



p30konkor.com

عنوان آزمون : گسسته ۱۲ فصل ۱

زمان آزمون :

تاریخ برگزاری

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	رقم یکان عدد $A = 100! + 99! + \dots + 2! + 1!$ را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۲	اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت ثابت کنید: $ a \leq b $.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۳	ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آنها کمتر نیست.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۴	کدام یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟ $6x \equiv 11 \pmod{9}$ (۱) $2x \equiv 3 \pmod{2}$ (۲) $5x \equiv 10 \pmod{5}$ (۳) $3x \equiv 10 \pmod{7}$ (۴)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۵	باقی‌مانده تقسیم عدد $(7^{100} - 2^{100} - 9^{100})$ بر ۱۴ کدام است؟ صفر (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۶	عدد ۱۴۰۲ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟ [۵] (۱) [۲] (۲) [۰] (۳) [۱] (۴)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۷	چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید. - حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۸	چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید. - با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۹	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر a, b, c اعدادی طبیعی باشند که $a b$ و $b c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۱۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر k عددی صحیح باشد، باقی مانده تقسیم $۳۰۰ - ۱۹k$ بر ۱۹ برابر با است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۱۱	معادله هم‌نهشتی $۱۱ \equiv ۱۴۰۲x^9$ را حل کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۲	باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۶۳^{۱۴} + ۱$ را بر ۱۶ به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۳	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $۱ + ۲k \mid ۷$ ، ثابت کنید: $۴۹ \mid ۴k^2 - ۱۰k - ۶$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۴	به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $۲ \mid a + b$ ، آن‌گاه b نیز عددی فرد است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۵	برای هر دو عدد حقیقی x و y ، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $۴x^2 + ۲xy + y^2 \geq ۴x - ۴$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۶	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) برای اعداد صحیح a, b و c که $a \neq ۰$ ، اگر $a \mid b + c$ آن‌گاه $a \mid b$ یا $a \mid c$. ج) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$. د) اگر داشته باشیم $(a, b) = ۱$ آن‌گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۷	در معادله سیاله $۱۵x + ۱۹y = ۷$ ، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه‌حل)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۸	باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه‌حل)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۹	اگر $a \mid ۲m + ۳$ و $a \mid m + ۷$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۲۰	اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۲۱	معادله همنهشتی $10 \equiv x^6$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۲	باقیمانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 20!$ بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل می‌باشد.)
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۳	اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^5 + b^5 + 5)$ را بر ۸ بیابید.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۴	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m + 5)$ و $(5m + 6)$ بر a بخشپذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۵	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: «برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $(y^2 + 1) \geq -2x(y + x + 1)$ »
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۶	در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید. الف) حاصل (m^5, m^3, m^2) برابر با است. ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم a و b هستند. پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر می‌نامیم. ت) تعداد یال‌های گراف K_7 برابر است.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۷	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) اگر $a b + c$ آنگاه $a b$ یا $a c$. پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۸	دانش‌آموز در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.) این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۳۹	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰
۴۰	معادله سیاله $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰
۴۱	اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰
۴۲	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰
۴۳	اگر $a > 1$ ، $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰
۴۴	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a b$ و m, n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آنگاه $a^m b^n$. ب) اگر $a b$ آنگاه $(a, b) = a$. پ) اگر $a \equiv b^m$ باشد، آنگاه باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی اند. ت) منظور از حل معادله هم نهشتی، پیدا کردن همه جواب های حقیقی است که در معادله $ax \equiv b^m$ صدق کند. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰
۴۵	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰
۴۶	معادله سیاله $6x + 7y = 185$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰
۴۷	اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰
۴۸	ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰
۴۹	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۵۰	<p>عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ / گویا) است.</p> <p>ب) اگر دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a b$، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a mb) / (ma b)$.</p> <p>پ) اگر $a b$ آن گاه ب. م. م دو عدد a و b برابر با $(a b)$ است.</p> <p>ت) اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) = d$ آن گاه رابطه $\left(a \equiv b / a \equiv \frac{m}{d} b\right)$ برقرار خواهد بود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۱	<p>معادله $1 \equiv x^4$ را حل کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۵۲	<p>باقی مانده تقسیم عدد $11 + 9 \times (1000)^{25}$ را بر ۷ بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۵۳	<p>ثابت کنید اگر: $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۵۴	<p>به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آنها است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۵۵	<p>جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.</p> <p>الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آن گاه عدد شمارنده عدد است.</p> <p>ب) m عددی صحیح است. حاصل $(m^2, 6m)$ برابر با است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۵۶	<p>درست یا نادرست بودن گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.</p> <p>ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۵۷	<p>معادله هم نهشتی $20 \equiv x^{12}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۵۸	<p>باقی مانده تقسیم $(38^{36} + 19)$ را بر ۴ به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۵۹	<p>اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(3 + 2a, 4 + 5a)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>

۶۰	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲a - ۵b)$ بر ۱۷ را بیابید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹
۶۱	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹
۶۲	گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است. ب) برای دو عدد طبیعی a و b ، اگر $a b$ آن‌گاه $[a, b] = b $. پ) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b) m$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹
۶۳	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b) m$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸
۶۴	فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹
۶۵	معادله سیاله $۱۹ = ۵y + ۲x$ را حل کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹
۶۶	رقم یکان عدد $(۷ + ۲^{۱۱})$ را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹
۶۷	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹
۶۸	ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹
۶۹	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a ۳n + ۴$ و $a ۲n + ۳$. نشان دهید $a = ۱$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹
۷۰	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۷۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.</p> <p>ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$.</p> <p>پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.</p> <p>ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p>
۷۲	<p>در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \leq n \leq 100$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۷۳	<p>اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۷۴	<p>معادله هم نهشتی $x^{11} \equiv 2^5$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۷۵	<p>باقی مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۷۶	<p>اگر $n \in \mathbb{N}$، $n 9k + 7$ و $n 7k + 6$، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۷۷	<p>اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $3a + 2$ بر ۸ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۷۸	<p>گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.</p> <p>الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.</p> <p>ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۷۹	<p>جواب های عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>
۸۰	<p>ثابت کنید می توان دو طرف یک رابطه هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \equiv b^m$ آن گاه $ac \equiv bc^m$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>
۸۱	<p>باقی مانده تقسیم 13^{22} بر ۱۷ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>

۸۲	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸
۸۳	اگر عدد طبیعی $a > 1$ ، در دو شرط $a \mid 6k + 14$ و $a \mid 4k + 9$ صدق کند، مقدار a را بیابید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸
۸۴	به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آن گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸
۸۵	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشد.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸
۸۶	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a \mid b$ آن گاه $[a, b] = b $.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸
۸۷	با تبدیل معادله سیاله خطی $2000x + 5000y = 29000$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله را بیابید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸
۸۸	باقی مانده تقسیم $19 + (27)^y$ را بر ۱۳ بیابید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸
۸۹	برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸
۹۰	جای خالی را پر کنید. اگر $[a, b] = c$ و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند: (۱) $a \mid c, b \mid c$ (۲) $\forall m > 0, \dots$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸
۹۱	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸
۹۲	جواب عمومی معادله $17 \equiv 5x$ را به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

۹۳	<p>اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $۵ ۴k + ۱$، ثابت کنید: $۶ + ۲۸k + ۱۶k^۲$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل</p>
۹۴	<p>گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید.</p> <p>(برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ داریم: $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل</p>
۹۵	<p>ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل</p>
۹۶	<p>در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>حاصل عبارت $[۱۲, (۶, ۸)]$ برابر خواهد شد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل</p>
۹۷	<p>با تبدیل معادله سیاله خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۹۸	<p>اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۹۹	<p>اگر باقی‌مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را بدست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>

$$A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100! \Rightarrow A = 2! + 4! + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

مضرب ۲ و ۵

$$\Rightarrow A \equiv 2 + 24 + 0 \Rightarrow A \equiv 26 \equiv 6 \pmod{10} \quad (\text{ص ۲۹})$$

$$a|b \Rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| = |a| |q|$$

$$q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow |a| |q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a| \quad (\text{ص ۱۱})$$

$$a^2 + b^2 \geq -ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4ab \geq 0 \quad (\text{ص ۷})$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 + 2ab) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 \geq 0 \quad \text{همواره برقرار}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۵)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)

۷ نادرست - با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل ضرب صفر است که گویا می شود. (ص ۵)

$$2k \times (2k + 2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2$$

درست (ص ۳)

b (ص ۱۳)

۴ (ص ۱۴)

$$(1 + 4 + 0 + 2)x \equiv 1 + 1 \Rightarrow 7x \equiv 2 \Rightarrow 7x \equiv -5 \xrightarrow{(7,9)=1} x \equiv -1 \Rightarrow x = 9k - 1 \quad (\text{ص ۳۰})$$

$$6^3 \equiv -1 \Rightarrow 6^{314} \equiv 1 \Rightarrow A \equiv 2 \Rightarrow r = 2 \quad (\text{ص ۲۱})$$

$$7|2k + 1 \Rightarrow \begin{cases} 49|4k^2 + 4k + 1 \\ 49|14k + 7 \end{cases} \Rightarrow 49|4k^2 - 10k - 6 \quad (\text{ص ۱۶})$$

$$b = 2k, b|a + 2 \Rightarrow a + 2 = bq \Rightarrow a = 2t$$

که با فرض سؤال در تناقض است. (ص ۱۶)

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

این رابطه همواره برقرار است. (ص ۸)

۱۶ الف) نادرست (ص ۵) ب) نادرست (ص ۱۱) ج) درست (ص ۲۵) د)

درست (ص ۱۳)

$$15x \equiv 7 \Rightarrow 15x \equiv 45 \xrightarrow{(15,19)=1} x \equiv 3 \Rightarrow x = 19k + 3$$

$$\xrightarrow{k=5} x = 98 \text{ (ص ۲۸)}$$

$$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \xrightarrow{-} a = 20q' - 1 \Rightarrow a = 20q'' + 19 \text{ (ص ۱۶)}$$

$$\begin{cases} a | 2m + 3 \\ a | m + 7 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a | 2m + 3 \\ a | 2m + 14 \end{cases} \Rightarrow a | 11 \Rightarrow a = 1, a = 11 \text{ (ص ۱۱)}$$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + z^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + z^2 + 1 \geq 0$$

همواره بدیهی است. (ص ۸)

چون $20 \mid (12, 8)$ معادله جواب دارد. (ص ۳۰)

$$4x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 4 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1$$

می‌دانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و ... $200! \equiv 0$ پس داریم: (ص ۲۹)

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 3$$

می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ می‌باشد ($k \in \mathbb{Z}$) پس داریم: (ص ۱۶)

$$\begin{cases} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7 \Rightarrow r = 7$$

$$\frac{a | 6(5m + 4)}{a | 5(6m + 5)} \Rightarrow a | 5(6m + 5) - 6(5m + 4) \Rightarrow a | 1 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (ص ۱۱)}$$

$$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0$$

\Rightarrow (ص ۸ و ۷) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است

ب) نسبت به هم اول (ص ۱۳)

ت) ۲۱ (ص ۳۸)

الف) m^2 (ص ۲۶)

پ) مینیمال (ص ۱۴۶)

ت) درست

پ) نادرست

ب) نادرست

الف) درست (ص ۲۷)

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k \Rightarrow 5(5k) + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k + 14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}; \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (ص ۲۸)}$$

عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ را بسط می‌دهیم و در هم‌نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم: (ص ۲۲)

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 1 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

$$a = 4q + 3 \Rightarrow 4a = 16q + 12 \Rightarrow a = 4(4q - q' - 1) + 33 \Rightarrow r = 33 \text{ (ص ۱۴)}$$

$$a = 4q' + 5 \Rightarrow 4a = 16q' + 20 \Rightarrow 4a = 16q' + 30$$

$$\begin{cases} a | 5k + 9 \\ a | 8k + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a | 40k + 72 \\ a | 40k + 65 \end{cases} \Rightarrow a | 7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7 \text{ (ص ۱۲)}$$

اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشد. در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد. اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (ص ۶)

الف) نادرست، مثال نقض $n = 3$ (ص ۳)

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k^2 + 1$$

ب) درست، اثبات: (ص ۸)

فاصله ۱ متر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی

$$131 = 12 + 3 \times 30 + 29. \text{ از طرفی } 5 \equiv 131 \pmod{5}. \text{ بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است. (ص ۲۴)}$$

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (27)^{20} \equiv 1^{20} \pmod{13}, 18 = 13 \times 1 + 5, 18 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow (27)^{20} + 18 \equiv 1 + 5 \pmod{13} \Rightarrow r = 6 \text{ (ص ۲۱)}$$

$$5 | 4k + 1 \Rightarrow 25 | 16k^2 + 8k + 1 \xrightarrow{+} 25 | 16k^2 + 28k + 6 \text{ (ص ۱۶)}$$

$$5 | 4k + 1 \Rightarrow 25 | 20k + 5$$

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1 \text{ (ص ۴)}$$

ب) درست (ص ۱۳)

الف) نادرست (ص ۱۱)

ت) نادرست (ص ۱۳)

پ) درست (ص ۲۱)

$$A = \{1 \leq n \leq 200 | n = 4k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 7k\}$$

۳۹

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 28k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7$$

$$|A \cap B^c| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43 \text{ (ص ۸۳)}$$

$$2y \stackrel{(2,5)=1}{\equiv} 18 \Rightarrow y \stackrel{5}{\equiv} 9 \stackrel{4}{\equiv} 4 \Rightarrow y = 5k + 4 \Rightarrow 5x + 2(5k + 4) = 18$$

۴۰

$$\Rightarrow x = -2k + 2 \text{ (ص ۲۹)}$$

$$4a - 7 \stackrel{10}{\equiv} 3a - 5 \Rightarrow a \stackrel{10}{\equiv} 2 \Rightarrow 9a + 6 \stackrel{10}{\equiv} 24 \stackrel{10}{\equiv} 4 \Rightarrow r = 4 \text{ (ص ۲۹)}$$

۴۱

طبق الگوریتم تقسیم داریم: $a = 3k$ که بر ۳ بخش پذیر است. یا $a = 3k + 1 \Rightarrow a + 2 = 3(k + 1)$

۴۲

که در هر دو مورد بر ۳ بخش پذیر هستند. (ص ۱۵)

$$a | 9(5k + 3) - 5(9k + 4) \Rightarrow a | 27 - 20 \Rightarrow a | 7 \xrightarrow{a > 1} a = 7 \in P \text{ (ص ۱۲)}$$

۴۳

(ت

(پ درست (ص ۲۹)

(ب نادرست (ص ۱۳)

(الف درست (ص ۱۶)

۴۴

(نادرست (ص ۲۴)

فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است.

۴۵

فرض خلف: فرض کنیم $r + x$ گویا باشد. می دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r + x - r \in \mathbb{Q}$ یعنی

$x \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود. (ص ۵)

$$6x \stackrel{7}{\equiv} 185 = 23 \times 7 + 24 \Rightarrow 6x \stackrel{7}{\equiv} 24 \xrightarrow{(6,7)=1} x \stackrel{7}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 7k + 4 \Rightarrow 6(7k + 4) + 7y$$

۴۶

$$= 185 \Rightarrow y = -6k + 23 \text{ (ص ۳۰)}$$

$$a = bq + r, 0 \leq r < b \Rightarrow a - bq = r \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow n|a - bq \Rightarrow n|r \text{ (ص ۱۷)}$$

۴۷

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$$

۴۸

ضرب دو عدد صحیح متوالی

$$\Rightarrow r = 1 \text{ (ص ۱۵)}$$

فرض خلف: فرض کنیم $\alpha - \beta$ گویا باشد. می دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in \mathbb{Q}$.

۴۹

یعنی $2\alpha \in \mathbb{Q}$. در نتیجه $\alpha \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود.

(ص ۸)

$$a \stackrel{\frac{m}{d}}{\equiv} b \text{ (ت)}$$

$$(پ) |a| \text{ (ص ۱۳)}$$

$$(ب) a | mb \text{ (ص ۱۰)}$$

$$(الف) \text{ گنگ (ص ۵)}$$

۵۰

(ص ۲۲)

$$\forall x \equiv 1 \Rightarrow \forall x \equiv 4 \times 5 + 1 \Rightarrow \forall x \equiv 21 \Rightarrow \stackrel{(\forall, \exists)=1}{=} x \equiv 3 \Rightarrow x = 4k + 3 \text{ (ص ۳۰)}$$

۵۱

$$1000 \equiv -1 \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \Rightarrow r = 2 \text{ (ص ۲۱)}$$

۵۲

$$p = 4k(1), p = 4k + 1(2), p = 4k + 2 = 2(2k + 1)(3), p = 4k + 3(4)$$

۵۳

در حالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود. (ص ۱۵)

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

۵۴

گزاره همواره درست (ص ۸)

(ب) m (ص ۱۷)

(الف) عدد a شمارنده عدد b است. (ص ۹)

۵۵

(ب) نادرست (مثال نقض $x = 0$) (ص ۸)

(الف) درست (ص ۱۷)

۵۶

$$8x \equiv 20 \equiv 32 \xrightarrow{(\wedge, 12)=4} x \equiv 5 \xRightarrow{\frac{12}{4}=3} x = 3k + 4 \text{ (ص ۳۰)}$$

۵۷

$$38 \equiv 2 \Rightarrow 38^2 \equiv 4 \equiv 0 \Rightarrow 38^{2^6} \equiv 0, 19 \equiv 3 \Rightarrow 38^{2^6} + 19 \equiv 3 \text{ (ص ۲۹)}$$

۵۸

$$(5a + 4, 2a + 3) = d \Rightarrow \begin{matrix} d|2a+3 \\ d|5a+4 \end{matrix} \Rightarrow d|-2(5a+4) + 5(2a+3) \Rightarrow d|7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

۵۹

(ص ۱۶)

$$a = 17q + 5$$

$$b = 17q' + 3$$

۶۰

$$\Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q' - 15 = 17(2q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12 \text{ (ص ۱۴)}$$

فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست. (ص ۸)

۶۱

$$\begin{matrix} \alpha - \beta = m \in \mathbb{Q} \\ \alpha + \beta = n \in \mathbb{Q} \end{matrix} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \text{ (تناقض با فرض)}$$

(الف) نادرست $n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 \notin P$ (ص ۳)

۶۲

(ب) درست (ص ۱۳)

(پ) درست (ص ۲۵)

$$an \stackrel{m}{=} b \rightarrow an = mq + b : an - mq = b \Rightarrow (a, m) \times k = b \Rightarrow (a, b) | b$$

ترکیب خطی a و m مضرب ب.م.م a و m است.

$$a \stackrel{m}{=} b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m|a^n - b^n$$

$\Rightarrow a^n \stackrel{m}{=} b^n$ (ص ۲۹)

$$2x \stackrel{\Delta}{=} 19 \stackrel{\Delta}{=} 4 \xrightarrow{(2, \Delta)=1} x \stackrel{\Delta}{=} 2 \Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = -2k + 3$$
 (ص ۲۷)

$$2^5 \stackrel{10}{=} 2 \Rightarrow 2^{10} \stackrel{10}{=} 2^2 \Rightarrow 2^{11} \stackrel{10}{=} 8 \Rightarrow 2^{11} + 7 \stackrel{10}{=} 15 \stackrel{10}{=} 15$$

رقم یکان برابر ۵ است. (ص ۲۹)

$$m = 17q + 5 (q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5$$
 (ص ۱۴)
 $n = 17q' + 3 (q' \in \mathbb{Z})$
 $\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \Rightarrow r = 12$

هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p = 6k(1), p = 6k + 1(2), p = 6k + 2 = 2(3k + 1)(3)$$

$$p = 6k + 3 = 3(2k + 1)(4), p = 6k + 4 = 2(3k + 2)(5), p = 6k + 5(6)$$

p در حالات ۱، ۳ و ۵ زوج و در ۴ بر ۳ بخش پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود. (ص ۱۵)

$$a|3n + 4 \Rightarrow a|-2(3n + 4) + 3(2n + 3) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1$$
 (ص ۱۱)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (ص ۷)

الف) نادرست (ص ۳) ب) درست (ص ۱۴) پ) نادرست (ص ۷) ت) نادرست (ص ۳)

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16 \text{ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)}$$

۷۲

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$

$$A \cap B = \{n \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

۷۳

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است. (قسمت الف تمرین ۱ ص ۸)

$$2 \equiv 35 \Rightarrow 5x \equiv 35 \xrightarrow[(\div 5)]{(5,11)=1} x \equiv 7 \Rightarrow x = 11k + 7$$

۷۴

(مشابه سؤال ۱۴ ص ۳۰)

$$7^2 = 49 \equiv 4 \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7^2 \equiv 4} 7^{30} \equiv 4$$

۷۵

(مشابه سوال ۸ و ۹ ص ۲۹)

$$\frac{n|9k + 7 \times (-7)}{n|7k + 6} \Rightarrow n|-63k - 49 + 63k + 54 \Rightarrow n|5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } 5 \text{ (مثال ص ۱۲)}$$

۷۶

$$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1 \text{ (مشابه مثال ص ۱۴)}$$

۷۷

الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳)

۷۸

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c, \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^c$$

ب) درست (مسئله ۳ ص ۱۵)

$$(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2q = 8q$$

$$13y \equiv 7, (13 \equiv 4, 7 \equiv 16) \rightarrow 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \equiv 4$$

۷۹

$$y = 9k + 4, x = -13k - 5 \text{ (ص ۲۹)}$$

$$a \equiv^m b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv^m bc \text{ (ص ۱۹)}$$

۸۰

$$13 \equiv -4 \rightarrow 13^2 \equiv 16 \equiv -1 \rightarrow 13^{22} \equiv -1 \xrightarrow{-1 \equiv 16} r = 16 \text{ (ص ۲۹)}$$

۸۱

$$A = 21a^7 = 3 \times 7 \times a^7, B = 25a^7 = 5 \times 5 \times a^7 \Rightarrow [A, B] = 105a^7 \text{ (ص ۱۷)}$$

۸۲

$$a|4k+9 \Rightarrow a|-6(4k+9)+6(4k+14) \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a>1} a=2 \text{ (ص ۱۱)}$$

۸۳

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

۸۴

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد. (ص ۷)

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

۸۵

$$= 350 - \left[\frac{350}{4} \right] - \left[\frac{350}{6} \right] + \left[\frac{350}{12} \right] = 234 \text{ (ص ۸۴)}$$

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left[\frac{n}{k} \right]$

درست (ص ۱۳) ۸۶

$$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \equiv 29 \Rightarrow 2x \equiv 4 \Rightarrow x = 5k + 2$$

۸۷

$$y = -2k + 5 \text{ (ص ۲۷)}$$

$$27 \equiv 1 \Rightarrow (27)^3 \equiv 1^3 \Rightarrow (27)^3 + 19 \equiv 1^3 + 19 = 20 \Rightarrow (27)^3 + 19 \equiv 7$$

۸۸

(ص ۲۱)

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

۸۹

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است. (ص ۱۱)

$$\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m \quad 90$$

(ب) نادرست (ص ۳)

الف) درست ۹۱

$$4x \equiv 17 \rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{25} \rightarrow 4x \equiv 2 + 10 \pmod{25} \Rightarrow 4x \equiv 12 \xrightarrow{(4,25)=1} x \equiv 3 \pmod{25}$$

۹۲

$$\Rightarrow x = 5k + 3 \pmod{25} \text{ (صفحه: ۲۵)}$$

$$\begin{cases} 5|4k+1 \xrightarrow{0} 25|16k^2+8k+1 \pmod{5} \\ 25|16k^2+8k+1 \xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6 \pmod{25} \text{ (صفحه: ۱۶)} \\ 5|4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25|20k+5 \pmod{5} \end{cases}$$

۹۳

(صفحه: ۷) ۹۴

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \pmod{25} \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \pmod{25} \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است ($۰/۲۵$)
 فرض خلف اگر $r + x$ گنگ نباشد ($۰/۲۵$) بنابراین عددی گویا است از طرفی میدانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است
 پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r + x - r \in \mathbb{Q}$ و از آنجا ($۰/۲۵$) $x \in \mathbb{Q}$ که با فرض ما در
 تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد ($۰/۲۵$)
 روش دوم:

$$\text{گویا} = x = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}$$

گنگ نیست $x + y$: فرض خلف

$$\text{گنگ} = y$$

$$\Rightarrow x + y = \text{گویا} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n} + y = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{\overbrace{an - bm}^{\in \mathbb{Z}}}{\underbrace{bn}_{\in \mathbb{Z}}} = \text{گویا}$$

$\Rightarrow y$ با گنگ بودن y تناقض

$$[12, \cancel{(6, 8)}] = [12, 2] = \frac{12 \times 2}{\cancel{(12, 2)}} = 12$$

ب.م.م. ۶، ۸ = ۲ م.م.ک

$$\underbrace{2y \equiv 18}_{(0/25)} \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9 \quad (0/5) \Rightarrow y \equiv 9 \equiv 4 \quad (0/25)$$

$$y = 5k + 4 \quad (0/25) \quad \text{و} \quad x = -2k + 2 \quad (0/25) \quad (\text{صفحه: } ۲۵)$$

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

($۰/۲۵$)

$$29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \rightarrow 131 \equiv 5 \quad (0/5)$$

(صفحه ۲۴)

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد. ($۰/۲۵$)

$$\begin{aligned} m &= 13q_1 + 2 \quad (0/5) & 3m &= 13(3q_1) + 6 \quad (0/5) \rightarrow 5n - 3m = 13q' + 39 \quad (0/25) \\ n &= 13q_2 + 9 & 5n &= 13(5q_2) + 45 \end{aligned}$$

(صفحه‌ی: ۱۴)

$$\rightarrow 5n - 3m = 13q'' + 0 \rightarrow r = 0 \quad (0/25)$$

۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

