باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه‌حل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \overset{\times 4}{\rightarrow} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \overset{\times 5}{\rightarrow} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \overset{-}{\rightarrow} a = 20q' - 1 \Rightarrow a = 20q'' + 19$ (ص ۱۶)

۱۹

اگر $a|2m+3$ و $a|m+7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $\begin{cases} a|2m+3 \\ a|m+7 \end{cases} \overset{\times 2}{\rightarrow} \begin{cases} a|2m+3 \\ a|2m+14 \end{cases} \Rightarrow a|11 \Rightarrow a = 1, a = 11$ (ص ۱۱)

۲۰

اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + z^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + z^2 + 1 \geq 0$

همواره بدیهی است. (ص ۸)

۲۱

معادله همنهشتی $4x \overset{6}{\equiv} 10$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ چون $(12, 8)|20$ معادله جواب دارد. (ص ۳۰)

$4x \overset{6}{\equiv} 10 \Rightarrow 4x \overset{6}{\equiv} 4 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k + 1$

۲۲

باقی‌مانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + ... + 200!$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل می‌باشد.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ می‌دانیم $1! \overset{15}{\equiv} 1$ و $2! \overset{15}{\equiv} 2$ و $3! \overset{15}{\equiv} 6$ و $4! \overset{15}{\equiv} 9$ و $5! \overset{15}{\equiv} 0$ و ... $200! \overset{15}{\equiv} 0$ پس داریم: (ص ۲۹)

$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + ... + 200! \overset{15}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + ... + 0 \overset{15}{\equiv} 3$

۲۳

اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم: (ص ۱۶)

$$\begin{cases} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7 \Rightarrow r = 7$$

۲۴

اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(5m + 4)$ و $(6m + 5)$ بر a بخشپذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

$$\begin{matrix} a|6(5m+4) \\ a|5(6m+5) \end{matrix} \Rightarrow a|5(6m+5) - 6(5m+4) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$ (ص ۱۱)

۲۵

گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

«برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$»

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است (ص ۸ و ۷)

۲۶

در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.

الف) حاصل $\left([m^2, m], m^5\right)$ برابر با .... است.

ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a,b)=1$، می‌گوییم a و b .... هستند.

پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، .... می‌نامیم.

ت) تعداد یال‌های گراف K_7، برابر .... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) m^2 ب) نسبت به هم اول (ص ۱۳)

پ) مینیمال (ص ۴۶) ت) ۲۱ (ص ۳۸)

۲۷

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.

ب) اگر $a|b+c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b\neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ برقرار است.

ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۲۸

دانش‌آموز در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)
این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

$$5x+3y=42 \Rightarrow 5x \overset{3}{\equiv} 42 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x=3k \Rightarrow 5(3k)+3y=42 \Rightarrow y=-5k+14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases} ; \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} ; \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$ (ص ۲۸)

۲۹

ثابت کنید باقیماندۀ هر عدد بر ۹، برابر است با باقیماندۀ تقسیمِ مجموع ارقام آن عدد بر ۹.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ عدد n رقمی $A=a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ را بسط می‌دهیم و در هم‌نهشتی به پیمانۀ ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم: (ص ۲۲)

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\ldots+\ldots+\ldots+10^2 a_2+10a_1+1a_0 \Rightarrow A \overset{9}{\equiv} 1\times a_{n-1}+\ldots+1\times a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$$

۳۰

اگر باقیماندۀ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به‌ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیماندۀ تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

$$\begin{matrix} a=6q+3 \\ a=7q'+5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 7a=42q+21 \\ 6a=42q'+30 \end{matrix} \Rightarrow a=42(q-q'-1)+33 \Rightarrow r=33$$ (ص ۱۴)

۳۱	اگر عدد طبیعی a، دو عدد $(۵k+۹)$ و $(۸k+۱۳)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a=۱$ یا $a=۷$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۱ $\begin{cases} a \mid ۵k+۹ \\ a \mid ۸k+۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \mid ۴۰k+۷۲ \\ a \mid ۴۰k+۶۵ \end{matrix} \Rightarrow a \mid ۷ \Rightarrow a=۱ \vee a=۷$ (ص ۱۲)	
۳۲	$a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ اعدادی صحیح هستند و $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۱ اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_۱-b_۱)$ و $(a_۲-b_۲)$ و $(a_۳-b_۳)$ هم باید فرد باشد. در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد. اما با توجه به فرض مسأله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (ص ۶)	
۳۳	هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال، نقض کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n+۱$ اول است. ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۱ الف) نادرست، مثال نقض $n=۳$ (ص ۳) ب) درست، اثبات: $a=۲k+۱ \Rightarrow a^۲=(۲k+۱)^۲=۲(۲k^۲+۲k)+۱=۲k'+۱$ (ص ۸)	
۳۴	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۱ فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی $۱۳۱=۱۲+۳\times۳۰+۲۹$. از طرفی $۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است. (ص ۲۴) ش: ۰، ی: ۱، د: ۲، س: ۳، چ: ۴، پ: ۵، ج: ۶	
۳۵	باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۲۷^{۲۰}+۱۸$ را بر ۱۳ بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۱ $۲۷=۱۳\times۲+۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^{۲۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱, ۱۸=۱۳\times۱+۵, ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۵$ $\Rightarrow (۲۷)^{۲۰}+۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۱+۵ \Rightarrow r=۶$ (ص ۲۱)	

Table in question 34:

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

۳۶

اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5|4k+1$، ثابت کنید $25|16k^2+28k+6$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l} 5|4k+1 \Rightarrow 25|16k^2+8k+1 \\ 5|4k+1 \Rightarrow 25|20k+5 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6$$ (ص ۱۶)

۳۷

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

$n=2k \Rightarrow n^2-5n+7=4k^2-10k+6+1=2(2k^2-5k+3)+1=2q+1$ (ص ۴)

۳۸

درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $a|b$ و $b\neq 0$، در این صورت $|a|>|b|$.

ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a|c, b|c)$ و $(\forall m>0, a|m, b|m \Rightarrow c\leq m)$ آن‌گاه $[a,b]=c$.

پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a\overset{m}{\equiv} r$.

ت) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱

الف) نادرست (ص ۱۱) ب) درست (ص ۱۳)

پ) درست (ص ۲۱) ت) نادرست (ص ۱۳)

۳۹

در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(1\leq n\leq 200)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$A=\{1\leq n\leq 200 | n=4k\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{200}{4}\right]=50, B=\{1\leq n\leq 200 | n=7k\}$

$A\cap B=\{1\leq n\leq 200 | n=28k\} \Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{200}{28}\right]=7$

$|A\cap B'|=|A|-|A\cap B|=50-7=43$ (ص ۸۳)

۴۰

معادله سیاله $5x+2y=18$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$2y\overset{5}{\equiv} 18 \xrightarrow{(2,5)=1} y\overset{5}{\equiv} 9 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow y=5k+4 \Rightarrow 5x+2(5k+4)=18$

$\Rightarrow x=-2k+2$ (ص ۲۹)

۴۱

اگر دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a+6)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$4a-7\overset{10}{\equiv} 3a-5 \Rightarrow a\overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow 9a+6\overset{10}{\equiv} 24\overset{10}{\equiv} 4 \Rightarrow r=4$ (ص ۲۹)

۴۲	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ طبق الگوریتم تقسیم داریم: $a=3k$ که بر ۳ بخش‌پذیر است. یا $a=3k+1 \Rightarrow a+2=3(k+1)$ یا $a=3k+2 \Rightarrow a+4=3(k+2)$ که در هر دو مورد بر ۳ بخش‌پذیر هستند. (ص ۱۵)	
۴۳	اگر $a>1$، $a\|9k+4$ و $a\|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ $a\|9(5k+3)-5(9k+4) \Rightarrow a\|27-20 \Rightarrow a\|7 \xrightarrow{a>1} a=7 \in \mathrm{P}$ (ص ۱۲)	
۴۴	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a\|b$ و m,n دو عدد طبیعی باشند که $m \le n$، آن‌گاه $a^m\|b^n$. ب) اگر $a\|b$ آن‌گاه $(a,b)=a$. پ) اگر $b \overset{m}{\equiv} a$ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی‌اند. ت) منظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌های حقیقی است که در معادله $\mathrm{ax} \overset{m}{\equiv} b$ صدق کند. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ الف) درست (ص ۱۶) ب) نادرست (ص ۱۳) پ) درست (ص ۲۹) ت) نادرست (ص ۲۴)	
۴۵	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است. فرض خلف: فرض کنیم $r+x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r+x-r \in \mathrm{Q}$ یعنی $x \in \mathrm{Q}$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (ص ۵)	
۴۶	معادله سیاله $6x+7y=185$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را بنویسید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ $6x \overset{7}{\equiv} 185 = 23\times 7+24 \Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} 24 \xrightarrow{(6,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow x=7k+4 \Rightarrow 6(7k+4)+7y = 185 \Rightarrow y=-6k+23$ (ص ۳۰)	
۴۷	اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ $a=\mathrm{bq}+r,\ 0 \le r < b \Rightarrow a-\mathrm{bq}=r \Rightarrow \begin{cases} n\|a \\ n\|b \end{cases} \Rightarrow n\|a-\mathrm{bq} \Rightarrow n\|r$ (ص ۱۷)	

۴۸

ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$$a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{\text{ضریب دو عدد صحیح متوالی}} + 1 = 4\times 2q + 1 = 8q+1$$

$\Rightarrow r = 1$ (ص ۱۵)

۴۹

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ فرض خلف: فرض کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\in \mathbb{Q}$. یعنی $2\alpha \in \mathbb{Q}$. در نتیجه $\alpha \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد.
پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (ص ۸)

۵۰

عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ / گویا) است.

ب) اگر دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a|b$، برای هر $m\in \mathbb{Z}$ داریم: $(a|\,\mathrm{mb}\ /\ \mathrm{ma}\,|b)$.

پ) اگر $a|b$ آن‌گاه ب. م. م دو عدد a و b برابر با $(a\ /\ |a|)$ است.

ت) اگر $\mathrm{ac} \overset{m}{\equiv} \mathrm{bc}$ و $(c,m)=d$ آن‌گاه رابطه $\left(a \overset{m}{\equiv} b\ /\ a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b\right)$ برقرار خواهد بود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ الف) گنگ (ص ۵)   ب) $a|\,\mathrm{mb}$ (ص ۱۰)   پ) $|a|$ (ص
۱۳)   ت) $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$ (ص ۲۲)

۵۱

معادله $7x \overset{4}{\equiv} 1$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$$7x \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow 7x \overset{4}{\equiv} 4\times 5 + 1 \Rightarrow 7x \overset{4}{\equiv} 21 \Rightarrow \overset{(7,4)=1}{\equiv}\ x \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 4k+3$$ (ص ۳۰)

۵۲

باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{25}\times 9 + 11$ را بر ۷ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$$1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{25}\times 9 + 11 \overset{7}{\equiv} (-1)^{25}\times 9 + 11 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow r = 2$$ (ص ۲۱)

۵۳

ثابت کنید اگر: $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k+1$ یا $p = 4k+3$ نوشته می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱

$$p = 4k(1),\ p = 4k+1(2),\ p = 4k+2 = 2(2k+1)(3),\ p = 4k+3(4)$$

در حالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود.
(ص ۱۵)

۵۴	به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ $\text{xy} \le \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2\text{xy} \le x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2\text{xy} \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ گزاره همواره درست (ص ۸)	
۵۵	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) a و b اعدادی صحیح و مخالف صفر است. اگر $a\|b$ آن‌گاه عدد .... شمارنده عدد .... است. ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با .... است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ الف) عدد a شمارنده عدد b است. (ص ۹) ب) $2m$ (ص ۱۷)	
۵۶	درست یا <u>نادرست</u> بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2+y^2=(x+y)^2$ برقرار باشد. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰ **پاسخ:** ۱ الف) درست (ص ۱۷) ب) نادرست ($x=0 \xleftarrow{\text{مثال نقض}}$) (ص ۸)	
۵۷	معادله هم‌نهشتی $20 \overset{12}{\equiv} 8x$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹ **پاسخ:** ۱ $8x \overset{12}{\equiv} 20 \overset{12}{\equiv} 32 \xrightarrow{(8,12)=4} x \overset{\frac{12}{4}=3}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 3k+4$ (ص ۳۰)	
۵۸	باقی‌مانده تقسیم $(38^{36}+19)$ را بر ۴ به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹ **پاسخ:** ۱ $38 \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow 38^2 \overset{4}{\equiv} 4 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 38^{36} \overset{4}{\equiv} 0 , 19 \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow 38^{36}+19 \overset{4}{\equiv} 3$ (ص ۲۹)	
۵۹	اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a+4, 2a+3)$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹ **پاسخ:** ۱ $(5a+4, 2a+3)=d \Rightarrow \begin{matrix} d\|2a+3 \\ d\|5a+4 \end{matrix} \Rightarrow d\|-2(5a+4)+5(2a+3) \Rightarrow d\|7 \Rightarrow d=1$ یا 7 (ص ۱۶)	

۶۰	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲a-۵b)$ بر ۱۷ را بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $a=۱۷q+۵$ $b=۱۷q'+۳$ $\Rightarrow ۲a-۵b=۱۷\times ۲q+۱۰-۱۷\times ۵q'-۱۵=۱۷\overbrace{(۲q-۵q'-۱)}^{k\in Z}+۱۲=۱۷k+۱۲\Rightarrow r=۱۲$ (ص ۱۴)	
۶۱	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹ **پاسخ:** ۱ فرض خلف: $\alpha-\beta$ گویاست. (ص ۸) $\begin{matrix}\alpha-\beta=m\in Q\\ \alpha+\beta=n\in Q\end{matrix}\Rightarrow ۲\alpha=m+n\Rightarrow\alpha=\frac{m+n}{۲}\Rightarrow\alpha\in Q$ (تناقض با فرض)	
۶۲	گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است. ب) برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $a\|b$ آن‌گاه $[a,b]=\|b\|$. پ) معادله هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,b)\|m$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹ **پاسخ:** ۱ الف) نادرست $n=۴\Rightarrow ۲^۴-۱=۱۵\notin P$ (ص ۳) ب) درست (ص ۱۳) پ) درست (ص ۲۵)	
۶۳	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. معادله هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,b)\|m$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸ **پاسخ:** ۱ نادرست (ص ۲۵) $an\overset{m}{\equiv}b\rightarrow an=mq+b:\underbrace{an-mq}=b\Rightarrow(a,m)\times k=b\Rightarrow(a,b)\mid b$ ترکیب خطی a و m مضرب ب.م.م a و m است.	
۶۴	فرض کنید $a,b\in Z, m\in N$ اگر $a\overset{m}{\equiv}b$, $n\in N$ ثابت کنید: $a^n\overset{m}{\equiv}b^n$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\|a-b\Rightarrow m\|(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\dots+b^{n-۱})\Rightarrow m\|a^n-b^n$ $\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$ (ص ۲۹)	

۶۵	معادله سیاله $۲x + ۵y = ۱۹$ را حل کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $۲x \overset{۵}{\equiv} ۱۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵k + ۲ \Rightarrow y = -۲k + ۳$ (ص ۲۷)	
۶۶	رقم یکان عدد $(۲^{۱۱} + ۷)$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵$ رقم یکان برابر ۵ است. (ص ۲۹)	
۶۷	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $\begin{array}{l} m = ۱۷q + ۵ (q \in \mathrm{Z}) \\ n = ۱۷q' + ۳ (q' \in \mathrm{Z}) \end{array} \Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q') - ۵$ (ص ۱۴) $\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q' - ۱) + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$	
۶۸	ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ $(k \in \mathrm{W})$ نوشته می‌شود. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹ **پاسخ:** ۱ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $p = ۶k (۱), p = ۶k + ۱ (۲), p = ۶k + ۲ = ۲(۳k + ۱) (۳)$ $p = ۶k + ۳ = ۳(۲k + ۱) (۴), p = ۶k + ۴ = ۲(۳k + ۲) (۵), p = ۶k + ۵ (۶)$ p در حالات ۱، ۳ و ۵ زوج و در ۴ بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود. (ص ۱۵)	
۶۹	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری‌که $a \mid ۳n + ۴$ و $a \mid ۲n + ۳$. نشان دهید $a = ۱$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $\begin{array}{l} a \mid ۳n + ۴ \\ a \mid ۲n + ۳ \end{array} \Rightarrow a \mid -۲(۳n + ۴) + ۳(۲n + ۳) \Rightarrow a \mid ۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \xrightarrow{a \in \mathrm{N}} a = ۱$ (ص ۱۱)	
۷۰	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲ \geq ۰$ نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (ص ۷)	

۷۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y، داریم: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$ آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$.

پ) اگر $a,b\in R$ داریم: $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$.

ت) حاصل‌جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

پاسخ: ۱ الف) نادرست (ص ۳) ب) درست (ص ۴) پ) نادرست (ص ۷) ت) نادرست (ص ۳)

---

۷۲ در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری‌که $۱\le n\le ۱۰۰$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

پاسخ: ۱ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)

$$A=\left\{n\in N|۱\le n\le ۱۰۰, n=۶k\right\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۶$$

$$B=\left\{n\in N|۱\le n\le ۱۰۰, n=۱۰k\right\} \Rightarrow |B|=\left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right]=۱۰$$

$$A\cap B=\left\{n|۱\le n\le ۱۰۰, n=۳۰k\right\} \Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۳$$

$$\Rightarrow |A\cup B|=۱۶+۱۰-۳=۲۳$$

---

۷۳ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge ۲$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

پاسخ: ۱

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{xy}\ge ۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲\ge ۲xy \Leftrightarrow (x-y)^۲\ge ۰$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط ، حکم مسأله درست است. (قسمت الف تمرین ۱ ص ۸)

---

۷۴ معادله هم‌نهشتی $۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

پاسخ: ۱

$$۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow[(\div ۵)]{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x=۱۱k+۷$$

(مشابه سؤال ۱۴ ص ۳۰)

---

۷۵ باقی‌مانده تقسیم $۷^{۳۰}$ بر ۱۵ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

پاسخ: ۱

$$۷^۲=۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۷^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۲۸} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴} ۷^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

(مشابه سوال ۸ و ۹ ص ۲۹)

۷۶	اگر $n \in \mathrm{N}$، $n \mid ۹k+۷$ و $n \mid ۷k+۶$، ثابت کنید $n=۱$ یا $n=۵$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $\begin{matrix} n \mid ۹k+۷ \times (-۷) \\ n \mid ۷k+۶ \end{matrix} \Rightarrow n \mid -۶۳k-۴۹+۶۳k+۵۴ \Rightarrow n \mid ۵ \xrightarrow{n \in \mathrm{N}} n=۱$ یا ۵ (مثال ص ۱۲)	
۷۷	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $۲a+۳$ بر ۸ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹ **پاسخ:** ۱ $a=۴q+۳ \Rightarrow ۲a+۳=۸q+۹=۸(q+۱)+۱=۸q'+۱ \Rightarrow r=۱$ (مشابه مثال ص ۱۴)	
۷۸	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹ **پاسخ:** ۱ الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳) $\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \in \mathrm{Q}^c, \sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰ \notin Q^c$ ب) درست (مسأله ۳ ص ۱۵) $(۲k+۱)^۲-۱=۴k^۲+۴k+۱-۱=۴k(k+۱)=۴\times۲q=۸q$	
۷۹	جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۹x+۱۳y=۷$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸ **پاسخ:** ۱ $۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷, (۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴, ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶) \to ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{(۴,۹)=۱} y \overset{۹}{\equiv} ۴$ $y=۹k+۴, x=-۱۳k-۵$ (ص ۲۹)	
۸۰	ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $\mathrm{ac} \overset{m}{\equiv} \mathrm{bc}$. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸ **پاسخ:** ۱ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid c(a-b) \Rightarrow m \mid \mathrm{ac}-\mathrm{bc} \Rightarrow \mathrm{ac} \overset{m}{\equiv} \mathrm{bc}$ (ص ۱۹)	
۸۱	باقی‌مانده تقسیم $۱۳^{۲۲}$ را بر ۱۷ به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸ **پاسخ:** ۱ $۱۳ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \to ۱۳^۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \to ۱۳^{۲۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{-۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶} r=۱۶$ (ص ۲۹)	
۸۲	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $\left[۲۱a^۲, ۳۵a^۳\right]$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸ **پاسخ:** ۱ $A=۲۱a^۲=۳\times۷\times a^۲, B=۳۵a^۳=۵\times۷\times a^۳ \Rightarrow [A,B]=۱۰۵a^۳$ (ص ۱۷)	

۸۳

اگر عدد طبیعی $a > ۱$، در دو شرط $a|۴k+۹$ و $a|۶k+۱۴$ صدق کند، مقدار a را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸

پاسخ: ۱

$$\begin{matrix} a|۴k+۹ \\ a|۶k+۱۴ \end{matrix} \Rightarrow a|-۶(۴k+۹)+۴(۶k+۱۴) \Rightarrow a|۲ \xrightarrow{a>۱} a=۲$$ (ص ۱۱)

۸۴

به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > ۰$ آن‌گاه $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸

پاسخ: ۱

$$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲-۲a+۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد. (ص ۷)

۸۵

چند عدد طبیعی مانند n به طوری‌که $۱ \leq n \leq ۳۵۰$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور۹۸

پاسخ: ۱

$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲| = |\overline{A_۱ \cup A_۲}| = |S|-|A_۱|-|A_۲|+|A_۱ \cap A_۲|$$

$$= ۳۵۰ - \left[\frac{۳۵۰}{۴}\right] - \left[\frac{۳۵۰}{۶}\right] + \left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right] = ۲۳۴$$ (ص ۸۴)

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$.

۸۶

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر $a|b$ آن‌گاه $[a,b]=|b|$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۸

پاسخ: ۱ درست (ص ۱۳)

۸۷

با تبدیل معادله سیاله خطی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور۹۸

پاسخ: ۱

$$۲x+۵y=۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x=۵k+۲$$

$y=-۲k+۵$ (ص ۲۷)

۸۸

باقی‌مانده تقسیم $(۲۷)^۷+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور۹۸

پاسخ: ۱

$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷ \Rightarrow (۲۷)^۷+۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷+۱۹=۲۰ \Rightarrow (۲۷)^۷+۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

(ص ۲۱)

۸۹

برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq \mathrm{xy} + \mathrm{yz} + \mathrm{xz}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور۹۸

پاسخ: ۱

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq \mathrm{xy} + \mathrm{yz} + \mathrm{xz} \Leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \geq ۲\mathrm{xy} + ۲\mathrm{yz} + ۲\,\mathrm{xz}$$

$$\Leftrightarrow (x^۲ + y^۲ - ۲\,\mathrm{xy}) + (y^۲ + z^۲ - ۲\,\mathrm{yz}) + (x^۲ + z^۲ - ۲\,\mathrm{xz}) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (y-z)^۲ + (x-z)^۲ \geq ۰$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است. (ص ۱۱)

۹۰

جای خالی را پر کنید.

$[a,b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a\,|c, b|\,c$ ۲) $\forall m > ۰, \ldots$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور۹۸

پاسخ: ۱ $\forall m > ۰, a\,|m, b|\,m \Rightarrow c \leq m$

۹۱

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور۹۸

پاسخ: ۱ الف) درست ب) نادرست (ص ۳)

۹۲

جواب عمومی معادله $۴\mathrm{x} \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخ: ۱

$$۴\mathrm{x} \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \rightarrow ۴\mathrm{x} \overset{۵}{\equiv} ۲\,(۰/۲۵) \rightarrow ۴\mathrm{x} \overset{۵}{\equiv} ۲ + ۱۰\,(۰/۲۵) \Rightarrow ۴\mathrm{x} \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳\,(۰/۲۵)$$

(صفحه: ۲۵) $\Rightarrow x = ۵\mathrm{k} + ۳\,(۰/۲۵)$

۹۳

اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری‌که $۵|۴\mathrm{k}+۱$، ثابت کنید: $۲۵|\,۱۶\mathrm{k}^۲ + ۲۸\mathrm{k} + ۶$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} ۵|۴\mathrm{k}+۱ \xrightarrow{()^۲} ۲۵|\,۱۶\mathrm{k}^۲ + ۸\mathrm{k} + ۱ \quad (۰/۵) \\ ۵|۴\mathrm{k}+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|\,۲۰\mathrm{k} + ۵ \quad (۰/۵) \end{cases} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶\mathrm{k}^۲ + ۲۸\mathrm{k} + ۶\,(۰/۲۵)$$

(صفحه : ۱۶)

۹۴

گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید.

(برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ داریم: $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخ: ۱ (صفحه: ۷)

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a\,(۰/۲۵) \Leftrightarrow a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰\,(۰/۲۵) \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

۹۵

ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخ: ۱ فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است (۰/۲۵)

فرض خلف اگر $r+x$ گنگ نباشد (۰/۲۵) بنابراین عددی گویا است از طرفی میدانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است (۰/۲۵) پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in \mathbb{Q}$ و از آنجا (۰/۲۵) $x \in \mathbb{Q}$ که با فرض ما در تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد (۰/۲۵)

روش دوم:

$$\text{گویا} = x = \frac{m}{n}\ ; m \text{ و } n \in \mathbb{Z} \qquad \text{گنگ} = y$$

فرض خلف : $x+y =$ گنگ نیست

$$\Rightarrow x+y = \text{گویا} = \frac{a}{b}\ , a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n} + y = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{\overbrace{an - bm}^{\in \mathbb{Z}}}{\underbrace{bn}_{\in \mathbb{Z}}} = \text{گویا}$$

$\Rightarrow$ تناقض با گنگ بودن y

۹۶

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

حاصل عبارت $\left[۱۲, (۶, ۸)\right]$ برابر .... خواهد شد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخ: ۱ ۱۲

$$[۱۲\ ,\ \cancel{(۶\ ,\ ۸)}] = \underbrace{[۱۲\ ,\ ۲]}_{\text{ک.م.م}} = \frac{۱۲ \times ۲}{\cancel{(۱۲\ ,\ ۲)}} = ۱۲$$

ب.م.م $۶\ ,\ ۸ = ۲$

۹۷

با تبدیل معادله سیاله خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱

$$\underbrace{۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹\ \ (۰/۵) \Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴\ \ (۰/۲۵)$$

$y = ۵k + ۴\ \ (۰/۲۵)$ و $x = -۲k + ۲ (۰/۲۵)$ (صفحه: ۲۵)

۹۸

اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

(۰/۲۵)

$$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱ \rightarrow ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵ \quad (۰/۵)$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنجشنبه را نشان می‌دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

۹۹

اگر باقی‌مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را بدست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱

$$\begin{matrix} m = ۱۳q_۱ + ۲ \\ n = ۱۳q_۲ + ۹ \end{matrix} \; (۰/۵) \; \begin{matrix} ۳m = ۱۳(۳q_۱) + ۶ \\ ۵n = ۱۳(۵q_۲) + ۴۵ \end{matrix} \; (۰/۵) \rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q' + ۳۹ (۰/۲۵)$$

(صفحه‌ی: ۱۴)

$$\rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q'' + ۰ \rightarrow r = ۰ (۰/۲۵)$$

۱
$$A=۲!+۴!+\underbrace{۶!+\ldots+۱۰۰!}_{\text{مضرب ۲ و ۵}}\Rightarrow A=۲!+۴!+۱۰k\,,\ k\in Z$$

$\Rightarrow A\overset{۱۰}{\equiv}۲+۲۴+۰\Rightarrow A\overset{۱۰}{\equiv}۲۶\overset{۱۰}{\equiv}۶$ (ص ۲۹)

۲
$a|b\Rightarrow b=aq,\ q\in Z\Rightarrow |b|=|a|\,|q|$

$q\in Z,\ q\neq ۰\Rightarrow |q|\geq ۱\Rightarrow |a|\,|q|\geq |a|\Rightarrow |b|\geq |a|$ (ص ۱۱)

۳
$a^۲+b^۲\geq -ab\Leftrightarrow a^۲+b^۲+ab\geq ۰\Leftrightarrow ۲a^۲+۲b^۲+۲ab\geq ۰$ (ص ۷)

$\Leftrightarrow a^۲+b^۲+(a^۲+b^۲+۲ab)\geq ۰\Leftrightarrow a^۲+b^۲+(a+b)^۲\geq ۰$ همواره برقرار

۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۵)

۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)

۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)

۷ نادرست - با درنظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل‌ضرب صفر است که گویا می‌شود. (ص ۵)

۸ درست (ص ۳)
$$۲k\times(۲k+۲)+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$$

۹ b (ص ۱۳)

۱۰ ۴ (ص ۱۴)

۱۱
$(۱+۴+۰+۲)x\overset{۹}{\equiv}۱+۱\Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۲\Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}-۷\xrightarrow{(۷,۹)=۱}x\overset{۹}{\equiv}-۱\Rightarrow x=۹k-۱$ (ص ۳۰)

۱۲
$۶۳\overset{۱۶}{\equiv}-۱\Rightarrow ۶۳^{۱۴}\overset{۱۶}{\equiv}۱\Rightarrow A\overset{۱۶}{\equiv}۲\Rightarrow r=۲$ (ص ۲۱)

۱۳
$۷|۲k+۱\Rightarrow\begin{cases}۴۹|۴k^۲+۴k+۱\\ ۴۹|۱۴k+۷\end{cases}\Rightarrow ۴۹|۴k^۲-۱۰k-۶$ (ص ۱۶)

۱۴
$b=۲k,\ b|a+۲\Rightarrow a+۲=bq\Rightarrow a=۲t$

که با فرض سؤال در تناقض است. (ص ۱۶)

۱۵
$۲x^۲+۲xy+y^۲\geq ۴x-۴\Leftrightarrow x^۲+۲xy+y^۲+x^۲-۴x+۴\geq ۰\Leftrightarrow (x+y)^۲+(x-۲)^۲\geq ۰$

این رابطه همواره برقرار است. (ص ۸)

۱۶ الف) نادرست (ص ۵) ب) نادرست (ص ۱۱) ج) درست (ص ۲۵) د) درست (ص ۱۳)

۱۷ $۱۵x \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۱۵x \overset{۱۹}{\equiv} ۴۵ \xrightarrow{(۱۵,۱۹)=۱} x \overset{۱۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۱۹k + ۳$

$\xrightarrow{k=۵} x = ۹۸$ (ص ۲۸)

۱۸ $\begin{cases} a = ۵q_۱ + ۴ \xrightarrow{\times ۴} ۴a = ۲۰q_۱ + ۱۶ \\ a = ۴q_۲ + ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۲۰q_۲ + ۱۵ \end{cases} \xrightarrow{-} a = ۲۰q' - ۱ \Rightarrow a = ۲۰q'' + ۱۹$ (ص ۱۶)

۱۹ $\begin{cases} a|۲m + ۳ \\ a|m + ۷ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} a|۲m + ۳ \\ a|۲m + ۱۴ \end{cases} \Rightarrow a|۱۱ \Rightarrow a = ۱, a = ۱۱$ (ص ۱۱)

۲۰ $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq ۲xy - z^۲ \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy + z^۲ + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (x - y)^۲ + z^۲ + ۱ \geq ۰$

همواره بدیهی است. (ص ۸)

۲۱ چون $(۱۲, ۸)|۲۰$ معادله جواب دارد. (ص ۳۰)

$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow ۴x \overset{۶}{\equiv} ۴ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۳k + ۱$

۲۲ می‌دانیم $۱! \overset{۱۵}{\equiv} ۱$ و $۲! \overset{۱۵}{\equiv} ۲$ و $۳! \overset{۱۵}{\equiv} ۶$ و $۴! \overset{۱۵}{\equiv} ۹$ و $۵! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$ و ... و $۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$ پس داریم: (ص ۲۹)

$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \dots + ۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + ۰ + \dots + ۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$

۲۳ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $۸k + ۱$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم: (ص ۱۶)

$\begin{cases} a^۲ = ۸k + ۱ \\ b^۲ = ۸k' + ۱ \end{cases} \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۵ = ۸k + ۱ + ۸k' + ۱ + ۵ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۵ = ۸k'' + ۷ \Rightarrow r = ۷$

۲۴ $\begin{matrix} a|۶(۵m + ۴) \\ a|۵(۶m + ۵) \end{matrix} \Rightarrow a|۵(۶m + ۵) - ۶(۵m + ۴) \Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱$ (ص ۱۱)

۲۵ $y^۲ + ۱ \geq -۲x(y + x + ۱) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy + x^۲ + ۲x + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (x + ۱)^۲ + (x + y)^۲ \geq ۰$

$\Rightarrow$ این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است (ص ۸ و ۷)

۲۶ الف) $m^۲$ ب) نسبت به هم اول (ص ۱۳)

پ) مینیمال (ص ۴۶) ت) ۲۱ (ص ۳۸)

۲۷ الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۲۸ $۵x + ۳y = ۴۲ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x = ۳k \Rightarrow ۵(۳k) + ۳y = ۴۲ \Rightarrow y = -۵k + ۱۴$

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۴ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۹ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۴ \end{cases}$ (ص ۲۸)

۲۹) عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0$ را بسط می‌دهیم و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم: (ص ۲۲)

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + \dots + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 1 a_0 \Rightarrow A \overset{9}{\equiv} 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{9}{\equiv} a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

۳۰) $\begin{matrix} a = 6q + 3 \\ a = 7q' + 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 7a = 42q + 21 \\ 6a = 42q' + 30 \end{matrix} \Rightarrow a = 42(q - q' - 1) + 33 \Rightarrow r = 33$ (ص ۱۴)

۳۱) $\begin{cases} a \mid 5k + 9 \\ a \mid 8k + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \mid 40k + 72 \\ a \mid 40k + 65 \end{matrix} \Rightarrow a \mid 7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7$ (ص ۱۲)

۳۲) اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشد. در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد.
اما با توجه به فرض مسأله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است.
با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (ص ۶)

۳۳) الف) نادرست، مثال نقض $n = 3$ (ص ۳)

ب) درست، اثبات: $a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$

(ص ۸)

۳۴) فاصله ۱ متر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی $131 = 12 + 3 \times 30 + 29$. از طرفی $131 \overset{7}{\equiv} 5$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنج‌شنبه است. (ص ۲۴)

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

۳۵) $27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (27)^{20} \overset{13}{\equiv} 1, 18 = 13 \times 1 + 5, 18 \overset{13}{\equiv} 5$

$\Rightarrow (27)^{20} + 18 \overset{13}{\equiv} 1 + 5 \Rightarrow r = 6$ (ص ۲۱)

۳۶) $\begin{matrix} 5 \mid 4k + 1 \Rightarrow 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \\ 5 \mid 4k + 1 \Rightarrow 25 \mid 20k + 5 \end{matrix} \xrightarrow{+} 25 \mid 16k^2 + 28k + 6$ (ص ۱۶)

۳۷) $n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$ (ص ۴)

۳۸) الف) نادرست (ص ۱۱) ب) درست (ص ۱۳)
پ) درست (ص ۲۱) ت) نادرست (ص ۱۳)

۳۹ $A=\{۱\le n\le ۲۰۰|n=۴k\}\Rightarrow |A|=\left[\frac{۲۰۰}{۴}\right]=۵۰, B=\{۱\le n\le ۲۰۰|n=۷k\}$

$A\cap B=\{۱\le n\le ۲۰۰|n=۲۸k\}\Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right]=۷$

$|A\cap B'|=|A|-|A\cap B|=۵۰-۷=۴۳$ (ص ۸۳)

۴۰ $۲y\overset{۵}{\equiv}۱۸\xrightarrow{(۲,۵)=۱}y\overset{۵}{\equiv}۹\overset{۵}{\equiv}۴\Rightarrow y=۵k+۴\Rightarrow ۵x+۲(۵k+۴)=۱۸$

$\Rightarrow x=-۲k+۲$ (ص ۲۹)

۴۱ $۴a-۷\overset{۱۰}{\equiv}۳a-۵\Rightarrow a\overset{۱۰}{\equiv}۲\Rightarrow ۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴\Rightarrow r=۴$ (ص ۲۹)

۴۲ طبق الگوریتم تقسیم داریم: $a=۳k$ که بر ۳ بخش‌پذیر است. یا $a=۳k+۱\Rightarrow a+۲=۳(k+۱)$ یا $a=۳k+۲\Rightarrow a+۴=۳(k+۲)$ که در هر دو مورد بر ۳ بخش‌پذیر هستند. (ص ۱۵)

۴۳ $a|۹(۵k+۳)-۵(۹k+۴)\Rightarrow a|۲۷-۲۰\Rightarrow a|۷\xrightarrow{a>۱}a=۷\in \mathrm{P}$ (ص ۱۲)

۴۴ الف) درست (ص ۱۶) ب) نادرست (ص ۱۳) پ) درست (ص ۲۹) ت) نادرست (ص ۲۴)

۴۵ فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است.
فرض خلف: فرض کنیم $r+x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r+x-r\in \mathrm{Q}$ یعنی $x\in \mathrm{Q}$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (ص ۵)

۴۶ $۶x\overset{۷}{\equiv}۱۸۵=۲۳\times۷+۲۴\Rightarrow ۶x\overset{۷}{\equiv}۲۴\xrightarrow{(۶,۷)=۱}x\overset{۷}{\equiv}۴\Rightarrow x=۷k+۴\Rightarrow ۶(۷k+۴)+۷y$

$=۱۸۵\Rightarrow y=-۶k+۲۳$ (ص ۳۰)

۴۷ $a=\mathrm{b}\mathrm{q}+r, ۰\le r<b\Rightarrow a-\mathrm{b}\mathrm{q}=r\Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b\end{cases}\Rightarrow n|a-\mathrm{b}\mathrm{q}\Rightarrow n|r$ (ص ۱۷)

۴۸ $$a=۲k+۱\Rightarrow a^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{ضریب دو عدد صحیح متوالی}}+۱=۴\times۲q+۱=۸q+۱$$

$\Rightarrow r=۱$ (ص ۱۵)

۴۹ فرض خلف: فرض کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\in \mathrm{Q}$. یعنی $۲\alpha\in \mathrm{Q}$. در نتیجه $\alpha\in \mathrm{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (ص ۸)

۵۰ الف) گنگ (ص ۵) ب) $a|\mathrm{mb}$ (ص ۱۰) پ) $|a|$ (ص ۱۳) ت) $a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$ (ص ۲۲)

۵۱ $7x \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow 7x \overset{4}{\equiv} 4\times 5+1 \Rightarrow 7x \overset{4}{\equiv} 21 \Rightarrow \overset{(7,4)=1}{\equiv} x \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow x=4k+3$ (ص ۳۰)

۵۲ $1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{25}\times 9+11 \overset{7}{\equiv} (-1)^{25}\times 9+11 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow r=2$ (ص ۲۱)

۵۳ $p=4k(1), p=4k+1(2), p=4k+2=2(2k+1)(3), p=4k+3(4)$

در حالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود.
(ص ۱۵)

۵۴ $xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \le x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$

گزاره همواره درست (ص ۸)

۵۵ الف) عدد a شمارنده عدد b است. (ص ۹)　　ب) $2m$ (ص ۱۷)

۵۶ الف) درست (ص ۱۷)　　ب) نادرست ($\xleftarrow{\text{مثال نقض}} x=0$) (ص ۸)

۵۷ $8x \overset{12}{\equiv} 20 \overset{12}{\equiv} 32 \xrightarrow{(8,12)=4} x \overset{\frac{12}{4}=3}{\equiv} 4 \Rightarrow x=3k+4$ (ص ۳۰)

۵۸ $38 \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow 38^2 \overset{4}{\equiv} 4 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 38^{36} \overset{4}{\equiv} 0, 19 \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow 38^{36}+19 \overset{4}{\equiv} 3$ (ص ۲۹)

۵۹ $(5a+4, 2a+3)=d \Rightarrow \begin{matrix} d|2a+3 \\ d|5a+4 \end{matrix} \Rightarrow d|-2(5a+4)+5(2a+3) \Rightarrow d|7 \Rightarrow d=1$ یا 7
(ص ۱۶)

۶۰
$a=17q+5$

$b=17q'+3$

$$\Rightarrow 2a-5b = 17\times 2q+10-17\times 5q'-15 = \overbrace{17(2q-5q'-1)}^{k\in Z}+12 = 17k+12 \Rightarrow r=12$$
(ص ۱۴)

۶۱ فرض خلف: $\alpha-\beta$ گویاست. (ص ۸)

$\begin{matrix} \alpha-\beta=m\in Q \\ \alpha+\beta=n\in Q \end{matrix} \Rightarrow 2\alpha=m+n \Rightarrow \alpha=\frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha\in Q$ (تناقض با فرض)

۶۲ الف) نادرست $n=4 \Rightarrow 2^4-1=15 \notin P$ (ص ۳)

ب) درست (ص ۱۳)

پ) درست (ص ۲۵)

۶۳ نادرست (ص ۲۵)

$$an \overset{m}{\equiv} b \rightarrow an = mq + b : \underbrace{an - mq}_{\text{ترکیب خطی a و m مضرب ب.م.م a و m است.}} = b \Rightarrow (a , m) \times k = b \Rightarrow (a , b) \mid b$$

۶۴

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + \dots + b^{n-۱}) \Rightarrow m|a^n - b^n$$

$\Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ (ص ۲۹)

۶۵ $۲x \overset{۵}{\equiv} ۱۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵k + ۲ \Rightarrow y = -۲k + ۳$ (ص ۲۷)

۶۶ $۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵$

رقم یکان برابر ۵ است. (ص ۲۹)

۶۷

$$\left.\begin{array}{l} m = ۱۷q + ۵ (q \in Z) \\ n = ۱۷q' + ۳ (q' \in Z) \end{array}\right\} \Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q') - ۵$$ (ص ۱۴)

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q' - ۱) + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

۶۸ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p = ۶k (۱), p = ۶k + ۱ (۲), p = ۶k + ۲ = ۲(۳k + ۱) (۳)$$

$$p = ۶k + ۳ = ۳(۲k + ۱) (۴), p = ۶k + ۴ = ۲(۳k + ۲) (۵), p = ۶k + ۵ (۶)$$

p در حالات ۱، ۳ و ۵ زوج و در ۴ بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود. (ص ۱۵)

۶۹

$$\left.\begin{array}{l} a|۳n + ۴ \\ a|۲n + ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow a|-۲(۳n + ۴) + ۳(۲n + ۳) \Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \xrightarrow{a \in N} a = ۱$$ (ص ۱۱)

۷۰

$$\frac{a + b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲ \geq ۰$$

نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (ص ۷)

۷۱ الف) نادرست (ص ۳) ب) درست (ص ۴) پ) نادرست (ص ۷) ت)

نادرست (ص ۳)

۷۲ $A=\left\{n\in \mathrm{N}\mid ۱\le n\le ۱۰۰, n=۶k\right\}\Rightarrow |A|=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۶$ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)

$B=\left\{n\in \mathrm{N}\mid ۱\le n\le ۱۰۰, n=۱۰k\right\}\Rightarrow |B|=\left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right]=۱۰$

$A\cap B=\left\{n\mid ۱\le n\le ۱۰۰, n=۳۰k\right\}\Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۳$

$\Rightarrow |A\cup B|=۱۶+۱۰-۳=۲۳$

۷۳ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge ۲\Leftrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{\mathrm{xy}}\ge ۲\Leftrightarrow x^۲+y^۲\ge ۲\mathrm{xy}\Leftrightarrow (x-y)^۲\ge ۰$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط ، حکم مسأله درست است. (قسمت الف تمرین ۱ ص ۸)

۷۴ $۲\overset{۱۱}{\equiv}۳۵\Rightarrow ۵x\overset{۱۱}{\equiv}۳۵\xrightarrow[(\div ۵)]{(۵,۱۱)=۱} x\overset{۱۱}{\equiv}۷\Rightarrow x=۱۱k+۷$

(مشابه سؤال ۱۴ ص ۳۰)

۷۵ $۷^۲=۴۹\overset{۱۵}{\equiv}۴\Rightarrow ۷^۴\overset{۱۵}{\equiv}۱۶\overset{۱۵}{\equiv}۱\Rightarrow ۷^{۲۸}\overset{۱۵}{\equiv}۱\xrightarrow{\times ۷^۲\overset{۱۵}{\equiv}۴} ۷^{۳۰}\overset{۱۵}{\equiv}۴$

(مشابه سوال ۸ و ۹ ص ۲۹)

۷۶ $\begin{matrix} n\mid ۹k+۷\times(-۷) \\ n\mid ۷k+۶ \end{matrix}\Rightarrow n\mid -۶۳k-۴۹+۶۳k+۵۴\Rightarrow n\mid ۵\xrightarrow{n\in \mathrm{N}} n=۱$ یا ۵ (مثال ص ۱۲)

۷۷ $a=۴q+۳\Rightarrow ۲a+۳=۸q+۹=۸(q+۱)+۱=۸q'+۱\Rightarrow r=۱$ (مشابه مثال ص ۱۴)

۷۸ الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳)

$\sqrt{۲},-\sqrt{۲}\in \mathrm{Q}^c, \sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰\notin Q^c$

ب) درست (مسأله ۳ ص ۱۵)

$(۲k+۱)^۲-۱=۴k^۲+۴k+۱-۱=۴k(k+۱)=۴\times ۲q=۸q$

۷۹ $۱۳y\overset{۹}{\equiv}۷, (۱۳\overset{۹}{\equiv}۴, ۷\overset{۹}{\equiv}۱۶)\rightarrow ۴y\overset{۹}{\equiv}۱۶\xrightarrow{(۴,۹)=۱} y\overset{۹}{\equiv}۴$

$y=۹k+۴, x=-۱۳k-۵$ (ص ۲۹)

۸۰ $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\mid a-b\Rightarrow m\mid c(a-b)\Rightarrow m\mid \mathrm{ac}-\mathrm{bc}\Rightarrow \mathrm{ac}\overset{m}{\equiv}\mathrm{bc}$ (ص ۱۹)

۸۱ $۱۳\overset{۱۷}{\equiv}-۴\rightarrow ۱۳^۲\overset{۱۷}{\equiv}۱۶\overset{۱۷}{\equiv}-۱\rightarrow ۱۳^{۲۲}\overset{۱۷}{\equiv}-۱\xrightarrow{-۱\overset{۱۷}{\equiv}۱۶} r=۱۶$ (ص ۲۹)

۸۲ $A=۲۱a^۲=۳\times ۷\times a^۲, B=۳۵a^۳=۵\times ۷\times a^۳\Rightarrow [A,B]=۱۰۵a^۳$ (ص ۱۷)

۸۳
$$\begin{matrix} a|۴k+۹ \\ a|۶k+۱۴ \end{matrix} \Rightarrow a|-۶(۴k+۹)+۴(۶k+۱۴) \Rightarrow a|۲ \xrightarrow{a>۱} a=۲$$ (ص ۱۱)

۸۴
$$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲-۲a+۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد. (ص ۷)

۸۵
$$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲| = |\overline{A_۱ \cup A_۲}| = |S|-|A_۱|-|A_۲|+|A_۱ \cap A_۲|$$
$$= ۳۵۰ - \left[\frac{۳۵۰}{۴}\right] - \left[\frac{۳۵۰}{۶}\right] + \left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right] = ۲۳۴$$ (ص ۸۴)

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$.

۸۶ درست (ص ۱۳)

۸۷
$$۲x+۵y=۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x=۵k+۲$$
$$y=-۲k+۵$$ (ص ۲۷)

۸۸
$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷ \Rightarrow (۲۷)^۷+۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷+۱۹=۲۰ \Rightarrow (۲۷)^۷+۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$
(ص ۲۱)

۸۹
$$x^۲+y^۲+z^۲ \geq \text{xy}+\text{yz}+\text{xz} \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲ \geq ۲\text{xy}+۲\text{yz}+۲\,\text{xz}$$
$$\Leftrightarrow (x^۲+y^۲-۲\,\text{xy})+(y^۲+z^۲-۲\,\text{yz})+(x^۲+z^۲-۲\,\text{xz}) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(y-z)^۲+(x-z)^۲ \geq ۰$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است. (ص ۱۱)

۹۰ $\forall m>۰, a\,|m, b|\,m \Rightarrow c \leq m$

۹۱ الف) درست ب) نادرست (ص ۳)

۹۲
$$۴\text{x} \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \rightarrow ۴\text{x} \overset{۵}{\equiv} ۲\ (۰/۲۵) \rightarrow ۴\text{x} \overset{۵}{\equiv} ۲+۱۰\ (۰/۲۵) \Rightarrow ۴\text{x} \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳\ (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow x=۵\text{k}+۳\ (۰/۲۵)$$
(صفحه: ۲۵)

۹۳
$$\begin{cases} ۵|۴\text{k}+۱ \overset{()^۲}{\rightarrow} ۲۵|\,۱۶\text{k}^۲+۸\text{k}+۱ \quad (۰/۵) \\ ۵|۴\text{k}+۱ \overset{\times ۵}{\rightarrow} ۲۵|\,۲۰\text{k}+۵ \quad (۰/۵) \end{cases} \overset{+}{\rightarrow} ۲۵|۱۶\text{k}^۲+۲۸\text{k}+۶\ (۰/۲۵)$$ (صفحه : ۱۶)

۹۴ (صفحه: ۷)
$$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱ \geq ۲\text{a}\ (۰/۲۵) \Leftrightarrow a^۲+۱-۲\text{a} \geq ۰\ (۰/۲۵) \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

۹۵ فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است (۰/۲۵)
فرض خلف اگر $r+x$ گنگ نباشد (۰/۲۵) بنابراین عددی گویا است از طرفی میدانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است (۰/۲۵) پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in \mathrm{Q}$ و از آنجا (۰/۲۵) $x \in \mathrm{Q}$ که با فرض ما در تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد (۰/۲۵)

روش دوم:

$$\text{گویا} = x = \frac{m}{n}\ ; m \text{ و } n \in \mathrm{Z} \qquad \text{گنگ} = y$$

گنگ نیست $x+y=$: فرض خلف

$$\Rightarrow x+y=\text{گویا}=\frac{a}{b}\ , a,b\in \mathrm{Z} \Rightarrow \frac{m}{n}+y=\frac{a}{b} \Rightarrow y=\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\frac{\overbrace{\mathrm{an-bm}}^{\in \mathrm{Z}}}{\underbrace{\mathrm{bn}}_{\in \mathrm{Z}}}=\text{گویا}$$

$\Rightarrow$ y تناقض با گنگ بودن

۹۶ ۱۲

$$[۱۲\ ,\ \cancel{(۶,۸)}]=\underbrace{[۱۲\ ,\ ۲]}_{\text{ک.م.م}}=\frac{۱۲\times ۲}{\cancel{(۱۲,۲)}}=۱۲$$

ب.م.م ۶ , ۸ = ۲

۹۷
$$\underbrace{۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \quad (۰/۵) \Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه: ۲۵)
$$y=۵\mathrm{k}+۴\ \ (۰/۲۵) \quad \text{و}\ x=-۲\mathrm{k}+۲(۰/۲۵)$$

۹۸ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

(۰/۲۵)

$$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱ \to ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵ \qquad (۰/۵)$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنجشنبه را نشان می‌دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

۹۹
$$\begin{cases} m=۱۳\mathrm{q}_۱+۲ \\ n=۱۳\mathrm{q}_۲+۹ \end{cases} (۰/۵) \quad \begin{cases} ۳\mathrm{m}=۱۳(۳\mathrm{q}_۱)+۶ \\ ۵\mathrm{n}=۱۳(۵\mathrm{q}_۲)+۴۵ \end{cases} (۰/۵) \to ۵\mathrm{n}-۳\mathrm{m}=۱۳\mathrm{q}'+۳۹(۰/۲۵)$$

(صفحه‌ی: ۱۴)

$$\to ۵\mathrm{n}-۳\mathrm{m}=۱۳\mathrm{q}''+۰ \to r=۰(۰/۲۵)$$

پاسخنامه کلیدی

۴	**۱**	۲	۳	۴
۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	۱	**۲**	۳	۴