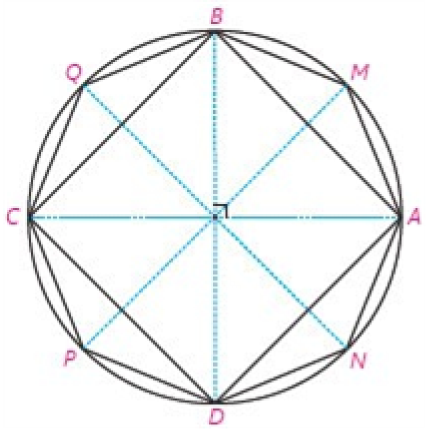
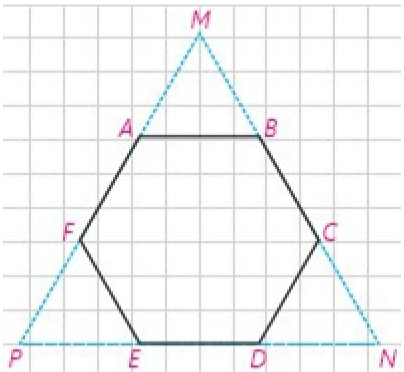
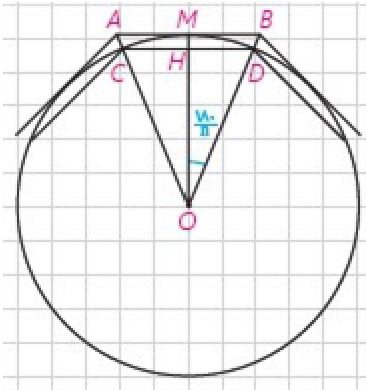
نام و نام خانوادگی :
زمان آزمون :
پایه تحصیلی :
نام درس :
نام دبیر :
نام آموزشگاه :
عنوان آزمون : هندسه ۱۱ فصل ۱
تاریخ برگزاری

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم ؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است ؛ چرا؟ عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت‌ضلعی AMBQCPDN منتظم است.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۲	شش‌ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم. الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است. ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است. پ) از نقطه‌ی دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، 'TH و "TH را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟ ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید: $S_{\mathrm{TBC}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TAF}}=S_{\mathrm{TAB}}+S_{\mathrm{TEF}}+S_{\mathrm{TCD}}$  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	

۳

یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن درنظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $\mathrm{AB} = ۲r\,\mathrm{tg}\,\frac{۱۸۰}{n}$ و $.\mathrm{CD} = ۲r\,\mathrm{Sin}\,\frac{۱۸۰}{n}$

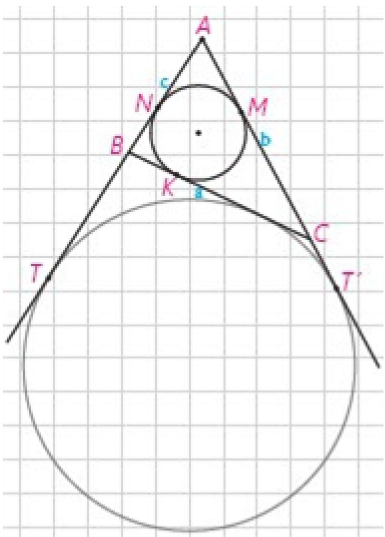


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۴

اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند و T و T' نقطه‌های تماس دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AN} = P - a$$
$$\mathrm{BN} = \mathrm{BK} = P - b, \mathrm{CM} = \mathrm{CK} = P - c$$
$$\mathrm{AT} = \mathrm{AT}' = P$$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۵

الف) اگر r_c, r_b, r_a شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_B} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

ب) به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

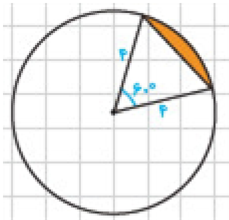
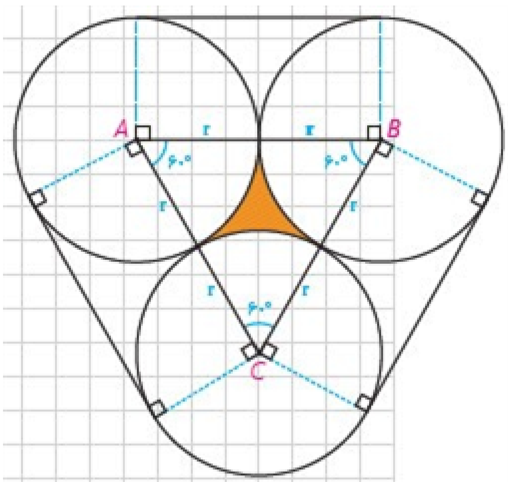
$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۶

یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

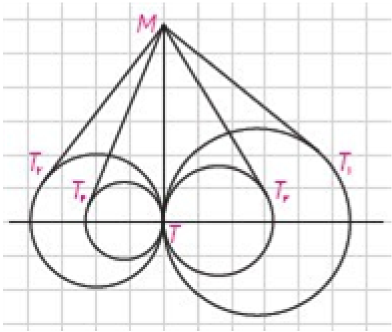
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۷	ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یک‌دیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث قطع می‌کنند. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۸	مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۹	ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۱۰	مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۱۱	طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آن‌ها 16π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۱۲	سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله‌ی نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ است.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۱۳	طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	

۱۴

مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آن‌ها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

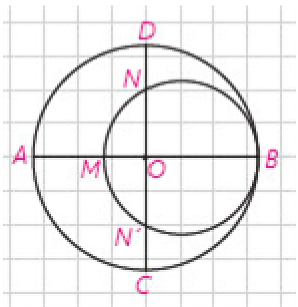
$$\mathrm{MT}_{۱} = \mathrm{MT}_{۲} = \mathrm{MT}_{۳} = \mathrm{MT}_{۴} = \dots$$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۵

در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $\mathrm{AM} = ۱۶$ و $\mathrm{ND} = ۱۰$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

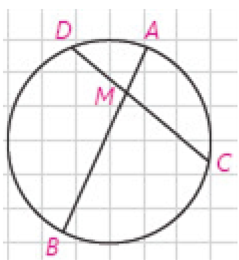
۱۶

از نقطه‌ی P در خارج دایره‌ای مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). هم‌چنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است و $\mathrm{BC} = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۷

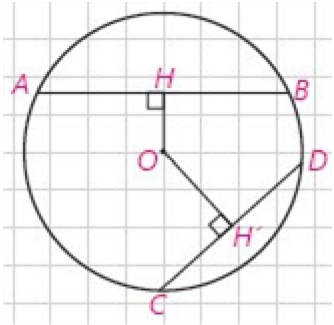
در دایره‌ی $C(O, R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $\mathrm{AB} = ۱۱\,\mathrm{cm}$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۸

در دایره‌ی $C(O,R)$ نشان دهید $\mathrm{AB} > \mathrm{CD}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{OH} < \mathrm{OH}'$ (OH و OH' فاصله‌ی O از دو وتر AB و CD هستند.)



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

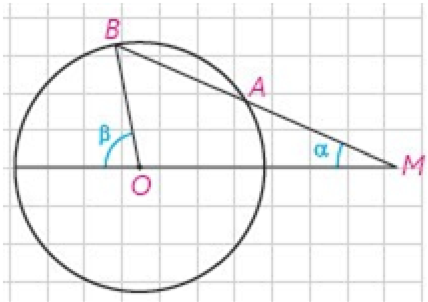
۱۹

در دایره‌ی $C(O,R)$، $\widehat{\mathrm{AB}} = ۶۰^\circ$ و $\mathrm{AB} = ۱۰$ فاصله‌ی O از وتر AB را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۲۰

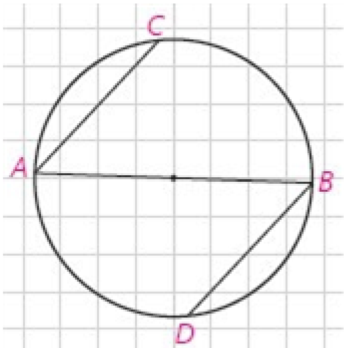
دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $\mathrm{MA} = R$؛ نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۲۱

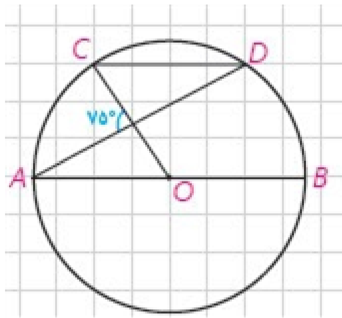
در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$.



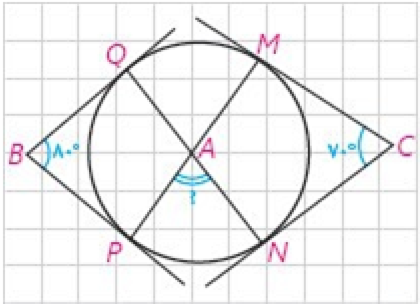
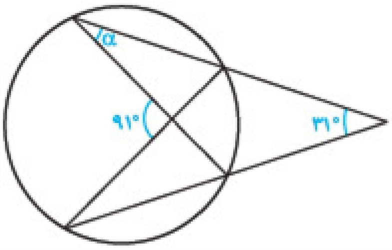
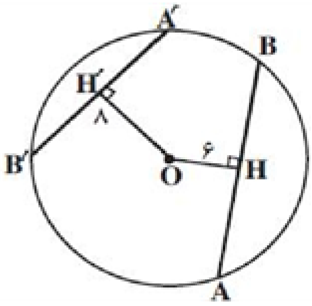
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۲۲

در دایره رسم شده شکل مقابل $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$، اندازه کمان CD را به دست آورید.



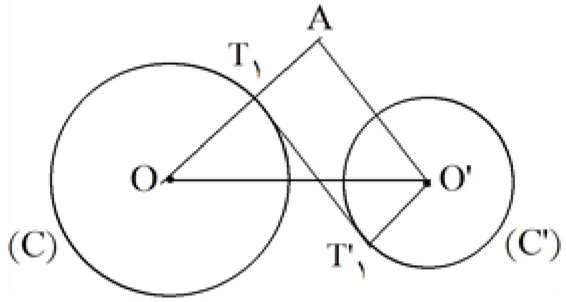
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۲۳	در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{A}$ چند درجه است؟  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۲۴	در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را به دست آورید.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۲۵	ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۲۶	الف) در دایره‌ی $C(O,۱۰)$ فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر ۶ وفاصله‌ی وتر $A'B'$ از مرکز دایره مساوی ۸ است. طول وترهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورید. ب) چه رابطه‌ای بین فاصله‌ی وترها از مرکز دایره و طول آن‌ها می‌یابید؟ پ) آیا این رابطه همیشه برقرار است؟  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۲۷	ثابت کنید مماس مشترکهای داخلی و خط االمرکزین دو دایره همرسند. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۲۸	دو دایره به شعاعهای ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه ی مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۲۹	در مورد همرسی مماس مشترکهای خارجی دو دایره و خط المرکزین آن‌ها چه می‌توان گفت؟ مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	

۳۰ وضعیت دو دایره را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید، سپس در هر حالت مماس مشترکهای آنها را در صورت وجود رسم کنید.

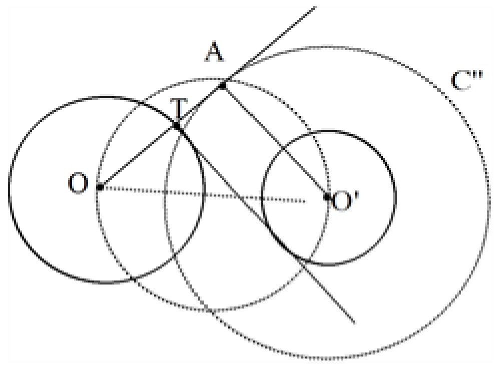
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۱ اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را بر حسب R و R' و $OO'=d$ به دست آورید.



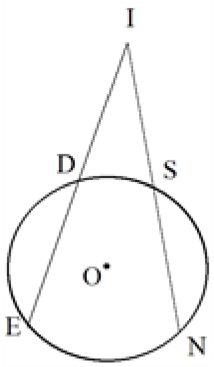
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۲ دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ داده شده‌اند. مماس مشترکهای داخلی این دو دایره را رسم کنید و مراحل کار خود را توضیح دهید. در چه صورت دو دایره مماس مشترک داخلی دارند؟



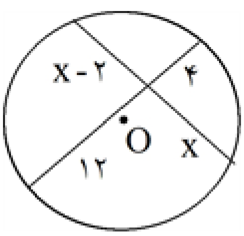
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۳ در شکل مقابل دو قاطع IE و IN با هم برابرند. ثابت کنید: IS = ID .



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

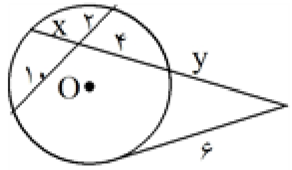
۳۴ در هر یک از شکلهای زیر x و y را محاسبه کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۵

در هریک از شکل‌های زیر x و y را محاسبه کنید.

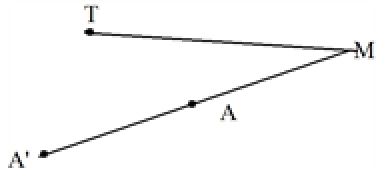


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۶

سه نقطه‌ی M، A و A' روی یک خط راست و نقطه‌ی T خارج این خط به قسمی واقعند که $MT^{2} = MA.MA'$ است.

ثابت کنید دایره‌ای که بر سه نقطه‌ی A و A' و T می‌گذرد در نقطه‌ی T بر خط MT مماس است.

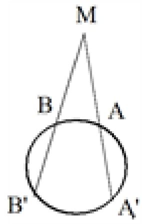


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۷

ثابت کنید اگر امتداد وترهای 'AA و 'BB از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند، آنگاه:

$MA.MA' = MB.MB'$.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

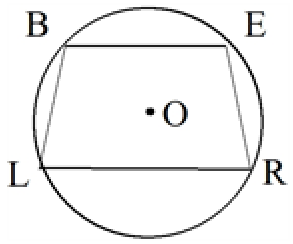
۳۸

در دایره‌ی (C) مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی الساقین است.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۳۹

در دایره‌ی (O)، $BL = ER$. نشان دهید $BE \parallel LR$.

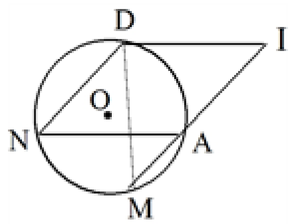


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۴۰

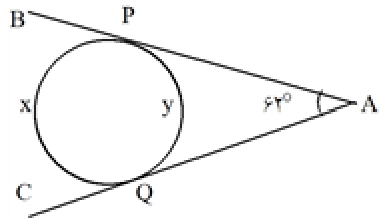
در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A، M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید:

$DM = DI$.



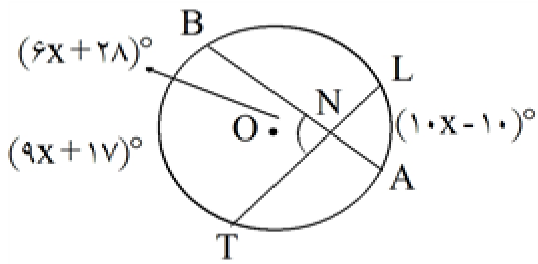
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۴۱ در هر کدام از شکلهای زیر x و y را بیابید.



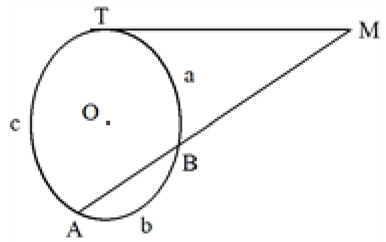
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۴۲ در شکل زیر x و اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{\mathrm{BNT}}$ را تعیین کنید.



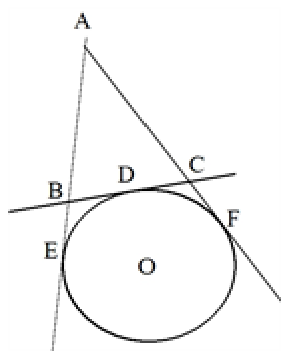
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۴۳ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌یM
متقاطعند. با فرض $\widehat{\mathrm{TB}}=a$، $\widehat{\mathrm{BA}}=b$ و $\widehat{\mathrm{AT}}=c$:
تعیین کنید:
a را در صورتی که $\widehat{M}=۶۰^\circ, b=۱۰۰^\circ$ باشد.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

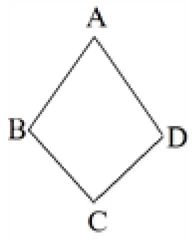
۴۴ خطهای AE، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E، F و D بر دایره‌ی (O) مماس هستند.
مماس BC، خطهای AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های
B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه‌ی D
روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F، محیط مثلث ABC
ثابت می‌ماند.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۴۵

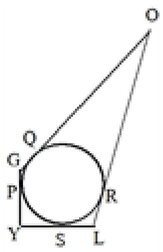
در چهارضلعی ABCD (شکل روبه‌رو)، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.
راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM = AD$ و روی ضلع BC پاره‌خط $CN = CD$ را جدا کرده، از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۴۶

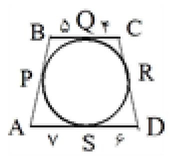
ضلعهای چهارضلعی محیطیGOLY بر دایره مماسند (شکل روبه‌رو).
ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

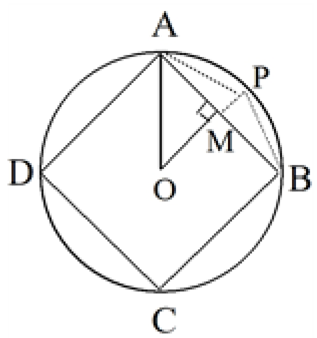
۴۷

اگر P ، Q، R، S، نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی ABCD با دایره باشند، آنگاه محیط این چهارضلعی را به دست آورید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

مربعی در یک دایره‌ی به شعاع واحد محاط شده است.
با توجه به شکل، به ۴ سوال بعدی پاسخ دهید:



۴۸

فاصله مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۴۹

فاصله مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۵۰ طول OM را به‌دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۵۱ طول OM را به‌دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۵۲ طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۵۳ طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۵۴ در حالتی که یک شش ضلعی در دایره به شعاع ۱ محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظمِ محاط در دایره را بدست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۵۵ در حالتی که یک شش ضلعی در دایره به شعاع ۱ محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظمِ محاط در دایره را بدست آورید.

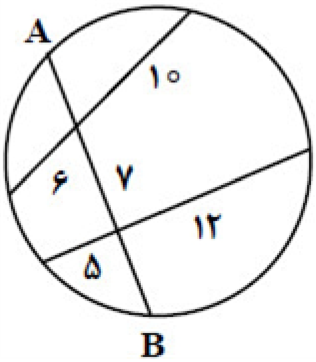
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال دوم-هندسه۱

۵۶ مماس‌های رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر شعاع دایره کوچک‌تر ۱/۵ و فاصله بین مراکز دو دایره ۲/۵ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۳ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۵۷ در شکل مقابل، طول وتر AB کدام است؟



۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۵۸ چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط شده است. رأس‌های این چهارضلعی، رئوس زوایای ظلی واقع بر دایره هستند. مجموع این زاویه‌های ظلی کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

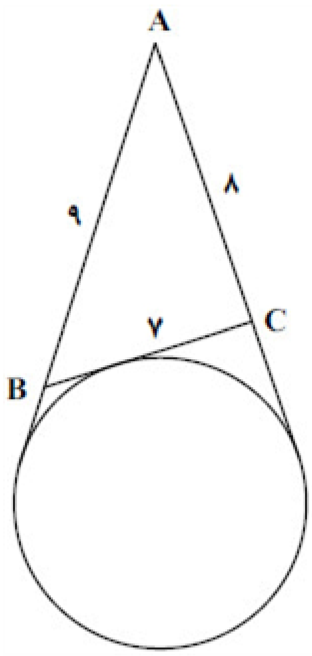
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۹ یک پنج‌ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج‌ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

۱) ۵۴۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۰ در شکل مقابل، از نقطهٔ A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



۱) $۷/۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴/۸\sqrt{۵}$ ۳) $۳/۶\sqrt{۲}$ ۴) $۲/۴\sqrt{۵}$

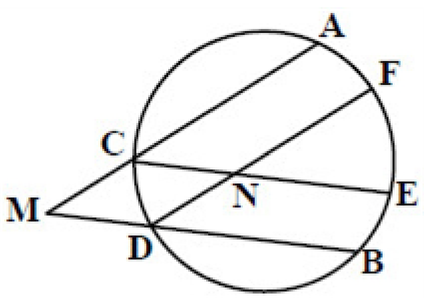
سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۱ دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۵}$ واحد، در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین، محاط است. اگر اختلاف دو قاعده برابر ۱۶ واحد باشد، طول ساق ذوزنقه، چند واحد است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲}$ ۲) $\frac{۲۹}{۲}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

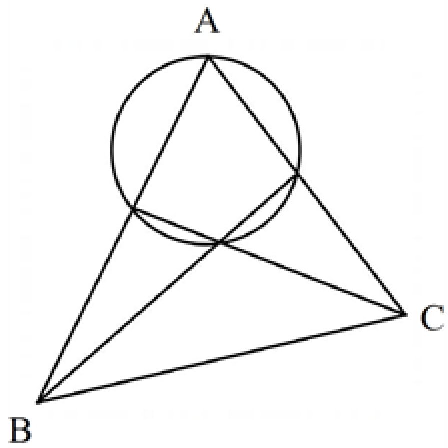
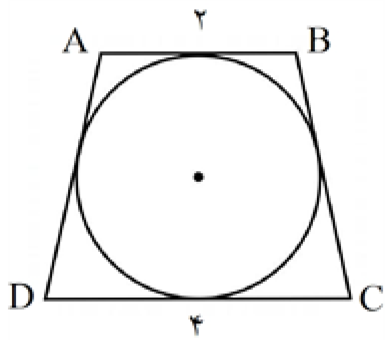
سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۶۲ در شکل مقابل، $AC \parallel DF$، $BD \parallel CE$، $\overset{\frown}{AC} = ۸۵^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = ۷۵^\circ$ است. اگر $C\widehat{N}F = ۱۳۵^\circ$ باشد، اندازه کمان $\overset{\frown}{EF}$ چند درجه است؟



۱) ۴۵ ۲) ۴۰ ۳) ۳۵ ۴) ۳۰

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۶۳	یک دایره به شعاع ۲، داخل ذوزنقه متساوی‌الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای ذوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این ذوزنقه کدام است؟ (۱) $\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$ (۲) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$ (۳) $\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}$ (۴) $\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$ سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱	
۶۴	در شکل مقابل، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟  (۱) ۹۰ (۲) ۷۵ (۳) ۶۰ (۴) ۴۵ سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱	
۶۵	طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. شعاع دایره بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟ (۱) ۲ (۲) $\frac{۸}{۳}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{۱۶}{۳}$ کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی	
۶۶	در شکل مقابل، ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$، بر دایره‌ای محیط شده است. مساحت این دایره کدام است؟  (۱) ۲π (۲) ۴π (۳) ۶π (۴) ۸π کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی	

۶۷

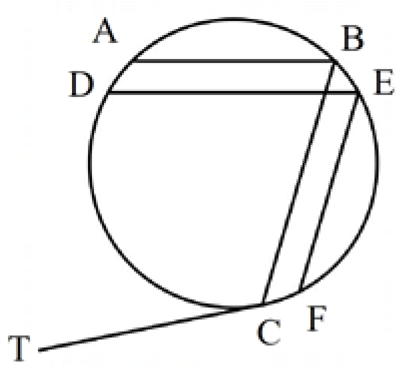
طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی ۳/۵ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۲۱π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۷۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۶۸

در شکل مقابل، $DE \parallel AB$ و $BC \parallel EF$ است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{CD} = ۱۰۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۸۰^\circ$ باشد، اندازه $B\hat{C}T$ چند درجه است؟

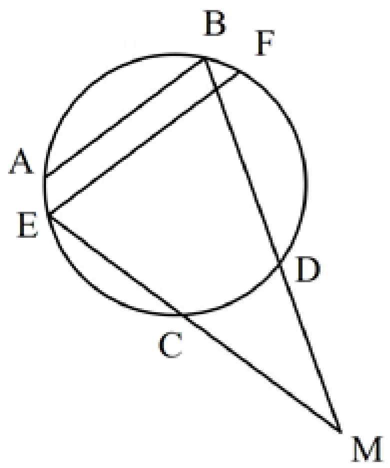


۱) ۹۰ ۲) ۹۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۹

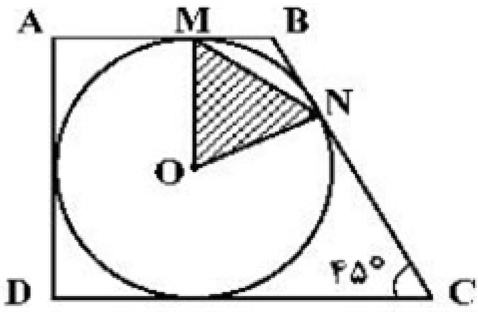
در شکل مقابل، $EF \parallel AB$ و اندازه کمان‌های $\overset{\frown}{AE} = ۱۵^\circ$، $\overset{\frown}{EC} = ۸۰^\circ$ و $\overset{\frown}{FD} = ۱۰۰^\circ$ است. اگر $B\widehat{M}E = ۲۰^\circ$ باشد، اندازه زاویه $A\hat{B}D$ چند درجه است؟



۱) ۷۱/۲۵ ۲) ۷۴ ۳) ۷۵ ۴) ۷۸/۷۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

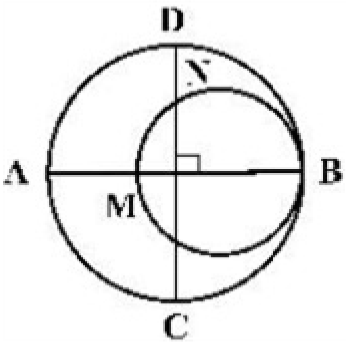
۷۰ مطابق شکل زیر، در ذوزنقه‌ی ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت مثلث OMN، کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

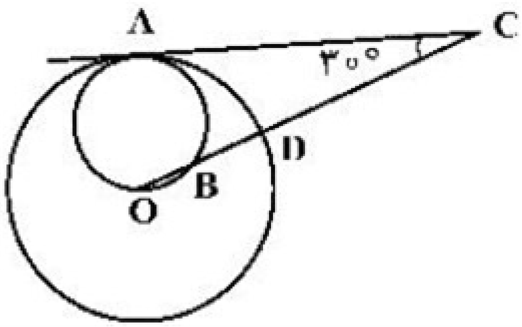
۷۱ در شکل زیر، دو دایره برهم مماس و قطرهای AB و CD از دایره‌ی بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $\mathrm{AM} = ۱۶$، $\mathrm{DN} = ۱۰$ باشد، شعاع دایره‌ی کوچک‌تر، کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۲۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

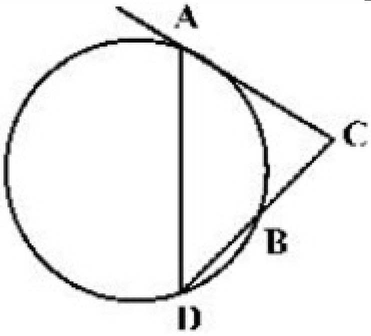
۷۲ در شکل زیر، پاره‌خط AC و دایره‌ی کوچک، در نقطه‌ی A، بر دایره‌ی بزرگ به شعاع ۶ و مرکز O واقع بر محیط دایره‌ی کوچک مماس‌اند. طول پاره‌خط BD، کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۳ در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $DB = BC$ آن‌گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

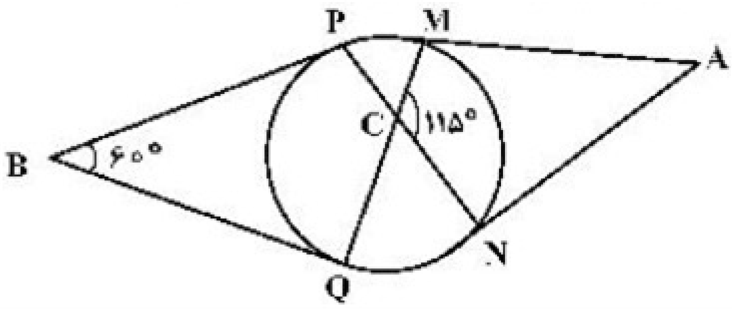
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۴ فرض کنید طول خط المرکزین دو دایره با شعاع‌های $۱ - ۶a$ و $۲ - a^{۲}$، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) ۶ ۴) ۷

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

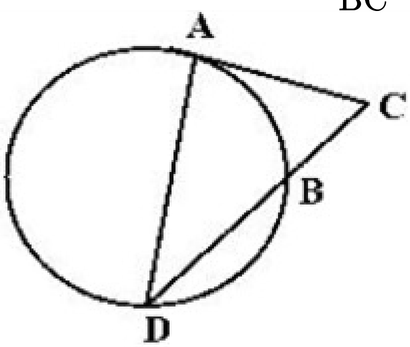
۷۵ پاره‌خط های AM، AN، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند. زاویه‌ی MAN، به درجه، کدام است؟



۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۶ در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$، آن‌گاه نسبت $\frac{DB}{BC}$، کدام است؟

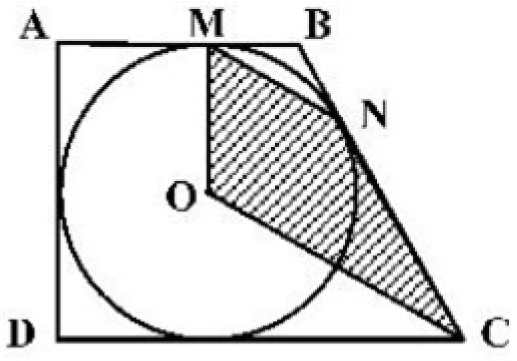


۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۷

مطابق شکل زیر ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است. اگر زاویه‌ی $M\widehat{B}N = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی OMNC، کدام است؟

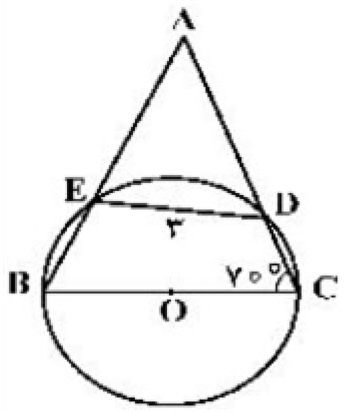


۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۹\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۸

در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه‌ی کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟

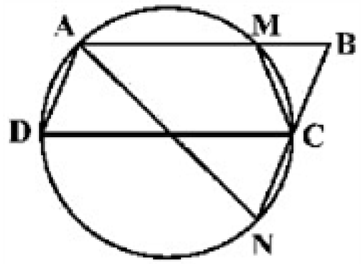


۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۹

در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.
تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین، کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

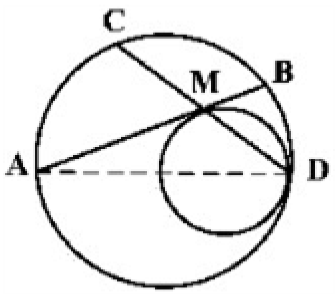
۸۰

یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های $\frac{۹}{۲}$ و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله‌ی دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۹ ۲) $۳ + ۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) ۷/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

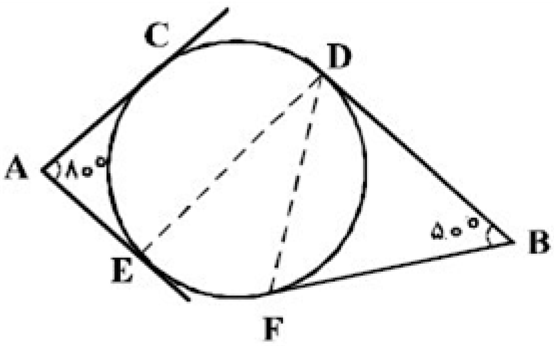
۸۱ در شکل زیر، دو دایره در نقطه‌ی D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایره‌ی بزرگ‌تر بر دایره‌ی داخل، در نقطه‌ی M، مماس است. نسبت $\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}}$، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

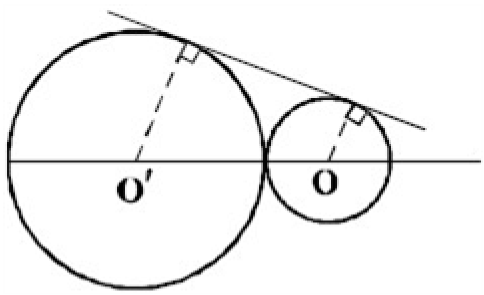
۸۲ در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویه‌ی $E\widehat{D}F$ چند درجه است؟



۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۳ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر 'OO با مماس مشترک خارجی در نقطه‌ی M مشترک‌اند. فاصله‌ی M از نقطه‌ی تماس دو دایره، کدام است؟

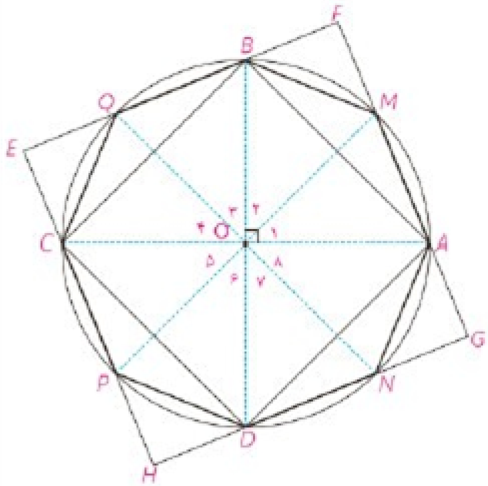


۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱ در چهارضلعی ABCD قطر هم‌دیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند پس مستطیل است و چون قطرها بر هم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است.

عمودمنصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:



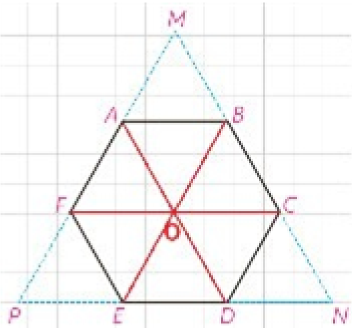
$$O_۱ = O_۲ = O_۳ = O_۴ = O_۵ = O_۶ = O_۷ = O_۸ = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{QC} = \overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{NA}$$

$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$

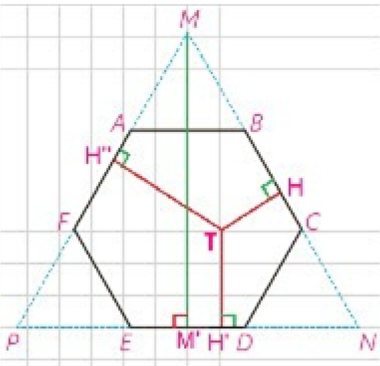
۲ الف) اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است. بنابراین زاویه‌های خارجی 60° است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی‌الساقین است.

ب) اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم آن‌را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم و در مثلث MNP، ۹ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.



$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{\mathrm{MNP}}} = \frac{6S_{\mathrm{MAB}}}{9S_{\mathrm{MAB}}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

پ) مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:



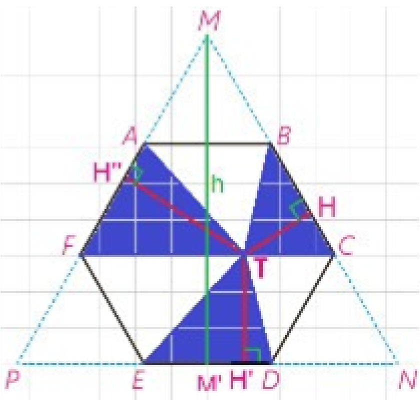
$$\mathrm{TH} + \mathrm{TH'} + \mathrm{TH''} = \mathrm{MM'}$$

ت)

$$S_{\mathrm{TBC}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TAF}} = S_{\mathrm{TAB}} + S_{\mathrm{TEF}} + S_{\mathrm{TCD}}$$

$$S_{\mathrm{TAF}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TBC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AF.\,TH''} + \frac{1}{2}\mathrm{DE.\,TH'} + \frac{1}{2}\mathrm{BC.\,TH}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{AF=ED=BC}=a} S_{\mathrm{TAF}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TBC}}$$



$$= \frac{1}{2}\mathrm{a}\underbrace{(\mathrm{TH''} + \mathrm{TH'} + \mathrm{TH})}_{\mathrm{h}} = \frac{1}{2}\mathrm{ah} \Rightarrow S_{\mathrm{TAF}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TBC}} = \frac{1}{2}\mathrm{ah}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}} = \frac{1}{2}\mathrm{NP}.\,h \xrightarrow{\mathrm{NP}=3a} S_{\overset{\triangle}{MNP}} = \frac{3}{2}a.\,h \Rightarrow \frac{S_{\mathrm{TAF}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TBC}}}{S_{\mathrm{MNP}}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{ah}}{\frac{3}{2}a.\,h}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\mathrm{TAF}} + S_{\mathrm{TDE}} + S_{\mathrm{TBC}}}{S_{\mathrm{MNP}}} = \frac{1}{3}$$

مساحت مثلث‌های آبی رنگ $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش‌ضلعی $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث MNP و مساحت

مثلث‌های سفید و آبی برابر با مساحت شش‌ضلعی است پس مساحت مثلث‌های سفید هم برابر با $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

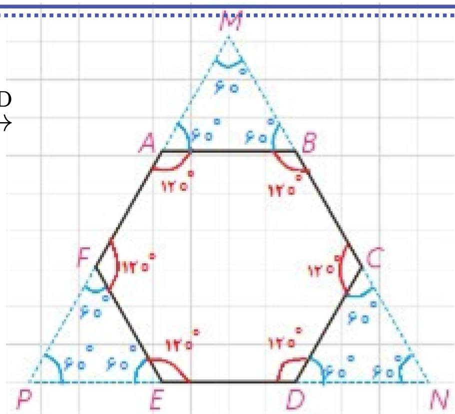
۳

$$\overset{\triangle}{OHD}:\widehat{H}=۹۰^\circ \xrightarrow{OD=r} \sin\frac{۱۸۰}{n}=\frac{HD}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\sin\frac{۱۸۰}{n}=\frac{۲\,HD}{r} \xrightarrow{۲HD=CD}$$

$$CD=۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

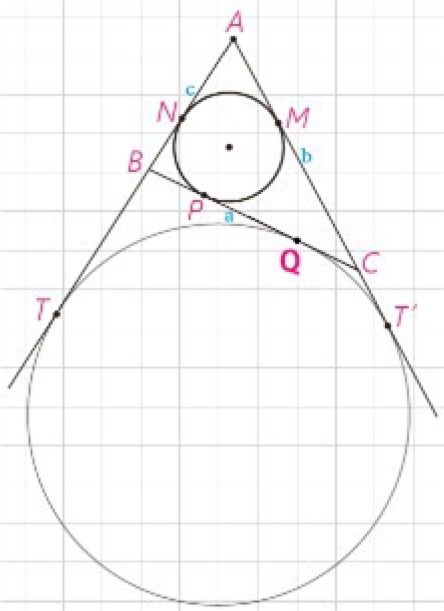
$$\overset{\triangle}{OMB}:\widehat{M}=۹۰^\circ \xrightarrow{OM=r} tg\frac{۱۸۰}{n}=\frac{MB}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\,tg\frac{۱۸۰}{n}=\frac{۲\,MB}{r} \xrightarrow{۲MB=AB}$$

$$AB=۲r\,tg\frac{۱۸۰}{n}$$



است. بنابراین مساحت مثلث‌های آبی با مساحت مثلث‌های سفید برابر است.

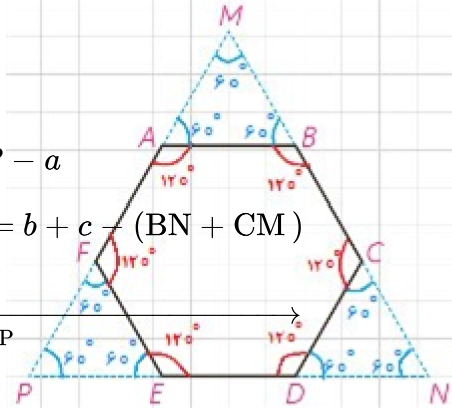
$S_{TEF}+S_{TCD}$



۴

$$AM=AN=P-a$$

$$\left.\begin{array}{l} AN=c-BN\\ AM=b-CM\end{array}\right\} \Rightarrow AM+AN=b+c-(BN+CM) \xrightarrow[CM=CP,BN=BP]{AM=AN}$$



$$۲AM=b+c-\underbrace{(BP+CP)}_{a}=b+c-a \Rightarrow ۲AM=۲p-۲a \Rightarrow AM=AN=p-a$$

$$BN=BP=P-b$$

$$\left.\begin{array}{l} BN=c-AN\\ BP=a-CP\end{array}\right\} \Rightarrow BN+BP=a+c-(AN+CP) \xrightarrow[AN=AM,CP=CM]{BP=BN}$$

$$۲BN=a+c-\underbrace{(AM+CM)}_{b}=a+c-b \Rightarrow ۲BN=۲p-۲b \Rightarrow BN=BP=p-b$$

$$CM=CP=P-C$$

$$\left.\begin{array}{l} CM=b-AM\\ CP=a-BP\end{array}\right\} \Rightarrow CM+CP=b+A-(AM+BP) \xrightarrow[AN=AM,BP=BN]{CM=CP}$$

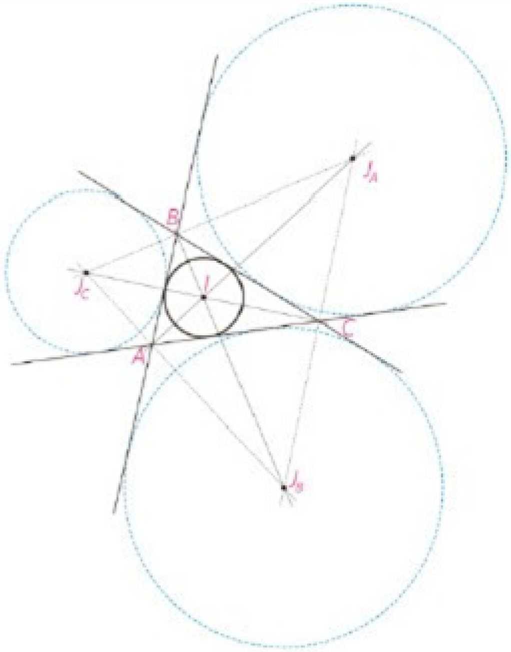
$$۲CM=b+a-\underbrace{(AN+BN)}_{c}=b+a-c \Rightarrow ۲CM=۲p-۲c \Rightarrow CM=CP=p-c$$

$$AT=AT'=P$$

$$AT+AT'-c+BT+b+CT' \xrightarrow[BT=BQ\,,\,CT'=CQ]{AT=AT'} ۲AT=c+b+\underbrace{BQ+CQ}_{a}$$

$$\Rightarrow ۲AT=۲p \Rightarrow AT=AT'=p$$

۵ الف)



$$S = \mathrm{rp} \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{p}{s}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{۱}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{۱}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$$

$$= \frac{۳p-(a+b+c)}{S} = \frac{۳p-۲p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r}$$

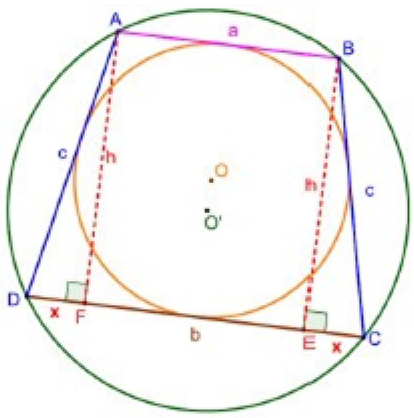
$$\Rightarrow \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۲}\mathrm{ah}_a \Rightarrow h_a = \frac{۲S}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} = \frac{a}{۲S} \\ S = \frac{۱}{۲}\mathrm{bh}_b \Rightarrow h_b = \frac{۲S}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b} = \frac{b}{۲S} \\ S = \frac{۱}{۲}\mathrm{ch}_c \Rightarrow h_c = \frac{۲S}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c} = \frac{c}{۲s} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{a}{۲S} + \frac{b}{۲S} + \frac{c}{۲S}$$

$$= \frac{a+b+c}{۲S} = \frac{۲p}{۲S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

۶ چون ذوزنقه‌ی ABCD محاطی است پس متساوی‌الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است. در نتیجه: $۲c = a + b$ و مثلث ADF قائم‌الزاویه است.



$$۲c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{۲}\ ,\ b = ۲x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲ = c^۲ - x^۲ \Rightarrow h^۲ = \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۴\,\mathrm{ab}}{۴} \Rightarrow h = \sqrt{\mathrm{ab}}$$

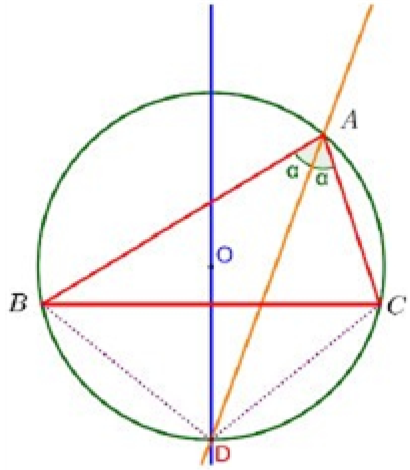
$$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(a+b) \times h \Rightarrow S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{\mathrm{ab}}$$

۷ فرض کنیم نیمساز زاویه‌ی BAC دایره‌ی محاطی را در نقطه‌ی D قطع کند:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \xrightarrow{\text{محاطی}} \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}} BD = CD$$

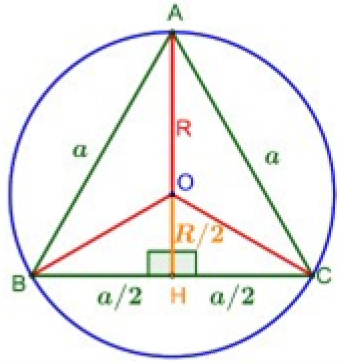
فاصله‌ی نقطه‌ی D از دو نقطه‌ی B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمودمنصف نقطه‌ی D روی عمودمنصف پاره‌خط BC نیز قرار دارد.



۸ مرکز دایره‌ی محیطی نقطه‌ی O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین:

راه اول:

$$AB = BC = AC = a \ , BH = CH = \frac{a}{۲}$$

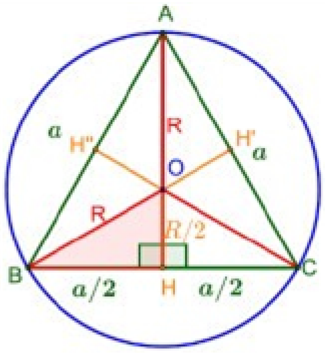


$$\left.\begin{array}{l} OH = \frac{OA}{۲} \Rightarrow OH = \frac{R}{۲} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{۲} = \frac{۳}{۲}R \\ \overset{\triangle}{ACH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^۲ + CH^۲} \\ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۳}{۲}R \Rightarrow a = \frac{۳R}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a = R\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(R\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: با توجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث هم‌نهشت ساخته شده است. این مثلث‌های به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند.

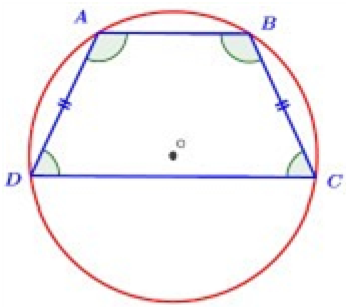


$$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^۲ - \left(\frac{R}{۲}\right)^۲} = \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = ۶S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲} \times \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

۹ فرض: ذوزنقه متساوی‌الساقین است. حکم: ذوزنقه محاطی است.



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{C}=\widehat{D}} \widehat{A} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{B} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ ذوزنقه ABCD محاطی است

فرض: ذوزنقه محاطی است. حکم: ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \ , \ AD \ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \\ \widehat{A} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

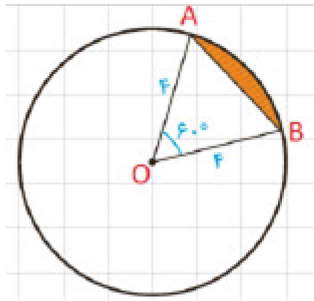
$$\Rightarrow \widehat{A} + D = \widehat{A} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \widehat{A} = \widehat{B}$$

در این ذوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق برابرند در نتیجه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

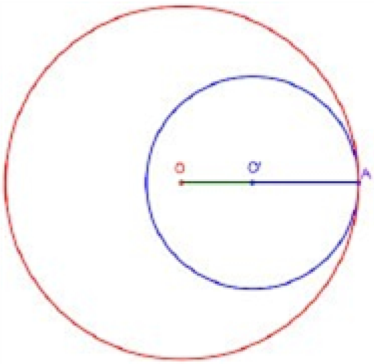
۱۰ مثلث OAB متساوی‌الساقین است و $\widehat{O}=۶۰^\circ$ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع ۶۰ درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

$$A=\frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times r^۲ \Rightarrow A=\frac{۱۶\pi}{۳۶۰}\times ۶۰-۴\sqrt{۳}=\frac{۸}{۳}\pi-۴\sqrt{۳}$$



۱۱ با توجه به شکل $OA=R$ و $O'A=R'$ در نتیجه:



$$\text{مساحت ناحیه محدود بین دو دایره}=\pi R^۲-\pi R'^۲=۱۶\pi$$

$$\Rightarrow R^۲-R'^۲=۱۶\Rightarrow (R-R')(R+R')=۱۶$$

$$\xrightarrow{OO'=R-R'=۲} ۲(R+R')=۱۶\Rightarrow R+R'=۸$$

$$\begin{cases} R+R'=۸ \\ R-R'=۲ \end{cases}\Rightarrow ۲R=۱۰\Rightarrow R=۵, R'=۳$$

۱۲ مجموع سه قطاع با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می‌دهد بنابراین داریم:

$$\text{طول نخ}=۲r+۲r+۲r+\text{محیط یک دایره}=۶r+۲\pi r$$

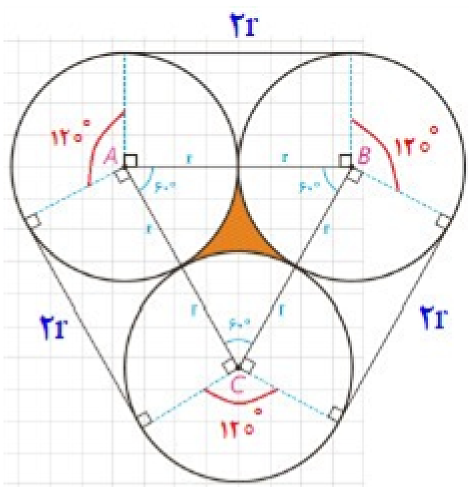
مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰ درجه تشکیل یک نیم‌دایره می‌دهد بنابراین داریم:

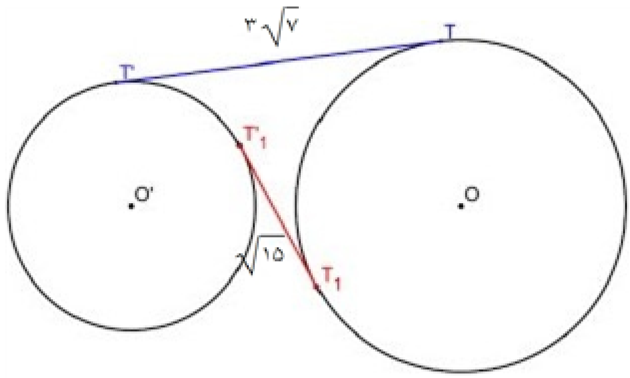
= مساحت ناحیه هاشور خورده

مساحت نیم‌دایره - مساحت مثلث ABC

= مساحت ناحیه هاشور خورده

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲-\frac{\pi r^۲}{۲}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۴}r^۲-\frac{\pi r^۲}{۲}=r^۲\left(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)$$





$$\begin{cases} TT'^{۲} = d^{۲} - (R' - R)^{۲} \\ T_۱T_۲^{۲} = d^{۲} - (R + R')^{۲} \end{cases}$$ ۱۳

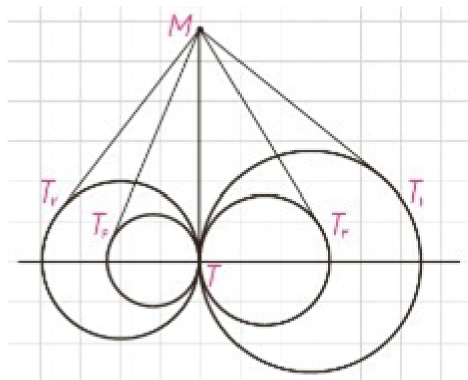
$$\Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^{۲} \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

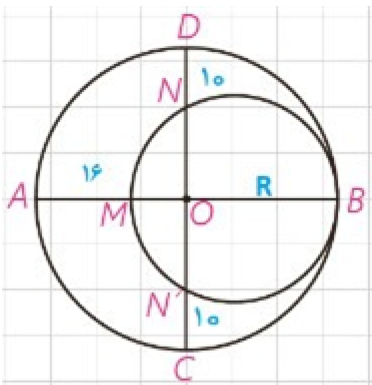
$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$

از هر نقطه خارج دایره طول مماس‌های رسم شده با هم برابرند. بنابراین داریم: ۱۴

$$\left.\begin{matrix} MT = MT_۲ \\ MT = MT_۴ \\ MT = MT_۱ \\ MT = MT_۲ \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow MT = MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴$$

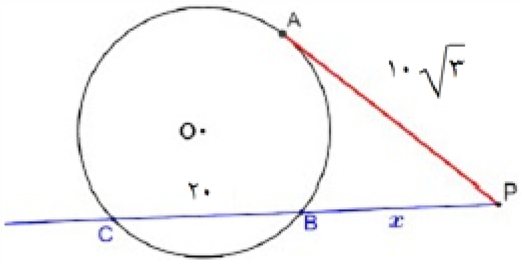




$$OB.\,OM = ON.\,ON' \Rightarrow R(R - ۱۶) = (R - ۱۰)(R - ۱۰)$$ ۱۵

$$R^{۲} - ۱۶R = R^{۲} - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$R' = \frac{MB}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۲R - ۱۶}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۵۰ - ۱۶}{۲} = ۱۷$$

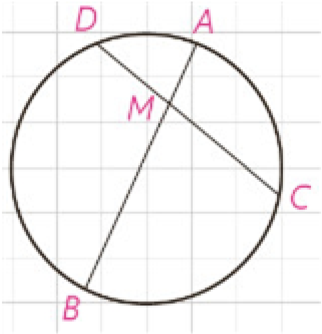


$$PA^{۲} = PB.\,PC \rightarrow (۱۰\sqrt{۳})^{۲} = x(x + ۲۰)$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲x - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۱۰)(x + ۳۰) = ۰$$ ۱۶

$$\Rightarrow x = ۱۰ \quad , \quad x = -۳۰ \text{ غ ق ق}$$

$$\Rightarrow PB = ۱۰ \quad , \quad PC = ۳۰$$



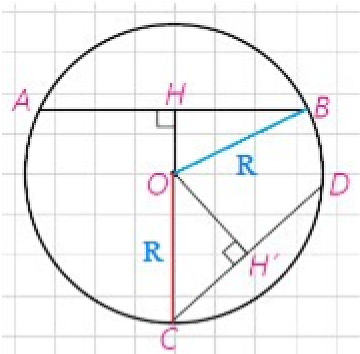
۱۷

$$\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{DM}{۹}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow DM=۳ \Rightarrow MC=۶$$

$$DM.MC=AM.BM \xrightarrow{AM=x} ۳\times ۶=x(۱۱-x)$$

$$x^{۲}-۱۱x+۱۸=۰ \Rightarrow (x-۹)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۲ \quad , \quad x=۹$$

پس $\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$ یا $\frac{AM}{MB}=\frac{۹}{۲}$



۱۸

فرض : $AB > CD$ حکم : $OH < OH'$

$OB=OC=R \quad , \quad BH=\frac{AB}{۲} \quad , \quad CH'=\frac{CD}{۲} \; (۱)$

$\overset{\triangle}{OBH} : H=۹۰^{\circ} \Rightarrow BH^{۲}=R^{۲}-OH^{۲}$

$\overset{\triangle}{OCH'} = H'=۹۰^{\circ} \Rightarrow CH'^{۲}=R^{۲}-OH'^{۲}$

$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \overset{(۱)}{\rightarrow} BH > CH' \Rightarrow BH^{۲} > CH'^{۲} \Rightarrow R^{۲}-OH^{۲} > R^{۲}-OH'^{۲}$

$\Rightarrow -OH^{۲} > -OH'^{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} OH^{۲} < OH'^{۲} \xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰} OH < OH'$

فرض : $OH < OH'$ حکم : $AB > CD$

$OB=OC=R \quad , ۲BH=AB \quad , ۲\,CH'=CD \quad (۱)$

$\overset{\triangle}{OBH} : H=۹۰^{\circ} \Rightarrow OH^{۲}=R^{۲}-BH^{۲}$

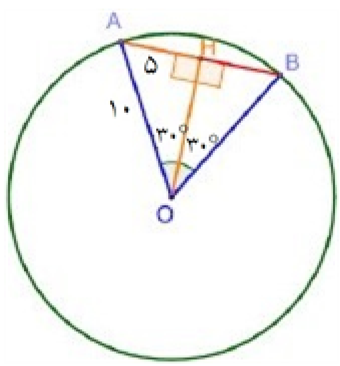
$\overset{\triangle}{OCH'} : H'=۹۰^{\circ} \Rightarrow OH'^{۲}=R^{۲}-CH'^{۲}$

$OH < OH' \Rightarrow R^{۲}-BH^{۲} < R^{۲}-CH'^{۲} \Rightarrow -BH^{۲} < -CH'^{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} BH^{۲} > CH'^{۲}$

$\xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰} BH > CH' \overset{(۱)}{\rightarrow} AB > CD$

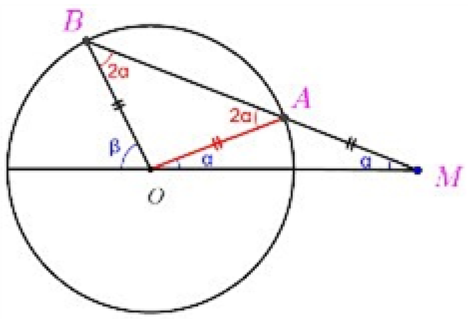
۱۹ می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH=۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$OH=\sqrt{OA^{۲}-AH^{۲}} \Rightarrow OH=\sqrt{۱۰^{۲}-۵^{۲}}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$$



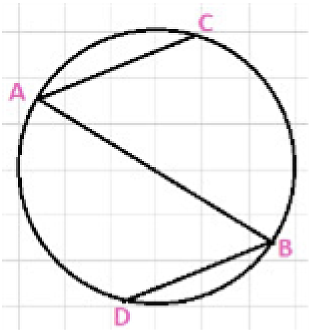
۲۰ با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAM و OAB متساوی‌الساقین هستند.

در مثلث OBM داریم:



$$\beta = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$$

۲۱

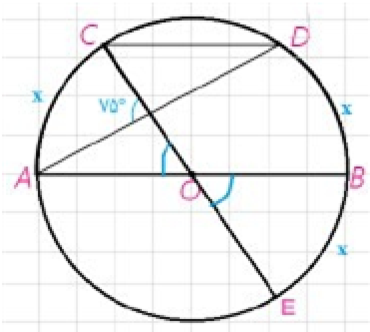


$$\mathrm{AC} \parallel \mathrm{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{AD}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$$

$$\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{D}}\mathrm{B} = ۱۸۰^\circ$$

$$\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{C}}\mathrm{D} - \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{D}}\mathrm{B} - \overset{\frown}{\mathrm{AD}} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{AC}} = \overset{\frown}{\mathrm{BD}} \Rightarrow \mathrm{AC} = \mathrm{BD}$$

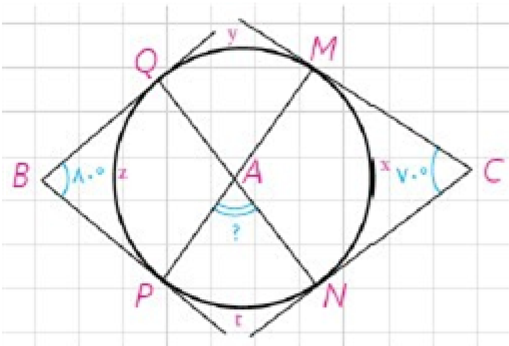
۲۲



$$۷۵^\circ = \frac{(x+x)+x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۳x \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = ۱۸۰^\circ - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{CD}} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۲۳



$$۷۰^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰^\circ = (y+z+t)-x$$

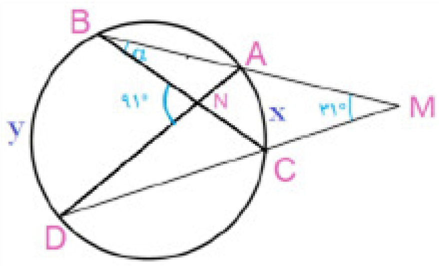
$$۸۰^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{۲} \Rightarrow ۱۸۰^\circ = (y+x+t)-z$$

$$\begin{cases} ۱۴۰^\circ = y+z+t-x \\ ۱۶۰^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow ۳۰۰^\circ = ۲(y+t)$$

$$\Rightarrow y+t = ۱۵۰^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{y+t}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

۲۴

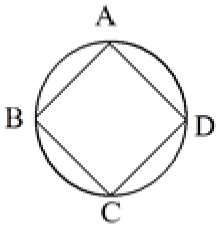


$$\widehat{M}=\frac{y-x}{۲}\Rightarrow ۲\times ۳۱^\circ = y-x$$

$$\widehat{N}=\frac{y+x}{۲}\Rightarrow ۲\times ۹۱^\circ = y+x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-x=۶۲^\circ \\ y+x=۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y=۲۴۴^\circ \Rightarrow y=۱۲۲^\circ \Rightarrow x=۶۰^\circ$$

۲۵ فرض کنیم چهارضلعی ABCD محاطی باشد، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲} \\ \widehat{C}=\frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow A+C=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰$$

پس زوایای مقابل در این چهارضلعی مکمل یک‌دیگراند.

۲۶ الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$AH^۲=OA^۲-OH^۲=۱۰۰-۳۶=۶۴\Rightarrow AH=۸\Rightarrow AB=۱۶$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OA'H'$ داریم:

$$A'H'^۲=OA'^۲-OH'^۲=۱۰۰-۶۴=۳۶\Rightarrow A'H'=۶\Rightarrow A'B'=۱۲$$

ب) وتری که از مرکز دایره دورتر است کوچک‌تر است.

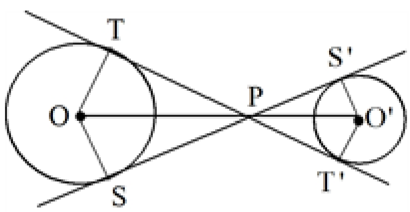
پ) بله

۲۷ فرض کنیم مماس مشترکهای داخلی دو دایره‌ی O' و O همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O' و O به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم.

$OT=OS\Rightarrow$ OP نیمساز زاویه‌ی P است.

$O'T'=O'S'\Rightarrow$ $O'P$ نیمساز زاویه‌ی P است.

می‌دانیم نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتداد هستند. پس P, O', O در یک راستا هستند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.

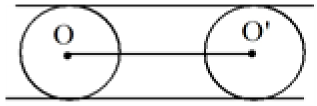


۲۸ در دو دایره مماس بیرون طول خط المرکزین با جمع شعاع‌ها برابر است.

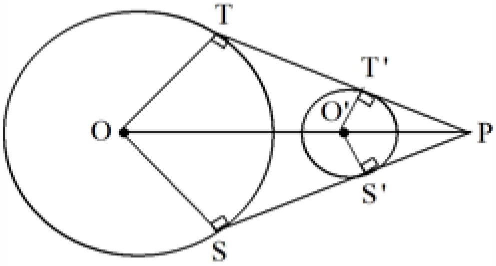
$$d=oo'=R+R'\Rightarrow d=۹+۴=۱۳$$

مماس مشترک خارجی $TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{(R+R')^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}=۱۲$

۲۹ اگر دو دایره مساوی باشند مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین موازی است.



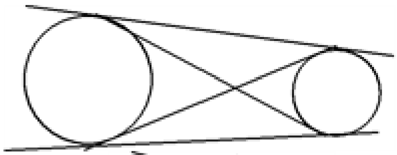
اگر دو دایره مساوی نباشند، مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین همرسند. زیرا اگر مماس مشترکهای خارجی دو دایره‌ی O و O' همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O و O' به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم.

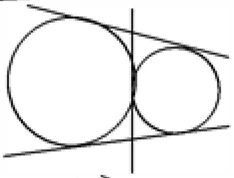


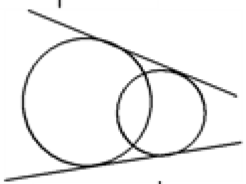
$OT = OS \rightarrow$ نیمساز زاویه P است. OP

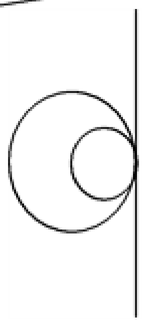
$O'T' = O'S' \rightarrow$ نیمساز زاویه P است. $O'P$

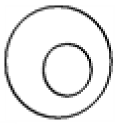
پس نقاط P, O', O در یک راستا قرار دارند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.

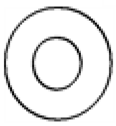
۳۰ دو دایره‌ی متخارج دارای چهار مماس مشترک هستند.  : حالت اول

دو دایره‌ی مماس بیرونی دارای سه مماس مشترک هستند.  : حالت دوم

دو دایره‌ی متقاطع دارای دو مماس مشترک هستند.  : حالت سوم

دو دایره‌ی مماس درونی دارای یک مماس مشترک هستند.  : حالت چهارم

دو دایره‌ی متداخل مماس مشترک ندارد.  : حالت پنجم

دو دایره‌ی هم‌مرکز دارای مماس مشترک نیستند.  : حالت ششم

۳۱ فرض کنیم $T_۱T'_۱$ مماس مشترک داخلی دو دایره باشد $O'A$ موازی $T_۱T'_۱$ است. پس چهارضلعی $O'AT_۱T'_۱$ مستطیل است. درنتیجه $O'A = T_۱T'_۱$. داریم:

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\triangle}{OAO'}: O'A^۲ = OO'^۲ - OA^۲ \\ OO' = d \\ O'A = T_۱T'_۱ \\ OA = R + R' \end{array}\right\} \Rightarrow {T_۱T'_۱}^۲ = d^۲ - (R+R')^۲ \Rightarrow T_۱T'_۱ = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲}$$

۳۲ ابتدا به مرکز O' و شعاع $R + R'$ دایره‌ی C'' را رسم می‌کنیم. سپس به قطر OO' دایره‌ای ترسیم می‌کنیم تا دایره C'' را در نقطه‌ی A قطع کند. در این صورت OA بر دایره‌ی C'' مماس خواهد بود. OA دایره به مرکز O را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. از نقطه‌ی T خطی موازی $O'A$ رسم می‌کنیم. این خط همان مماس مشترک داخلی دو دایره است.

۳۳

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{ID} \times \mathrm{IE} = \mathrm{IS} \times \mathrm{IN} \\ \text{طبق فرض} \Rightarrow \mathrm{IN} = \mathrm{IE} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{ID} = \mathrm{IS}$$

۳۴

$$x(x-۲) = ۴\times ۱۲ \to x^۲ - ۲x - ۴۸ = ۰ \to (x-۸)(x+۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \\ x = -۶ \end{cases}$$

$x = -۶$ قابل قبول نیست. پس $x = ۸$.

۳۵

$$۴\times x = ۲\times ۱۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$۶^۲ = y(y+۴+x) \to ۳۶ = y(y+۹)$$

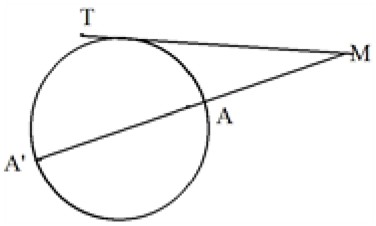
$$y^۲ + ۹y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (y+۱۲)(y-۳) = ۰ \to \begin{cases} y = ۳ \\ y = -۱۲ \end{cases}$$

$y = -۱۲$ قابل قبول نیست. پس $y = ۳$.

۳۶ از سه نقطه‌ی A, A' و T یک دایره می‌گذرد. فرض کنیم MT بر این دایره مماس نباشد و دایره‌ی فوق را در نقطه‌ی دیگر مثل T' قطع کند داریم:

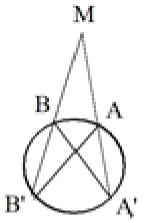
$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{MT} \times \mathrm{MT}' = \mathrm{MA} \times \mathrm{MA}' \\ \text{فرض مسئله} \Rightarrow \mathrm{MT}^۲ = \mathrm{MA} \times \mathrm{MA}' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{MT} \times \mathrm{MT}' = \mathrm{MT}^۲ \Rightarrow \mathrm{MT} = \mathrm{MT}'$$

پس نقاط T, T' بر هم مماس هستند بنابراین MT بر دایره مماس است.



۳۷ از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{MBA'}$ و $\overset{\triangle}{MAB'}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{r}\text{زاویه ی محاطی } A' = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } B' = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\widehat{A}' = \widehat{B}'\\ \widehat{M} = \widehat{M}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAB'} \sim \overset{\triangle}{MBA'} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA.MA' = MB.MB'$$



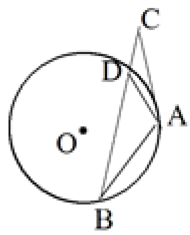
۳۸ از A به D وصل می‌کنیم.

$$\text{طبق فرض} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{زاویه ی ظلی } \widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{B} \quad (۲)$$

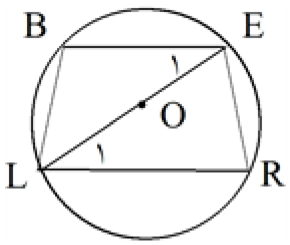
$$\text{از (۱) و (۲)} \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C} \Rightarrow AD = DC$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ متساوی‌الساقین است.



۳۹ از E به L وصل می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی $BL = ER$ نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{ER}$. داریم:

$$\left.\begin{array}{r}\text{زاویه ی محاطی } \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BL}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{L}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ER}}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{BL}=\overset{\frown}{ER}} \widehat{E}_۱ = \widehat{L}_۱ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه ی خطوط}} BE \parallel LR$$



۴۰
$$\left.\begin{array}{r}\text{زاویه ی محاطی } \widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\\ \text{زاویه ی محاطی } \widehat{N} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} \quad (۱)$$

از طرفی چهارضلعی ANDI متوازی‌الاضلاع است پس $\widehat{N} = \widehat{I}$. با توجه به رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $\widehat{M} = \widehat{I}$

بنابراین $DM = DI$.

۴۱

$$\widehat{A}=\frac{x-y}{2}\Rightarrow 62=\frac{x-y}{2}\Rightarrow x-y=124^\circ$$

$$\begin{cases} x-y=124^\circ \\ x+y=360^\circ \end{cases}\xrightarrow{+} 2x=484\Rightarrow x=242^\circ\Rightarrow y=360-242\Rightarrow y=118^\circ$$

۴۲

$$\widehat{\mathrm{BNT}}=\frac{\widehat{\mathrm{BT}}+\widehat{\mathrm{AL}}}{2}\Rightarrow 6x+28=\frac{9x+17+10x-10}{2}$$

$$\Rightarrow 12x+56=19x+7\Rightarrow 7x=49\Rightarrow x=7$$

بنابراین $B\widehat{N}T=6\times 7+28=70$ است.

۴۳

$$\widehat{M}=\frac{\widehat{\mathrm{AT}}-\widehat{\mathrm{BT}}}{2}\Rightarrow 60=\frac{c-a}{2}\Rightarrow c-a=120$$

$$b=100\Rightarrow c+a+100=360\Rightarrow c+a=260$$

$$\begin{cases} c-a=120 \\ c+a=260 \end{cases}\xrightarrow{-} 2a=140\Rightarrow a=70^\circ$$

۴۴ اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند. پس $\mathrm{BD}=\mathrm{BE}$ و $\mathrm{CD}=\mathrm{CF}$

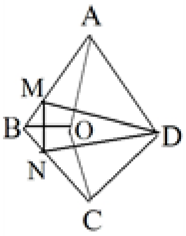
داریم: $\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ محیط $=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC}\to \overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ محیط $=\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DC}+\mathrm{AC}$

$\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ محیط $=\mathrm{AB}+\mathrm{BE}+\mathrm{CF}+\mathrm{AC}\to \overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ محیط $=\mathrm{AE}+\mathrm{AF}\to \overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ محیط $=$ مقدار ثابت

۴۵ با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{AD}+\mathrm{BC}\to \cancel{\mathrm{AM}}+\mathrm{BM}+\cancel{\mathrm{CD}}=\cancel{\mathrm{AD}}+\cancel{\mathrm{CN}}+\mathrm{BN}\Rightarrow \mathrm{BM}=\mathrm{BN}$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{\mathrm{BMN}}$ متساوی‌الساقین است. نیمساز زوایای A, B, C را رسم می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{\mathrm{AMD}}$ نیمساز زاویه A عمودمنصف ضلع MD می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{\mathrm{BMN}}$ نیمساز زاویه‌ی B عمودمنصف MN می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{\mathrm{NCD}}$ نیمساز زاویه‌ی C عمودمنصف ND می‌باشد. می‌دانیم عمودمنصف‌های مثلث $\overset{\triangle}{\mathrm{DMN}}$ همرسند. پس نیمسازهای زوایای A, B, C در یک نقطه همرسند. پس چهارضلعی ABCD محیطی است.



۴۶ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{YP}=\mathrm{YS} \\ \mathrm{LR}=\mathrm{SL} \\ \mathrm{OR}=\mathrm{OQ} \\ \mathrm{GP}=\mathrm{GQ} \end{array}\right\}\xrightarrow{+}\mathrm{YP}+\mathrm{LR}+\mathrm{OR}+\mathrm{GP}=\mathrm{YS}+\mathrm{SL}+\mathrm{OQ}+\mathrm{GQ}$$

$$\Rightarrow \mathrm{YG}+\mathrm{LO}=\mathrm{YL}+\mathrm{OG}$$

۴۷ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} AS = AP \\ SD = RD \end{array}\right\} \xrightarrow{+} AS + SD = AP + RD \Rightarrow AP + RD = ۱۳$$

$$\left.\begin{array}{l} BQ = BP \\ CQ = CR \end{array}\right\} \xrightarrow{+} BQ + CQ = BP + CR \Rightarrow BP + CR = ۹$$

$$\xrightarrow{+} AB + CD = ۲۲$$

پس محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

$$AB + BC + CD + AD = ۲۲ + ۹ + ۱۳ = ۴۴$$

۴۸ در مربع، قطر، نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$ بنابراین مثلث $O\overset{\triangle}{A}M$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

$$\begin{aligned} O\overset{\triangle}{A}M : AM^۲ + OM^۲ &= OA^۲ \\ ۲OM^۲ &= ۱^۲ \\ OM^۲ &= \frac{۱}{۲} \\ OM &= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{aligned}$$

۴۹ در مربع، قطر، نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$ بنابراین مثلث $O\overset{\triangle}{A}M$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

$$\begin{aligned} O\overset{\triangle}{A}M : AM^۲ + OM^۲ &= OA^۲ \\ ۲OM^۲ &= ۱^۲ \\ OM^۲ &= \frac{۱}{۲} \\ OM &= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{aligned}$$

۵۰ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM زاویه‌ی OAM برابر ۴۵° است زیرا قطر مربع نیمساز است. پس مثلث OAM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس $OM = AM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۵۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM زاویه‌ی OAM برابر ۴۵° است زیرا قطر مربع نیمساز است. پس مثلث OAM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس $OM = AM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۵۲ AP طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره است.

$$A\overset{\triangle}{M}P : AP^۲ = AM^۲ + MP^۲$$

$$AP^۲ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲$$

$$AP^۲ = \frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲} \Rightarrow AP^۲ = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

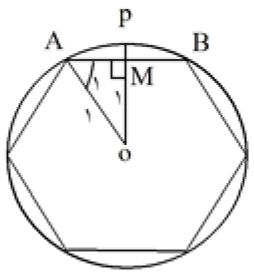
۵۳ AP طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره است.

$$\overset{\triangle}{AMP}: AP^۲ = AM^۲ + MP^۲$$

$$AP^۲ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲$$

$$AP^۲ = \frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲} \Rightarrow AP^۲ = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

۵۴ در شکل مقابل AP به شعاع ۱ ، ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. از طرفی اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است. OA نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۶۰^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۳۰^\circ$ داریم.



$$\overset{\triangle}{OAM}: \widehat{O}_۱ = ۳۰ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲} OA = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}$$

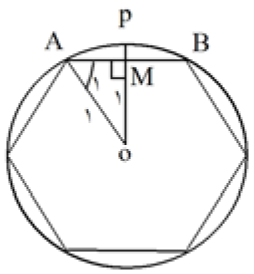
$$\overset{\triangle}{OAM}: OM^۲ = OA^۲ - AM^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$PM = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{APM}: AP^۲ = AM^۲ + PM^۲ \rightarrow AP^۲ = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

۵۵ در شکل مقابل AP به شعاع ۱ ، ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. از طرفی اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است. OA نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = ۶۰^\circ$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = ۳۰^\circ$ داریم.



$$\overset{\triangle}{OAM}: \widehat{O}_۱ = ۳۰ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲} OA = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OAM}: OM^۲ = OA^۲ - AM^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$PM = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

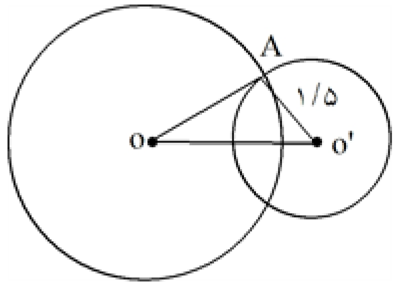
$$\overset{\triangle}{APM}: AP^۲ = AM^۲ + PM^۲ \rightarrow AP^۲ = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

۵۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطهٔ تلاقی دو دایره به مرکز O و O' یعنی A بر هم عمودند پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{OAO'}: OA^۲ = OO'^۲ - O'A^۲$$

$$\Rightarrow OA = ۲/۵^۲ - ۱/۵^۲ = ۶/۲۵ - ۲/۲۵ = ۴ \Rightarrow OA = ۲$$



۵۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های روی شکل و استفاده از قضیهٔ روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۶\times ۱۰ = y(۷+x) \Rightarrow ۶۰ = ۷y + xy \\ ۵\times ۱۲ = x(۷+y) \Rightarrow ۶۰ = ۷x + xy \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

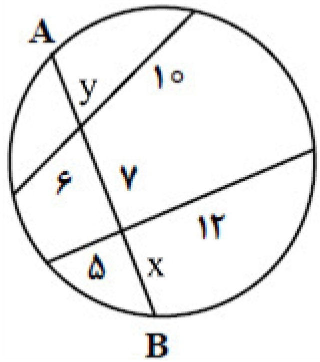
بنابراین:

$$۶\times ۱۰ = y(۷+x) \xrightarrow{y=x} ۶۰ = x(۷+x) \Rightarrow x^۲ + ۷x - ۶۰ = ۰$$

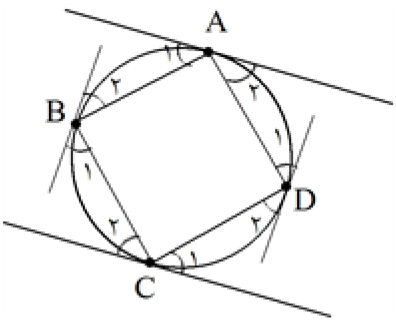
$$\Rightarrow (x+۱۲)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

پس:

$$AB = x + y + ۷ = ۵ + ۵ + ۷ = ۱۷$$



۵۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:



زاویهٔ ظلی : $\widehat{A}_۱ = \frac{\widehat{AB}}{۲}, \widehat{B}_۱ = \frac{\widehat{AB}}{۲}, \widehat{C}_۱ = \frac{\widehat{CD}}{۲}, \widehat{D}_۱ = \frac{\widehat{AD}}{۲}$

زاویهٔ ظلی : $\widehat{A}_۲ = \frac{\widehat{AD}}{۲}, \widehat{B}_۲ = \frac{\widehat{BC}}{۲}, \widehat{C}_۲ = \frac{\widehat{BC}}{۲}, \widehat{D}_۲ = \frac{\widehat{CD}}{۲}$

بنابراین:

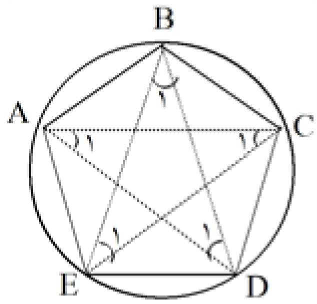
$$\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ + \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ + \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ + \widehat{D}_۱ + \widehat{D}_۲$$

$$= \frac{\widehat{AB}}{۲} + \frac{\widehat{AD}}{۲} + \frac{\widehat{AB}}{۲} + \frac{\widehat{BC}}{۲} + \frac{\widehat{CD}}{۲} + \frac{\widehat{BC}}{۲} + \frac{\widehat{AD}}{۲} + \frac{\widehat{CD}}{۲} = \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = ۳۶۰^\circ$$

۵۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول: این سؤال را در حالت خاص که پنج‌ضلعی منتظم است حل می‌کنیم. پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره، دایره را به پنج قسمت مساوی $\frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$ تقسیم می‌کند. زاویهٔ محاطی $\widehat{D}_۱$ روبه‌رو به وتر AB است پس:

$$\widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$

به همین ترتیب زاویه‌های محاطی روبه‌رو به اضلاع این پنج‌ضلعی منتظم برابر ۳۶° است بنابراین مجموع این زاویه‌ها $۵ \times ۳۶^\circ = ۱۸۰^\circ$ است.

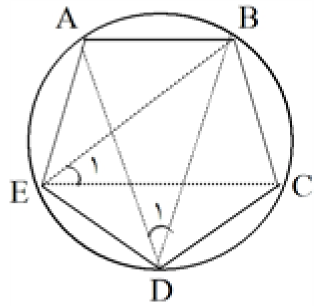


راه‌حل دوم: فرض کنیم ABCDE پنج‌ضلعی محاط در دایره باشد داریم:

$$\widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}, \widehat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ED}}{۲}, \widehat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}, \widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

در نتیجه:

$$\widehat{A}_۱ + \widehat{B}_۱ + \widehat{C}_۱ + \widehat{D}_۱ + \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$



۶۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود.

$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

$$P = \frac{۹+۸+۷}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

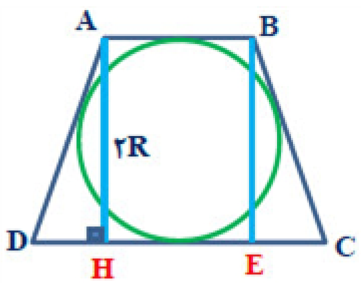
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۲(۱۲-۹)(۱۲-۸)(۱۲-۷)} = \sqrt{۱۲\times۳\times۴\times۵}$$

$$= \sqrt{۱۲^۲\times۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۱۲-۷} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵} = ۲/۴\sqrt{۵}$$

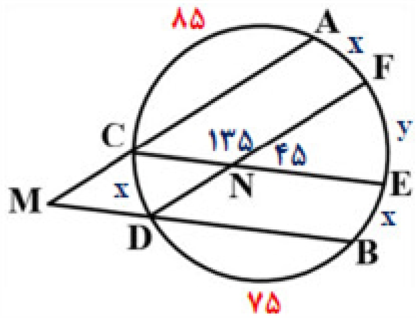
۶۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم ذوزنقه بر دایره‌ای به شعاع R محاط باشد، پس ارتفاع ذوزنقه برابر $۲R$ است. با رسم ارتفاع‌های AH و BE داریم:



$$DH = CE = \frac{DC-AB}{۲} = \frac{۱۶}{۲} \Rightarrow DH = ۸$$

$$AD^{۲} = AH^{۲} + DH^{۲} \Rightarrow AD^{۲} = (۴\sqrt{۵})^{۲} + ۸ = ۱۴۴ \Rightarrow AD = ۱۲$$

۶۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساویند، پس $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BE}$ و $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CD}$
اکنون با توجه به شکل می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{r} F\widehat{N}E = ۴۵^\circ = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۹۰^\circ \\ ۸۵^\circ + ۷۵^\circ + ۳x + y = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳x + y = ۲۰۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲x = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۵ \\ y = ۳۵ \end{cases}$$

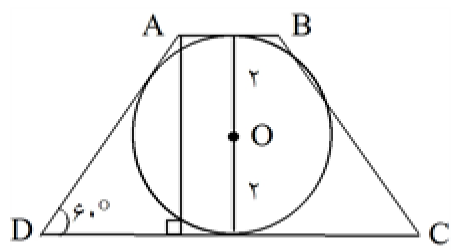
۶۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طول ارتفاع ذوزنقه برابر طول قطر دایره یعنی برابر ۴ است. از طرفی در مثلث ADH داریم:

$$\text{Sin}\ ۶۰^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

چهارضلعی $ABCD$، یک چهارضلعی محیطی است، پس داریم:

$$AB + CD = AD + BC = ۲AD = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AH\,(AB + CD) = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{۱۶}{\sqrt{۳}} = \frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$



۶۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث BDC داریم:

$$\widehat{D}_۲ + \widehat{B}_۱ + \widehat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

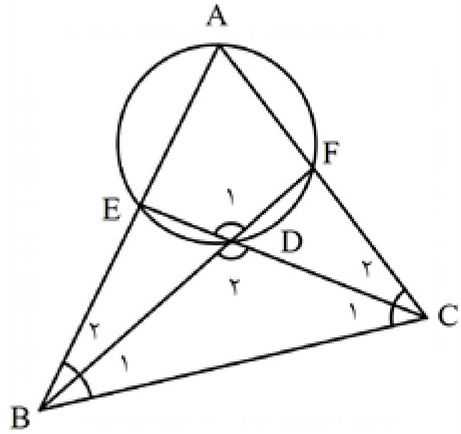
BD و CD نیمساز زوایای B و C هستند، پس داریم:

$$\widehat{D}_۲ + \frac{\widehat{B}}{۲} + \frac{\widehat{C}}{۲} = ۱۸۰^\circ \ (۱)$$

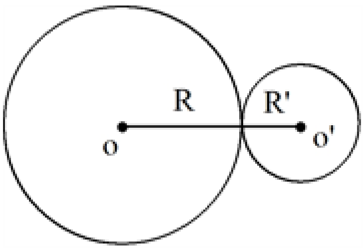
از طرفی چهارضلعی AEDF محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{A} + \widehat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲} \widehat{A} + \widehat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \ (۲)$$

$$۱,۲ \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۸۰^\circ - \widehat{A}}{۲} \Rightarrow ۲\widehat{A} = ۱۸۰^\circ - \widehat{A} \Rightarrow ۳\widehat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۶۰^\circ$$



۶۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول خط المرکزین دو دایره مماس خارج مساوی $R + R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $۲\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال داریم.



$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R \Rightarrow ۲\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

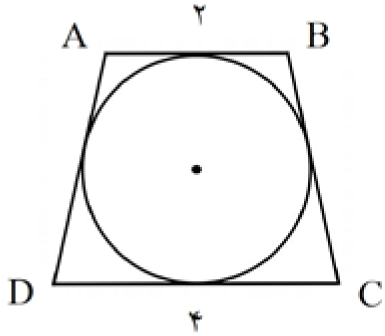
$$\Rightarrow ۴RR' = \frac{۳}{۴}R^۲ \Rightarrow ۴R' = \frac{۳}{۴}R \Rightarrow R = \frac{۱۶}{۳}R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر $\frac{۱۶}{۳}$ برابر شعاع دایره کوچکتر است.

۶۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی قطر دایرهٔ محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده ذوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد آن‌گاه $۴R^۲ = AB \times DC$ پس:

$$۴R^۲ = AB \times DC \Rightarrow ۴R^۲ = ۲\times۴ \Rightarrow R^۲ = ۲$$

بنابراین: $\text{مساحت دایره} = \pi R^۲ = ۲\pi$



۶۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره بزرگتر و R' شعاع دایره‌ی کوچکتر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند پس $OO' = R - R'$ یعنی:

$$R - R' = ۳/۵$$

از طرف دیگر:

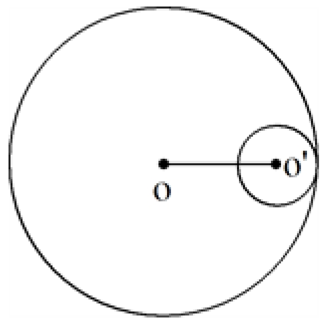
$$\text{مساحت بین دو دایره} = ۲۱\pi \Rightarrow \pi R^۲ - \pi R'^۲ = ۲۱\pi \Rightarrow R^۲ - R'^۲ = ۲۱$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۲۱ \xrightarrow{R-R'=۳/۵} ۳/۵(R + R') = ۲۱$$

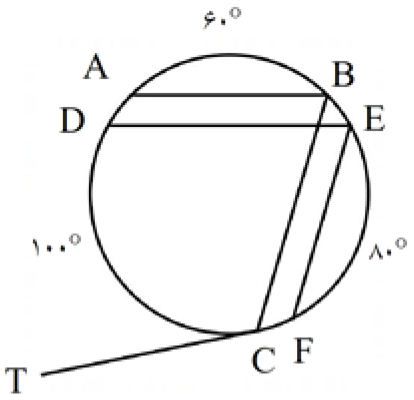
$$\Rightarrow R + R' = \frac{۲۱}{۳/۵} = \frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}} = ۶$$

بنابراین:

$$\begin{cases} R - R' = ۳/۵ \\ R + R' = ۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲R' = ۶ - ۳/۵ \Rightarrow ۲R' = ۲/۵ \Rightarrow R' = \frac{۲/۵}{۲} = ۱/۲۵$$



۶۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند.



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BE} = x$$

در ضمن:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ + x + ۸۰^\circ + x + ۱۰۰^\circ + x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ BCT زاویهٔ ظلی است بنابراین:

$$B\widehat{C}T = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۴۰^\circ + ۱۰۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۱۰۰^\circ$$

۶۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمانهای محصور بین دو وتر موازی مساویند پس:

$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{EF} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{BF}} = \overset{\frown}{\mathrm{AE}} \xrightarrow{\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=۱۵^\circ} \overset{\frown}{\mathrm{BF}} = ۱۵^\circ$$

با فرض $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = x$ و $\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = y$ می‌نویسیم.

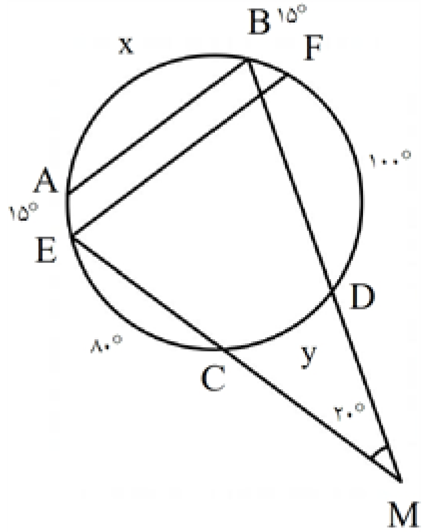
$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{BF}} + \overset{\frown}{\mathrm{FD}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}} + \overset{\frown}{\mathrm{EC}} + \overset{\frown}{\mathrm{AE}} = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow x + ۱۵^\circ + ۱۰۰^\circ + y + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow x + y = ۱۵۰^\circ \ (۱)$$

از طرف دیگر:

$$\widehat{M} = \frac{\mathrm{E}\overset{\frown}{\mathrm{A}}\mathrm{B} - \overset{\frown}{\mathrm{CD}}}{۲} \Rightarrow ۲۰^\circ = \frac{۱۵^\circ + x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۲۵^\circ \ (۲)$$
$$\text{از } ۱, ۲ \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۵۰^\circ \\ x - y = ۲۵^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲y = ۱۲۵^\circ \Rightarrow y = ۶۲/۵^\circ$$

بنابراین:

$$A\widehat{B}D = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{۲} \Rightarrow A\widehat{B}D = \frac{۶۲/۵^\circ + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ}{۲} = \frac{۱۵۷/۵^\circ}{۲} = ۷۸/۷۵$$

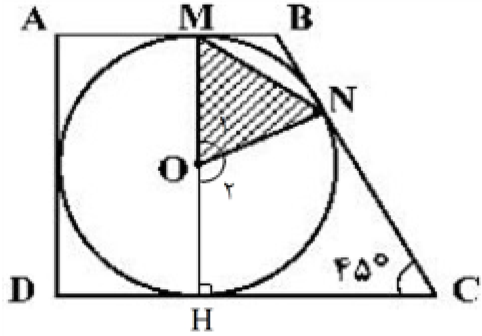


۷۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع OM را امتداد می‌دهیم در این صورت شعاع OH بر DC عمود است. چون $\widehat{N}=\widehat{H}=۹۰^\circ$ پس چهارضلعی ONCH محاطی است در نتیجه:

$$\widehat{O}_۲=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ\xrightarrow{\widehat{O}_۱+\widehat{O}_۲=۱۸۰^\circ}\widehat{O}_۱=۴۵^\circ$$

بنابراین:

$$S_{OMN}=\frac{۱}{۲}OM\times ON\,\text{Sin}\,۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$



۷۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر باشد. چون AB محور تقارن این شکل است پس $DN=N'C=۱۰$.

در ضمن قطر AB عمودمنصف NN' است پس $ON=ON'$.

حال با استفاده از قضیه‌ی رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.

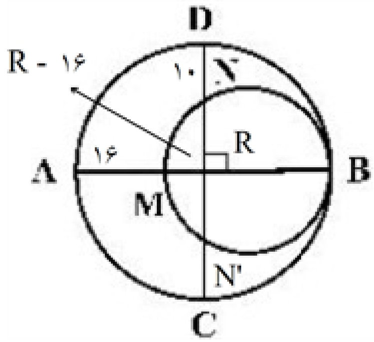
$$ON\times ON'=OB\times OM\xrightarrow{ON=ON'=R-۱۰}$$

$$(R-۱۰)^۲=R(R-۱۶)\Rightarrow R^۲+۱۰۰-۲۰R=R^۲-۱۶R$$

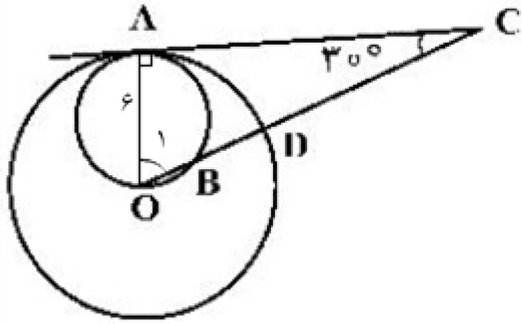
$$\Rightarrow ۴R=۱۰۰\Rightarrow R=۲۵$$

در شکل MB قطر دایره‌ی کوچک‌تر است از طرف دیگر MB مساوی $۲R-۱۶$ است. پس:

$MB=۲R-۱۶\Rightarrow$ قطر دایره کوچک $=۵۰-۱۶=۳۴\Rightarrow$ شعاع دایره کوچک $=۱۷$



۷۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم در این صورت $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ است.



$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{C} = ۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{OA} = \frac{۱}{۲}\mathrm{OC} \xrightarrow{\mathrm{OA}=۶} \mathrm{OC} = ۱۲$$

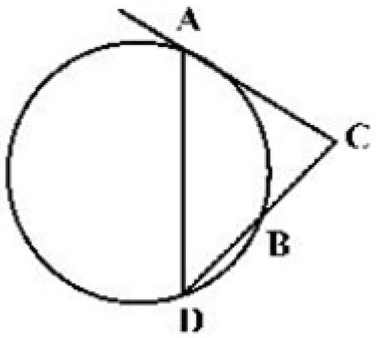
$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \mathrm{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{OC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱۲) = ۶\sqrt{۳}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره‌ی کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$\mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB} \times \mathrm{CO} \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲ = \mathrm{CB} \times ۱۲ \Rightarrow ۱۰۸ = ۱۲\mathrm{BC} \Rightarrow \mathrm{BC} = ۹$$

از طرف دیگر $\mathrm{CD} = \mathrm{CO} - \mathrm{OD} = ۱۲ - ۶ = ۶$ بنابراین: $\mathrm{BD} = \mathrm{BC} - \mathrm{CD} = ۹ - ۶ = ۳$

۷۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

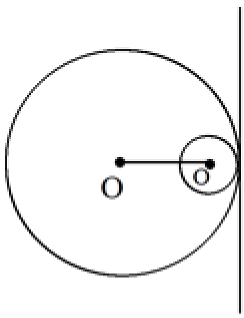


$$\mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB} \times \mathrm{CD} \Rightarrow \mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB}\,(\mathrm{CB} + \mathrm{BD}) \xrightarrow{\mathrm{DB}=\mathrm{BC}}$$

$$\mathrm{CA}^۲ = \mathrm{CB}\,(\mathrm{CB} + \mathrm{CB}) \Rightarrow \mathrm{CA}^۲ = ۲\mathrm{CB}^۲ \Rightarrow \mathrm{CA} = \sqrt{۲}\,\mathrm{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \sqrt{۲}$$

۷۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که مماس داخلی باشند. پس باید $\mathrm{OO}' = |R - R'|$ باشد.



$$\mathrm{OO}' = |R - R'| \Rightarrow ۶ = |a^۲ - ۲ - ۶a + ۱|$$

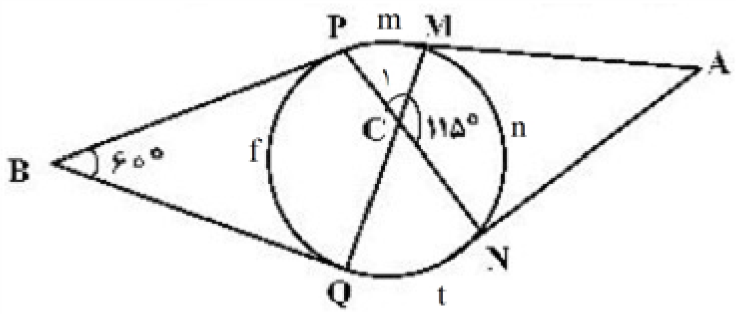
$$\Rightarrow ۶ = |a^۲ - ۶a - ۱|$$

حالت اول: $a^۲ - ۶a - ۱ = ۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a - ۷ = ۰ \Rightarrow S_۱ = ۶$

حالت دوم: $a^۲ - ۶a - ۱ = -۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a + ۵ = ۰ \Rightarrow S_۲ = ۶$

پس میانگین مقادیر ممکن برای a برابر است با: $\dfrac{S_۱ + S_۲}{۲} = ۶$

۷۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{PM}$ و $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{NQ}$ و $\overset{\frown}{PQ}$ به‌ترتیب برابر m و n و t و f باشند داریم:



$$۶۰^\circ = \frac{m+n+t-f}{۲} \Rightarrow m+n+t-f$$
$$= ۱۲۰\ (۱)$$
$$\widehat{C} = ۱۱۵^\circ \Rightarrow \widehat{C}_۱ = ۱۸۰ - ۱۱۵ = ۶۵^\circ$$
$$\Rightarrow \frac{m+t}{۲} = ۶۵ \Rightarrow m+t = ۱۳۰\ (۲)$$

از ۱, ۲ $\Rightarrow n - f = -۱۰$

بنابراین:

$$\widehat{A} = \frac{m+f+t-n}{۲} = \frac{(m+t)+(f-n)}{۲} = \frac{۱۳۰^\circ + ۱۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

۷۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

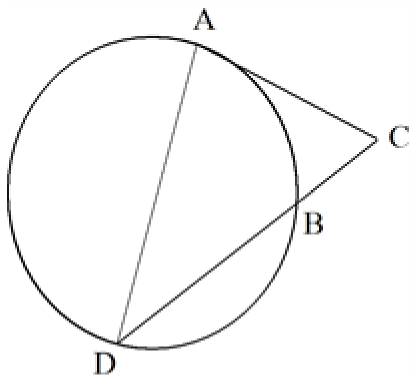
با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^۲ = BC \times DC\ (۱)$$

از طرف دیگر بنابر فرض سؤال $\frac{AC}{BC} = \sqrt{۳}$ پس: $AC = \sqrt{۳}BC$

پس بنابر تساوی ۱ نتیجه می‌گیریم:

$$۳BC^۲ = BC \times DC \Rightarrow ۳BC = DC \Rightarrow \frac{DC}{BC} = ۳ \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل از}} \frac{DB}{BC} = ۲$$



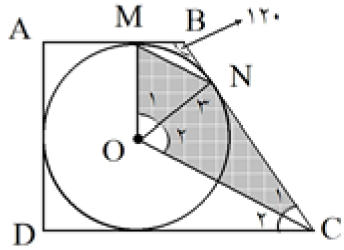
۷۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به N وصل می‌کنیم در این صورت ON برابر شعاع دایره است. در ضمن در چهارضلعی OMBN دو زاویه‌ی $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ قائمه هستند پس این چهارضلعی محاطی است. بنابراین $\widehat{O}_۱ + \widehat{B} = ۱۸۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ$ پس مثلث OMN متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر دو زاویه‌ی B و C در این ذوزنقه مکملند و OC نیمساز زاویه‌ی $\widehat{C}$ است پس $\widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۲ = ۶۰^\circ$ داریم.

$$\overset{\triangle}{ONC} : \widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{ON} = \frac{۱}{۲}\mathrm{OC} \xrightarrow{\mathrm{ON}=۳} \mathrm{OC} = ۶$$

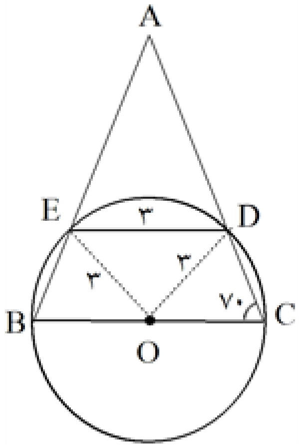
بنابراین:

$$S_{\mathrm{OMNC}} = S_{\mathrm{OMN}} + S_{\mathrm{ONC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳)^۲ + \frac{۱}{۲}\mathrm{ON} + \mathrm{OC}\,\mathrm{Sin}\,۶۰^\circ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱}{۲}(۶)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$= \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۹\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$



۷۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقاط D و E وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OED مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس $\overset{\frown}{\mathrm{ED}} = ۶۰^\circ$ داریم:



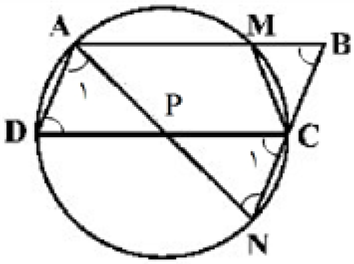
$$\widehat{C} = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{\mathrm{BE}} + \overset{\frown}{\mathrm{ED}}}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{\mathrm{BE}} + ۶۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{BE}} = ۸۰^\circ$$

بنابراین:

$$\overset{\frown}{\mathrm{BE}} + \overset{\frown}{\mathrm{ED}} + \overset{\frown}{\mathrm{DC}} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{\mathrm{BE}}=۸۰^\circ} ۸۰^\circ + \overset{\frown}{\mathrm{ED}} + \overset{\frown}{\mathrm{DC}} = ۱۸۰ \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{ED}} + \overset{\frown}{\mathrm{DC}} = ۱۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{EDC}} = ۱۰۰^\circ$$

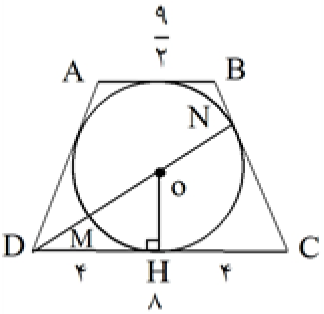
۷۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو زاویه‌ی محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند پس مساویند.



$\widehat{D} = \widehat{N} \xrightarrow{\widehat{D}=\widehat{B}} \widehat{B} = \widehat{N} \Rightarrow$ مثلث ABN متساوی‌الساقین است

از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازیند پس دو کمان $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ و $\overset{\frown}{\mathrm{MC}}$ که بین آن‌ها هستند مساویند پس $\mathrm{AD} = \mathrm{MC}$. در ضمن $\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ پس $\mathrm{BC} = \mathrm{MC}$ یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. در ضمن چون $\mathrm{BN} \parallel \mathrm{AD}$ و AN مورب، پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{N}$ و $\widehat{N} = \widehat{D}$ پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{D}$ یعنی مثلث APD متساوی‌الساقین است و چون $\mathrm{BN} \parallel \mathrm{AD}$ و DC مورب، پس $\widehat{D} = \widehat{C}_۱$ و $\widehat{D} = \widehat{N}$ پس $\widehat{C}_۱ = \widehat{N}$ یعنی مثلث PNC نیز متساوی‌الساقین است. بنابراین چهار مثلث ABN و BMC و APD و PNC متساوی‌الساقین هستند.

۸۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی حاصل‌ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره‌ی محاطی است. اگر R شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه داریم:



$$\mathrm{AB} \times \mathrm{DC} = ۴R^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۲} \times ۸ = ۴R^۲$$
$$\Rightarrow R^۲ = ۹ \Rightarrow R = ۳$$

حال از مرکز O به رأس D وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصله‌ی نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً $\mathrm{DN} = \mathrm{DO} + R$.

برای به دست آوردن DO در مثلث قائم‌الزاویه ODH می‌نویسیم:

$$\mathrm{OD}^۲ = \mathrm{OH}^۲ + \mathrm{DH}^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow \mathrm{OD} = ۵$$

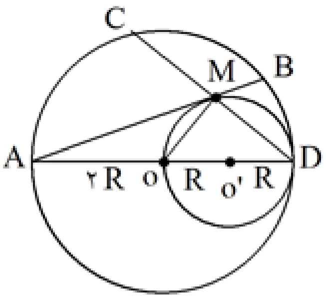
بنابراین: فاصله‌ی دورترین نقاطه دایره تا D $= \mathrm{OD} + R = ۵ + ۳ = ۸$

۸۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از مرکز O به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی M زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر OD است پس $\widehat{M} = ۹۰^\circ$.

بنابراین OM بر وتر CD عمود است پس OM وتر CD نصف می‌کند یعنی $\text{CM} = \text{MD}$.

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.



$$\text{MA} \times \text{MB} = \text{MC} \times \text{MD} \Rightarrow \text{MA} \times \text{MB} = \text{MD}^۲ \quad (۱)$$

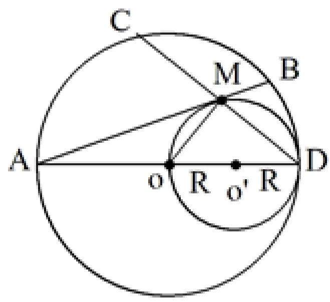
در ضمن با وصل کردن نقطه‌ی B به D نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی محاطی B که روبه‌رو به قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است قائمه است و شعاع O'M بر وتر AB عمود است پس:

$$O'M \parallel \text{BD} \Rightarrow \frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{O'A}{O'D} \Rightarrow \frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{۳R}{R} = ۳ \Rightarrow \text{MA} = ۳\,\text{MB} \quad (۲)$$

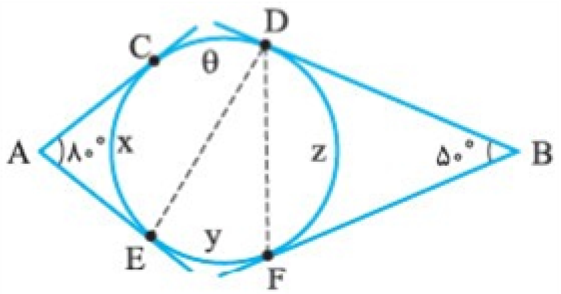
$$\text{از } ۱, ۲ \Rightarrow ۳\,\text{MB} \times \text{MB} = \text{MD}^۲ \Rightarrow \sqrt{۳}\text{MB} = \text{MD}$$

بنابراین:

$$\frac{\text{MC}}{\text{MB}} = \frac{\text{MD}}{\text{MB}} = \frac{\sqrt{۳}\,\text{MB}}{\text{MB}} = \sqrt{۳}$$



۸۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کمان $\overset{\frown}{\text{CD}}$ برابر θ باشد، آن‌گاه:



$$\text{CD} = ۲R\,\text{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow R = ۲R\,\text{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\,\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\theta}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{۲} \Rightarrow ۸۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + z + y - x}{۲} \Rightarrow z + y - x = ۱۰۰^\circ \quad (۱)$$

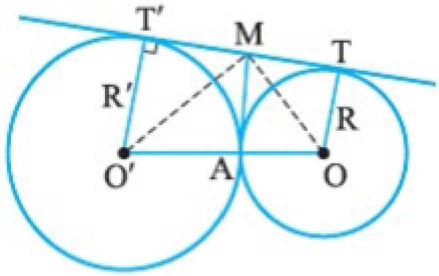
$$\widehat{B} = \frac{(\theta + x + y) - z}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + x + y - z}{۲} \Rightarrow x + y - z = ۴۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۲y = ۱۴۰^\circ \Rightarrow y = ۷۰^\circ$$

زاویهٔ EDF محاطی است و برابر با نصف کمان مقابلش است. پس: $E\widehat{D}F = \frac{y}{۲} = ۳۵^\circ$ محاطی

۸۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مماس مشترک خارجی $\mathrm{TT}' = \sqrt{\mathrm{OO}'^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۱۳^{۲} - (۹ - ۴)^{۲}} = ۱۲$



اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در M قطع کند، آن‌گاه $O'M$ نیمساز $T'\widehat{M}A$ و OM نیز نیمساز $T\widehat{M}A$ است، پس $O'\widehat{M}O = ۹۰^\circ$ است. اگر دایره‌ای به قطر OO' رسم شود از M همان نقطهٔ مطلوب است.

از طرفی: $\mathrm{MA} = \mathrm{MT}' = \mathrm{MT} = \dfrac{\mathrm{TT}'}{۲} = ۶$

پاسخنامه کلیدی

۵۶	۱	۲	۳	**۴**
۵۷	۱	**۲**	۳	۴
۵۸	۱	۲	**۳**	۴
۵۹	۱	**۲**	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	**۴**
۶۱	۱	۲	۳	**۴**
۶۲	۱	۲	**۳**	۴
۶۳	۱	۲	۳	**۴**
۶۴	۱	۲	**۳**	۴
۶۵	۱	۲	۳	**۴**
۶۶	**۱**	۲	۳	۴
۶۷	**۱**	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	**۳**	۴
۶۹	۱	۲	۳	**۴**
۷۰	۱	۲	**۳**	۴
۷۱	۱	۲	**۳**	۴
۷۲	۱	**۲**	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	**۴**
۷۴	۱	۲	**۳**	۴
۷۵	۱	۲	**۳**	۴
۷۶	۱	۲	**۳**	۴
۷۷	**۱**	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	**۳**	۴
۷۹	۱	۲	۳	**۴**
۸۰	۱	۲	**۳**	۴
۸۱	۱	۲	**۳**	۴
۸۲	۱	۲	**۳**	۴
۸۳	**۱**	۲	۳	۴