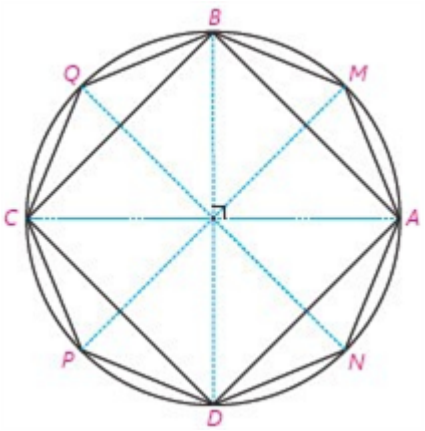
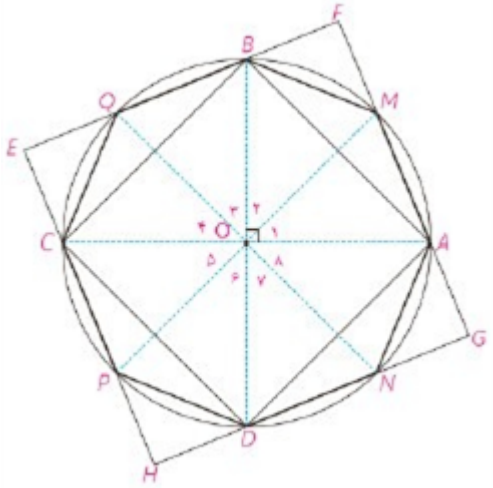
نام و نام خانوادگی :　　زمان آزمون :

پایه تحصیلی :　　نام درس :

نام دبیر :　　نام آموزشگاه :

عنوان آزمون : هندسه ۱۱ فصل ۱　　تاریخ برگزاری

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت‌ضلعی AMBQCPDN منتظم است.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲) *پاسخ:* ۱ در چهارضلعی ABCD قطر هم‌دیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند پس مستطیل است و چون قطرها بر هم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است. عمودمنصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس: $O_۱ = O_۲ = O_۳ = O_۴ = O_۵ = O_۶ = O_۷ = O_۸ = ۴۵^\circ$ $\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} = \widehat{BQ} = \widehat{QC} = \widehat{CP} = \widehat{PD} = \widehat{DN} = \widehat{NA}$ $\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$ 	

شش‌ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

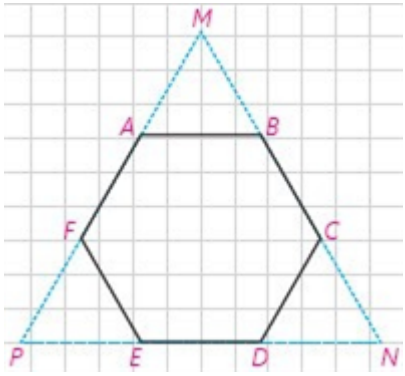
الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه‌ی دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

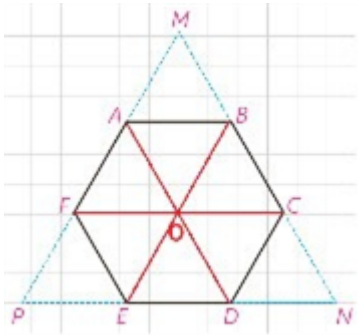
$$S_{\mathrm{TBC}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TAF}} = S_{\mathrm{TAB}} + S_{\mathrm{TEF}} + S_{\mathrm{TCD}}$$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

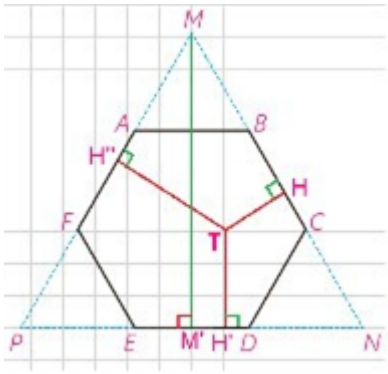
پاسخ: ۱ الف) اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین زاویه‌های خارجی ۶۰° است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = ۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی‌الساقین است.

ب) اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم آن‌را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم و در مثلث MNP، ۹ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.



$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{\mathrm{MNP}}} = \frac{۶S_{\mathrm{MAB}}}{۹S_{\mathrm{MAB}}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

پ) مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:



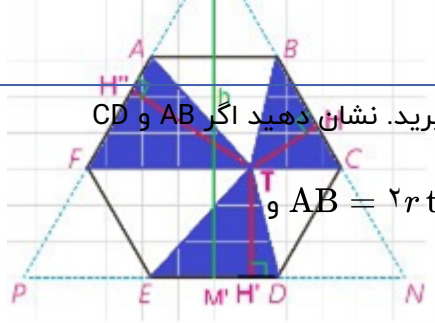
$$\mathrm{TH} + \mathrm{TH}' + \mathrm{TH}'' = \mathrm{MM}'$$

ت)

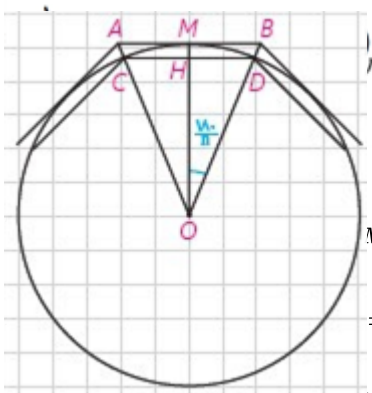
$$S_{\mathrm{TBC}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TAF}} = S_{\mathrm{TAB}} + S_{\mathrm{TEF}} + S_{\mathrm{TCD}}$$

$$S_{\mathrm{TAF}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TBC}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{AF}.\mathrm{TH}'' + \frac{۱}{۲}\mathrm{DE}.\mathrm{TH}' + \frac{۱}{۲}\mathrm{BC}.\mathrm{TH}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{AF}=\mathrm{ED}=\mathrm{BC}=a} S_{\mathrm{TAF}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TBC}}$$



یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن درنظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\,\mathrm{tg}\,\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\,\mathrm{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n}$.



$$= \frac{۱}{۲}ah \Rightarrow S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{۱}{۲}ah$$

$$\overset{\triangle}{MNP} = \frac{۳}{۲}a.h \Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{۱}{۲}ah}{\frac{۳}{۲}a.h}$$

$$= \frac{۱}{۳}$$

۳

مساحت مثلث‌های آبی رنگ $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش‌ضلعی $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث

MNP و مساحت مثلث‌های سفید و آبی برابر با مساحت شش‌ضلعی است پس مساحت مثلث‌های

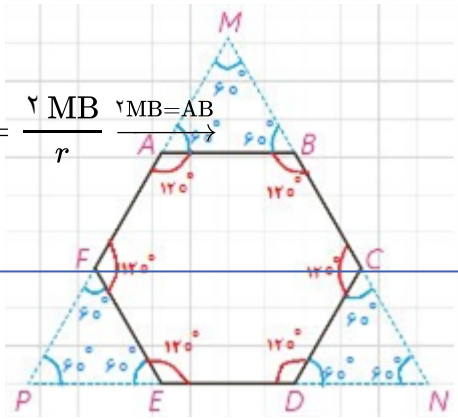
پاسخ: ۱

سفید هم برابر با $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳} \xrightarrow{۲HD=CD} \frac{۲HD}{r\frac{۳}{۲}} = ۲\,\mathrm{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n} \xrightarrow{\times ۲} \frac{HD}{r} = \mathrm{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n} \xrightarrow{OD=r} \overset{\triangle}{OHD} : \widehat{H} = ۹۰^\circ$

$$CD = ۲r\,\mathrm{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n}$$

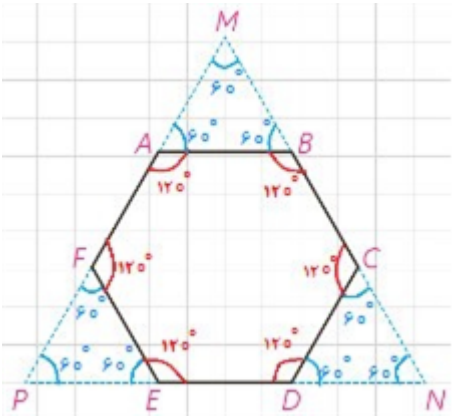
$$\overset{\triangle}{OMB} : \widehat{M} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OM=r} \mathrm{tg}\,\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\,\mathrm{tg}\,\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲\,MB}{r} \xrightarrow{۲MB=AB}$$

$$AB = ۲r\,\mathrm{tg}\,\frac{۱۸۰}{n}$$



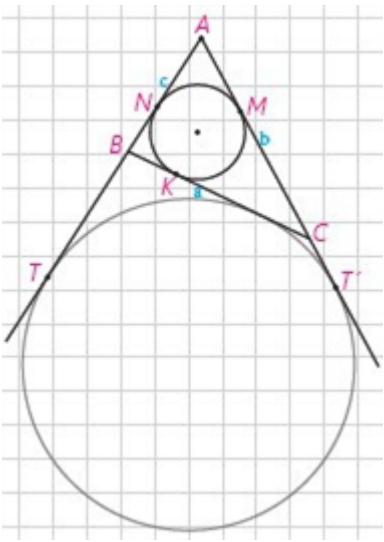
است. بنابراین مساحت مثلث‌های آبی با مساحت مثلث‌های سفید برابر است.

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند و T و 'T نقطه‌های تماس دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AN} = P - a$$
$$\mathrm{BN} = \mathrm{BK} = P - b, \mathrm{CM} = \mathrm{CK} = P - c$$
$$\mathrm{AT} = \mathrm{AT}' = P$$



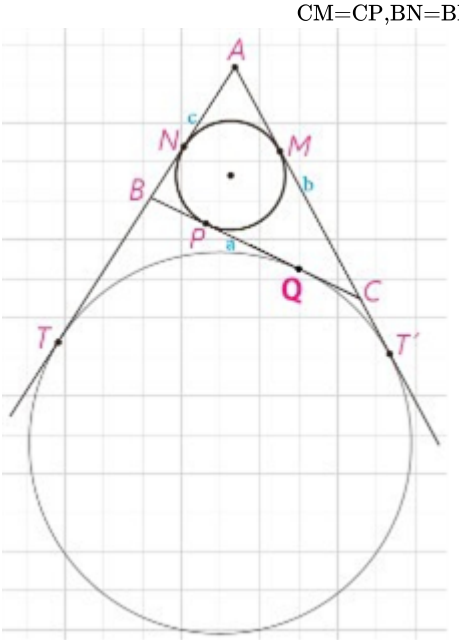
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AN} = P - a$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AN} = c - \mathrm{BN}\\ \mathrm{AM} = b - \mathrm{CM}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{AM} + \mathrm{AN} = b + c - (\mathrm{BN} + \mathrm{CM})$$

$$\xrightarrow[\mathrm{CM=CP,BN=BP}]{\mathrm{AM=AN}}$$



$$\Rightarrow ۲\mathrm{AM} = ۲p - ۲a \Rightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{AN} = p - a$$

$$۲\mathrm{AM} = \mathrm{b} + \mathrm{c} - \underbrace{(\mathrm{BP} + \mathrm{CP})}_{\mathrm{a}} = \mathrm{b} + \mathrm{c} - \mathrm{a}$$

$$\mathrm{BN} = \mathrm{BP} = P - b$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{BN} = c - \mathrm{AN}\\ \mathrm{BP} = a - \mathrm{CP}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{BN} + \mathrm{BP} = a + c - (\mathrm{AN} + \mathrm{CP}) \xrightarrow[\mathrm{AN=AM,CP=CM}]{\mathrm{BP=BN}}$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{BN} = ۲p - ۲b \Rightarrow \mathrm{BN} = \mathrm{BP} = p - b$$

$$۲\mathrm{BN} = \mathrm{a} + \mathrm{c} - \underbrace{(\mathrm{AM} + \mathrm{CM})}_{\mathrm{b}} = \mathrm{a} + \mathrm{c} - \mathrm{b}$$

$$\mathrm{CM} = \mathrm{CP} = P - C$$

$$\left.\begin{array}{l} CM = b - AM \\ CP = a - BP \end{array}\right\} \Rightarrow CM + CP = b + A - (AM + BP) \xrightarrow[AN=AM, BP=BN]{CM=CP}$$

$$\Rightarrow 2CM = 2p - 2c \Rightarrow CM = CP = p - c$$

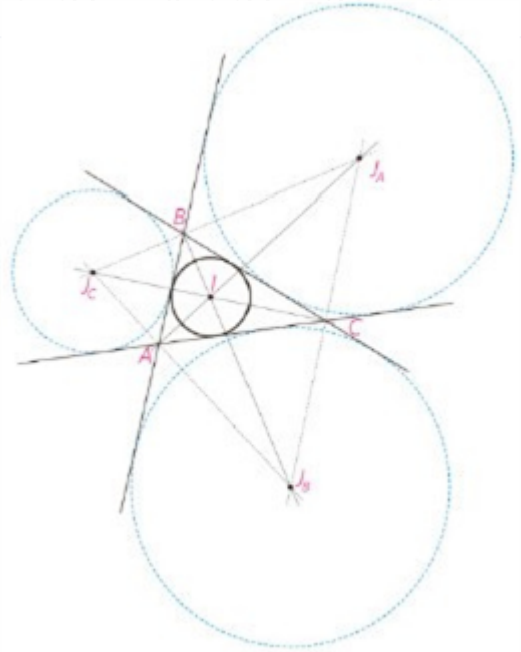
الف) اگر r_c, r_b, r_a شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

ب) به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

پاسخ: 1 الف)



$$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{s}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$$

$$= \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \\ S = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \\ S = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2s} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}$$

$$= \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

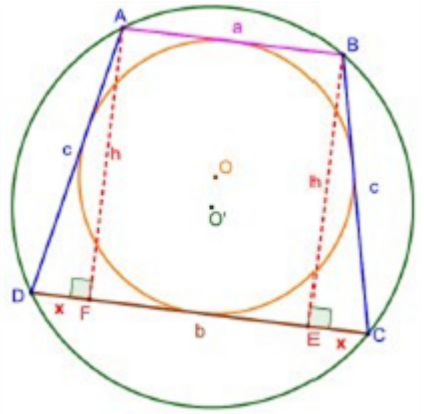
۵

۶

یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ چون ذوزنقه‌ی ABCD محاطی است پس متساوی‌الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است. در نتیجه: $۲c = a + b$ و مثلث ADF قائم‌الزاویه است.



$$۲c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{۲}\ ,\ b = ۲x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲ = c^۲ - x^۲ \Rightarrow h^۲ = \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۴\,\mathrm{ab}}{۴} \Rightarrow h = \sqrt{\mathrm{ab}}$$

$$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(a+b)\times h \Rightarrow S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{\mathrm{ab}}$$

۷

ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یک‌دیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث قطع می‌کنند.

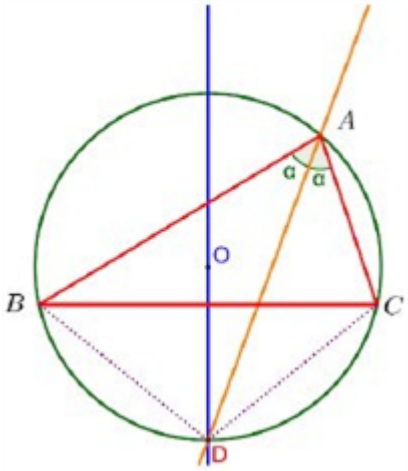
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ فرض کنیم نیمساز زاویه‌ی BAC دایره‌ی محاطی را در نقطه‌ی D قطع کند:

$$\widehat{\mathrm{BAD}} = \widehat{\mathrm{CAD}} \xrightarrow{\text{محاطی}} \overset{\frown}{\mathrm{BD}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}}$$

$$\xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}} \mathrm{BD} = \mathrm{CD}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی D از دو نقطه‌ی B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمودمنصف نقطه‌ی D روی عمودمنصف پاره‌خط BC نیز قرار دارد.



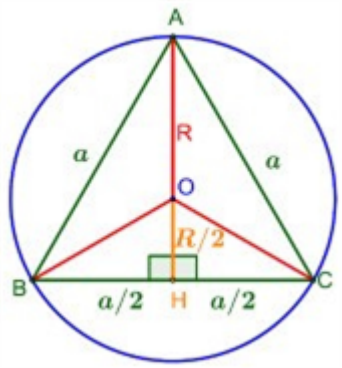
مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

پاسخ: ۱ مرکز دایره‌ی محیطی نقطه‌ی O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین:

راه اول:

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{AC}=a\ ,\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\frac{a}{۲}$$

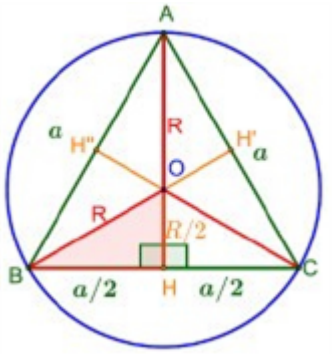
$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{OA}}{۲}\Rightarrow \mathrm{OH}=\frac{R}{۲}\Rightarrow \mathrm{AH}=R+\frac{R}{۲}=\frac{۳}{۲}R\\ \overset{\triangle}{ACH}:H=۹۰^\circ\Rightarrow \mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AC}^۲+\mathrm{CH}^۲}\\ \Rightarrow \mathrm{AH}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\end{array}\right\}$$



$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{۳}{۲}R\Rightarrow a=\frac{۳R}{\sqrt{۳}}\Rightarrow a=R\sqrt{۳}$$

$$S_{\mathrm{ABC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\Rightarrow S_{\mathrm{ABC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(R\sqrt{۳})^۲\Rightarrow S_{\mathrm{ABC}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: با توجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث هم‌نهشت ساخته شده است. این مثلث‌های به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند.



$$\overset{\triangle}{OBH}:H=۹۰^\circ\Rightarrow \mathrm{BH}=\sqrt{R^۲-\left(\frac{R}{۲}\right)^۲}=\frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{\mathrm{ABC}}=۶S_{\mathrm{OBH}}\Rightarrow S_{\mathrm{ABC}}=۶\times\frac{۱}{۲}\times\frac{R}{۲}\times\frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

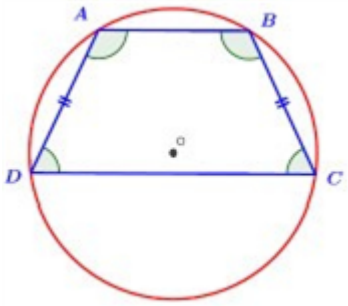
$$\Rightarrow S_{\mathrm{ABC}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

۸

ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ فرض: ذوزنقه متساوی‌الساقین است. حکم: ذوزنقه محاطی است.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{C}=\widehat{D}} \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ ذوزنقه ABCD محاطی است

۹

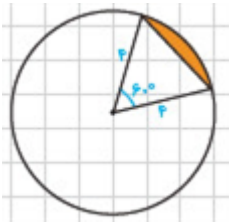
فرض: ذوزنقه محاطی است. حکم: ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

$$\left.\begin{array}{r}\text{AB} \parallel \text{DC}\ ,\ \text{AD مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{A}+D=\widehat{A}+\widehat{C} \Rightarrow \widehat{D}=\widehat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \widehat{A}=\widehat{B}$$

در این ذوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق برابرند در نتیجه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

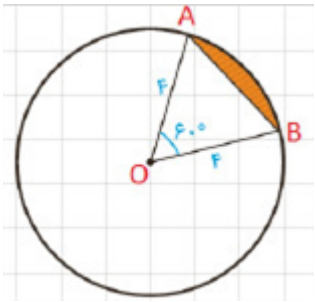


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ مثلث OAB متساوی‌الساقین است و $\widehat{O}=۶۰^\circ$ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع ۶۰ درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

$$A=\frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times r^۲ \Rightarrow A=\frac{۱۶\pi}{۳۶۰}\times ۶۰-۴\sqrt{۳}=\frac{۸}{۳}\pi-۴\sqrt{۳}$$



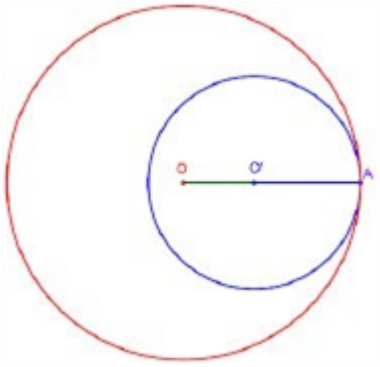
۱۰

۱۱

طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آن‌ها ۱۶π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:



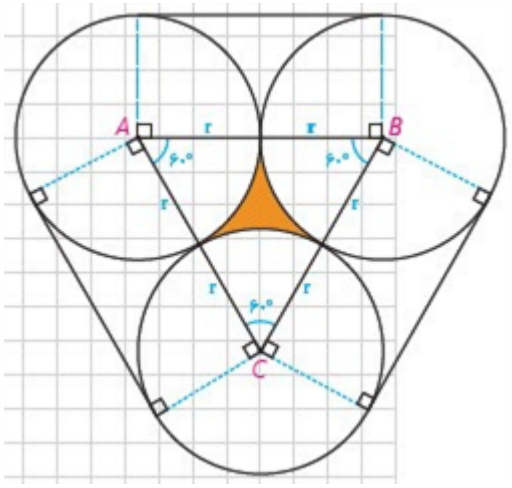
$$\text{مساحت ناحیه محدود بین دو دایره} = \pi R^{۲} - \pi R'^{۲} = ۱۶\pi$$

$$\Rightarrow R^{۲} - R'^{۲} = ۱۶ \Rightarrow (R - R')(R + R') = ۱۶$$

$$\xrightarrow{OO' = R - R' = ۲} ۲(R + R') = ۱۶ \Rightarrow R + R' = ۸$$

$$\begin{cases} R + R' = ۸ \\ R - R' = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵, R' = ۳$$

سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله‌ی نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$. هم‌چنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^۲\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}\right)$ است.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ مجموع سه قطاع با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می‌دهد بنابراین داریم:

طول نخ $= ۲r + ۲r + ۲r +$ محیط یک دایره $= ۶r + ۲\pi r$

۱۲

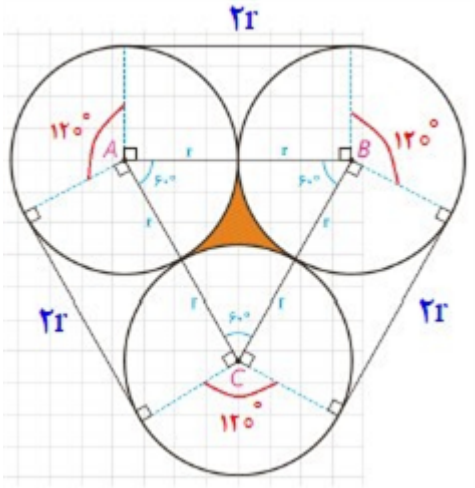
مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰ درجه تشکیل یک نیم‌دایره می‌دهد بنابراین داریم:

= مساحت ناحیه هاشور خورده

مساحت نیم‌دایره - مساحت مثلث ABC

= مساحت ناحیه هاشور خورده

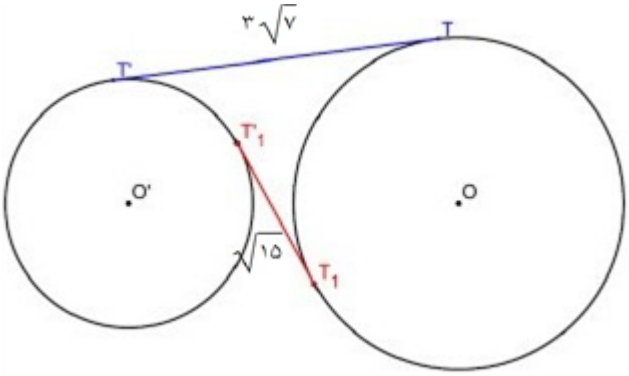
$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲ - \frac{\pi r^۲}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴}r^۲ - \frac{\pi r^۲}{۲} = r^۲\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}\right)$$



۱۳

طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



$$\begin{cases} TT'^{۲} = d^{۲} - (R^{۲} - R')^{۲} \\ T_۱T_۲^{۲} = d^{۲} - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^{۲} \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

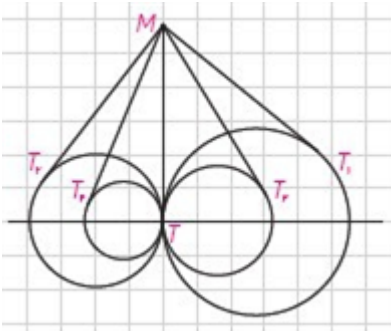
$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$

پاسخ: ۱

۱۴

مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آن‌ها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

$$MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = \ldots$$



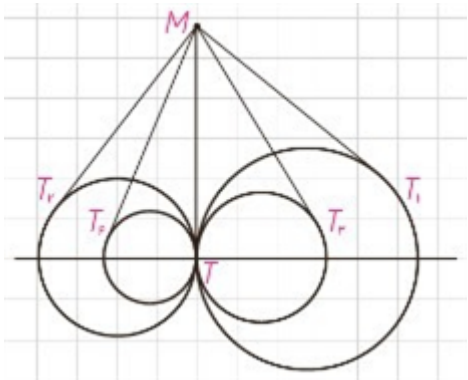
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱

از هر نقطه خارج دایره طول مماس‌های رسم شده با هم برابرند. بنابراین داریم:

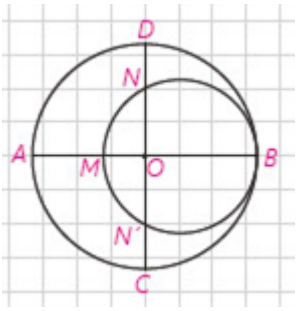
$$\left.\begin{aligned} MT &= MT_۲ \\ MT &= MT_۴ \\ MT &= MT_۱ \\ MT &= MT_۲ \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow MT = MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴$$

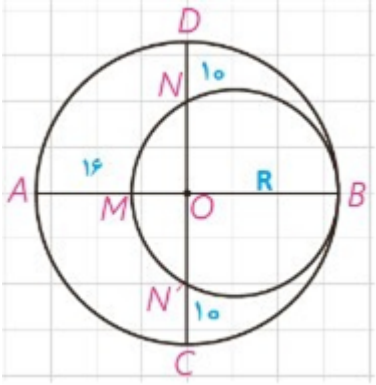


۱۵

در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



$$OB.OM = ON.ON' \Rightarrow R(R-۱۶) = (R-۱۰)(R-۱۰)$$

$$R^۲ - ۱۶R = R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$R' = \frac{MB}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۲R-۱۶}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۵۰-۱۶}{۲} = ۱۷$$

پاسخ: ۱

۱۶

از نقطه‌ی P در خارج دایره‌ای مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به دست آورید.

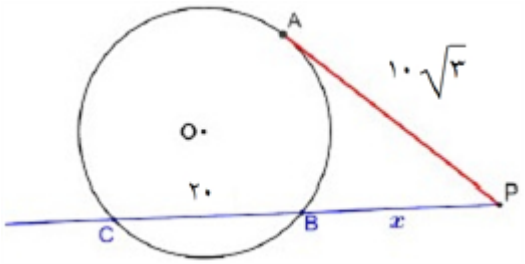
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

$$PA^۲ = PB.PC \rightarrow (۱۰\sqrt{۳})^۲ = x(x+۲۰)$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۳۰) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۱۰ \ , \ x = -۳۰ \text{ غ ق ق}$$

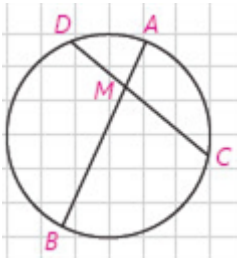
$$\Rightarrow PB = ۱۰ \ , \ PC = ۳۰$$



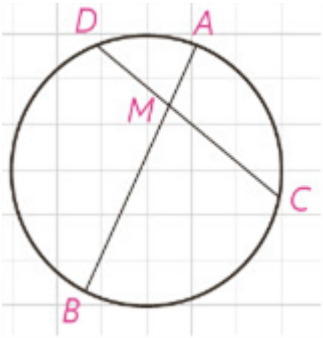
پاسخ: ۱

۱۷

در دایره‌ی $C(O,R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $\mathrm{AB} = ۱۱\,\mathrm{cm}$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



$$\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{MC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{DC}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{\mathrm{DM}}{۹} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \mathrm{DM} = ۳ \Rightarrow \mathrm{MC} = ۶$$

پاسخ: ۱

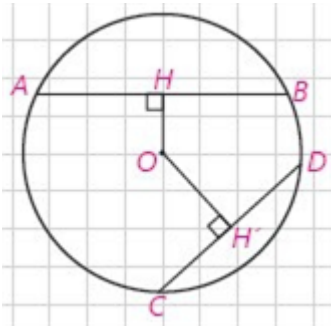
$$\mathrm{DM}.\,\mathrm{MC} = \mathrm{AM}.\,\mathrm{BM} \xrightarrow{\mathrm{AM}=x} ۳\times۶ = x(۱۱-x)$$

$$x^۲ - ۱۱x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow (x-۹)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad , \quad x = ۹$$

پس $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{۲}{۹}$ یا $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{۹}{۲}$

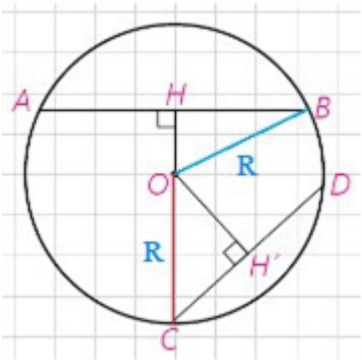
۱۸

در دایره‌ی $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصله‌ی O از دو وتر AB و CD هستند.)



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱



فرض : $AB > CD$ حکم : $OH < OH'$

$OB = OC = R \quad , \quad BH = \frac{AB}{۲} \quad , \quad CH' = \frac{CD}{۲} \quad (۱)$

$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH^۲ = R^۲ - OH^۲$

$\overset{\triangle}{OCH'} = H' = ۹۰^\circ \Rightarrow CH'^۲ = R^۲ - OH'^۲$

$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^۲ > CH'^۲ \Rightarrow R^۲ - OH^۲ > R^۲ - OH'^۲$

$\Rightarrow -OH^۲ > -OH'^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} OH^۲ < OH'^۲ \xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰} OH < OH'$

فرض : $OH < OH'$ حکم : $AB > CD$

$OB = OC = R \quad , ۲BH = AB \quad , ۲CH' = CD \quad (۱)$

$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow OH^۲ = R^۲ - BH^۲$

$\overset{\triangle}{OCH'} : H' = ۹۰^\circ \Rightarrow OH'^۲ = R^۲ - CH'^۲$

$OH < OH' \Rightarrow R^۲ - BH^۲ < R^۲ - CH'^۲ \Rightarrow -BH^۲ < -CH'^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} BH^۲ > CH'^۲$

$\xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰} BH > CH' \xrightarrow{(۱)} AB > CD$

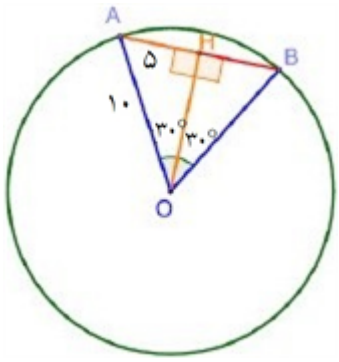
۱۹

در دایره‌ی $C(O,R)$، $\widehat{AB}=۶۰^\circ$ و $AB=۱۰$ فاصله‌ی O از وتر AB را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

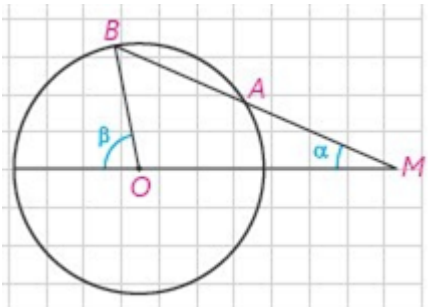
پاسخ: ۱ می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH=۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$OH=\sqrt{OA^۲-AH^۲}\Rightarrow OH=\sqrt{۱۰^۲-۵^۲}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$$



۲۰

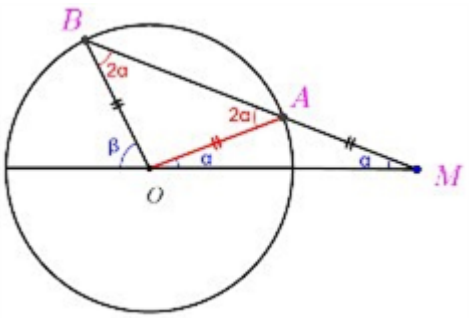
دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA=R$؛ نشان دهید: $\beta=۳\alpha$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAM و OAB متساوی‌الساقین هستند.

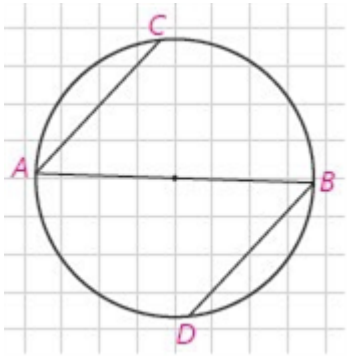
در مثلث OBM داریم:



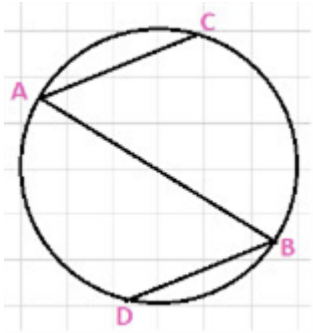
$$\beta=۲\alpha+\alpha=۳\alpha$$

۲۱

در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



پاسخ: ۱

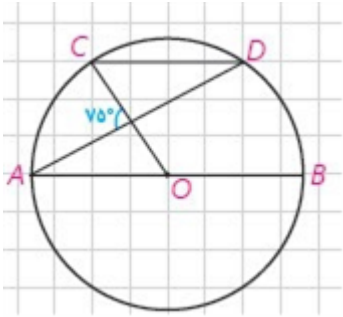
$$AC \parallel BD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB} = ۱۸۰^\circ$$

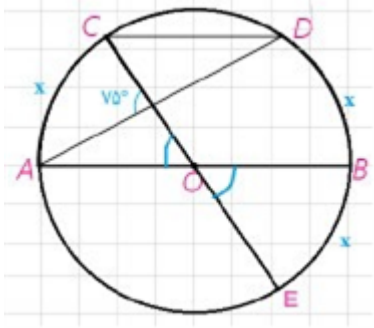
$$\overset{\frown}{ACD} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ADB} - \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

۲۲

در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$، اندازه کمان CD را به دست آورید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



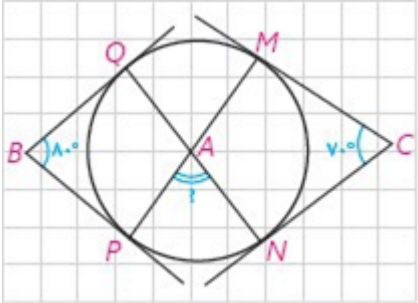
پاسخ: ۱

$$۷۵^\circ = \frac{(x+x)+x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۳x \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

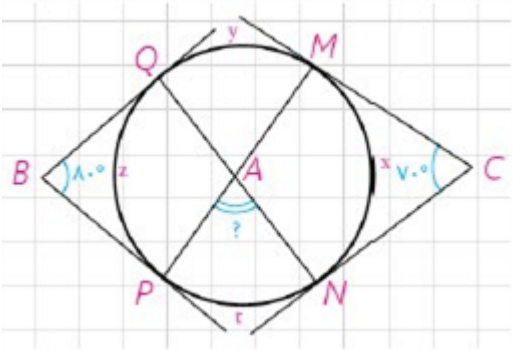
$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۲۳

در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{A}$ چند درجه است؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



$$۷۰^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰^\circ = (y+z+t)-x$$

$$۸۰^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{۲} \Rightarrow ۱۸۰^\circ = (y+x+t)-z$$

پاسخ: ۱

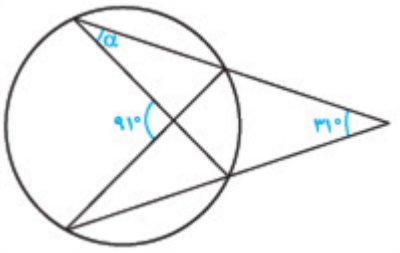
$$\begin{cases} ۱۴۰^\circ = y+z+t-x \\ ۱۶۰^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow ۳۰۰^\circ = ۲(y+t)$$

$$\Rightarrow y+t = ۱۵۰^\circ$$

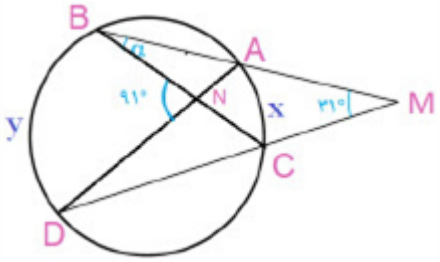
$$\widehat{A} = \frac{y+t}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

۲۴

در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را به دست آورید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



$$\widehat{M} = \frac{y-x}{۲} \Rightarrow ۲\times۳۱^\circ = y-x$$

$$\widehat{N} = \frac{y+x}{۲} \Rightarrow ۲\times۹۱^\circ = y+x$$

پاسخ: ۱

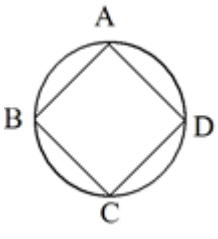
$$\Rightarrow \begin{cases} y-x = ۶۲^\circ \\ y+x = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۲۴۴^\circ \Rightarrow y = ۱۲۲^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

۲۵

ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ فرض کنیم چهارضلعی ABCD محاطی باشد، داریم:

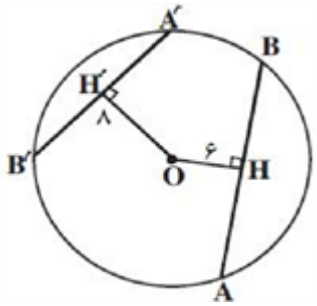


$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\frac{\widehat{BCD}}{۲}\\ \widehat{C}=\frac{\widehat{DAB}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow A+C=\frac{\widehat{BCD}}{۲}+\frac{\widehat{DAB}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰$$

پس زوایای مقابل در این چهارضلعی مکمل یک‌دیگراند.

۲۶

الف) در دایره‌ی $C(O,۱۰)$ فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر ۶ وفاصله‌ی وتر $A'B'$ از مرکز دایره مساوی ۸ است.
طول وترهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورید.
ب) چه رابطه‌ای بین فاصله‌ی وترها از مرکز دایره و طول آن‌ها می‌یابید؟
پ) آیا این رابطه همیشه برقرار است؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$AH^۲=OA^۲-OH^۲=۱۰۰-۳۶=۶۴\Rightarrow AH=۸\Rightarrow AB=۱۶$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OA'H'$داریم:

$$A'H'^۲=OA'^۲-OH'^۲=۱۰۰-۶۴=۳۶\Rightarrow A'H'=۶\Rightarrow A'B'=۱۲$$

ب) وتری که از مرکز دایره دورتر است کوچک‌تر است.
پ) بله

۲۷

ثابت کنید مماس مشترکهای داخلی و خط االمرکزین دو دایره همرسند.

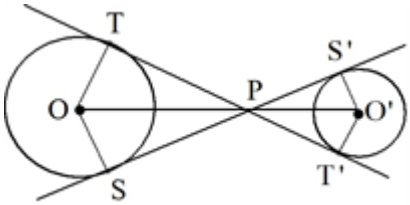
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ فرض کنیم مماس مشترکهای داخلی دو دایره‌ی O' و O همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O' و O به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم. OP نیمساز زاویه‌ی P است.

$OT=OS\Rightarrow$

$O'T'=O'S'\Rightarrow$ $O'P$ نیمساز زاویه‌ی P است.

می‌دانیم نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتداد هستند. پس P,O',O در یک راستا هستند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.



۲۸ دو دایره به شعاعهای ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه ی مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ در دو دایره مماس بیرون طول خط المرکزین با جمع شعاع‌ها برابر است.

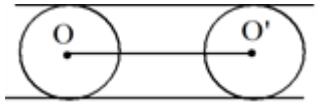
$d = oo' = R + R' \Rightarrow d = ۹ + ۴ = ۱۳$

مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$

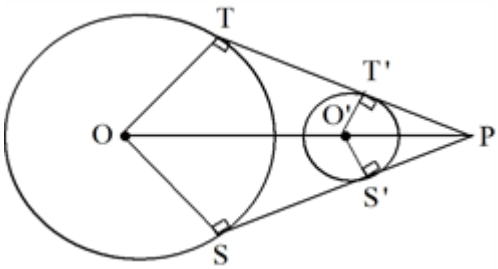
۲۹ در مورد همرسی مماس مشترکهای خارجی دو دایره و خط المرکزین آن‌ها چه می‌توان گفت؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ اگر دو دایره مساوی باشند مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین موازی است.



اگر دو دایره مساوی نباشند، مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین همرسند. زیرا اگر مماس مشترکهای خارجی دو دایره‌ی O و O' همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O و O' به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم.



$OT = OS \rightarrow$ است. P نیمساز زاویه OP

$O'T' = O'S' \rightarrow$ است. P نیمساز زاویه $O'P$

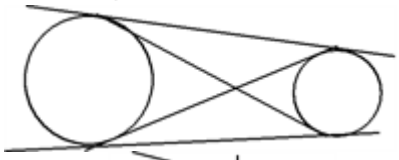
پس نقاط P, O', O در یک راستا قرار دارند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.

۳۰

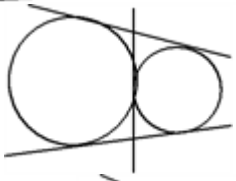
وضعیت دو دایره را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید، سپس در هر حالت مماس مشترکهای آنها را در صورت وجود رسم کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

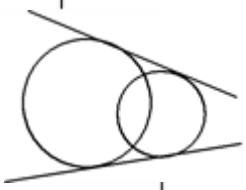
پاسخ: ۱ دو دایره‌ی متخارج دارای چهار مماس مشترک هستند. : حالت اول



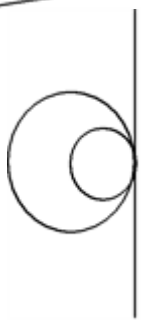
دو دایره‌ی مماس بیرونی دارای سه مماس مشترک هستند. : حالت دوم



دو دایره‌ی متقاطع دارای دو مماس مشترک هستند. : حالت سوم



دو دایره‌ی مماس درونی دارای یک مماس مشترک هستند. : حالت چهارم

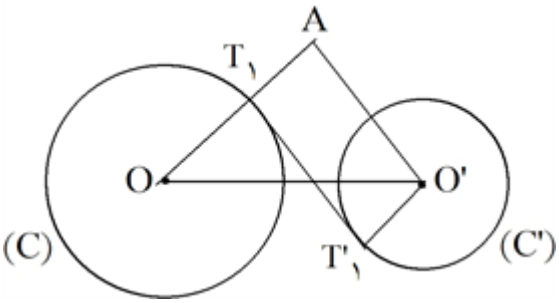


دو دایره‌ی متداخل مماس مشترک ندارد. : حالت پنجم

دو دایره‌ی هم‌مرکز دارای مماس مشترک نیستند. : حالت ششم

۳۱

اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را بر حسب R و R' و $OO'=d$ به دست آورید.



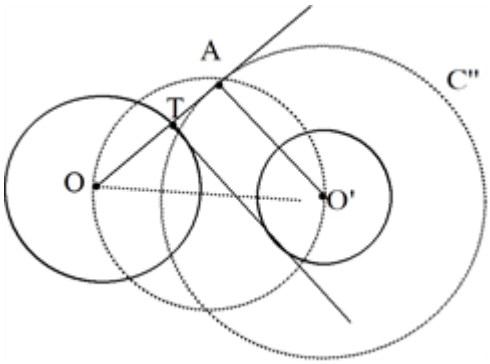
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ فرض کنیم $T_1T'_1$ مماس مشترک داخلی دو دایره باشد $O'A$ موازی $T_1T'_1$ است. پس چهارضلعی $O'AT_1T'_1$ مستطیل است. درنتیجه $O'A=T_1T'_1$. داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\triangle}{OAO'}: O'\hat{A} = OO'^2 - OA^2 \\ OO' = d \\ O'A = T_1T'_1 \\ OA = R + R' \end{array}\right\} \Rightarrow T_1T'^2_1 = d^2 - (R+R')^2 \Rightarrow T_1T'_1 = \sqrt{d^2-(R+R')^2}$$

۳۲

دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ داده شده‌اند. مماس مشترکهای داخلی این دو دایره را رسم کنید و مراحل کار خود را توضیح دهید. در چه صورت دو دایره مماس مشترک داخلی دارند؟

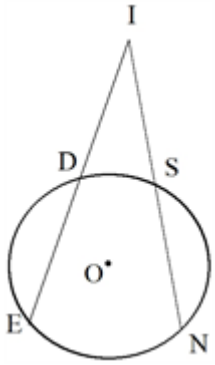


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ ابتدا به مرکز O' و شعاع $R+R'$ دایره‌ی C'' را رسم می‌کنیم. سپس به قطر OO' دایره‌ای ترسیم می‌کنیم تا دایره C'' را در نقطه‌ی A قطع کند. در این صورت OA بر دایره‌ی C'' مماس خواهد بود. OA دایره به مرکز O را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. از نقطه‌ی T خطی موازی $O'A$ رسم می‌کنیم. این خط همان مماس مشترک داخلی دو دایره است.

۳۳

در شکل مقابل دو قاطع IE و IN با هم برابرند. ثابت کنید: IS = ID .



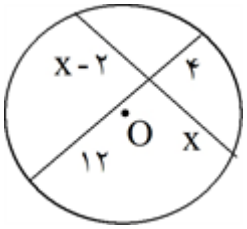
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{ID}\times\mathrm{IE}=\mathrm{IS}\times\mathrm{IN} \\ \text{طبق فرض} \Rightarrow \mathrm{IN}=\mathrm{IE} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{ID}=\mathrm{IS}$$

۳۴

در هر یک از شکلهای زیر x و y را محاسبه کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

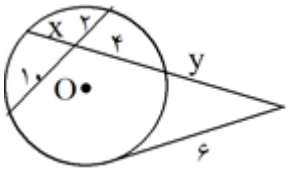
پاسخ: ۱

$$x(x-۲)=۴\times۱۲ \to x^۲-۲x-۴۸=۰ \to (x-۸)(x+۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۸ \\ x=-۶ \end{cases}$$

$x=-۶$ قابل قبول نیست. پس $x=۸$.

۳۵

در هریک از شکل‌های زیر x و y را محاسبه کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱

$$۴\times x = ۲\times ۱۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$۶^{۲} = y(y+۴+x) \rightarrow ۳۶ = y(y+۹)$$

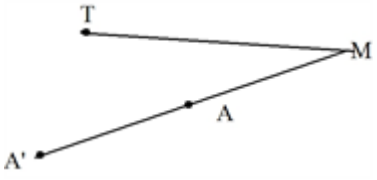
$$y^{۲} + ۹y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (y+۱۲)(y-۳) = ۰ \rightarrow \begin{cases} y = ۳ \\ y = -۱۲ \end{cases}$$

$y = -۱۲$ قابل قبول نیست. پس $y = ۳$.

۳۶

سه نقطه‌ی M، A و A' روی یک خط راست و نقطه‌ی T خارج این خط به قسمی واقعند که $\mathrm{MT}^{۲} = \mathrm{MA}.\mathrm{MA}'$ است.

ثابت کنید دایره‌ای که بر سه نقطه‌ی A و A' و T می‌گذرد در نقطه‌ی T بر خط MT مماس است.

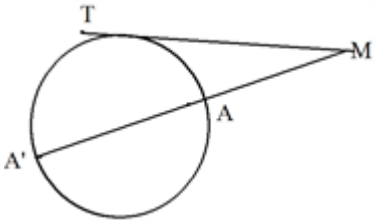


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

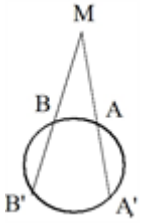
پاسخ: ۱ از سه نقطه‌ی A', A و T یک دایره می‌گذرد. فرض کنیم MT بر این دایره مماس نباشد و دایره‌ی فوق را در نقطه‌ی دیگر مثل T' قطع کند داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{MT}\times\mathrm{MT}' = \mathrm{MA}\times\mathrm{MA}' \\ \text{فرض مسئله} \Rightarrow \mathrm{MT}^{۲} = \mathrm{MA}\times\mathrm{MA}' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{MT}\times\mathrm{MT}' = \mathrm{MT}^{۲} \Rightarrow \mathrm{MT} = \mathrm{MT}'$$

پس نقاط T', T بر هم مماس هستند بنابراین MT بر دایره مماس است.



ثابت کنید اگر امتداد وترهای 'AA و 'BB از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند، آنگاه:

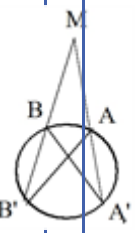


$.MA.MA' = MB.MB'$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۷ **پاسخ:** ۱ از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{MBA'}$ و $\overset{\triangle}{MAB'}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی محاطی } A' = \frac{\widehat{AB}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } B' = \frac{\widehat{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{A'} = \widehat{B'} \\ \widehat{M} = \widehat{M} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAB'} \sim \overset{\triangle}{MBA'} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA.MA' = MB.MB'$$



در دایره‌ی (C) مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی الساقین است.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

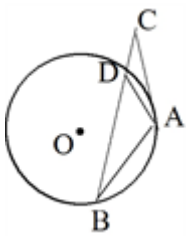
۳۸ **پاسخ:** ۱ از A به D وصل می‌کنیم.

$$\text{طبق فرض} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی ظلی } \widehat{A}_۱ = \frac{\widehat{AD}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{B} \ (۲)$$

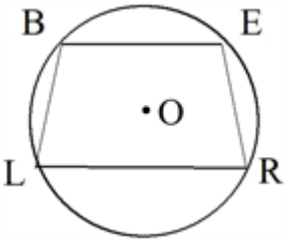
$$\text{از } (۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C} \Rightarrow AD = DC$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ متساوی‌الساقین است.



۳۹

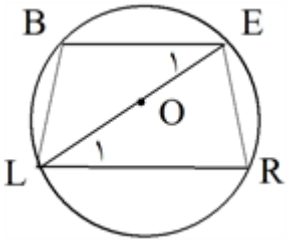
در دایره‌ی (O)، $BL = ER$. نشان دهید $BE \parallel LR$.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

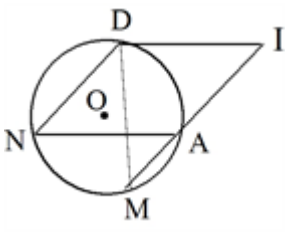
پاسخ: ۱ از E به L وصل می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی $BL = ER$ نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{ER}$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی محاطی } \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BL}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{L}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ER}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{BL}=\overset{\frown}{ER}} \widehat{E}_۱ = \widehat{L}_۱ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه ی خطوط}} BE \parallel LR$$



۴۰

در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A، M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید:
$DM = DI$.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

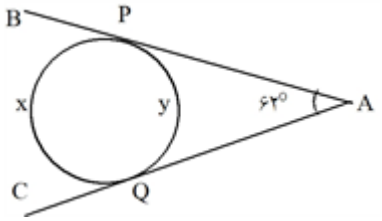
پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی محاطی } \widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{N} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} \ (۱)$$

از طرفی چهارضلعی ANDI متوازی‌الاضلاع است پس $\widehat{N} = \hat{I}$. با توجه به رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $\widehat{M} = \hat{I}$ بنابراین $DM = DI$.

۴۱

در هر کدام از شکلهای زیر x و y را بیابید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

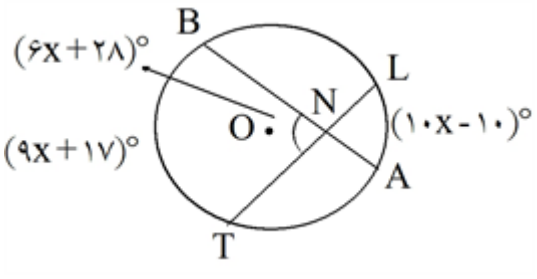
پاسخ: ۱

$$\widehat{A} = \frac{x-y}{۲} \Rightarrow ۶۲ = \frac{x-y}{۲} \Rightarrow x - y = ۱۲۴^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = ۱۲۴^\circ \\ x + y = ۳۶۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x = ۴۸۴ \Rightarrow x = ۲۴۲^\circ \Rightarrow y = ۳۶۰ - ۲۴۲ \Rightarrow y = ۱۱۸^\circ$$

۴۲

در شکل زیر x و اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{BNT}$ را تعیین کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱

$$\widehat{BNT} = \frac{\overset{\frown}{BT} + \overset{\frown}{AL}}{۲} \Rightarrow ۶x + ۲۸ = \frac{۹x + ۱۷ + ۱۰x - ۱۰}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲x + ۵۶ = ۱۹x + ۷ \Rightarrow ۷x = ۴۹ \Rightarrow x = ۷$$

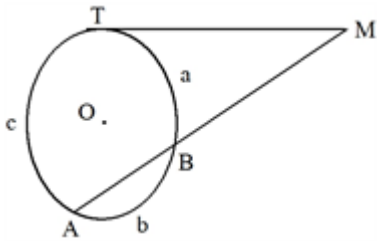
بنابراین $B\widehat{N}T = ۶\times۷ + ۲۸ = ۷۰$ است.

۴۳

خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:

تعیین کنید:

a را در صورتی که $\widehat{M} = ۶۰^\circ, b = ۱۰۰^\circ$ باشد.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱

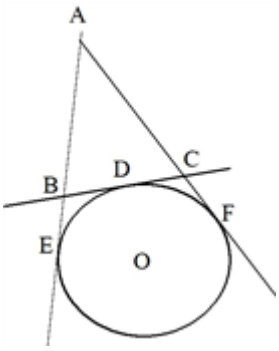
$$\widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲} \Rightarrow ۶۰ = \frac{c - a}{۲} \Rightarrow c - a = ۱۲۰$$

$$b = ۱۰۰ \Rightarrow c + a + ۱۰۰ = ۳۶۰ \Rightarrow c + a = ۲۶۰$$

$$\begin{cases} c - a = ۱۲۰ \\ c + a = ۲۶۰ \end{cases} \xrightarrow{-} ۲a = ۱۴۰ \Rightarrow a = ۷۰^\circ$$

۴۴

خطهای AE، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E، F و D بر دایره‌ی (O) مماس هستند.
مماس BC، خطهای AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های
B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه‌ی D
روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F، محیط مثلث ABC
ثابت می‌ماند.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

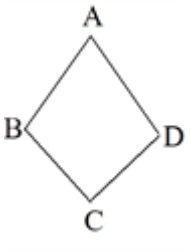
پاسخ: ۱ اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند. پس $BD = BE$ و $CD = CF$ داریم:

$$\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = AB + BC + AC \rightarrow \text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = AB + BD + DC + AC$$

$$\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = AB + BE + CF + AC \rightarrow \text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = AE + AF \rightarrow \text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = \text{مقدار ثابت}$$

۴۵

در چهارضلعی ABCD (شکل روبه‌رو)، $AB + CD = AD + BC$
است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.
راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM = AD$
و روی ضلع BC پاره‌خط $CN = CD$ را جدا کرده،
از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.

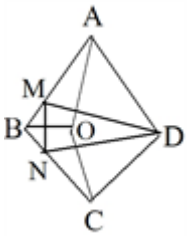


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ با توجه به فرض مسئله داریم:

$$AB + CD = AD + BC \rightarrow \cancel{AM} + BM + \cancel{CD} = \cancel{AD} + \cancel{CN} + BN \Rightarrow BM = BN$$

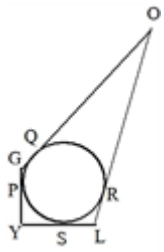
پس مثلث $\overset{\triangle}{BMN}$ متساوی‌الساقین است. نیمساز زوایای A, B, C را رسم می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{AMD}$ نیمساز زاویه A عمودمنصف ضلع MD می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{BMN}$ نیمساز زاویه‌ی B عمودمنصف MN می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{NCD}$ نیمساز زاویه‌ی C عمودمنصف ND می‌باشد. می‌دانیم عمودمنصف‌های مثلث $\overset{\triangle}{DMN}$ همرسند. پس نیمسازهای زوایای A, B, C در یک نقطه همرسند. پس چهارضلعی ABCD محیطی است.



۴۶

ضلعهای چهارضلعی محیطیGOLY بر دایره مماسند (شکل روبه‌رو).

ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

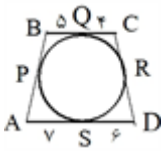
$$\left.\begin{array}{l} YP = YS \\ LR = SL \\ OR = OQ \\ GP = GQ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} YP + LR + OR + GP = YS + SL + OQ + GQ$$

$$\Rightarrow YG + LO = YL + OG$$

۴۷

اگر P ، Q، R، S، نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی ABCD با دایره باشند،

آنگاه محیط این چهارضلعی را به دست آورید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} AS = AP \\ SD = RD \end{array}\right\} \xrightarrow{+} AS + SD = AP + RD \Rightarrow AP + RD = ۱۳$$

$$\xrightarrow{+} AB + CD = ۲۲$$

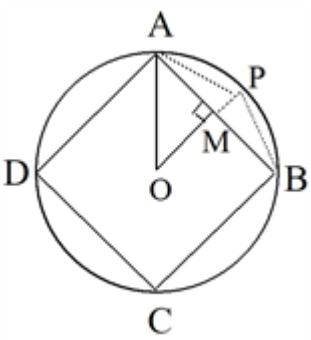
$$\left.\begin{array}{l} BQ = BP \\ CQ = CR \end{array}\right\} \xrightarrow{+} BQ + CQ = BP + CR \Rightarrow BP + CR = ۹$$

پس محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

$$AB + BC + CD + AD = ۲۲ + ۹ + ۱۳ = ۴۴$$

مربعی در یک دایره‌ی به شعاع واحد محاط شده است.

با توجه به شکل، به ۴ سوال بعدی پاسخ دهید:



۴۸	فاصله مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱ **پاسخ:** ۱ در مربع، قطر، نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$ بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{OAM}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. $\overset{\triangle}{OAM} : \mathrm{AM}^۲ + \mathrm{OM}^۲ = \mathrm{OA}^۲$ $۲\mathrm{OM}^۲ = ۱^۲$ $\mathrm{OM}^۲ = \frac{۱}{۲}$ $\mathrm{OM} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$	
۴۹	فاصله مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱ **پاسخ:** ۱ در مربع، قطر، نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$ بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{OAM}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. $\overset{\triangle}{OAM} : \mathrm{AM}^۲ + \mathrm{OM}^۲ = \mathrm{OA}^۲$ $۲\mathrm{OM}^۲ = ۱^۲$ $\mathrm{OM}^۲ = \frac{۱}{۲}$ $\mathrm{OM} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$	
۵۰	طول OM را به‌دست آورید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱ **پاسخ:** ۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM زاویه‌ی OAM برابر ۴۵° است زیرا قطر مربع نیمساز است. پس مثلث OAM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس $\mathrm{OM} = \mathrm{AM} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.	
۵۱	طول OM را به‌دست آورید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱ **پاسخ:** ۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM زاویه‌ی OAM برابر ۴۵° است زیرا قطر مربع نیمساز است. پس مثلث OAM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس $\mathrm{OM} = \mathrm{AM} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.	

۵۲

طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

پاسخ: ۱ AP طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره است.

$$\overset{\triangle}{AMP}: AP^{۲} = AM^{۲} + MP^{۲}$$

$$AP^{۲} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} + \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}$$

$$AP^{۲} = \frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲} \Rightarrow AP^{۲} = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

۵۳

طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

پاسخ: ۱ AP طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره است.

$$\overset{\triangle}{AMP}: AP^{۲} = AM^{۲} + MP^{۲}$$

$$AP^{۲} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} + \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}$$

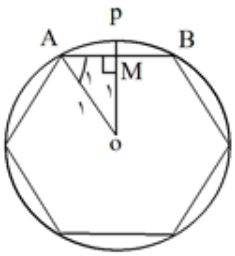
$$AP^{۲} = \frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲} \Rightarrow AP^{۲} = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

۵۴

در حالتی که یک شش ضلعی در دایره به شعاع ۱ محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظمِ محاط در دایره را بدست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

پاسخ: ۱ در شکل مقابل AP به شعاع ۱ ، ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. از طرفی اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است. OA نیمساز است پس $\hat{A}_۱ = ۶۰^\circ$ در نتیجه $\hat{O}_۱ = ۳۰^\circ$ داریم.



$$\overset{\triangle}{OAM}: \hat{O}_۱ = ۳۰ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲} OA = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OAM}: OM^{۲} = OA^{۲} - AM^{۲} = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$PM = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{APM}: AP^{۲} = AM^{۲} + PM^{۲} \rightarrow AP^{۲} = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

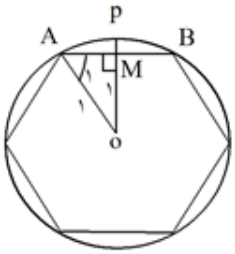
$$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

۵۵

در حالتی که یک شش ضلعی در دایره به شعاع ۱ محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظمِ محاط در دایره را بدست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

پاسخ: ۱ در شکل مقابل AP به شعاع ۱ ، ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. از طرفی اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است. OA نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۶۰^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۳۰^\circ$ داریم.



$$\overset{\Delta}{OAM} : \widehat{O}_۱ = ۳۰ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲} OA = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{OAM} : OM^۲ = OA^۲ - AM^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$PM = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{APM} : AP^۲ = AM^۲ + PM^۲ \rightarrow AP^۲ = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

۵۶

مماس‌های رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر شعاع دایره کوچک‌تر ۱/۵ و فاصله بین مراکز دو دایره ۲/۵ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

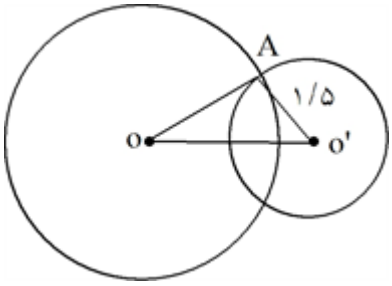
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۳ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

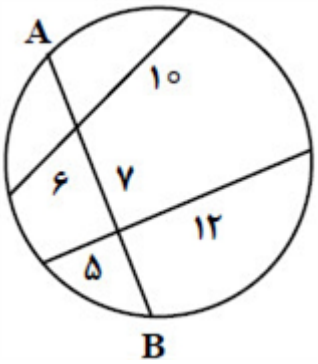
پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطهٔ تلاقی دو دایره به مرکز O و O' یعنی A بر هم عمودند پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{OAO'} : OA^۲ = OO'^۲ - O'A^۲$$

$$\Rightarrow OA = ۲/۵^۲ - ۱/۵^۲ = ۶/۲۵ - ۲/۲۵ = ۴ \Rightarrow OA = ۲$$



در شکل مقابل، طول وتر AB کدام است؟



۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۵۷

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های روی شکل و استفاده از قضیهٔ روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

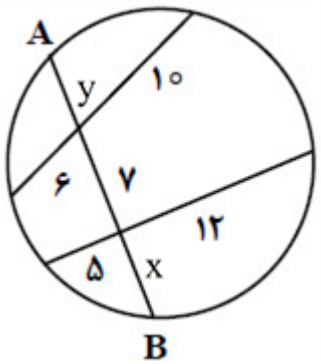
$$\left.\begin{array}{l} ۶\times۱۰ = y(۷+x) \Rightarrow ۶۰ = ۷y + \mathrm{xy} \\ ۵\times۱۲ = x(۷+y) \Rightarrow ۶۰ = ۷x + \mathrm{xy} \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

بنابراین:

$$۶\times۱۰ = y(۷+x) \xrightarrow{y=x} ۶۰ = x(۷+x) \Rightarrow x^۲ + ۷x - ۶۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۲)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

پس: $\mathrm{AB} = x + y + ۷ = ۵ + ۵ + ۷ = ۱۷$

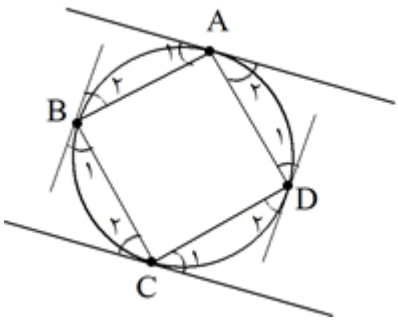


۵۸ چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط شده است. رأس‌های این چهارضلعی، رئوس زوایای ظلی واقع بر دایره هستند. مجموع این زاویه‌های ظلی کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:



زاویه ظلی : $\widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}, \widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$

زاویه ظلی : $\widehat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}, \widehat{B}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}, \widehat{C}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}, \widehat{D}_۲ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$

بنابراین:

$$\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ + \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ + \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ + \widehat{D}_۱ + \widehat{D}_۲$$

$$= \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = ۳۶۰^\circ$$

۵۹

یک پنج‌ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج‌ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

۱) ۵۴۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

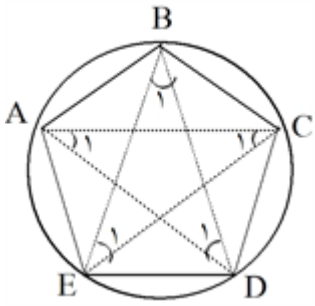
سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول: این سؤال را در حالت خاص که پنج‌ضلعی منتظم است حل می‌کنیم. پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره، دایره را به پنج قسمت مساوی $\frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$ تقسیم می‌کند. زاویهٔ محاطی $\widehat{D}_۱$ روبه‌رو به وتر AB است پس:

$$\widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$

به همین ترتیب زاویه‌های محاطی روبه‌رو به اضلاع این پنج‌ضلعی منتظم برابر ۳۶° است بنابراین مجموع این زاویه‌ها $۵ \times ۳۶^\circ = ۱۸۰^\circ$ است.

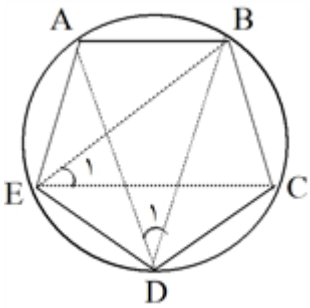
راه‌حل دوم: فرض کنیم ABCDE پنج‌ضلعی محاط در دایره باشد داریم:



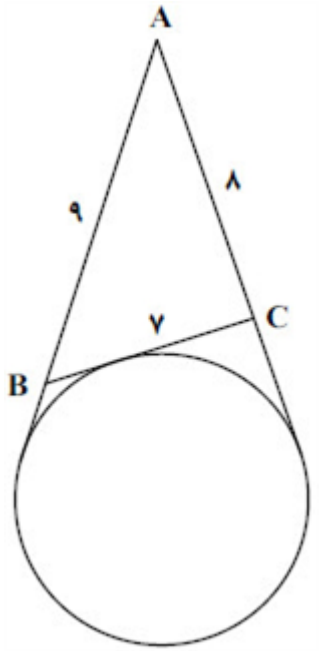
$$\widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}, \widehat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ED}}{۲}, \widehat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}, \widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

در نتیجه:

$$\widehat{A}_۱ + \widehat{B}_۱ + \widehat{C}_۱ + \widehat{D}_۱ + \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$



۶۰ در شکل مقابل، از نقطهٔ A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



۱) $۷/۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴/۸\sqrt{۵}$ ۳) $۳/۶\sqrt{۲}$ ۴) $۲/۴\sqrt{۵}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود.

$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$P = \frac{۹+۸+۷}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۲(۱۲-۹)(۱۲-۸)(۱۲-۷)} = \sqrt{۱۲\times۳\times۴\times۵}$$

$$= \sqrt{۱۲^۲\times۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۱۲-۷} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵} = ۲/۴\sqrt{۵}$$

۶۱ دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۵}$ واحد، در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین، محاط است. اگر اختلاف دو قاعده برابر ۱۶ واحد باشد، طول ساق ذوزنقه، چند واحد است؟

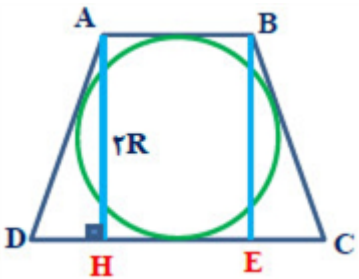
۱) $\frac{۱۹}{۲}$ ۲) $\frac{۲۹}{۲}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

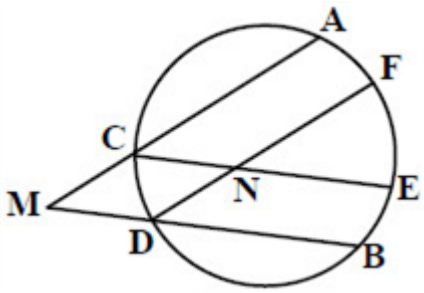
پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم ذوزنقه بر دایره‌ای به شعاع R محاط باشد، پس ارتفاع ذوزنقه برابر $۲R$ است. با رسم ارتفاع‌های AH و BE داریم:

$$DH = CE = \frac{DC-AB}{۲} = \frac{۱۶}{۲} \Rightarrow DH = ۸$$

$$AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ \Rightarrow AD^۲ = (۴\sqrt{۵})^۲ + ۸ = ۱۴۴ \Rightarrow AD = ۱۲$$



در شکل مقابل، $AC \parallel DF$، $BD \parallel CE$، $\widehat{AC} = ۸۵^\circ$ و $\widehat{BD} = ۷۵^\circ$ است. اگر $C\widehat{N}F = ۱۳۵^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{EF}$ چند درجه است؟

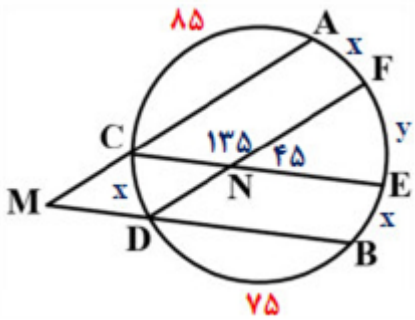


۱) ۴۵ ۲) ۴۰ ۳) ۳۵ ۴) ۳۰

۶۲

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساویند، پس $\widehat{CD} = \widehat{BE}$ و $\widehat{AF} = \widehat{CD}$ اکنون با توجه به شکل می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{l} F\widehat{N}E = ۴۵^\circ = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۹۰^\circ \\ ۸۵^\circ + ۷۵^\circ + ۳x + y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳x + y = ۲۰۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲x = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۵ \\ y = ۳۵ \end{cases}$$

یک دایره به شعاع ۲، داخل ذوزنقه متساوی‌الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای ذوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طول ارتفاع ذوزنقه برابر طول قطر دایره یعنی برابر ۴ است. از طرفی در مثلث ADH داریم:

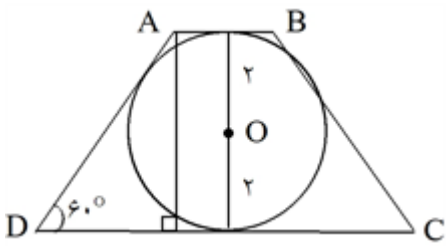
$$\text{Sin}\, ۶۰^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

۶۳

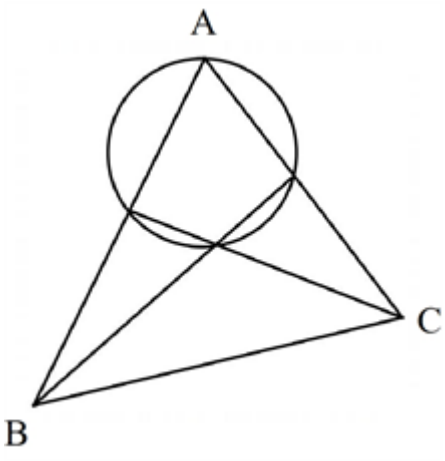
چهارضلعی ABCD، یک چهارضلعی محیطی است، پس داریم:

$$AB + CD = AD + BC = ۲AD = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AH\,(AB + CD) = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{۱۶}{\sqrt{۳}} = \frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$



در شکل مقابل، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟



۱) ۹۰ ۲) ۷۵ ۳) ۶۰ ۴) ۴۵

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث BDC داریم:

$$\widehat{D}_۲ + \widehat{B}_۱ + \widehat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

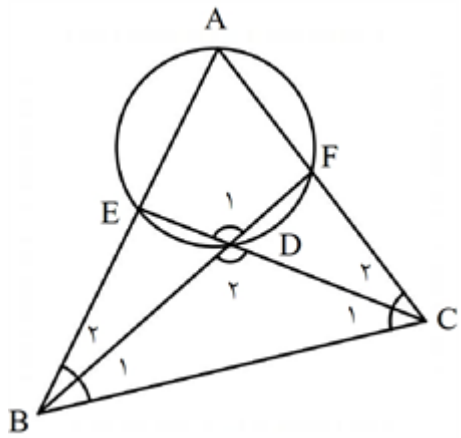
۶۴ BD و CD نیمساز زوایای B و C هستند، پس داریم:

$$\widehat{D}_۲ + \frac{\widehat{B}}{۲} + \frac{\widehat{C}}{۲} = ۱۸۰^\circ \ (۱)$$

از طرفی چهارضلعی AEDF محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{A} + \widehat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲} \widehat{A} + \widehat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \ (۲)$$

$$۱,۲ \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۸۰^\circ - \widehat{A}}{۲} \Rightarrow ۲\widehat{A} = ۱۸۰^\circ - \widehat{A} \Rightarrow ۳\widehat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۶۰^\circ$$



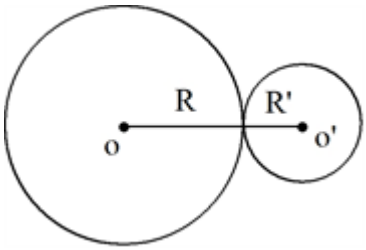
۶۵

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. شعاع دایره بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول خط المرکزین دو دایره مماس خارج مساوی $R+R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $۲\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال داریم.



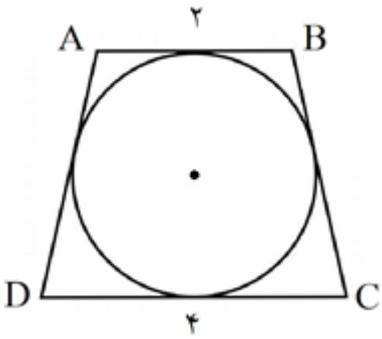
$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R \Rightarrow ۲\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

$$\Rightarrow ۴RR' = \frac{۳}{۴}R^۲ \Rightarrow ۴R' = \frac{۳}{۴}R \Rightarrow R = \frac{۱۶}{۳}R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر $\frac{۱۶}{۳}$ برابر شعاع دایره کوچکتر است.

۶۶

در شکل مقابل، ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD، بر دایره‌ای محیط شده است. مساحت این دایره کدام است؟



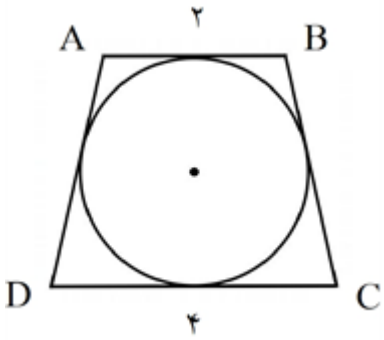
۱) ۲π ۲) ۴π ۳) ۶π ۴) ۸π

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی قطر دایرهٔ محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده ذوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد آن‌گاه $۴R^۲ = AB \times DC$ پس:

$$۴R^۲ = AB \times DC \Rightarrow ۴R^۲ = ۲ \times ۴ \Rightarrow R^۲ = ۲$$

بنابراین: $\text{مساحت دایره} = \pi R^۲ = ۲\pi$



۶۷

طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی ۳/۵ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۲۱π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۷۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره بزرگتر و R' شعاع دایره‌ی کوچکتر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند پس $OO' = R - R'$ یعنی:

$$R - R' = ۳/۵$$

از طرف دیگر:

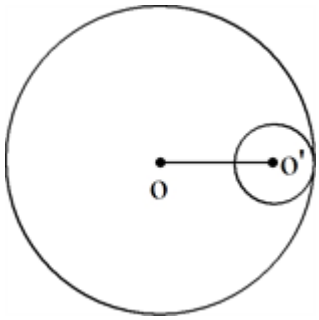
$$\text{مساحت بین دو دایره} = ۲۱\pi \Rightarrow \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۲۱\pi \Rightarrow R^۲ - R'^۲ = ۲۱$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۲۱ \xrightarrow{R-R'=۳/۵} ۳/۵(R + R') = ۲۱$$

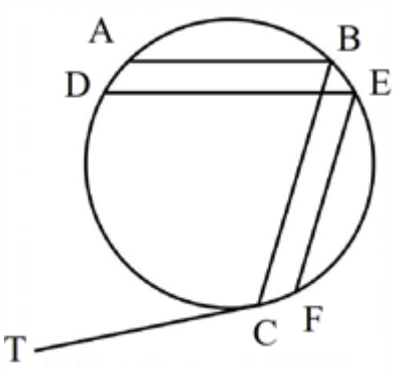
$$\Rightarrow R + R' = \frac{۲۱}{۳/۵} = \frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}} = ۶$$

بنابراین:

$$\begin{cases} R - R' = ۳/۵ \\ R + R' = ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲R' = ۶ - ۳/۵ \Rightarrow ۲R' = ۲/۵ \Rightarrow R' = \frac{۲/۵}{۲} = ۱/۲۵$$



در شکل مقابل، $AB \parallel DE$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$، $\widehat{CD} = ۱۰۰^\circ$ و $\widehat{EF} = ۸۰^\circ$ باشد، اندازه $B\widehat{C}T$ چند درجه است؟

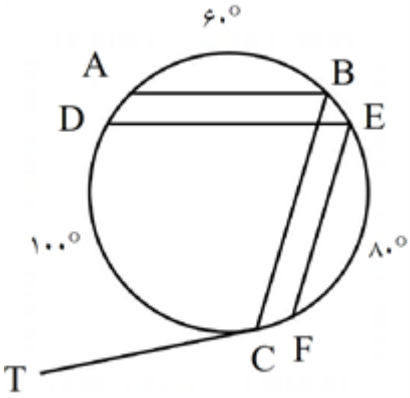


۱) ۹۰ ۲) ۹۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند.

۶۸



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CF} = \widehat{BE} = x$$

در ضمن:

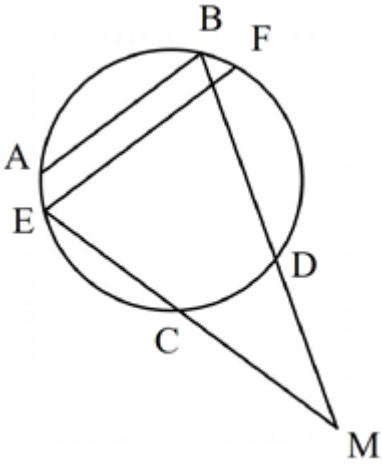
$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ + x + ۸۰^\circ + x + ۱۰۰^\circ + x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ BCT زاویهٔ ظلی است بنابراین:

$$B\widehat{C}T = \frac{\widehat{BC}}{۲} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB}}{۲} = \frac{۴۰^\circ + ۱۰۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۱۰۰^\circ$$

در شکل مقابل، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌های $\widehat{AE} = ۱۵^\circ$، $\widehat{EC} = ۸۰^\circ$ و $\widehat{FD} = ۱۰۰^\circ$ است. اگر $B\widehat{M}E = ۲۰^\circ$ باشد، اندازه زاویه $A\widehat{B}D$ چند درجه است؟



۱) ۷۱/۲۵ ۲) ۷۴ ۳) ۷۵ ۴) ۷۸/۷۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمانهای محصور بین دو وتر موازی مساویند پس:

$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE} \xrightarrow{\widehat{AE}=۱۵^\circ} \widehat{BF} = ۱۵^\circ$$

با فرض $\widehat{AB} = x$ و $\widehat{CD} = y$ می‌نویسیم.

$$\widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{CD} + \widehat{EC} + \widehat{AE} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + ۱۵^\circ + ۱۰۰^\circ + y + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = ۱۵۰^\circ \quad (۱)$$

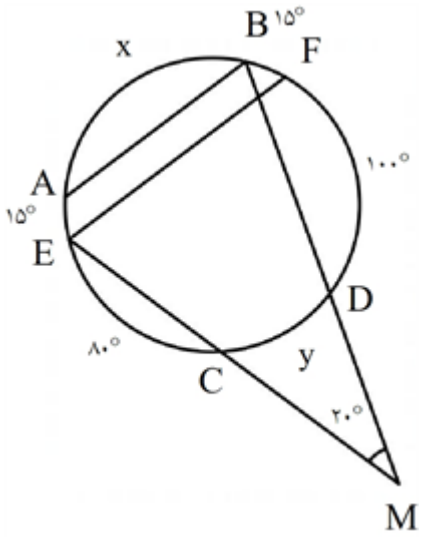
از طرف دیگر:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{EAB} - \widehat{CD}}{۲} \Rightarrow ۲۰^\circ = \frac{۱۵^\circ + x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۲۵^\circ \quad (۲)$$

$$۲,۱ \text{ از } \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۵۰^\circ \\ x - y = ۲۵^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲y = ۱۲۵^\circ \Rightarrow y = ۶۲/۵^\circ$$

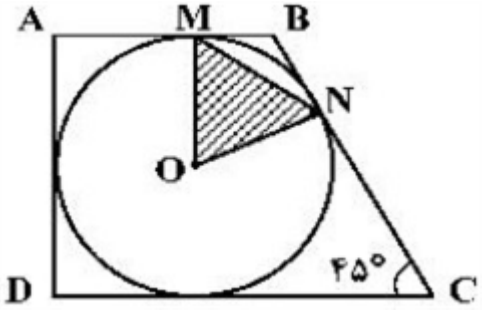
بنابراین:

$$A\widehat{B}D = \frac{\widehat{AD}}{۲} \Rightarrow A\widehat{B}D = \frac{۶۲/۵^\circ + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ}{۲} = \frac{۱۵۷/۵^\circ}{۲} = ۷۸/۷۵$$



۶۹

مطابق شکل زیر، در ذوزنقه‌ی ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت مثلث OMN، کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

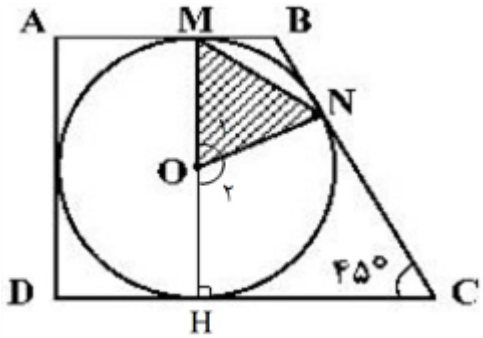
۷۰ **پاسخ:** ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع OM را امتداد می‌دهیم در این صورت شعاع OH بر DC عمود است.

چون $\widehat{N} = \widehat{H} = ۹۰^\circ$ پس چهارضلعی ONCH محاطی است در نتیجه:

$$\widehat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_۱ + \widehat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ} \widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$$

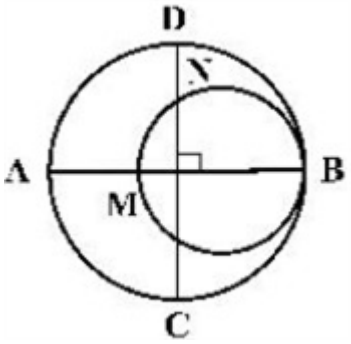
بنابراین:

$$S_{OMN} = \frac{۱}{۲} OM \times ON \operatorname{Sin} ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲}(۳)(۳)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$



۷۱

در شکل زیر، دو دایره برهم مماس و قطرهای AB و CD از دایره‌ی بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM = ۱۶$، $DN = ۱۰$ باشد، شعاع دایره‌ی کوچک‌تر، کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۲۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر باشد. چون AB محور تقارن این شکل است پس $DN = N'C = ۱۰$.

در ضمن قطر AB عمودمنصف NN' است پس $ON = ON'$.

حال با استفاده از قضیه‌ی رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.

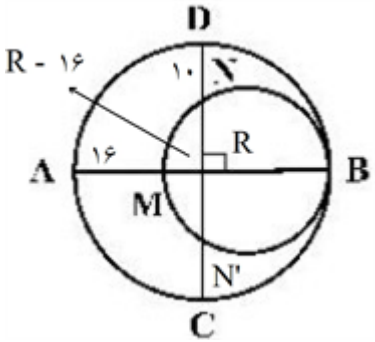
$$ON \times ON' = OB \times OM \xrightarrow{ON=ON'=R-۱۰}$$

$$(R-۱۰)^۲ = R(R-۱۶) \Rightarrow R^۲ + ۱۰۰ - ۲۰R = R^۲ - ۱۶R$$

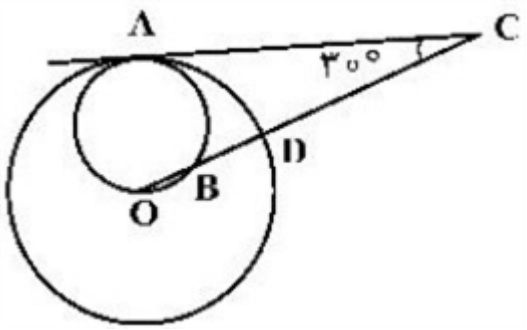
$$\Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

در شکل MB قطر دایره‌ی کوچک‌تر است از طرف دیگر MB مساوی $۲R - ۱۶$ است. پس:

$MB = ۲R - ۱۶ \Rightarrow$ قطر دایره کوچک $= ۵۰ - ۱۶ = ۳۴ \Rightarrow$ شعاع دایره کوچک $= ۱۷$



در شکل زیر، پاره‌خط AC و دایره‌ی کوچک، در نقطه‌ی A، بر دایره‌ی بزرگ به شعاع ۶ و مرکز O واقع بر محیط دایره‌ی کوچک مماس‌اند. طول پاره‌خط BD، کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۲

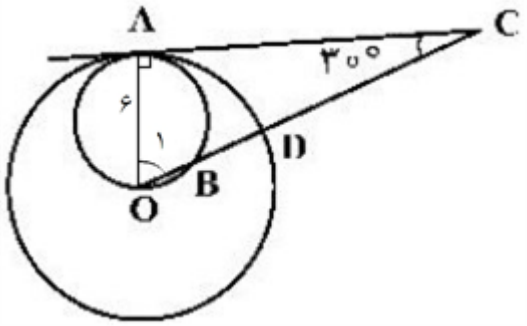
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم در این صورت $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ است.

۷۲

$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{C} = ۳۰^\circ \Rightarrow OA = \frac{۱}{۲}OC \xrightarrow{OA=۶} OC = ۱۲$$

$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱۲) = ۶\sqrt{۳}$$



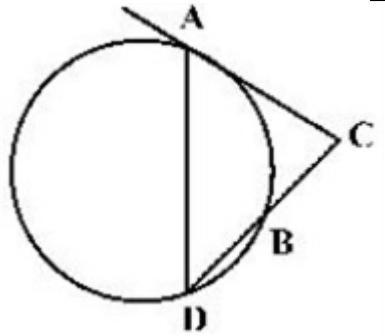
حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره‌ی کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$CA^۲ = CB \times CO \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲ = CB \times ۱۲ \Rightarrow ۱۰۸ = ۱۲BC \Rightarrow BC = ۹$$

از طرف دیگر $CD = CO - OD = ۱۲ - ۶ = ۶$ بنابراین:

$$BD = BC - CD = ۹ - ۶ = ۳$$

در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $DB = BC$ آن‌گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

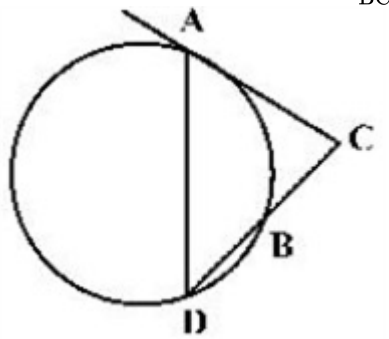
۷۳ کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

$$CA^۲ = CB \times CD \Rightarrow CA^۲ = CB\,(CB + BD) \xrightarrow{DB=BC}$$

$$CA^۲ = CB\,(CB + CB) \Rightarrow CA^۲ = ۲CB^۲ \Rightarrow CA = \sqrt{۲}\,CB$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \sqrt{۲}$$



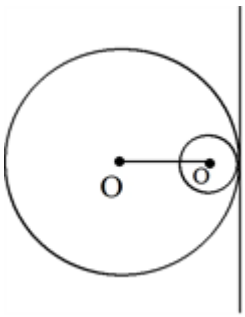
فرض کنید طول خط المرکزین دو دایره با شعاع‌های $۶a - ۱$ و $a^۲ - ۲$، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) ۶ ۴) ۷

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که مماس داخلی باشند. پس باید $OO' = |R - R'|$ باشد.

۷۴



$$OO' = |R - R'| \Rightarrow ۶ = |a^۲ - ۲ - ۶a + ۱|$$

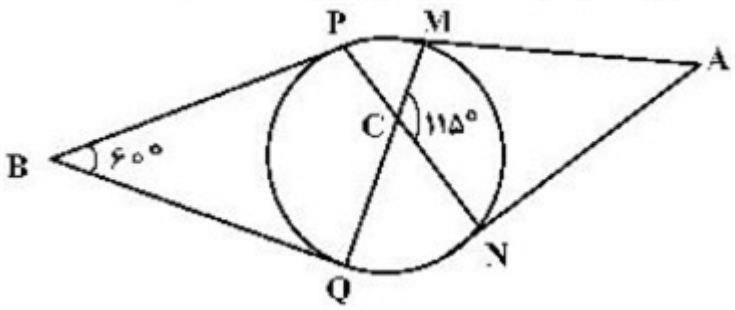
$$\Rightarrow ۶ = |a^۲ - ۶a - ۱|$$

حالت اول: $a^۲ - ۶a - ۱ = ۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a - ۷ = ۰ \Rightarrow S_۱ = ۶$

حالت دوم: $a^۲ - ۶a - ۱ = -۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a + ۵ = ۰ \Rightarrow S_۲ = ۶$

پس میانگین مقادیر ممکن برای a برابر است با: $\frac{S_۱ + S_۲}{۲} = ۶$

پاره‌خط های AM، AN، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند. زاویه‌ی MAN، به درجه، کدام است؟



۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

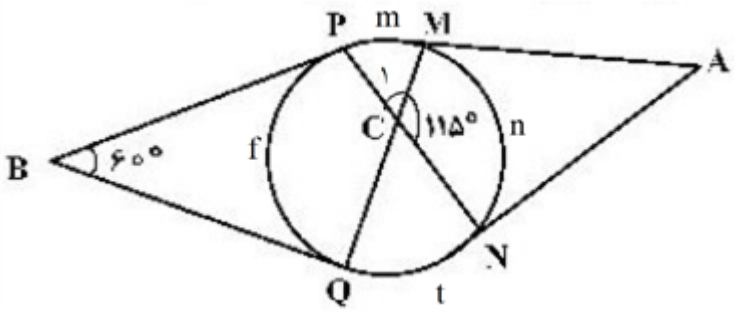
پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{PM}$ و $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{NQ}$ و $\overset{\frown}{PQ}$ به‌ترتیب برابر m و n و t و f باشند داریم:

۷۵

$$۶۰^\circ = \frac{m+n+t-f}{۲} \Rightarrow m+n+t-f = ۱۲۰ \ (۱)$$

$$\widehat{C} = ۱۱۵^\circ \Rightarrow \widehat{C}_۱ = ۱۸۰ - ۱۱۵ = ۶۵^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{m+t}{۲} = ۶۵ \Rightarrow m+t = ۱۳۰ \ (۲)$$

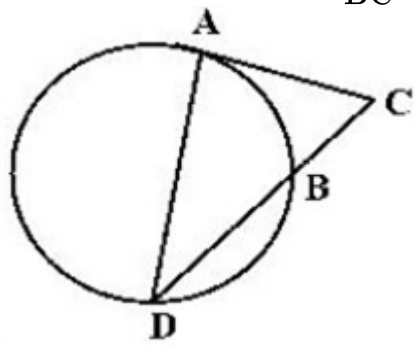


از ۱, ۲ $\Rightarrow n - f = -۱۰$

بنابراین:

$$\widehat{A} = \frac{m+f+t-n}{۲} = \frac{(m+t)+(f-n)}{۲} = \frac{۱۳۰^\circ + ۱۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$، آن‌گاه نسبت $\frac{DB}{BC}$، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۶

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

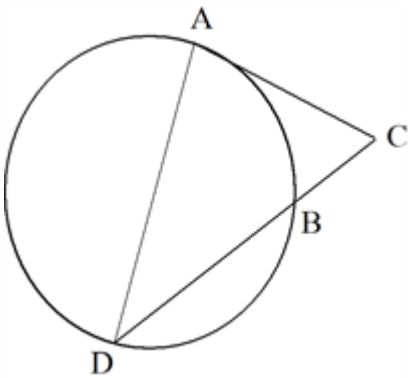
با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^{۲} = BC \times DC \ (۱)$$

از طرف دیگر بنابر فرض سؤال $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$ پس: $AC = \sqrt{۳}\,BC$

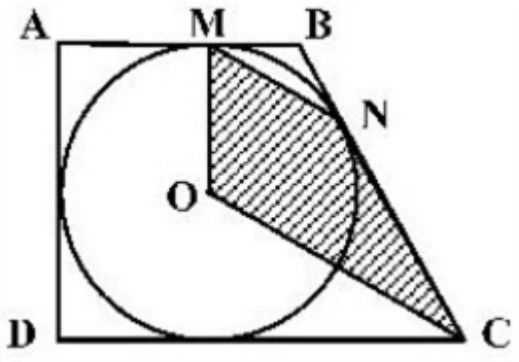
پس بنابر تساوی ۱ نتیجه می‌گیریم:

$$۳BC^{۲} = BC \times DC \Rightarrow ۳BC = DC \Rightarrow \frac{DC}{BC} = ۳ \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل از}} \frac{DB}{BC} = ۲$$



۷۷

مطابق شکل زیر ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است. اگر زاویه‌ی $M\widehat{B}N = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی OMNC، کدام است؟



۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۹\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

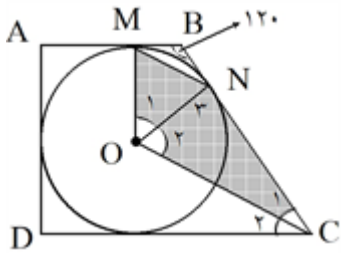
پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به N وصل می‌کنیم در این صورت ON برابر شعاع دایره است. در ضمن در چهارضلعی OMBN دو زاویه‌ی $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ قائمه هستند پس این چهارضلعی محاطی است. بنابراین $\widehat{O}_۱ + \widehat{B} = ۱۸۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ$ پس مثلث OMN متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر دو زاویه‌ی B و C در این ذوزنقه مکملند و OC نیمساز زاویه‌ی $\widehat{C}$ است پس $\widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۲ = ۶۰^\circ$ داریم.

$$\overset{\triangle}{ONC} : \widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{ON} = \frac{۱}{۲}\mathrm{OC} \xrightarrow{\mathrm{ON}=۳} \mathrm{OC} = ۶$$

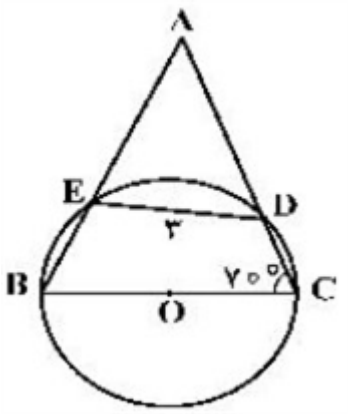
بنابراین:

$$S_{\mathrm{OMNC}} = S_{\mathrm{OMN}} + S_{\mathrm{ONC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳)^۲ + \frac{۱}{۲}\mathrm{ON} + \mathrm{OC}\,\mathrm{Sin}\,۶۰^\circ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱}{۲}(۶)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$= \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۹\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$



در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه‌ی کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟



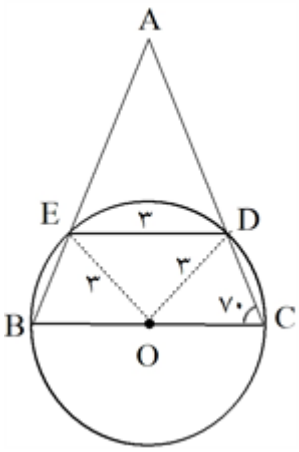
۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۸

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقاط D و E وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OED مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس $\widehat{ED} = ۶۰^\circ$. داریم:

$$\widehat{C} = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BE} + \widehat{ED}}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BE} + ۶۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = ۸۰^\circ$$

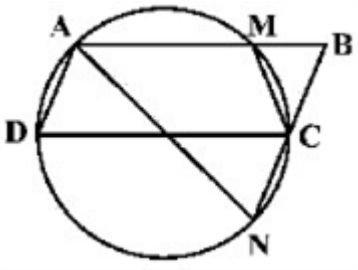


بنابراین:

$$\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{DC} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{BE}=۸۰^\circ} ۸۰^\circ + \widehat{ED} + \widehat{DC} = ۱۸۰ \Rightarrow \widehat{ED} + \widehat{DC} = ۱۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = ۱۰۰^\circ$$

در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.
تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین، کدام است؟

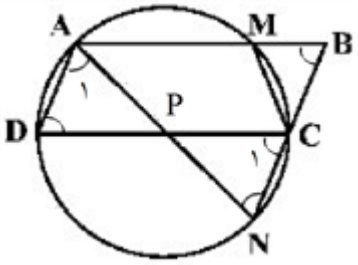


۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو زاویه‌ی محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند پس مساویند.

۷۹



مثلث ABN متساوی‌الساقین است $\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{N} \xrightarrow{\widehat{D}=\widehat{B}} \widehat{D}=\widehat{N}$

از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازیند پس دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{MC}$ که بین آن‌ها هستند مساویند پس $AD=MC$. در ضمن $AD=BC$ پس $BC=MC$ یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. در ضمن چون $AD \parallel BN$ و AN مورب، پس $\widehat{A}_۱=\widehat{N}$ و $\widehat{N}=\widehat{D}$ پس $\widehat{A}_۱=\widehat{D}$ یعنی مثلث APD متساوی‌الساقین است و چون $AD \parallel BN$ و DC مورب، پس $\widehat{D}=\widehat{C}_۱$ و $\widehat{D}=\widehat{N}$ پس $\widehat{C}_۱=\widehat{N}$ یعنی مثلث PNC نیز متساوی‌الساقین است. بنابراین چهار مثلث ABN و BMC و APD و PNC متساوی‌الساقین هستند.

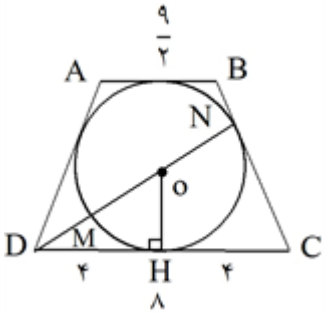
یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های $\frac{۹}{۲}$ و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله‌ی دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۹ ۲) $۳+۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) ۷/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی حاصل‌ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره‌ی محاطی است. اگر R شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه داریم:

۸۰



$$AB \times DC = ۴R^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲}\times ۸ = ۴R^۲$$
$$\Rightarrow R^۲ = ۹ \Rightarrow R = ۳$$

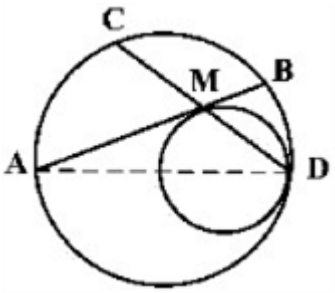
حال از مرکز O به رأس D وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصله‌ی نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً $DN = DO + R$.

برای به دست آوردن DO در مثلث قائم‌الزاویه ODH می‌نویسیم:

$$OD^۲ = OH^۲ + DH^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow OD = ۵$$

بنابراین: فاصله‌ی دورترین نقاطه دایره تا D $= OD + R = ۵ + ۳ = ۸$

در شکل زیر، دو دایره در نقطه‌ی D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایره‌ی بزرگ‌تر بر دایره‌ی داخل، در نقطه‌ی M، مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

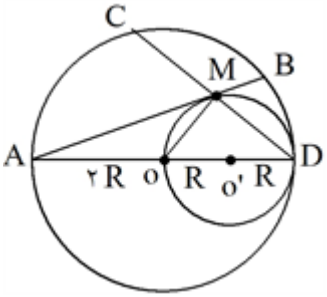
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از مرکز O به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی M زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر OD است پس $\widehat{M} = ۹۰^\circ$.

بنابراین OM بر وتر CD عمود است پس OM وتر CD نصف می‌کند یعنی $CM = MD$.

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.



$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MB = MD^۲ \quad (۱)$$

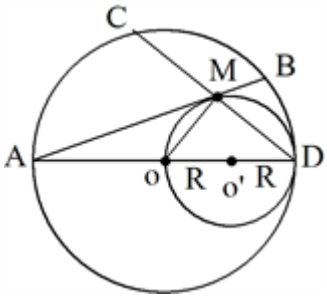
در ضمن با وصل کردن نقطه‌ی B به D نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی محاطی B که روبه‌رو به قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است قائمه است و شعاع O'M بر وتر AB عمود است پس:

$$O'M \parallel BD \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{O'A}{O'D} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{۳R}{R} = ۳ \Rightarrow MA = ۳MB \quad (۲)$$

از ۱, ۲ $\Rightarrow ۳MB \times MB = MD^۲ \Rightarrow \sqrt{۳}MB = MD$

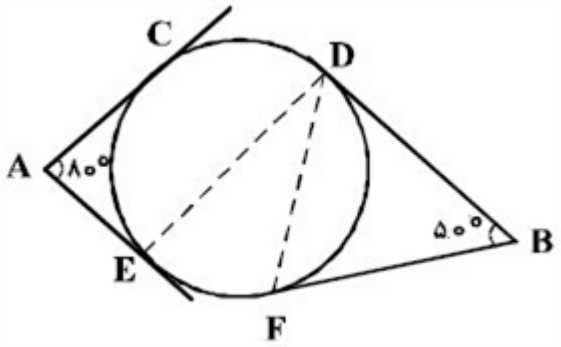
بنابراین:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MB} = \frac{\sqrt{۳}MB}{MB} = \sqrt{۳}$$



۸۱

در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویه‌ی $E\widehat{D}F$ چند درجه است؟



۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

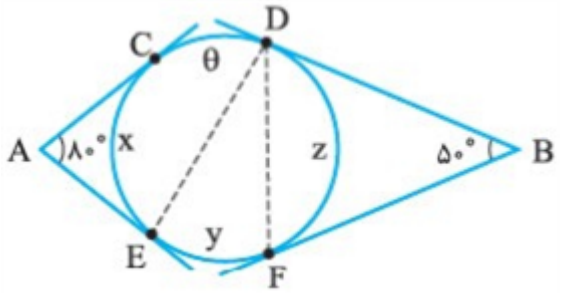
پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کمان $\overset{\frown}{CD}$ برابر θ باشد، آن‌گاه:

$$CD = ۲R\,\text{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow R = ۲R\,\text{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\,\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\theta}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

۸۲



$$\widehat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{۲} \Rightarrow ۸۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + z + y - x}{۲} \Rightarrow z + y - x = ۱۰۰^\circ \quad (۱)$$

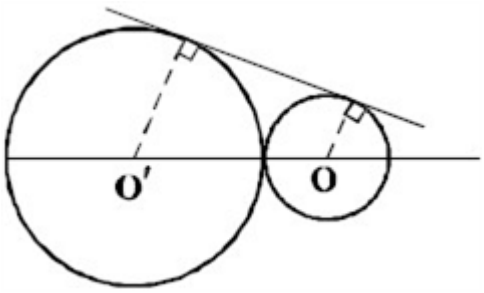
$$\widehat{B} = \frac{(\theta + x + y) - z}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + x + y - z}{۲} \Rightarrow x + y - z = ۴۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۲y = ۱۴۰^\circ \Rightarrow y = ۷۰^\circ$$

زاویهٔ EDF محاطی است و برابر با نصف کمان مقابلش است. پس:

$$E\widehat{D}F = \frac{y}{۲} = ۳۵^\circ$$ محاطی

دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر 'OO با مماس مشترک خارجی در نقطه‌ی M مشترک‌اند. فاصله‌ی M از نقطه‌ی تماس دو دایره، کدام است؟

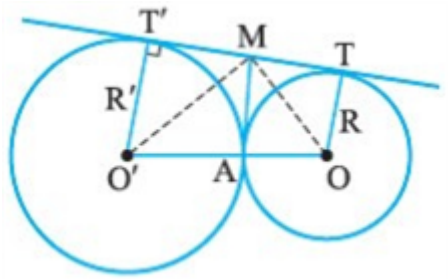


۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۳ **پاسخ:** ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۱۳^{۲} - (۹ - ۴)^{۲}} = ۱۲$

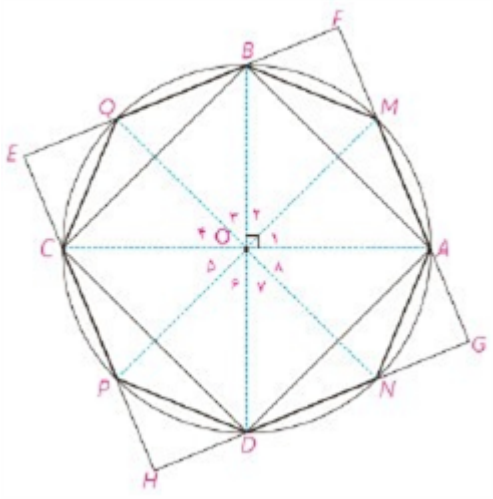


اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در M قطع کند، آن‌گاه $O'M$ نیمساز $T'\widehat{M}A$ و OM نیز نیمساز $T\widehat{M}A$ است، پس $O'\widehat{M}O = ۹۰^\circ$ است. اگر دایره‌ای به قطر OO' رسم شود از M همان نقطهٔ مطلوب است. از طرفی:

$$MA = MT' = MT = \frac{TT'}{۲} = ۶$$

۱ در چهارضلعی ABCD قطر هم‌دیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند پس مستطیل است و چون قطرها بر هم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است.

عمودمنصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:



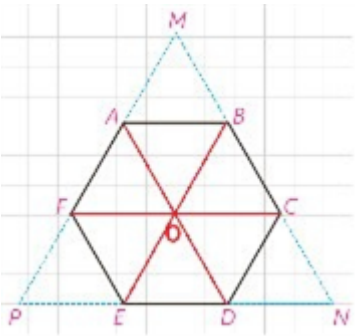
$$O_۱ = O_۲ = O_۳ = O_۴ = O_۵ = O_۶ = O_۷ = O_۸ = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{QC} = \overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{NA}$$

$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$

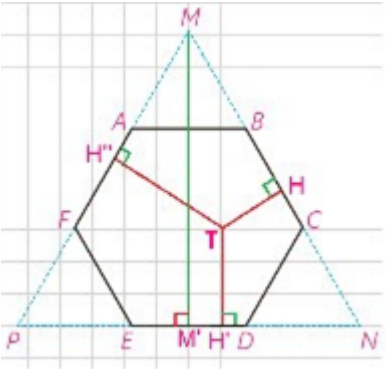
۲ الف) اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین زاویه‌های خارجی ۶۰° است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که $\widehat{M}=\widehat{N}=\widehat{P}=۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی‌الساقین است.

ب) اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم آن‌را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم و در مثلث MNP، ۹ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.



$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{\mathrm{MNP}}}=\frac{۶S_{\mathrm{MAB}}}{۹S_{\mathrm{MAB}}}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

پ) مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:



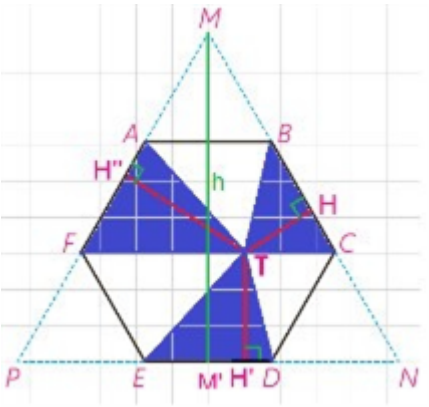
$$\mathrm{TH}+\mathrm{TH}'+\mathrm{TH}''=\mathrm{MM}'$$

ت)

$$S_{\mathrm{TBC}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TAF}}=S_{\mathrm{TAB}}+S_{\mathrm{TEF}}+S_{\mathrm{TCD}}$$

$$S_{\mathrm{TAF}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TBC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AF}.\,\mathrm{TH}''+\frac{۱}{۲}\mathrm{DE}.\,\mathrm{TH}'+\frac{۱}{۲}\mathrm{BC}.\,\mathrm{TH}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{AF}=\mathrm{ED}=\mathrm{BC}=a} S_{\mathrm{TAF}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TBC}}$$



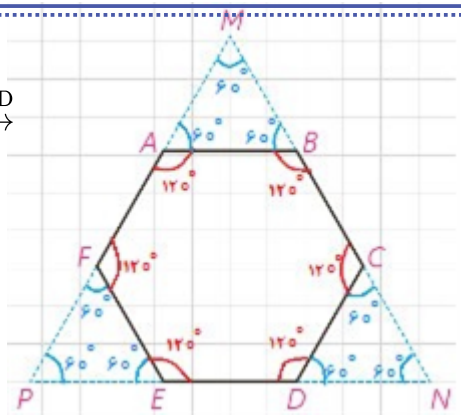
$$=\frac{۱}{۲}a\underbrace{(\mathrm{TH}''+\mathrm{TH}'+\mathrm{TH})}_{\mathrm{h}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{ah}\Rightarrow S_{\mathrm{TAF}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TBC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{ah}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{NP}.\,h\xrightarrow{\mathrm{NP}=۳a}S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۳}{۲}a.\,h\Rightarrow\frac{S_{\mathrm{TAF}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TBC}}}{S_{\mathrm{MNP}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{ah}}{\frac{۳}{۲}a.\,h}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\mathrm{TAF}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TBC}}}{S_{\mathrm{MNP}}}=\frac{۱}{۳}$$

مساحت مثلث‌های آبی رنگ $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش‌ضلعی $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث MNP و مساحت مثلث‌های سفید و آبی برابر با مساحت شش‌ضلعی است پس مساحت مثلث‌های سفید هم برابر با $\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$

۳



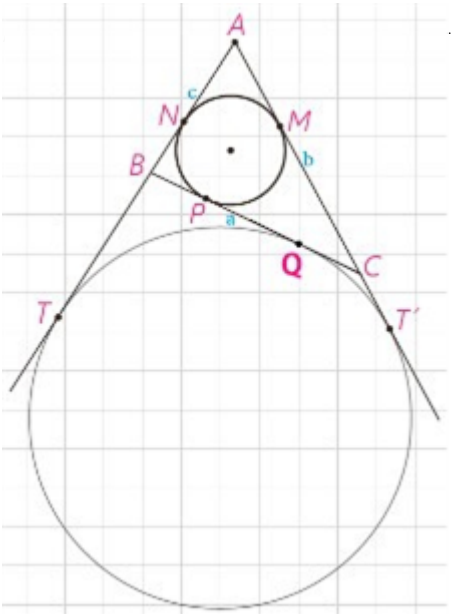
$$\overset{\triangle}{OHD}: \widehat{H} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OD=r} \text{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\,\text{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲\,HD}{r} \xrightarrow{۲HD=CD}$$

$$CD = ۲r\,\text{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n}$$

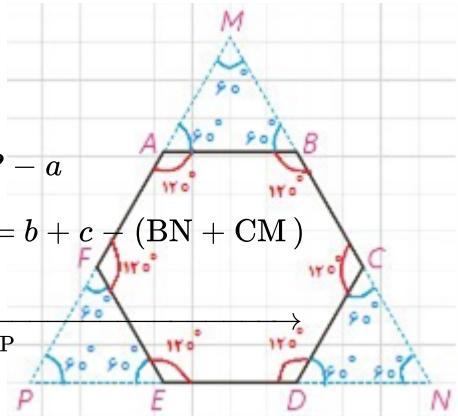
$$\overset{\triangle}{OMB}: \widehat{M} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OM=r} \text{tg}\,\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\,\text{tg}\,\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲\,MB}{r} \xrightarrow{۲MB=AB}$$

$$AB = ۲r\,\text{tg}\,\frac{۱۸۰}{n}$$

است. بنابراین مساحت مثلث‌های آبی با مساحت مثلث‌های سفید برابر است.



$$S_{TEF} + S_{TCD}$$



$$AM = AN = P - a$$

$$\left.\begin{array}{l} AN = c - BN \\ AM = b - CM \end{array}\right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM)$$

$$\xrightarrow[CM=CP,BN=BP]{AM=AN}$$

$$۲AM = b + c - \underbrace{(BP + CP)}_{a} = b + c - a \Rightarrow ۲AM = ۲p - ۲a \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$BN = BP = P - b$$

$$\left.\begin{array}{l} BN = c - AN \\ BP = a - CP \end{array}\right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP) \xrightarrow[AN=AM,CP=CM]{BP=BN}$$

$$۲BN = a + c - \underbrace{(AM + CM)}_{b} = a + c - b \Rightarrow ۲BN = ۲p - ۲b \Rightarrow BN = BP = p - b$$

$$CM = CP = P - C$$

$$\left.\begin{array}{l} CM = b - AM \\ CP = a - BP \end{array}\right\} \Rightarrow CM + CP = b + A - (AM + BP) \xrightarrow[AN=AM,BP=BN]{CM=CP}$$

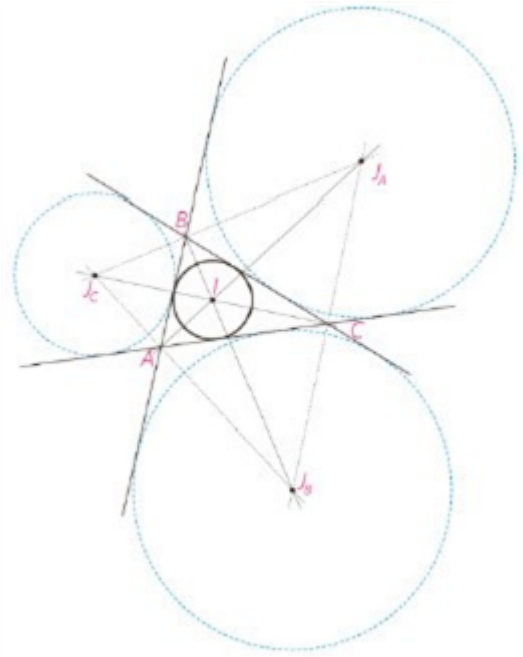
$$۲CM = b + a - \underbrace{(AN + BN)}_{c} = b + a - c \Rightarrow ۲CM = ۲p - ۲c \Rightarrow CM = CP = p - c$$

$$AT = AT' = P$$

$$AT + AT' - c + BT + b + CT' \xrightarrow[BT = BQ\,,\ CT' = CQ]{AT = AT'} ۲AT = c + b + \underbrace{BQ + CQ}_{a}$$

$$\Rightarrow ۲AT = ۲p \Rightarrow AT = AT' = p$$

۵ الف)



$$S = \mathrm{rp} \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{p}{s}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{۱}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{۱}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$$

$$= \frac{۳p-(a+b+c)}{S} = \frac{۳p-۲p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r}$$

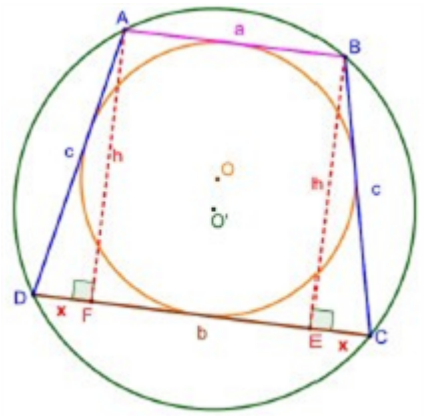
$$\Rightarrow \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۲}\mathrm{a}h_a \Rightarrow h_a = \frac{۲S}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} = \frac{a}{۲S} \\ S = \frac{۱}{۲}\mathrm{b}h_b \Rightarrow h_b = \frac{۲S}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b} = \frac{b}{۲S} \\ S = \frac{۱}{۲}\mathrm{c}h_c \Rightarrow h_c = \frac{۲S}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c} = \frac{c}{۲s} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{a}{۲S} + \frac{b}{۲S} + \frac{c}{۲S}$$

$$= \frac{a+b+c}{۲S} = \frac{۲p}{۲S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

۶ چون ذوزنقه‌ی ABCD محاطی است پس متساوی‌الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است. در نتیجه: $۲c = a + b$ و مثلث ADF قائم‌الزاویه است.



$$۲c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{۲}\ ,\ b = ۲x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲ = c^۲ - x^۲ \Rightarrow h^۲ = \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۴\,\mathrm{ab}}{۴} \Rightarrow h = \sqrt{\mathrm{ab}}$$

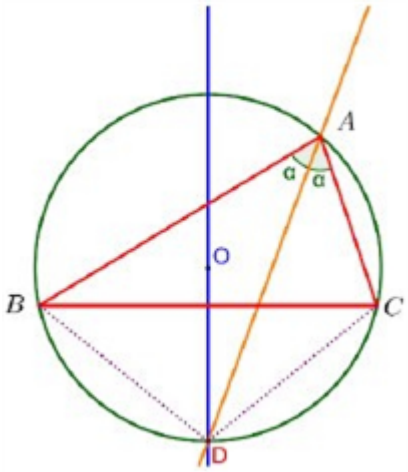
$$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(a+b)\times h \Rightarrow S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{\mathrm{ab}}$$

۷ فرض کنیم نیمساز زاویه‌ی BAC دایره‌ی محاطی را در نقطه‌ی D قطع کند:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \xrightarrow{\text{محاطی}} \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}} BD = CD$$

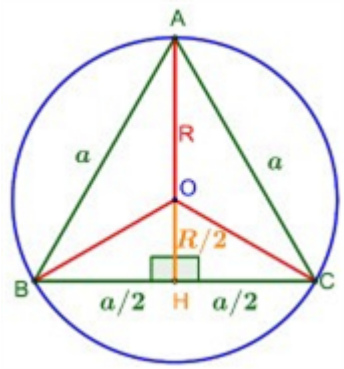
فاصله‌ی نقطه‌ی D از دو نقطه‌ی B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمودمنصف نقطه‌ی D روی عمودمنصف پاره‌خط BC نیز قرار دارد.



۸ مرکز دایره‌ی محیطی نقطه‌ی O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین:

راه اول:

$$AB = BC = AC = a \ , BH = CH = \frac{a}{۲}$$

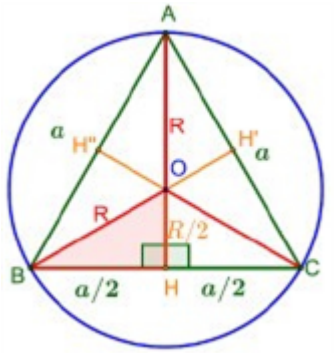


$$\left.\begin{array}{l} OH = \frac{OA}{۲} \Rightarrow OH = \frac{R}{۲} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{۲} = \frac{۳}{۲}R \\ \overset{\triangle}{ACH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^۲ + CH^۲} \\ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۳}{۲}R \Rightarrow a = \frac{۳R}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a = R\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(R\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: با توجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث هم‌نهشت ساخته شده است. این مثلث‌های به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند.

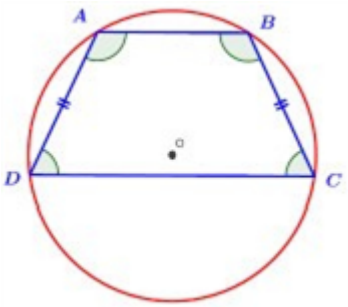


$$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^۲ - \left(\frac{R}{۲}\right)^۲} = \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = ۶S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲} \times \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

۹ فرض: ذوزنقه متساوی‌الساقین است. حکم: ذوزنقه محاطی است.



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{C}=\widehat{D}} \widehat{A} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{B} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ ذوزنقه ABCD محاطی است

فرض: ذوزنقه محاطی است. حکم: ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \ , \ AD \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{A} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

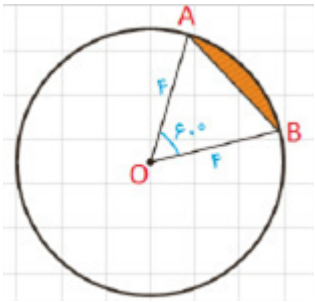
$$\Rightarrow \widehat{A} + D = \widehat{A} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \widehat{A} = \widehat{B}$$

در این ذوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق برابرند در نتیجه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

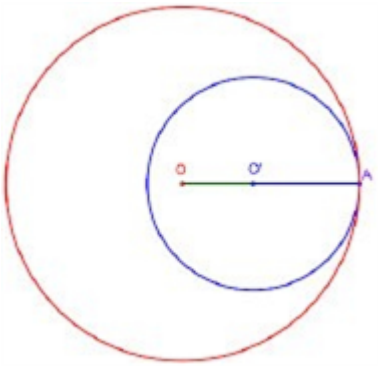
۱۰ مثلث OAB متساوی‌الساقین است و $\widehat{O} = ۶۰^\circ$ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع ۶۰ درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

$$A = \frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha - \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times r^۲ \Rightarrow A = \frac{۱۶\pi}{۳۶۰}\times ۶۰ - ۴\sqrt{۳} = \frac{۸}{۳}\pi - ۴\sqrt{۳}$$



۱۱ با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:



مساحت ناحیه محدود بین دو دایره $= \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۱۶\pi$

$$\Rightarrow R^۲ - R'^۲ = ۱۶ \Rightarrow (R - R')(R + R') = ۱۶$$

$$\xrightarrow{OO' = R - R' = ۲} ۲(R + R') = ۱۶ \Rightarrow R + R' = ۸$$

$$\begin{cases} R + R' = ۸ \\ R - R' = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵, R' = ۳$$

۱۲ مجموع سه قطاع با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می‌دهد بنابراین داریم:

طول نخ $= ۲r + ۲r + ۲r +$ محیط یک دایره $= ۶r + ۲\pi r$

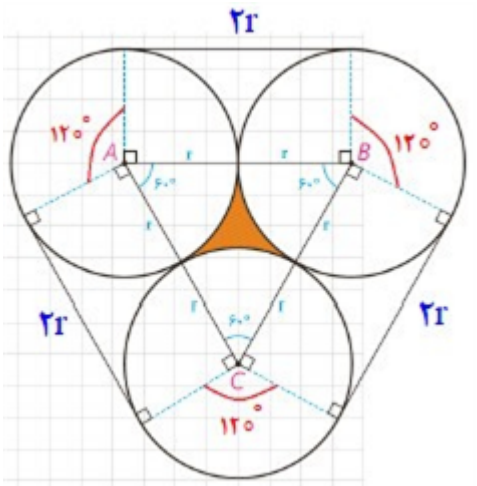
مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰ درجه تشکیل یک نیم‌دایره می‌دهد بنابراین داریم:

= مساحت ناحیه هاشور خورده

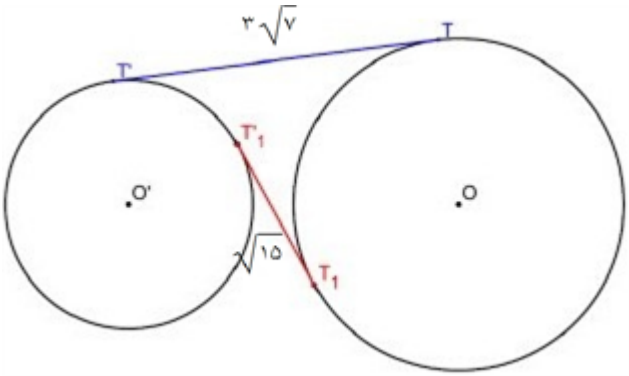
مساحت نیم‌دایره - مساحت مثلث ABC

= مساحت ناحیه هاشور خورده

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲ - \frac{\pi r^۲}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴}r^۲ - \frac{\pi r^۲}{۲} = r^۲\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}\right)$$



۱۳



$$\begin{cases} TT'^{۲} = d^{۲} - (R^{۲} - R')^{۲} \\ T_۱T_۲^{۲} = d^{۲} - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^{۲} \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

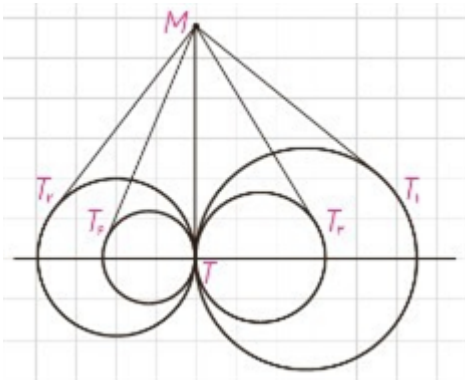
$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$

۱۴

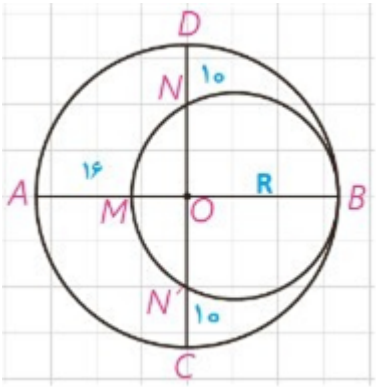
از هر نقطه خارج دایره طول مماس‌های رسم شده با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} MT &= MT_۲ \\ MT &= MT_۴ \\ MT &= MT_۱ \\ MT &= MT_۲ \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow MT = MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴$$



۱۵

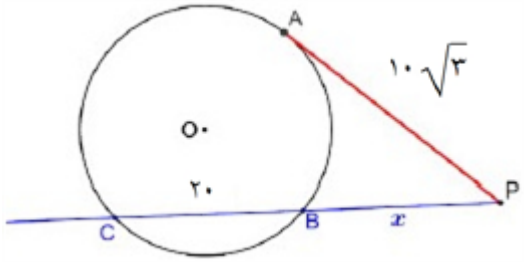


$$OB.OM = ON.ON' \Rightarrow R(R - ۱۶) = (R - ۱۰)(R - ۱۰)$$

$$R^{۲} - ۱۶R = R^{۲} - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$R' = \frac{MB}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۲R - ۱۶}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۵۰ - ۱۶}{۲} = ۱۷$$

۱۶



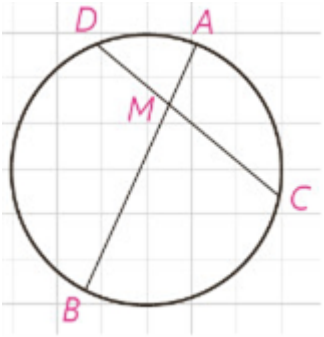
$$PA^{۲} = PB.PC \rightarrow (۱۰\sqrt{۳})^{۲} = x(x + ۲۰)$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲x - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۱۰)(x + ۳۰) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۱۰ \ , \ x = -۳۰ \ \text{غ ق ق}$$

$$\Rightarrow PB = ۱۰ \ , \ PC = ۳۰$$

۱۷



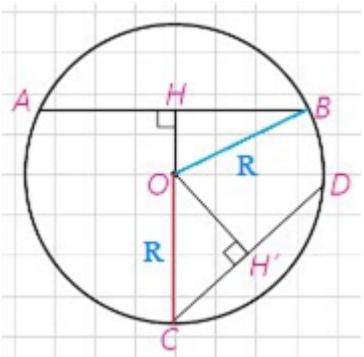
$$\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{DM}{۹}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DM=۳\Rightarrow MC=۶$$

$$DM.\,MC=AM.\,BM\xrightarrow{AM=x}۳\times۶=x(۱۱-x)$$

$$x^۲-۱۱x+۱۸=۰\Rightarrow(x-۹)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\quad,\quad x=۹$$

پس $\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$ یا $\frac{AM}{MB}=\frac{۹}{۲}$

۱۸



فرض : $AB>CD$ حکم : $OH<OH'$

$$OB=OC=R\quad,\quad BH=\frac{AB}{۲}\quad,\quad CH'=\frac{CD}{۲}\ (۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH}:H=۹۰^\circ\Rightarrow BH^۲=R^۲-OH^۲$$

$$\overset{\triangle}{OCH'}=H'=۹۰^\circ\Rightarrow CH'^۲=R^۲-OH'^۲$$

$$AB>CD\Rightarrow\frac{AB}{۲}>\frac{CD}{۲}\xrightarrow{(۱)}BH>CH'\Rightarrow BH^۲>CH'^۲\Rightarrow R^۲-OH^۲>R^۲-OH'^۲$$

$$\Rightarrow-OH^۲>-OH'^۲\xrightarrow{\times(-۱)}OH^۲<OH'^۲\xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰}OH<OH'$$

فرض : $OH<OH'$ حکم : $AB>CD$

$$OB=OC=R\quad,۲BH=AB\quad,۲CH'=CD\quad(۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH}:H=۹۰^\circ\Rightarrow OH^۲=R^۲-BH^۲$$

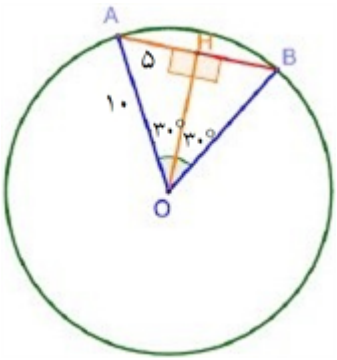
$$\overset{\triangle}{OCH'}:H'=۹۰^\circ\Rightarrow OH'^۲=R^۲-CH'^۲$$

$$OH<OH'\Rightarrow R^۲-BH^۲<R^۲-CH'^۲\Rightarrow-BH^۲<-CH'^۲\xrightarrow{\times(-۱)}BH^۲>CH'^۲$$

$$\xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰}BH>CH'\xrightarrow{(۱)}AB>CD$$

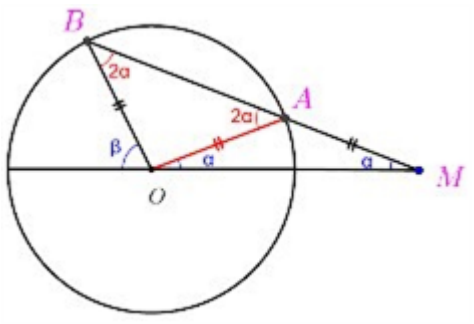
۱۹ می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH=۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$OH=\sqrt{OA^۲-AH^۲}\Rightarrow OH=\sqrt{۱۰^۲-۵^۲}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$$



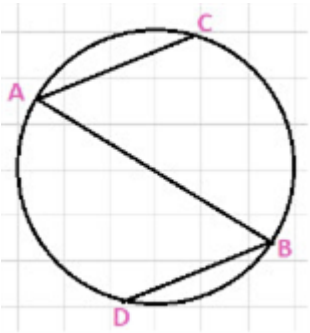
۲۰ با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAM و OAB متساوی‌الساقین هستند.

در مثلث OBM داریم:



$$\beta = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$$

۲۱

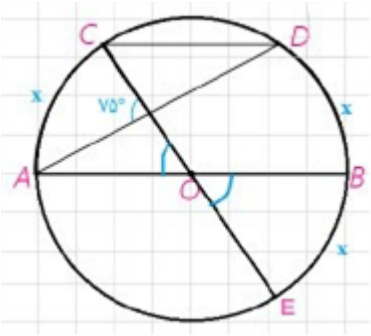


$$AC \parallel BD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB} = ۱۸۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{ACD} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ADB} - \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

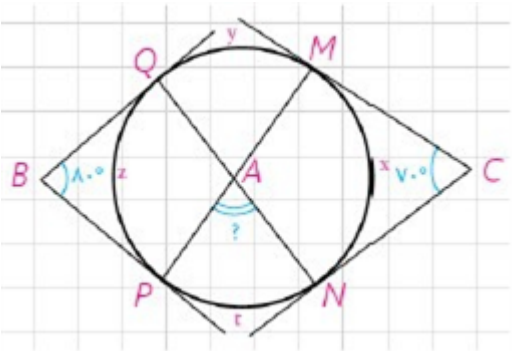
۲۲



$$۷۵^\circ = \frac{(x+x)+x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۳x \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۲۳



$$۷۰^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰^\circ = (y+z+t) - x$$

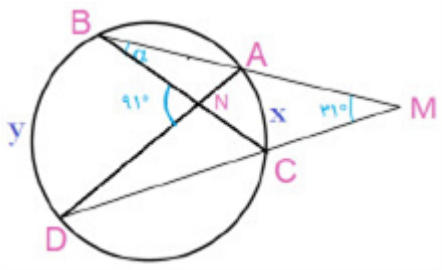
$$۸۰^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{۲} \Rightarrow ۱۸۰^\circ = (y+x+t) - z$$

$$\begin{cases} ۱۴۰^\circ = y+z+t-x \\ ۱۶۰^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow ۳۰۰^\circ = ۲(y+t)$$

$$\Rightarrow y+t = ۱۵۰^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{y+t}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

۲۴

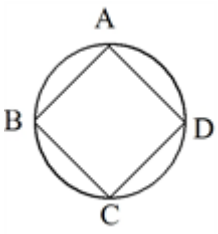


$$\widehat{M} = \frac{y-x}{۲} \Rightarrow ۲\times ۳۱^\circ = y - x$$

$$\widehat{N} = \frac{y+x}{۲} \Rightarrow ۲\times ۹۱^\circ = y + x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۶۲^\circ \\ y + x = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۲۴۴^\circ \Rightarrow y = ۱۲۲^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

۲۵ فرض کنیم چهارضلعی ABCD محاطی باشد، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{۲} \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow A + C = \frac{\widehat{BCD}}{۲} + \frac{\widehat{DAB}}{۲} = \frac{۳۶۰}{۲} = ۱۸۰$$

پس زوایای مقابل در این چهارضلعی مکمل یک‌دیگراند.

۲۶ الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸ \Rightarrow AB = ۱۶$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OA'H'$ داریم:

$$A'H'^۲ = OA'^۲ - OH'^۲ = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Rightarrow A'H' = ۶ \Rightarrow A'B' = ۱۲$$

ب) وتری که از مرکز دایره دورتر است کوچک‌تر است.

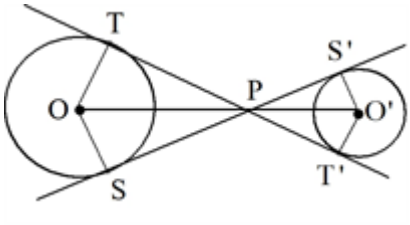
پ) بله

۲۷ فرض کنیم مماس مشترکهای داخلی دو دایره‌ی O' و O همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O' و O به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم.

$OT = OS \Rightarrow$ OP نیمساز زاویه‌ی P است.

$O'T' = O'S' \Rightarrow$ $O'P$ نیمساز زاویه‌ی P است.

می‌دانیم نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتداد هستند. پس P, O', O در یک راستا هستند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.

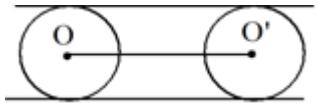


۲۸ در دو دایره مماس بیرون طول خط المرکزین با جمع شعاع‌ها برابر است.

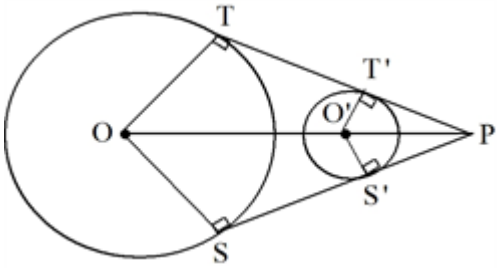
$$d = OO' = R + R' \Rightarrow d = ۹ + ۴ = ۱۳$$

مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$

۲۹ اگر دو دایره مساوی باشند مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین موازی است.



اگر دو دایره مساوی نباشند، مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین همرسند. زیرا اگر مماس مشترکهای خارجی دو دایره‌ی O و O' همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O و O' به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم.

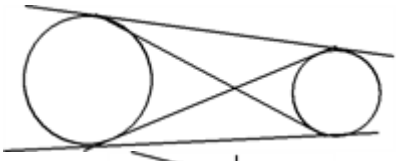


$OT = OS \rightarrow$ است. P نیمساز زاویه OP

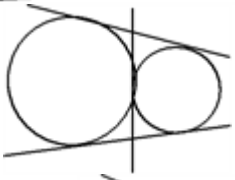
$O'T' = O'S' \rightarrow$ است. P نیمساز زاویه $O'P$

پس نقاط P, O', O در یک راستا قرار دارند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.

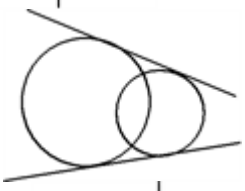
۳۰ دو دایره‌ی متخارج دارای چهار مماس مشترک هستند. : حالت اول



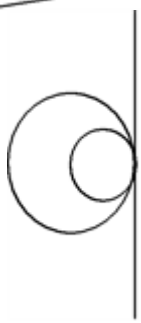
دو دایره‌ی مماس بیرونی دارای سه مماس مشترک هستند. : حالت دوم



دو دایره‌ی متقاطع دارای دو مماس مشترک هستند. : حالت سوم



دو دایره‌ی مماس درونی دارای یک مماس مشترک هستند. : حالت چهارم



دو دایره‌ی متداخل مماس مشترک ندارد. : حالت پنجم

دو دایره‌ی هم‌مرکز دارای مماس مشترک نیستند. : حالت ششم

۳۱ فرض کنیم $T_1T'_1$ مماس مشترک داخلی دو دایره باشد $O'A$ موازی $T_1T'_1$ است. پس چهارضلعی $O'AT_1T'_1$ مستطیل است. درنتیجه $O'A = T_1T'_1$. داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\triangle}{OAO'}: O'\hat{A} = OO'^2 - OA^2 \\ OO' = d \\ O'A = T_1T'_1 \\ OA = R + R' \end{array}\right\} \Rightarrow T_1T'^2_1 = d^2 - (R+R')^2 \Rightarrow T_1T'_1 = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

۳۲ ابتدا به مرکز O' و شعاع $R + R'$ دایره‌ی C'' را رسم می‌کنیم. سپس به قطر OO' دایره‌ای ترسیم می‌کنیم تا دایره C'' را در نقطه‌ی A قطع کند. در این صورت OA بر دایره‌ی C'' مماس خواهد بود. OA دایره به مرکز O را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. از نقطه‌ی T خطی موازی $O'A$ رسم می‌کنیم. این خط همان مماس مشترک داخلی دو دایره است.

۳۳
$$\left.\begin{array}{c} ID \times IE = IS \times IN \\ \text{طبق فرض} \Rightarrow IN = IE \end{array}\right\} \Rightarrow ID = IS$$

۳۴
$$x(x-2) = 4\times 12 \to x^2 - 2x - 48 = 0 \to (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -6 \end{cases}$$

$x = -6$ قابل قبول نیست. پس $x = 8$.

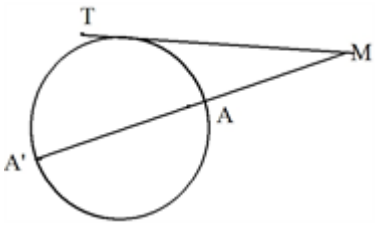
۳۵
$$4\times x = 2\times 10 \Rightarrow x = 5$$
$$6^2 = y(y+4+x) \to 36 = y(y+9)$$
$$y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y+12)(y-3) = 0 \to \begin{cases} y = 3 \\ y = -12 \end{cases}$$

$y = -12$ قابل قبول نیست. پس $y = 3$.

۳۶ از سه نقطه‌ی A', A و T یک دایره می‌گذرد. فرض کنیم MT بر این دایره مماس نباشد و دایره‌ی فوق را در نقطه‌ی دیگر مثل T' قطع کند داریم:

$$\left.\begin{array}{c} MT \times MT' = MA \times MA' \\ \text{فرض مسئله} \Rightarrow MT^2 = MA \times MA' \end{array}\right\} \Rightarrow MT \times MT' = MT^2 \Rightarrow MT = MT'$$

پس نقاط T', T بر هم مماس هستند بنابراین MT بر دایره مماس است.



۳۷ از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{MBA'}$ و $\overset{\triangle}{MAB'}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l}\text{زاویه ی محاطی } A' = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } B' = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{A'} = \widehat{B'}\\ \widehat{M} = \widehat{M}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAB'} \sim \overset{\triangle}{MBA'} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA.MA' = MB.MB'$$

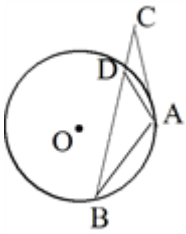
۳۸ از A به D وصل می‌کنیم.

$$\text{طبق فرض} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{زاویه ی ظلی } \widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{B} \ (۲)$$

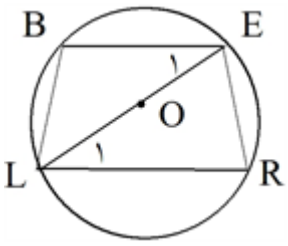
$$\text{از } (۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C} \Rightarrow AD = DC$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ متساوی‌الساقین است.



۳۹ از E به L وصل می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی $BL = ER$ نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{ER}$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{زاویه ی محاطی } \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BL}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{L}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ER}}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{BL}=\overset{\frown}{ER}} \widehat{E}_۱ = \widehat{L}_۱ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه ی خطوط}} BE \parallel LR$$



۴۰ $$\left.\begin{array}{l}\text{زاویه ی محاطی } \widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{N} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} \ (۱)$$

از طرفی چهارضلعی ANDI متوازی‌الاضلاع است پس $\widehat{N} = \hat{I}$. با توجه به رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $\widehat{M} = \hat{I}$ بنابراین $DM = DI$.

۴۱

$$\widehat{A}=\frac{x-y}{۲}\Rightarrow ۶۲=\frac{x-y}{۲}\Rightarrow x-y=۱۲۴^\circ$$

$$\begin{cases} x-y=۱۲۴^\circ \\ x+y=۳۶۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x=۴۸۴\Rightarrow x=۲۴۲^\circ\Rightarrow y=۳۶۰-۲۴۲\Rightarrow y=۱۱۸^\circ$$

۴۲

$$\widehat{BNT}=\frac{\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{AL}}{۲}\Rightarrow ۶x+۲۸=\frac{۹x+۱۷+۱۰x-۱۰}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲x+۵۶=۱۹x+۷\Rightarrow ۷x=۴۹\Rightarrow x=۷$$

بنابراین $B\widehat{N}T=۶\times۷+۲۸=۷۰$ است.

۴۳

$$\widehat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\Rightarrow ۶۰=\frac{c-a}{۲}\Rightarrow c-a=۱۲۰$$

$$b=۱۰۰\Rightarrow c+a+۱۰۰=۳۶۰\Rightarrow c+a=۲۶۰$$

$$\begin{cases} c-a=۱۲۰ \\ c+a=۲۶۰ \end{cases} \xrightarrow{-} ۲a=۱۴۰\Rightarrow a=۷۰^\circ$$

۴۴ اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند. پس $BD=BE$ و $CD=CF$

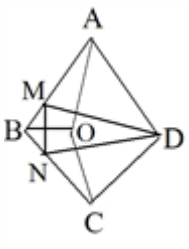
داریم: $\overset{\triangle}{ABC}$ محیط $=AB+BC+AC\rightarrow \overset{\triangle}{ABC}$ محیط $=AB+BD+DC+AC$

$\overset{\triangle}{ABC}$ محیط $=AB+BE+CF+AC\rightarrow \overset{\triangle}{ABC}$ محیط $=AE+AF\rightarrow \overset{\triangle}{ABC}$ محیط $=$ مقدار ثابت

۴۵ با توجه به فرض مسئله داریم:

$$AB+CD=AD+BC\rightarrow \cancel{AM}+BM+\cancel{CD}=\cancel{AD}+\cancel{CN}+BN\Rightarrow BM=BN$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{BMN}$ متساوی‌الساقین است. نیمساز زوایای A, B, C را رسم می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{AMD}$ نیمساز زاویه A عمودمنصف ضلع MD می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{BMN}$ نیمساز زاویه‌ی B عمودمنصف MN می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{NCD}$ نیمساز زاویه‌ی C عمودمنصف ND می‌باشد. می‌دانیم عمودمنصف‌های مثلث $\overset{\triangle}{DMN}$ همرسند. پس نیمسازهای زوایای A, B, C در یک نقطه همرسند. پس چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.



۴۶ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} YP=YS \\ LR=SL \\ OR=OQ \\ GP=GQ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} YP+LR+OR+GP=YS+SL+OQ+GQ$$

$$\Rightarrow YG+LO=YL+OG$$

۴۷ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{array}{l}AS=AP\\SD=RD\end{array}\right\}\xrightarrow{+}AS+SD=AP+RD\Rightarrow AP+RD=۱۳$$

$$\left.\begin{array}{l}BQ=BP\\CQ=CR\end{array}\right\}\xrightarrow{+}BQ+CQ=BP+CR\Rightarrow BP+CR=۹$$

$$\xrightarrow{+}AB+CD=۲۲$$

پس محیط چهارضلعی ABCD برابر است با:

$$AB+BC+CD+AD=۲۲+۹+۱۳=۴۴$$

۴۸ در مربع، قطر، نیمساز است پس $\widehat{A}_۱=۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱=۴۵^\circ$ بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{OAM}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

$$\overset{\triangle}{OAM}: AM^۲+OM^۲=OA^۲$$

$$۲OM^۲=۱^۲$$

$$OM^۲=\frac{۱}{۲}$$

$$OM=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۹ در مربع، قطر، نیمساز است پس $\widehat{A}_۱=۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱=۴۵^\circ$ بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{OAM}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

$$\overset{\triangle}{OAM}: AM^۲+OM^۲=OA^۲$$

$$۲OM^۲=۱^۲$$

$$OM^۲=\frac{۱}{۲}$$

$$OM=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵۰ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM زاویه‌ی OAM برابر ۴۵° است زیرا قطر مربع نیمساز است. پس مثلث OAM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس $OM=AM=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۵۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM زاویه‌ی OAM برابر ۴۵° است زیرا قطر مربع نیمساز است. پس مثلث OAM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس $OM=AM=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۵۲ AP طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره است.

$$\overset{\triangle}{AMP}: AP^۲=AM^۲+MP^۲$$

$$AP^۲=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲+\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲$$

$$AP^۲=\frac{۱}{۲}+۱+\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲}\Rightarrow AP^۲=۲-\sqrt{۲}\Rightarrow AP=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

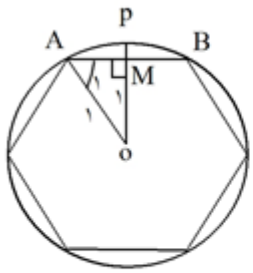
۵۳ AP طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره است.

$$\overset{\triangle}{AMP}: AP^{۲} = AM^{۲} + MP^{۲}$$

$$AP^{۲} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} + \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}$$

$$AP^{۲} = \frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲} \Rightarrow AP^{۲} = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

۵۴ در شکل مقابل AP به شعاع ۱ ، ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. از طرفی اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است. OA نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۶۰^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۳۰^\circ$ داریم.



$$\overset{\triangle}{OAM}: \widehat{O}_۱ = ۳۰ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲} OA = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}$$

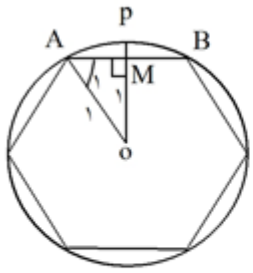
$$\overset{\triangle}{OAM}: OM^{۲} = OA^{۲} - AM^{۲} = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$PM = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{APM}: AP^{۲} = AM^{۲} + PM^{۲} \rightarrow AP^{۲} = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

۵۵ در شکل مقابل AP به شعاع ۱ ، ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. از طرفی اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است. OA نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۶۰^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۳۰^\circ$ داریم.



$$\overset{\triangle}{OAM}: \widehat{O}_۱ = ۳۰ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲} OA = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OAM}: OM^{۲} = OA^{۲} - AM^{۲} = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$PM = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

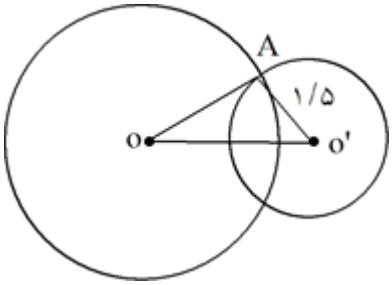
$$\overset{\triangle}{APM}: AP^{۲} = AM^{۲} + PM^{۲} \rightarrow AP^{۲} = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

۵۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطهٔ تلاقی دو دایره به مرکز O و O' یعنی A بر هم عمودند پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{OAO'}: OA^{۲} = OO^{۲} - O'\check{A}$$

$$\Rightarrow OA = ۲/۵^{۲} - ۱/۵^{۲} = ۶/۲۵ - ۲/۲۵ = ۴ \Rightarrow OA = ۲$$



۵۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های روی شکل و استفاده از قضیهٔ روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

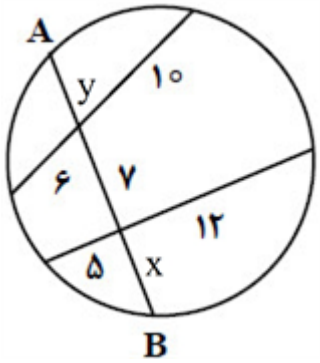
$$\left.\begin{array}{l} ۶\times۱۰ = y(۷+x) \Rightarrow ۶۰ = ۷y + xy \\ ۵\times۱۲ = x(۷+y) \Rightarrow ۶۰ = ۷x + xy \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

بنابراین:

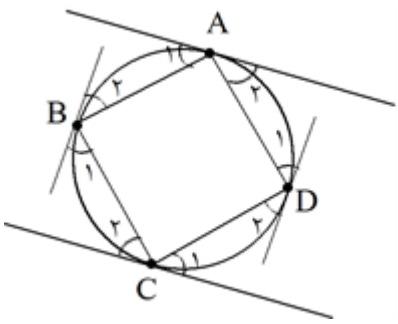
$$۶\times۱۰ = y(۷+x) \xrightarrow{y=x} ۶۰ = x(۷+x) \Rightarrow x^{۲} + ۷x - ۶۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۲)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

پس: $AB = x + y + ۷ = ۵ + ۵ + ۷ = ۱۷$



۵۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:



زاویه ظلی : $\widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}, \widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$

زاویه ظلی : $\widehat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}, \widehat{B}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}, \widehat{C}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}, \widehat{D}_۲ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$

بنابراین:

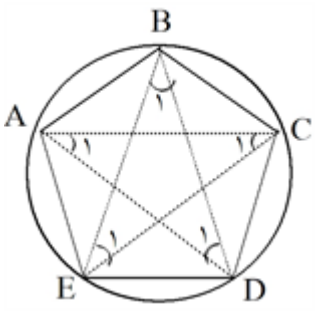
$$\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ + \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ + \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ + \widehat{D}_۱ + \widehat{D}_۲$$

$$= \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = ۳۶۰^\circ$$

۵۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول: این سؤال را در حالت خاص که پنج‌ضلعی منتظم است حل می‌کنیم. پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره، دایره را به پنج قسمت مساوی $\frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$ تقسیم می‌کند. زاویهٔ محاطی $\widehat{D}_۱$ روبه‌رو به وتر AB است پس:

$$\widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$

به همین ترتیب زاویه‌های محاطی روبه‌رو به اضلاع این پنج‌ضلعی منتظم برابر ۳۶° است بنابراین مجموع این زاویه‌ها $۵\times۳۶^\circ = ۱۸۰^\circ$ است.

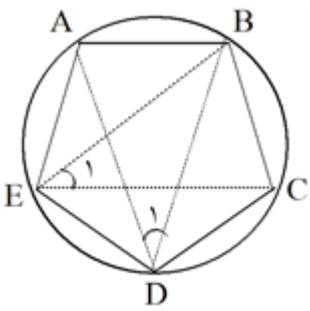


راه‌حل دوم: فرض کنیم ABCDE پنج‌ضلعی محاط در دایره باشد داریم:

$$\widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}, \widehat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ED}}{۲}, \widehat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}, \widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

در نتیجه:

$$\widehat{A}_۱ + \widehat{B}_۱ + \widehat{C}_۱ + \widehat{D}_۱ + \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$



۶۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود.

$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$P = \frac{۹+۸+۷}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

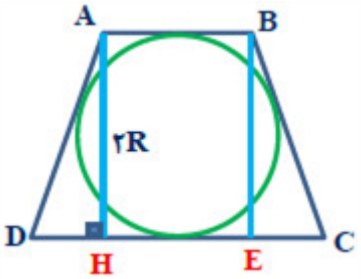
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۲(۱۲-۹)(۱۲-۸)(۱۲-۷)} = \sqrt{۱۲\times۳\times۴\times۵}$$

$$= \sqrt{۱۲^۲\times۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۱۲-۷} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵} = ۲/۴\sqrt{۵}$$

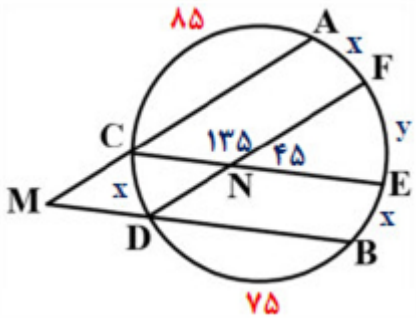
۶۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم ذوزنقه بر دایره‌ای به شعاع R محاط باشد، پس ارتفاع ذوزنقه برابر $۲R$ است. با رسم ارتفاع‌های AH و BE داریم:



$$DH = CE = \frac{DC-AB}{۲} = \frac{۱۶}{۲} \Rightarrow DH = ۸$$

$$AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ \Rightarrow AD^۲ = (۴\sqrt{۵})^۲ + ۸ = ۱۴۴ \Rightarrow AD = ۱۲$$

۶۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساویند، پس $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BE}$ و $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CD}$ اکنون با توجه به شکل می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{l} F\widehat{N}E = ۴۵^\circ = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۹۰^\circ \\ ۸۵^\circ + ۷۵^\circ + ۳x + y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳x + y = ۲۰۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲x = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۵ \\ y = ۳۵ \end{cases}$$

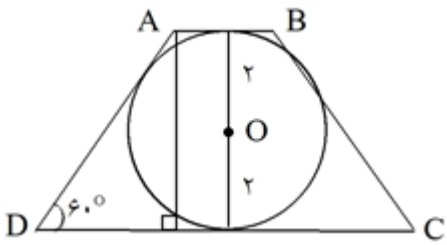
۶۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طول ارتفاع ذوزنقه برابر طول قطر دایره یعنی برابر ۴ است. از طرفی در مثلث ADH داریم:

$$\text{Sin}\, ۶۰^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

چهارضلعی ABCD، یک چهارضلعی محیطی است، پس داریم:

$$AB + CD = AD + BC = ۲AD = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AH\,(AB + CD) = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{۱۶}{\sqrt{۳}} = \frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$



۶۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث BDC داریم:

$$\widehat{D}_{۲}+\widehat{B}_{۱}+\widehat{C}_{۱}=۱۸۰^{\circ}$$

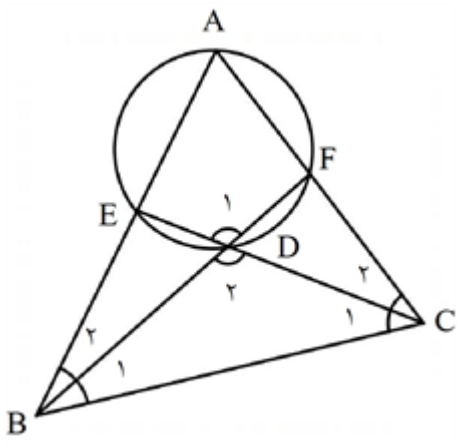
BD و CD نیمساز زوایای B و C هستند، پس داریم:

$$\widehat{D}_{۲}+\frac{\widehat{B}}{۲}+\frac{\widehat{C}}{۲}=۱۸۰^{\circ}\ (۱)$$

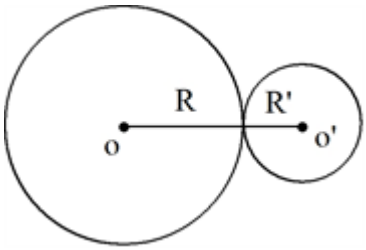
از طرفی چهارضلعی AEDF محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{A}+\widehat{D}_{۱}=۱۸۰^{\circ}\xrightarrow{\widehat{D}_{۱}=\widehat{D}_{۲}}\widehat{A}+\widehat{D}_{۲}=۱۸۰^{\circ}\ (۲)$$

$$۱,۲\Rightarrow\widehat{A}=\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۲}\Rightarrow\widehat{A}=\frac{۱۸۰^{\circ}-\widehat{A}}{۲}\Rightarrow ۲\widehat{A}=۱۸۰^{\circ}-\widehat{A}\Rightarrow ۳\widehat{A}=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow\widehat{A}=۶۰^{\circ}$$



۶۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول خط المرکزین دو دایره مماس خارج مساوی $R+R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $۲\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال داریم.



$$\text{طول مماس مشترک خارجی}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R\Rightarrow ۲\sqrt{RR'}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

$$\Rightarrow ۴RR'=\frac{۳}{۴}R^{۲}\Rightarrow ۴R'=\frac{۳}{۴}R\Rightarrow R=\frac{۱۶}{۳}R'$$

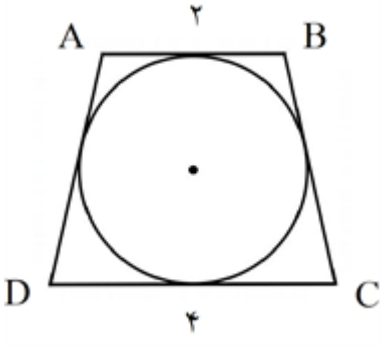
بنابراین شعاع دایره بزرگتر $\frac{۱۶}{۳}$ برابر شعاع دایره کوچکتر است.

۶۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی قطر دایرهٔ محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده ذوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد آن‌گاه $۴R^۲ = AB \times DC$

پس:

$$۴R^۲ = AB \times DC \Rightarrow ۴R^۲ = ۲ \times ۴ \Rightarrow R^۲ = ۲$$

بنابراین: مساحت دایره $= \pi R^۲ = ۲\pi$



۶۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره بزرگتر و R' شعاع دایره‌ی کوچکتر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند پس $OO' = R - R'$ یعنی:

$$R - R' = ۳/۵$$

از طرف دیگر:

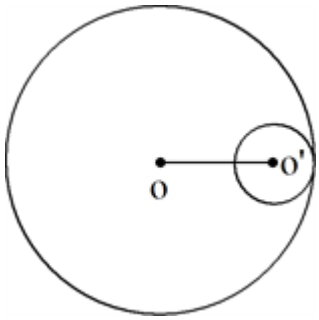
$$\text{مساحت بین دو دایره} = ۲۱\pi \Rightarrow \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۲۱\pi \Rightarrow R^۲ - R'^۲ = ۲۱$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۲۱ \xrightarrow{R - R' = ۳/۵} ۳/۵(R + R') = ۲۱$$

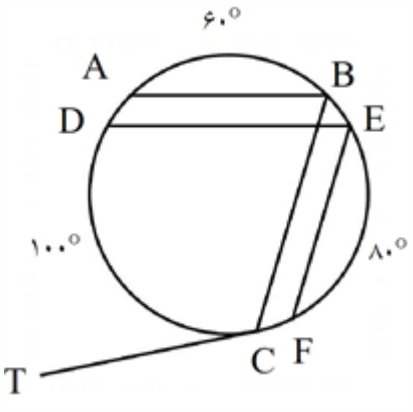
$$\Rightarrow R + R' = \frac{۲۱}{۳/۵} = \frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}} = ۶$$

بنابراین:

$$\begin{cases} R - R' = ۳/۵ \\ R + R' = ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲R' = ۶ - ۳/۵ \Rightarrow ۲R' = ۲/۵ \Rightarrow R' = \frac{۲/۵}{۲} = ۱/۲۵$$



۶۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند.



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BE} = x$$

در ضمن:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ + x + ۸۰^\circ + x + ۱۰۰^\circ + x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ BCT زاویهٔ ظلی است بنابراین:

$$B\hat{C}T = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۴۰^\circ + ۱۰۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۱۰۰^\circ$$

۶۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمانهای محصور بین دو وتر موازی مساویند پس:

$$AB \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{AE} \xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=۱۵^\circ} \overset{\frown}{BF} = ۱۵^\circ$$

با فرض $\overset{\frown}{AB} = x$ و $\overset{\frown}{CD} = y$ می‌نویسیم.

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{FD} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EC} + \overset{\frown}{AE} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + ۱۵^\circ + ۱۰۰^\circ + y + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = ۱۵۰^\circ \ (۱)$$

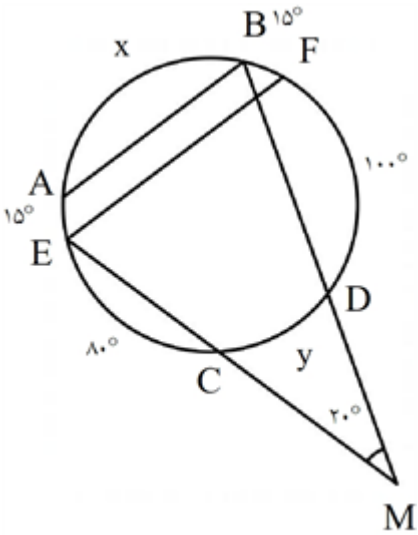
از طرف دیگر:

$$\widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{EAB} - \overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۲۰^\circ = \frac{۱۵^\circ + x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۲۵^\circ \ (۲)$$

$$۲,۱ \text{ از} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۵۰^\circ \\ x - y = ۲۵^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲y = ۱۲۵^\circ \Rightarrow y = ۶۲/۵^\circ$$

بنابراین:

$$A\widehat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow A\widehat{B}D = \frac{۶۲/۵^\circ + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ}{۲} = \frac{۱۵۷/۵^\circ}{۲} = ۷۸/۷۵$$

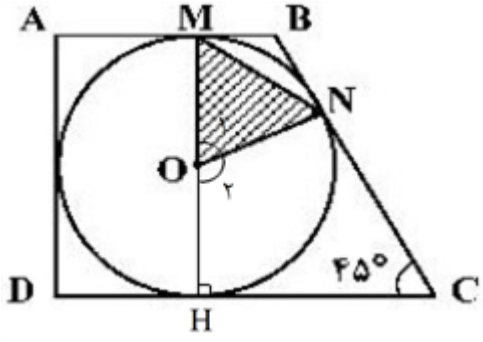


۷۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع OM را امتداد می‌دهیم در این صورت شعاع OH بر DC عمود است. چون $\widehat{N} = \widehat{H} = ۹۰^\circ$ پس چهارضلعی ONCH محاطی است در نتیجه:

$$\widehat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_۱+\widehat{O}_۲=۱۸۰^\circ} \widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$$

بنابراین:

$$S_{\text{OMN}} = \frac{۱}{۲}\text{OM} \times \text{ON Sin } ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲}(۳)(۳)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$



۷۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر باشد. چون AB محور تقارن این شکل است پس $\text{DN} = N'C = ۱۰$.

در ضمن قطر AB عمودمنصف NN' است پس $\text{ON} = \text{ON}'$.

حال با استفاده از قضیه‌ی رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.

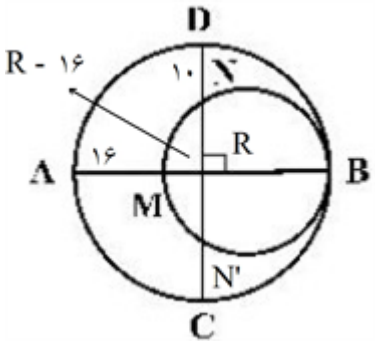
$$\text{ON} \times \text{ON}' = \text{OB} \times \text{OM} \xrightarrow{\text{ON}=\text{ON}'=R-۱۰}$$

$$(R-۱۰)^۲ = R(R-۱۶) \Rightarrow R^۲ + ۱۰۰ - ۲۰R = R^۲ - ۱۶R$$

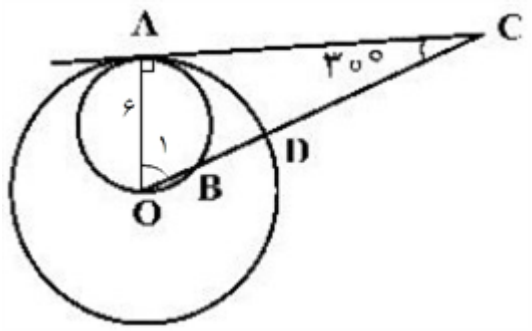
$$\Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

در شکل MB قطر دایره‌ی کوچک‌تر است از طرف دیگر MB مساوی $۲R - ۱۶$ است. پس:

$\text{MB} = ۲R - ۱۶ \Rightarrow$ قطر دایره کوچک $= ۵۰ - ۱۶ = ۳۴ \Rightarrow$ شعاع دایره کوچک $= ۱۷$



۷۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم در این صورت $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ است.



$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{C} = ۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{OA} = \frac{۱}{۲}\mathrm{OC} \xrightarrow{\mathrm{OA}=۶} \mathrm{OC} = ۱۲$$

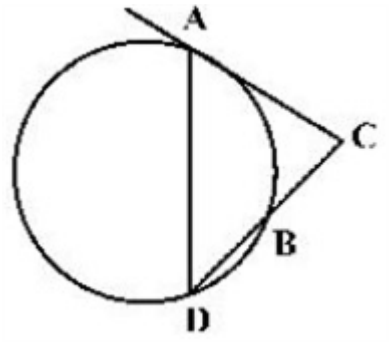
$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \mathrm{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{OC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱۲) = ۶\sqrt{۳}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره‌ی کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$\mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB} \times \mathrm{CO} \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲ = \mathrm{CB} \times ۱۲ \Rightarrow ۱۰۸ = ۱۲\mathrm{BC} \Rightarrow \mathrm{BC} = ۹$$

از طرف دیگر $\mathrm{CD} = \mathrm{CO} - \mathrm{OD} = ۱۲ - ۶ = ۶$ بنابراین: $\mathrm{BD} = \mathrm{BC} - \mathrm{CD} = ۹ - ۶ = ۳$

۷۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

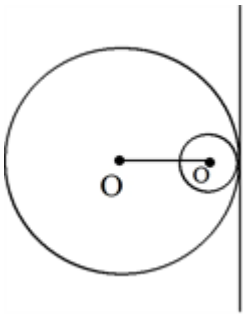


$$\mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB} \times \mathrm{CD} \Rightarrow \mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB}\,(\mathrm{CB} + \mathrm{BD}) \xrightarrow{\mathrm{DB}=\mathrm{BC}}$$

$$\mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB}\,(\mathrm{CB} + \mathrm{CB}) \Rightarrow \mathrm{CA}^۲ = ۲\mathrm{CB}^۲ \Rightarrow \mathrm{CA} = \sqrt{۲}\,\mathrm{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \sqrt{۲}$$

۷۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که مماس داخلی باشند. پس باید $\mathrm{OO}' = |R - R'|$ باشد.



$$\mathrm{OO}' = |R - R'| \Rightarrow ۶ = |a^۲ - ۲ - ۶a + ۱|$$

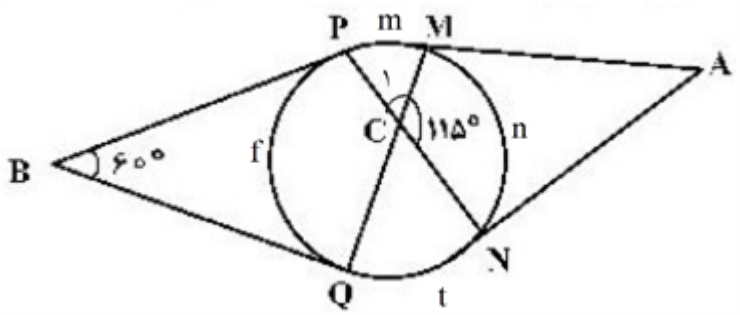
$$\Rightarrow ۶ = |a^۲ - ۶a - ۱|$$

حالت اول: $a^۲ - ۶a - ۱ = ۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a - ۷ = ۰ \Rightarrow S_۱ = ۶$

حالت دوم: $a^۲ - ۶a - ۱ = -۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a + ۵ = ۰ \Rightarrow S_۲ = ۶$

پس میانگین مقادیر ممکن برای a برابر است با: $\dfrac{S_۱ + S_۲}{۲} = ۶$

۷۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اندازه‌ی کمان‌های $\widehat{PM}$ و $\widehat{MN}$ و $\widehat{NQ}$ و $\widehat{PQ}$ به‌ترتیب برابر m و n و t و f باشند داریم:



$$۶۰^\circ = \frac{m+n+t-f}{۲} \Rightarrow m+n+t-f = ۱۲۰ \ (۱)$$

$$\widehat{C} = ۱۱۵^\circ \Rightarrow \widehat{C}_۱ = ۱۸۰ - ۱۱۵ = ۶۵^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{m+t}{۲} = ۶۵ \Rightarrow m+t = ۱۳۰ \ (۲)$$

از ۱, ۲ $\Rightarrow n - f = -۱۰$

بنابراین:

$$\widehat{A} = \frac{m+f+t-n}{۲} = \frac{(m+t)+(f-n)}{۲} = \frac{۱۳۰^\circ + ۱۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

۷۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

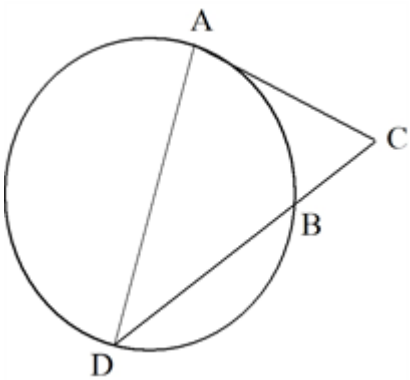
$$AC^۲ = BC \times DC \ (۱)$$

از طرف دیگر بنابر فرض سؤال $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$ پس:

$$AC = \sqrt{۳}\,BC$$

پس بنابر تساوی ۱ نتیجه می‌گیریم:

$$۳BC^۲ = BC \times DC \Rightarrow ۳BC = DC \Rightarrow \frac{DC}{BC} = ۳ \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل از}} \frac{DB}{BC} = ۲$$



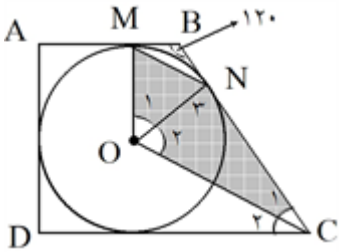
۷۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به N وصل می‌کنیم در این صورت ON برابر شعاع دایره است. در ضمن در چهارضلعی OMBN دو زاویه‌ی $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ قائمه هستند پس این چهارضلعی محاطی است. بنابراین $\widehat{O}_۱ + \widehat{B} = ۱۸۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ$ پس مثلث OMN متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر دو زاویه‌ی B و C در این ذوزنقه مکملند و OC نیمساز زاویه‌ی $\widehat{C}$ است پس $\widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۲ = ۶۰^\circ$ داریم.

$$\overset{\triangle}{ONC} : \widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{ON} = \frac{۱}{۲}\mathrm{OC} \xrightarrow{\mathrm{ON}=۳} \mathrm{OC} = ۶$$

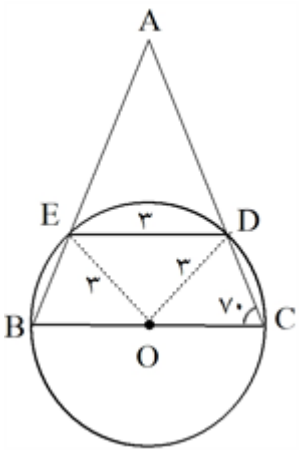
بنابراین:

$$S_{\mathrm{OMNC}} = S_{\mathrm{OMN}} + S_{\mathrm{ONC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳)^۲ + \frac{۱}{۲}\mathrm{ON} + \mathrm{OC}\,\mathrm{Sin}\,۶۰^\circ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱}{۲}(۶)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$= \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۹\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$



۷۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقاط D و E وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OED مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس $\widehat{\mathrm{ED}} = ۶۰^\circ$. داریم:



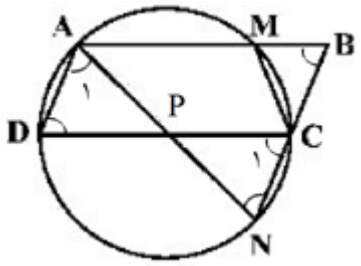
$$\widehat{C} = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{\mathrm{BE}} + \widehat{\mathrm{ED}}}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{\mathrm{BE}} + ۶۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \widehat{\mathrm{BE}} = ۸۰^\circ$$

بنابراین:

$$\widehat{\mathrm{BE}} + \widehat{\mathrm{ED}} + \widehat{\mathrm{DC}} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{\mathrm{BE}}=۸۰^\circ} ۸۰^\circ + \widehat{\mathrm{ED}} + \widehat{\mathrm{DC}} = ۱۸۰ \Rightarrow \widehat{\mathrm{ED}} + \widehat{\mathrm{DC}} = ۱۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{EDC}} = ۱۰۰^\circ$$

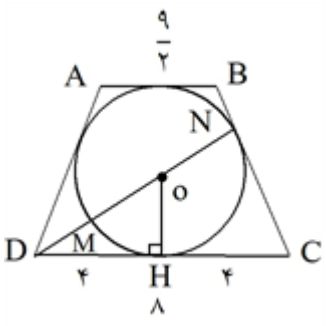
۷۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو زاویه‌ی محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند پس مساویند.



$\widehat{D} = \widehat{N} \xrightarrow{\widehat{D}=\widehat{B}} \widehat{B} = \widehat{N} \Rightarrow$ مثلث ABN متساوی‌الساقین است

از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازیند پس دو کمان $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{MC}$ که بین آن‌ها هستند مساویند پس $AD = MC$. در ضمن $AD = BC$ پس $BC = MC$ یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. در ضمن چون $AD \parallel BN$ و AN مورب، پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{N}$ و $\widehat{N} = \widehat{D}$ پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{D}$ یعنی مثلث APD متساوی‌الساقین است و چون $AD \parallel BN$ و DC مورب، پس $\widehat{D} = \widehat{C}_۱$ و $\widehat{D} = \widehat{N}$ پس $\widehat{C}_۱ = \widehat{N}$ یعنی مثلث PNC نیز متساوی‌الساقین است. بنابراین چهار مثلث ABN و BMC و APD و PNC متساوی‌الساقین هستند.

۸۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی حاصل‌ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره‌ی محاطی است. اگر R شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه داریم:



$$AB \times DC = ۴R^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲} \times ۸ = ۴R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۹ \Rightarrow R = ۳$$

حال از مرکز O به رأس D وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصله‌ی نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً $DN = DO + R$.

برای به دست آوردن DO در مثلث قائم‌الزاویه ODH می‌نویسیم:

$$OD^۲ = OH^۲ + DH^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow OD = ۵$$

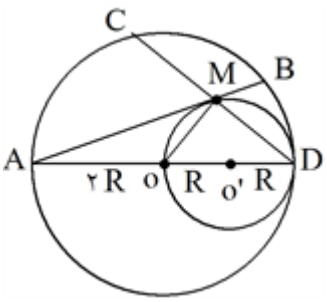
بنابراین: فاصله‌ی دورترین نقاطه دایره تا D $= OD + R = ۵ + ۳ = ۸$

۸۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از مرکز O به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی M زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر OD است پس $\widehat{M} = ۹۰^\circ$.

بنابراین OM بر وتر CD عمود است پس OM وتر CD نصف می‌کند یعنی $CM = MD$.

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.



$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MB = MD^۲ \quad (۱)$$

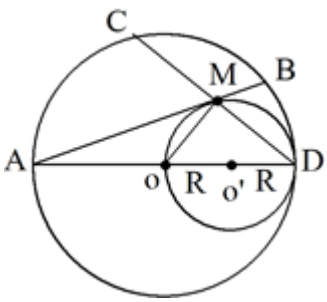
در ضمن با وصل کردن نقطه‌ی B به D نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی محاطی B که روبه‌رو به قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است قائمه است و شعاع O'M بر وتر AB عمود است پس:

$$O'M \parallel BD \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{O'A}{O'D} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{۳R}{R} = ۳ \Rightarrow MA = ۳\,MB \quad (۲)$$

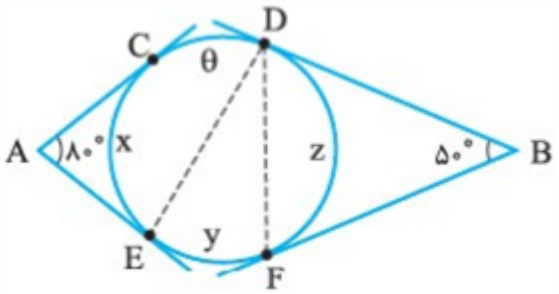
$$\text{از } ۲,۱ \Rightarrow ۳\,MB \times MB = MD^۲ \Rightarrow \sqrt{۳}MB = MD$$

بنابراین:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MB} = \frac{\sqrt{۳}\,MB}{MB} = \sqrt{۳}$$



۸۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کمان $\overset{\frown}{CD}$ برابر θ باشد، آن‌گاه:



$$CD = ۲R\,\text{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow R = ۲R\,\text{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\,\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\theta}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{۲} \Rightarrow ۸۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + z + y - x}{۲} \Rightarrow z + y - x = ۱۰۰^\circ \quad (۱)$$

$$\widehat{B} = \frac{(\theta + x + y) - z}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + x + y - z}{۲} \Rightarrow x + y - z = ۴۰^\circ \quad (۲)$$

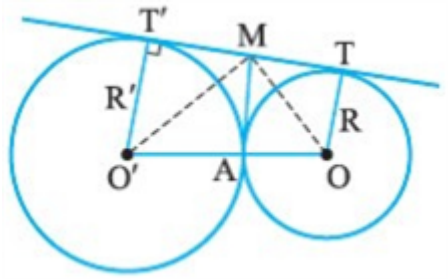
$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۲y = ۱۴۰^\circ \Rightarrow y = ۷۰^\circ$$

زاویهٔ EDF محاطی است و برابر با نصف کمان مقابلش است. پس:

$$\text{محاطی } E\widehat{D}F = \frac{y}{۲} = ۳۵^\circ$$

۸۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۱۳^{۲} - (۹ - ۴)^{۲}} = ۱۲$ مماس مشترک خارجی



اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در M قطع کند، آن‌گاه $O'M$ نیمساز $T'\widehat{M}A$ و OM نیز نیمساز $T\widehat{M}A$ است، پس $O'\widehat{M}O = ۹۰^\circ$ است. اگر دایره‌ای به قطر OO' رسم شود از M همان نقطهٔ مطلوب است.

از طرفی: $MA = MT' = MT = \frac{TT'}{۲} = ۶$

پاسخنامه کلیدی

۵۶	۱	۲	۳	**۴**
۵۷	۱	**۲**	۳	۴
۵۸	۱	۲	**۳**	۴
۵۹	۱	**۲**	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	**۴**
۶۱	۱	۲	۳	**۴**
۶۲	۱	۲	**۳**	۴
۶۳	۱	۲	۳	**۴**
۶۴	۱	۲	**۳**	۴
۶۵	۱	۲	۳	**۴**
۶۶	**۱**	۲	۳	۴
۶۷	**۱**	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	**۳**	۴
۶۹	۱	۲	۳	**۴**
۷۰	۱	۲	**۳**	۴
۷۱	۱	۲	**۳**	۴
۷۲	۱	**۲**	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	**۴**
۷۴	۱	۲	**۳**	۴
۷۵	۱	۲	**۳**	۴
۷۶	۱	۲	**۳**	۴
۷۷	**۱**	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	**۳**	۴
۷۹	۱	۲	۳	**۴**
۸۰	۱	۲	**۳**	۴
۸۱	۱	۲	**۳**	۴
۸۲	۱	۲	**۳**	۴
۸۳	**۱**	۲	۳	۴