



p30konkor.com

عنوان آزمون : ریاضی ۱۱ تجربی فصل ۱

زمان آزمون :

تاریخ برگزاری

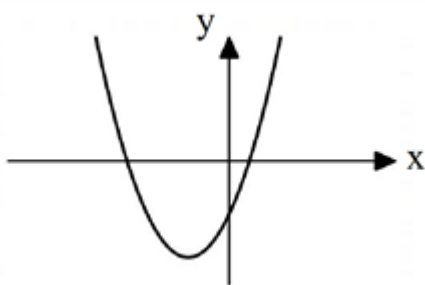
نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + a = 0$ و $2\alpha^2 + \beta^2 - 5\alpha = 7$ باشد، مقدار a را به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x^2 - 10x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{10}{1} = 10 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{a}{1} = a \end{cases}$ $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 10^2 - 2a = 100 - 2a$ $\xrightarrow{x=\alpha} 2\alpha^2 - 10\alpha + a = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 10\alpha = -a \xrightarrow{\div 2} \alpha^2 - 5\alpha = -\frac{a}{2}$ $2\alpha^2 + \beta^2 - 5\alpha = 7 \Rightarrow \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{100 - 2a} + \underbrace{\alpha^2 - 5\alpha}_{-\frac{a}{2}} = 7 \Rightarrow 100 - 2a - \frac{a}{2} = 7 \Rightarrow -\frac{5}{2}a = -93 \Rightarrow a = 37.2$ <p>$\Rightarrow a = 37$</p>	
۲	<p>معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{5 - \sqrt{7}}{2}$ و $\frac{5 + \sqrt{7}}{2}$ باشند.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} + \frac{5 + \sqrt{7}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ P = \alpha\beta = \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2}\right) = \frac{25 - 7}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \end{cases}$ $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{9}{2} = 0$	

شکل زیر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. علامت ضرایب a و b و c را به دست آورید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - یازدهم

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۳

معادله $\sqrt{x+3} = x-3$ را حل کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - یازدهم

به توان می رسانیم^۲

$$\sqrt{x+3} = x-3 \rightarrow x+3 = (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = x+3$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ق ق} \\ x=6 \text{ ق ق} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۴

در خط $(a-1)x - by = 12$ اگر طول از مبدأ برابر ۴ و عرض از مبدأ برابر ۲ باشد، a و b را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - یازدهم

پاسخ: ۱ اگر طول از مبدأ ۴ باشد، یعنی خط از نقطه $(4, 0)$ می‌گذرد.

$$(4, 0) \Rightarrow (a-1) \times 4 - b(0) = 12 \Rightarrow 4a - 4 = 12 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

اگر عرض از مبدأ برابر ۲ باشد، یعنی خط از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد.

$$(0, 2) \Rightarrow (a-1) \times 0 - b(2) = 12 \Rightarrow -2b = 12 \Rightarrow b = -6$$

پاسخ: ۱

۵

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{x+5}{x^2-4}$
 ب) $\sqrt{x+2} = x-4$

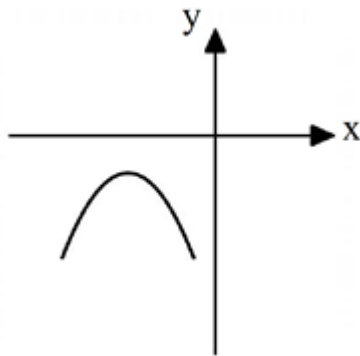
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

الف) $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{x+5}{x^2-4} \xrightarrow{\times (x+2)(x-2)} x(x-2) + x+2 = x+5$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + x + 2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = 3 \text{ ق ق} \end{cases}$
 ب) $\sqrt{x+2} = x-4 \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} x+2 = x^2 - 8x + 16$
 $\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ق ق غ} \\ x = 7 \text{ ق ق} \end{cases}$

پاسخ: ۱

۶

شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. علامت ضرایب a و b و c را تعیین کنید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

$$\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۷

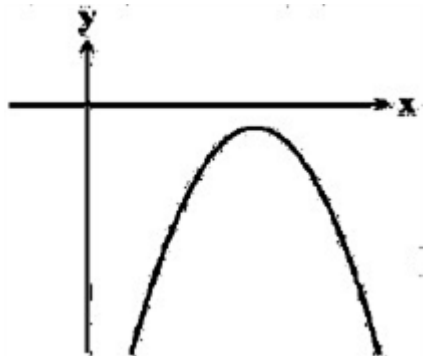
فاصله نقطه $A(-1, 5)$ از خط $2x + y + 1 = 0$ را به کمک فرمول فاصله نقطه از خط را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 + 5 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

پاسخ: ۱

۸

معادله زیر را حل کنید.	۹	پاسخ: ۱	$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم			<p>به توان ۲ می رسانیم</p> $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 5 - \sqrt{x} \Rightarrow 2x+1 = 25 - 10\sqrt{x} + x$ $\Rightarrow 10\sqrt{x} = 24 - x \xrightarrow{\sqrt{x}=t} 10t = 24 - t^2 \Rightarrow t^2 + 10t - 24 = 0$ $\Rightarrow (t+12)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -12 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$
در خط $10 = (m-2)x + 2ny$ اگر طول از مبدأ برابر ۲ و عرض از مبدأ برابر ۳ باشد، m و n را به دست آورید.	۱۰	پاسخ: ۱	سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم
اگر طول از مبدأ ۲ باشد، یعنی خط از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد.			<p>اگر طول از مبدأ ۲ باشد، یعنی خط از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد.</p> $(2, 0) \Rightarrow (m-2) \times 2 + 2n(0) = 10 \Rightarrow 2m - 4 = 10 \Rightarrow 2m = 14 \Rightarrow m = 7$ <p>اگر عرض از مبدأ ۳ باشد، یعنی خط از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد.</p> $(0, 3) \Rightarrow (m-2) \times 0 + 2n(3) = 10 \Rightarrow 6n = 10 \Rightarrow n = \frac{10}{6} \Rightarrow n = \frac{5}{3}$
فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $4x - 3y + 12 = 0$ را به کمک فرمول فاصله نقطه از خط به دست آورید.	۱۱	پاسخ: ۱	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳
$d = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ 4(-2) - 3(4) + 12 }{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{ -8 }{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$			
معادله $\sqrt{x+1} = x-5$ را حل کنید.	۱۲	پاسخ: ۱	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳
$\sqrt{x+1} = x-5 \Rightarrow x+1 = (x-5)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$ $\Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ (غ ق)} \quad x = 8 \text{ (ق ق)}$			
شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. علامت ضرایب b و c را تعیین کنید.	۱۳	پاسخ: ۱	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳
			$c < 0$ (منفی) و $b > 0$ (مثبت)

	<p>معادله $x = \sqrt{x+2} + 4$ را حل کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $\begin{cases} x = 7 \\ x = 2 \end{cases}$ غ ق ق</p>	۱۴
	<p>معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ باشند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ راه حل اول: $S = \frac{2-\sqrt{3}}{5} + \frac{2+\sqrt{3}}{5} = \frac{4}{5}$</p> <p>$P = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{5}\right)\left(\frac{2+\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{1}{25}$</p> <p>$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$</p> <p>توجه: هر مضرب غیرصفر از معادله بالا صحیح است.</p> <p>راه حل دوم: $\left(x - \frac{2-\sqrt{3}}{5}\right)\left(x - \frac{2+\sqrt{3}}{5}\right) = x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$</p> <p>توجه: هر مضرب غیرصفر از معادله بالا صحیح است.</p>	۱۵
	<p>خط $4x - 3y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $(-1, 3)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $r = \frac{ 12+3 }{\sqrt{16+9}}$</p> <p>$S = 9\pi$</p>	۱۶
	<p>اگر $A(1, 2)$، $B(3, 6)$ و $C(-1, 4)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله میانه BM را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ ابتدا نقطه M (وسط AC) را محاسبه می‌کنیم و خط گذرنده از BM را به دست می‌آوریم.</p> <p>$M\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow M(0, 3)$</p> <p>$m_{BM} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6-3}{3-0} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow y-y_1 = m(x-x_1)$</p> <p>$\Rightarrow y-3 = 1(x-0) \Rightarrow y = x+3$</p>	۱۷

اگر $A(1, 0)$ ، $B(0, 2)$ و $C(5, 7)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع CH را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ ابتدا معادله خط AB را حساب می‌کنیم و سپس فاصله نقطه C تا خط AB برابر ارتفاع است.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$$

$$CH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(5) + 7 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \Rightarrow CH = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

۱۸

اگر $A(3, 4)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(3, -1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانه CM را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ ابتدا باید نقطه وسط AB را محاسبه کنیم و فاصله C تا M (وسط AB) برابر طول پاره خط است.

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3 - 1}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) \Rightarrow M(1, 3)$$

$$CM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۱۹

اگر $A(-1, 5)$ ، $B(0, 4)$ و $C(9, 0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع BH را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ ابتدا شیب خط AC را به دست می‌آوریم و سپس قرینه و معکوس می‌کنیم.

$$m_{AC} = \frac{5 - 0}{-1 - 9} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{BH} = 2$$

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 4$$

معادله ارتفاع BH برابر $y = 2x + 4$ است.

۲۰

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3x+5}{x^2+3x}$$

$$\text{ب) } \sqrt{3x-1} = 5$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

$$\text{الف) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3x+5}{x^2+3x} \xrightarrow{\times x(x+3)} x+3+x = 3x+5$$

$$\Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \text{ ق ق}$$

$$\text{ب) } \sqrt{3x-1} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} 3x-1 = 25 \Rightarrow 3x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{3} \text{ ق ق}$$

می‌رسانیم

پاسخ: ۱

۲۱

محیط دایره‌ای را بیابید که مرکز آن $O(-1, 1)$ و بر خط $3x + 4y + 9 = 0$ مماس باشد.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم

پاسخ: ۱ فاصله نقطه $(-1, 1)$ تا خط $3x + 4y + 9 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$r = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3 + 4 + 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$P = 2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

۲۲

جواب‌های معادله $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$ را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم

پاسخ: ۱
$$\xrightarrow{x^2=t} t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=5 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

۲۳

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)
$$\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{5x+4}{x^2+7x+10}$$

ب)
$$\sqrt{x-1} = x-7$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم

الف)
$$\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{5x+4}{x^2+7x+10} \xrightarrow{\times(x+2)(x+5)} x(x+5) + x+2 = 5x+4$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + x + 2 = 5x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x=1 \\ \text{غ ق } x=-2 \end{cases}$$


ب)
$$\sqrt{x-1} = x-7 \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} x-1 = x^2 - 14x + 49$$

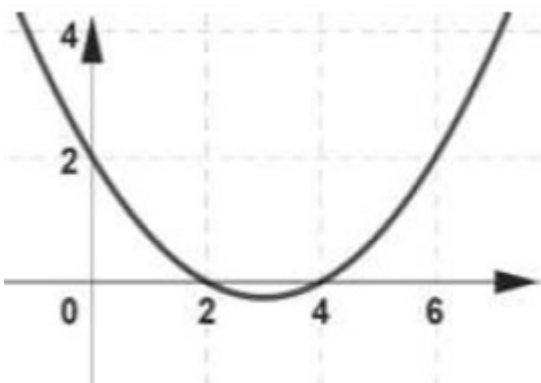
$$\Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق } x=5 \\ \text{ق ق } x=10 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۲۴

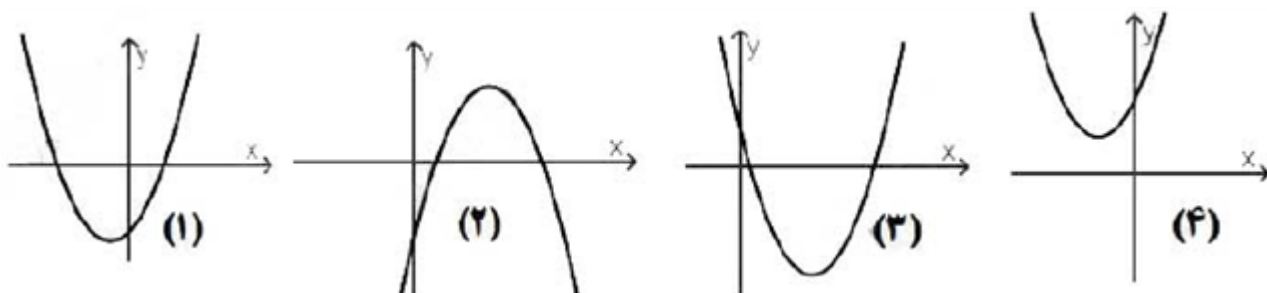
معادله‌های زیر را حل کنید.	۲۵	پاسخ: ۱	<p>الف) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = \frac{4x-2}{x^2+2x-3}$</p> <p>ب) $\sqrt{4x-1} - 7 = 0$</p>
در معادله $x^2 - 14x - 7 = 0$ مجموع معکوس ریشه‌ها را به دست آورید.	۲۶	پاسخ: ۱	<p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> $\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 14 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -7 \end{cases}$ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{14}{-7} = -2$
مساحت دایره‌ای که بر خط $3x + 4y + 3 = 0$ مماس و مرکز آن $(-1, 5)$ باشد را به دست آورید.	۲۷	پاسخ: ۱	<p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> <p>فاصله نقطه $(-1, 5)$ تا خط $3x + 4y + 3 = 0$ برابر شعاع دایره است.</p> $r = d = \frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ -3 + 20 + 3 }{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$ $S = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$
یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = x + 2$ واقع است. اگر $A(2, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.	۲۸	پاسخ: ۱	<p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>$A(2, 0), x - y - 2 = 0$</p> $\text{فاصله نقطه از خط} = d = \frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ 2 - 0 + 2 }{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ <p>طول ضلع مربع $= d = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{مساحت} = d^2 = 8$</p>

	<p>معادله مقابل را حل کنید.</p> $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>توان ۲</p> $\sqrt{2-x} = 1 - 2x \xrightarrow{2} 2-x = 4x^2 - 4x + 1$ $4x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \text{غیرقابل قبول} \\ x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{قابل قبول} \end{cases}$	۲۹
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ برابر است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $(-3, 6)$</p>	۳۰
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- مقدار ماکزیمم تابع $y = -2x^2 + 8x - 5$ برابر ۳ است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>	۳۱
	<p>در معادله درجه دو به شکل $ax^2 + bx + c = 0$، اگر یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۲ باشد و $c = 2b$، در این صورت ریشه دیگر این معادله را بیابید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x_1 = 2, x_1 + x_2 = 2 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 x_2 = 2x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2b}{a}$ $2 + x_2 = -x_2 \Rightarrow x_2 = -1$	۳۲
	<p>صفرهای تابع $f(x) = (4 - x^2)^2 + 2(4 - x^2) - 15$ را، در صورت وجود، به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\begin{aligned} 4 - x^2 = u &\xrightarrow{\quad} u^2 + 2u - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ u = -5 \end{cases} \\ 4 - x^2 = 3 &\Rightarrow x = \pm 1, \quad 4 - x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm 3 \end{aligned}$	۳۳
	<p>نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. علامت ضرایب a, b, c را تعیین کنید.</p>  <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ منفی a / منفی b / منفی c</p>	۳۴

	<p>جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. ریشه‌های معادله اعداد ۵-، ۲ است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $x^2 + 3x - 10 = 0$</p>	۳۵
	<p>فاصله نقطه $A(1, 0)$ از خط $x + y = k$ برابر $\sqrt{2}$ است. مقدار k را پیدا کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $A(1, 0), x + y - k = 0 \Rightarrow d = \frac{ 1 + 0 - k }{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 - k = 2 \Rightarrow 1 - k = \pm 2 \Rightarrow k = -1, 3$</p>	۳۶
	<p>معادله مقابل را حل کنید:</p> $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$ <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $t = \frac{1}{x-2} \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3, 1$ $\frac{1}{x-2} = -3 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ $\frac{1}{x-2} = 1 \Rightarrow x = 3$ (ص ۱۹)</p>	۳۷
	<p>اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید.</p>  <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ ۲ و ۴ صفرهای تابع هستند.</p> $y = a(x-2)(x-4) \xrightarrow{(0,2)} 2 = a(0-2)(0-4) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ $y = \frac{1}{4}(x-2)(x-4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$	۳۸
	<p>مجموعه جواب معادله $\sqrt{4x-1} = 2x$ را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ ق ق $2x = \sqrt{4x-1} \Rightarrow 4x^2 = 4x-1 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$</p>	۳۹

۴۰	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مجموعه جواب معادله $\sqrt{x+3} + 1 = 0$ برابر تهی است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست.</p>
۴۱	<p>مجموع یک عدد صحیح با معکوسش برابر با ۲- می‌باشد، با تشکیل معادله و حل آن، مقدار این عدد را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x + \frac{1}{x} = -2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 2x + 1 = 0$ $\Rightarrow x = -1, x \neq 0$
۴۲	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. معادله $x^2 + 6x + 7 = 0$ دو ریشه مثبت دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست.</p>
۴۳	<p>اگر خط $4x + 3y = -10$ بر دایره‌ای به مرکز $(1, 2)$ مماس باشد، اندازه شعاع دایره را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $r = \frac{ ax + by + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ 4(1) + 3(2) + 10 }{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$
۴۴	<p>درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2x + 3$ بر هم عمود هستند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست.</p>
۴۵	<p>نقاط $A(2, -2)$ و $B(4, 4)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند. مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $O = (3, 1)$ $R = OA = \sqrt{(3-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$
۴۶	<p>اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت، چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، ماشین سریع‌تر در چند ساعت می‌تواند کار را به تنهایی انجام دهد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 6$

با توجه به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های جدول زیر را مشخص کنید.



ویژگی	شماره نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است
دارای مینیمم است و ریشه ندارد
علامت c منفی است.

۴۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

ویژگی	شماره نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است	(۳)
دارای مینیمم است و ریشه ندارد	(۴)
علامت c منفی است.	(۱) و (۲)

پاسخ: ۱

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

فاصله دو خط موازی $3x - 4y + 5 = 0$ و $3x + 4y + 10 = 0$ برابر است.

۴۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ ۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

صفرهای تابع f طول نقاط تلاقی نمودار $f(x)$ با محور x ها است.

۴۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ درست

یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $(3, 0)$ یکی از رؤوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.

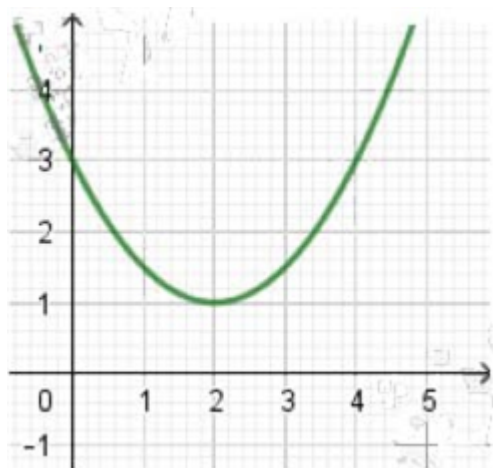
۵۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 3 - 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \sqrt{5} \Rightarrow S = d^2 = 5$$

پاسخ: ۱

در شکل زیر نمودار سهمی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



۵۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ تابع، صفری ندارد.

$$y = a(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow 3 = a(0 - 2)^2 + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$$

مجموعه جواب معادله $\sqrt{x^2 - 9} + 2\sqrt{x - 3} = 0$ برابر می باشد.

۵۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ ۳

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
حاصل ضرب ریشه های معادله $4x^2 + 3x - 8 = 0$ مساوی است.

۵۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ -۲

معادله $2 + \sqrt{1 + x} = x - 3$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$2 + \sqrt{1 + x} = x - 3 \Rightarrow \sqrt{1 + x} = x - 3 - 2 = x - 5$$

پاسخ: ۱

دو طرف معادله را به توان ۲ می رسانیم.

$$1 + x = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \end{cases}$$

جواب $x = 3$ غیرقابل قبول است.

۵۴

	<p>نقاط $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$، $B \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $C \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه AM را بیابید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ مختصات نقاط M وسط ضلع BC:</p> $\begin{bmatrix} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{4+0}{2} = 2 \end{bmatrix}$ $AM = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$	۵۵
	<p>مقدار m را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + mx^2 - x - 2$ برابر ۱- باشد. سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + m + 1 - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$ $f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$	۵۶
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>هرگاه دو خط $5x + 2y = my$ و $(1+m)x + y - 3 = 0$ بر هم عمود باشند، مقدار m برابر است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ -۲</p>	۵۷
	<p>معادله $x^2 - \sqrt{2-x} = 1$ را حل کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $(x^2 - 1)^2 = (-\sqrt{2-x})^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 1 \text{ غیرقابل قبول}, x_2 = \frac{-1}{4}$	۵۸
	<p>نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $AH = \frac{ -3 + 0 - 5 }{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{64}{2} = 32$	۵۹
	<p>جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>مقدار مینیمم تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ برابر با است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ ۲</p>	۶۰

	<p>معادله روبه‌رو را حل کنید.</p> $\sqrt{2-x} = x$ <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $2-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ غ ق} \\ x = 1 \text{ ق ق} \end{cases}$	۶۱
	<p>اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>مرکز دایره O $\left \begin{array}{l} x_o = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_o = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{array} \right.$</p>	۶۲
	<p>نقاط $C \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}$, $B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر مثلث در رأس B قائمه باشد، مقدار k را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>چون مثلث در رأس B قائمه است، پس دو ضلع BA, BC بر هم عمود هستند. (ص ۳۱)</p> $m_{BC} = \frac{-k}{k-1}, m_{BA} = \frac{2-0}{4-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{-k}{k-1} = -1$ $-2k = -(3k-3) \Rightarrow -2k + 3k = 3 \Rightarrow k = 3$	۶۳
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>معادله درجه دوم دارای ریشه‌های $3 \pm 2\sqrt{5}$ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x^2 - 6x - 11 = 0$	۶۴
	<p>دو خط $2x + 3y = 1$ و $3x - 2y = 2$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطه $A(1, 3)$ یک رأس مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>دو خط بر هم عمودند و نقطه A روی این دو خط قرار ندارد، برای به دست آوردن طول و عرض مستطیل کافیهست فاصله نقطه A را از این دو خط به دست آوریم:</p> $AH = \frac{ 2 \times 1 + 3 \times 3 - 1 }{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$ $AH' = \frac{ 3 \times 1 - 2 \times 3 - 2 }{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$ <p>مساحت مستطیل $= \frac{10}{\sqrt{13}} \times \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{50}{13}$</p>	۶۵

$$1 + \sqrt{x+2} = x-3$$

معادله مقابل را به روش جبری حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ $\sqrt{x+2} = x-3 \Rightarrow x+2 = x^2-8x+16 \Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow (x-7)(x-2)=0$

غ ق ق

$$x=2$$

۶۶

نقطه $A(4, 0)$ یک رأس مثلثی است که دو رأس دیگر آن روی خط $x-3y=1$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از این خط بوده و نقطه $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه اول محورهای مختصات کدام است؟

۱/۳۵ (۴)

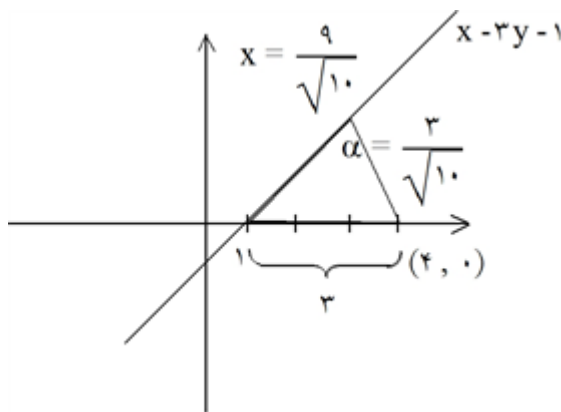
۱/۶۵ (۳)

$0/9\sqrt{0/9}$ (۲)

$0/6\sqrt{0/6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$d = \frac{|4-1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$x = \sqrt{9 - \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{81}{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{27}{2 \times 10} = 1/35$$

۶۷

در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف و مثبت a ، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟

هیچ مقدار a (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

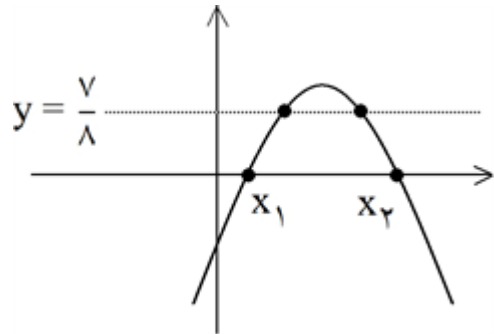
$$x_s = -\frac{3}{2a} \Rightarrow a\left(-\frac{3}{2a}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2a}\right) + a = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{9}{4a} - \frac{9}{2a} + a = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{-9 + 4a^2}{4a} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow 8a^2 - 7a - 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 & \checkmark \\ a = -\frac{9}{8} & \times \end{cases}$$

تذکر: در اصل سؤال به مثبت بودن a اشاره نشده بود که در این صورت به ازای $-\frac{9}{8} < a < 0$ و محدود کردن دامنه

می‌توان به کمترین مقدار $\frac{7}{8}$ رسید و در این صورت بی‌شمار مقدار برای a وجود خواهد داشت که در گزینه‌ها نیست. به

طور مثال اگر $a = -1$ در این صورت اگر $D_f = [x_1, x_2]$ فرض شود، کمترین مقدار سهمی $\frac{7}{8}$ است.



۶۸

دو رأس یک مستطیل روی خط $2y - x = 4$ و نقاط $(1, 4)$ و $(-1, 0)$ رأس‌های غیرمجاور این مستطیل هستند. طول مستطیل کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)

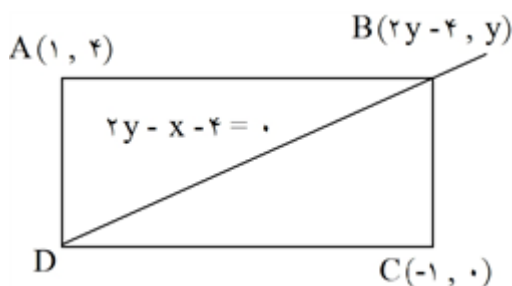
$3\sqrt{2}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۲)

$5\sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$x = 2y - 4 > 0 \Rightarrow y > 2$$

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{y-4}{2y-5} \times \frac{y}{2y-2} = -1$$

$$\Rightarrow -y^2 + 4y = 4y^2 - 16y + 15 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y = 3 \quad \checkmark$$

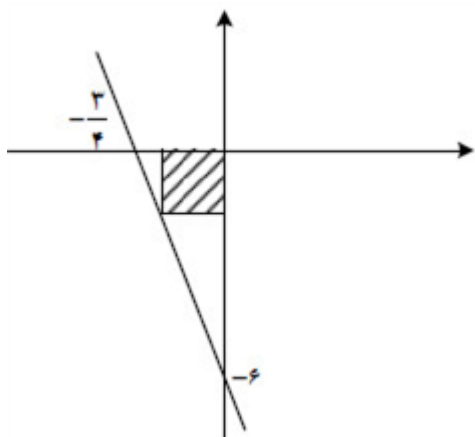
$$y = 1 \quad \times$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{matrix} B(2, 3) \\ C(-1, 0) \end{matrix} \Rightarrow |BC| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{طول} \quad \checkmark$$

$$\begin{matrix} B(2, 3) \\ A(1, 4) \end{matrix} \Rightarrow |AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{عرض} \quad \text{IV}$$

۶۹

در شکل مقابل، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟



$\frac{3}{2\sqrt{3}}$ (۴)

$\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (۲)

$\frac{4}{2\sqrt{3}}$ (۱)

۷۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله خط را می‌نویسیم و سپس نقطه $(-x, -x)$ را در آن قرار می‌دهیم.

$$y = -8x - 6$$

$$-x = -8(-x) - 6 \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{قطر} = \sqrt{2}x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $-x^2 + 5x + m = 0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{4}$ است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

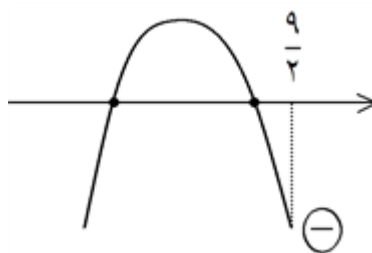
۱ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{9}{4}\right) < 0 \Rightarrow -\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 5\left(\frac{9}{4}\right) + m < 0 \\ \Rightarrow -\frac{81}{4} + \frac{45}{2} + m < 0 \\ \Rightarrow m < -\frac{9}{4} = -2/25 \\ \Delta > 0 \Rightarrow 25 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{25}{4} = -6/25 \\ -6/25 < m < -2/25 \Rightarrow m = -6, -5, -4, -3 \end{array} \right.$$



۷۱

در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف و منفی a ، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $-\frac{1}{4}$ است؟

۱ (۱)

۲ (۲) هیچ مقدار a

۳ (۳)

۴ (۴)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۴ گزینه پاسخ صحیح است. $x_s = -\frac{1}{2a}$ راس سهمی

$$y_s = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) + 2a = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + 2a = -\frac{1}{4} \Rightarrow 8a^2 + 2a - 1 = 0$$

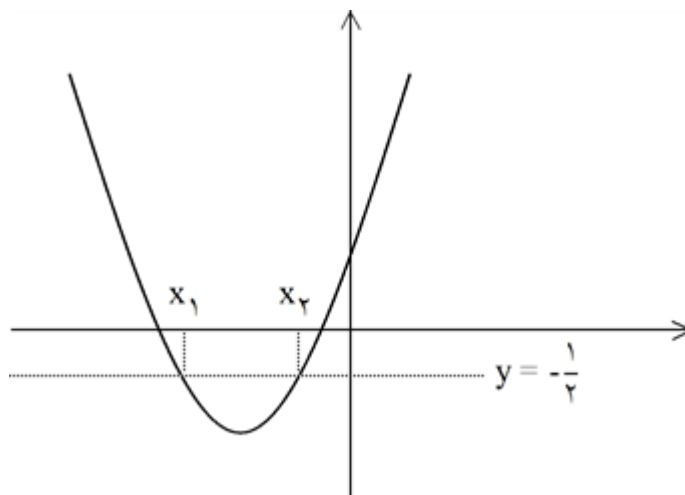
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \text{ ق ق} \\ a = \frac{1}{8} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بیشترین مقدار ندارد \Rightarrow غ ق ق $a = \frac{1}{8}$

تذکر: در اصل سؤال، به مقدار منفی a اشاره نشده بود که در این صورت به ازای $0 \leq a < \frac{1}{8}$ و محدود کردن

دامنه می‌توان به ماکزیمم $-\frac{1}{4}$ رسید و در این حالت بی‌شمار مقدار برای a وجود دارد که در گزینه‌ها موجود

نیست! به طور مثال اگر $a = \frac{1}{8}$ آنگاه: $y = \frac{1}{8}x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(x^2 + 8x + 2)$



با محدود کردن دامنه به فاصله‌ی $[x_1, x_2]$ ماکزیمم سهمی $-\frac{1}{4}$ می‌شود.

نقطه $A(-5, -1)$ یک رأس مثلثی است که یک ضلع آن روی خط $x - 2y = 1$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از این خط بوده و نقطه $(-4, -2)$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه سوم محورهاى مختصات کدام است؟

۱) ۴

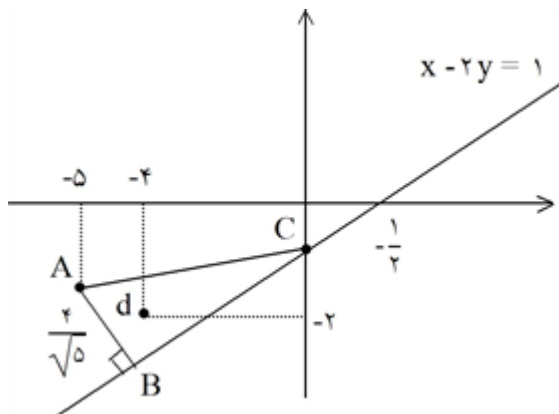
۲) $4/2$

۳) ۶

۴) $6/4$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$AB \text{ خط: } y + 2x + 11 = 0 \Rightarrow B(-4/2, -2/4)$$

$$L \text{ خط: } x - 2y = 1$$

$$C(0, -\frac{1}{2})$$

$$AB \text{ خط تا } C \text{ فاصله نقطه } \Rightarrow \frac{|-\frac{1}{2} + 0 + 11|}{\sqrt{5}} = \frac{21}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{21}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{5} = 4/2$$

۷۳

اگر $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{a}{4}$

۴) $\frac{a}{2}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۷۴

$$\underbrace{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4})}_2 \underbrace{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4})}_t = (x+a) - (x-4) = a+4$$

$$2t = a+4 \Rightarrow t = \frac{a+4}{2} = \frac{a}{2} + 2 \Rightarrow \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2 = \frac{a}{2}$$

در یک مستطیل، نقاط $A(5, 2)$ و $C(4, -1)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $3y = x - 3$ واقع‌اند. اختلاف طول نقاط B و D کدام است؟

۱ ☐

۲ ☐ ۳/۵

۳ ☐ ۱

۴ ☐ ۱/۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷۵

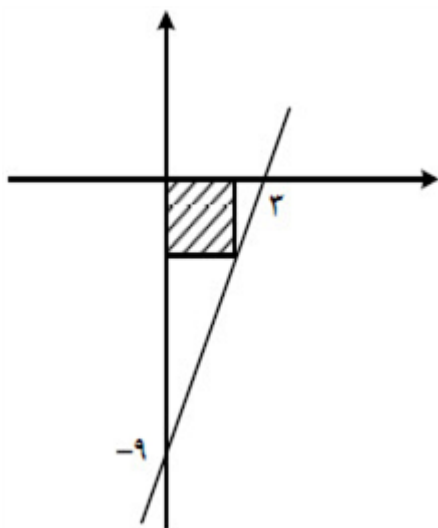
$$\left. \begin{aligned} BD = AC &\Rightarrow \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{10} \\ \begin{aligned} x_B - 3y_B &= 3 \\ x_D - 3y_D &= 3 \end{aligned} &\Rightarrow x_B - x_D = 3(y_B - y_D) \end{aligned} \right\}$$

$$9(y_B - y_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = 10 \Rightarrow (y_B - y_D)^2 = 1 \Rightarrow |y_B - y_D| = 1$$

$$\Rightarrow |x_B - x_D| = 3 \times 1 = 3$$

در شکل مقابل، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟

۷۶



۴ ☐ $\frac{9}{\sqrt{2}}$

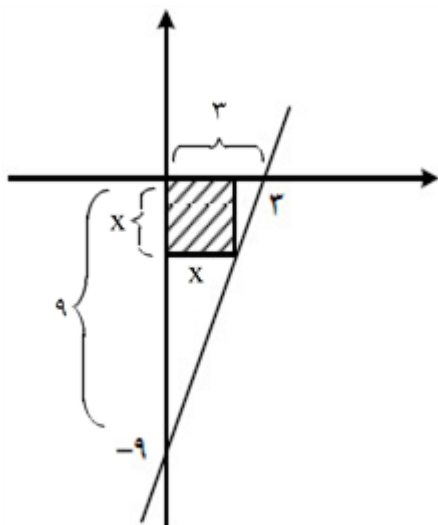
۳ ☐ $\frac{9}{2\sqrt{2}}$

۲ ☐ $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

۱ ☐ $\frac{2}{5}\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\text{تالس: } \frac{3}{x} = \frac{9}{9-x} \Rightarrow 27 - 3x = 9x \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$\text{قطر} = x\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ بزرگتر از -3 است؟

۴ صفر

۳ ۱

۲ ۳

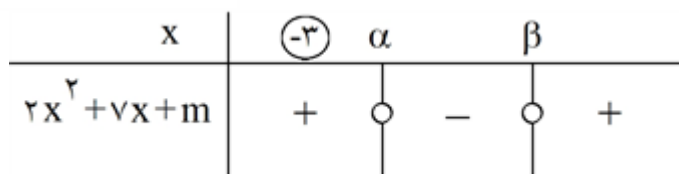
۱ ۴

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha, \beta > -3 \Rightarrow S > -6, \Delta > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{8} = 6.125$$

$$-\frac{7}{2} > -6 \checkmark \quad 49 - 8m > 0$$



$$f(-3) > 0 \Rightarrow 18 - 21 + m > 0 \Rightarrow m > 3 \Rightarrow 3 < m < \frac{49}{8} \Rightarrow m \in \{4, 5, 6\} \text{ مقادیر صحیح}$$

۷۷

نقاط $A(2, 0)$ و $C(0, -1)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

۴ $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

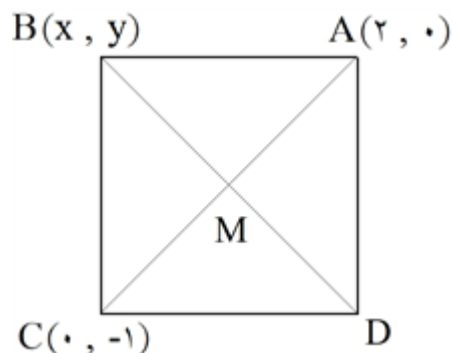
۳ $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$

۲ $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

۱ $(0, \frac{3}{2})$

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$AC \text{ وسط } M(1, -\frac{1}{2})$$

$$AC \text{ شیب خط} = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{BD} = -2$$

$$BD \text{ معادله خط: } y - (-\frac{1}{2}) = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + \frac{3}{2}$$

$$AC = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \Rightarrow MB = MD = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$MB = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (-2x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5(x - 1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |x - 1| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(\frac{3}{2}, -2) \\ x - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

۷۸

اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۱) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-4}{25\alpha} \quad (1)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \begin{cases} 25\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5} \\ \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4}{25\alpha} \Rightarrow 25\alpha^2 = -4 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{-4}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{(1)} \frac{1}{5} + \beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \beta = -1 & \beta < \alpha \text{ ق ق غ} \\ \alpha = -\frac{1}{5} \xrightarrow{(1)} -\frac{1}{5} + \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta = 1 & \beta > \alpha \text{ ق ق غ} \end{cases}$$

$$y = -5x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5} > 0 \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} \xrightarrow{\Delta > 0} y_S > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{رأس سهمی در ناحیه اول قرار دارد.}$$

۷۹

برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a ، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۳) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اولاً $a = 0$ قابل قبول است؛ زیرا در این صورت $x = 0$ جواب صحیح معادله است.

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-a} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

از طرفی اگر $a \neq 0$ باشد، داریم:

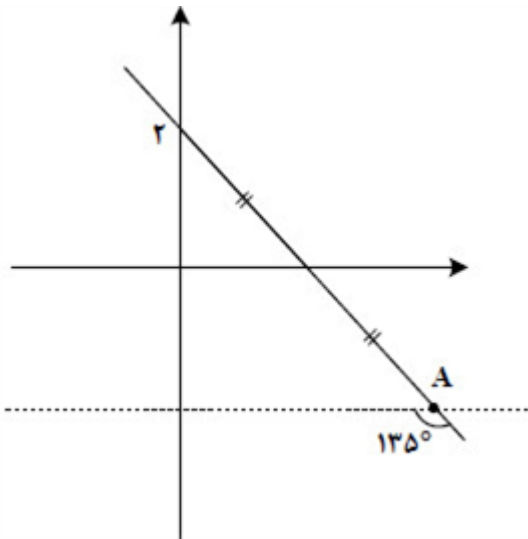
$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-a = a^2 + x - 2a\sqrt{x} \Rightarrow 2a\sqrt{x} = a^2 + a \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a+1}{2}$$

$$x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد، لازم است a عددی فرد باشد که در بین اعداد طبیعی یکرقمی مقادیر ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ قابل قبول اند. پس در مجموع ۶ مقدار صحیح و یکرقمی برای a قابل قبول است.

۸۰

در شکل مقابل، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



۴ $5\sqrt{2}$

۳ $4\sqrt{3}$

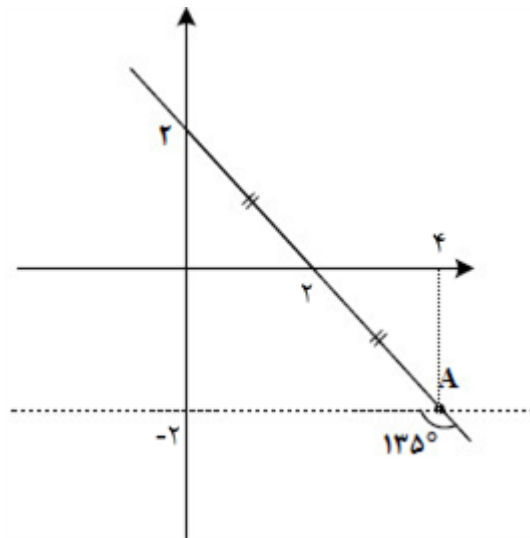
۲ $3\sqrt{6}$

۱ $2\sqrt{5}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۸۱ پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

معادله خط داده شده $y = 2 - x$ است؛ زیرا شیب آن برابر $\tan 135^\circ = -1$ است. حال طبق شکل مقابل مختصات نقطه A به صورت $A(4, -2)$ است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ است.



اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟

۴ $\left[\frac{k^2}{2}\right]$

۳ $\left[\frac{k^2}{2}\right]$

۱ $\left[\frac{k^2}{2}\right]$

۱ صفر $\left[\frac{k^2}{2}\right]$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۸۲ پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اختلاف ریشه‌های معادله برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{\Delta}$ است.

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = \sqrt{4k^2 - 20} = 2\sqrt{k^2 - 5}$$

که باید برابر $\frac{4}{3}k$ قرار دهیم:

$$2\sqrt{k^2 - 5} = \frac{4}{3}k \Rightarrow \sqrt{k^2 - 5} = \frac{2k}{3} \Rightarrow k^2 - 5 = \frac{4k^2}{9} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \left[\frac{k^2}{2}\right] = [9/5] = 4$$

	<p>نقاط $(-1/5, -4)$ و $(3, -4)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع در صورت وجود، کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ $\frac{3}{2}$ <input type="radio"/> ۲ $\frac{3}{4}$ <input type="radio"/> ۳ $\frac{5}{2}$ <input type="radio"/> ۴ $\frac{5}{4}$ </p> <p>۸۳</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در یک سهمی، اگر دو نقطه هم‌عرض داشته باشیم، طول رأس سهمی میانگین طول این دو نقطه است. در این سؤال طول رأس سهمی $x_S = \frac{3}{4}$ است و در نتیجه مجموع صفرهای سهمی برابر $\frac{3}{2} x_S$ است.</p> $x_S = \frac{-1/5 + 3}{2} = \frac{1/5}{2} = \frac{3}{4}$
	<p>نقاط $A(-1, 4)$، $B(3, 1)$، $C(x, y)$ و $D(-1 - x, y + 3)$ رؤوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های C و D مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ ۱۳ <input type="radio"/> ۲ ۱۴ <input type="radio"/> ۳ ۱۵ <input type="radio"/> ۴ ۱۶ </p> <p>۸۴</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.</p> $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{4-1}{-1-3} = \frac{-3}{x+1} \Rightarrow 2x+1=4 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ $AB \perp BC \Rightarrow \frac{-3}{4} \times \frac{y-1}{-\frac{3}{2}} = -1 \Rightarrow \frac{y-1}{\frac{3}{2}} = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ $\text{محیط} = 2(AB + BC) = 2\left(5 + \frac{5}{2}\right) = 15$
	<p>صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رؤوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ $\frac{1}{4}$ <input type="radio"/> ۲ $\frac{2}{3}$ <input type="radio"/> ۳ $-\frac{3}{4}$ <input type="radio"/> ۴ $-\frac{1}{2}$ </p> <p>۸۵</p> <p>پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.</p> $2x^2 - (m+2)x + m = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, \frac{m}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right $ <p>محور عرض: $y(0) = m$</p> $\Rightarrow \left m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right = \frac{3}{2} \Rightarrow m(m-2) = 3 \begin{cases} m = -1 \Rightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \checkmark \\ m = 3 \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$

	<p>ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است).</p> <p>۱ -۴ ۲ -۳ ۳ -۲ ۴ -۱</p>
۸۶	<p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.</p> <p>سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه</p> $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-a}{2a} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$ $\Rightarrow \alpha', \beta' = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha, \beta = -\frac{3}{2}, 2 \Rightarrow \frac{b}{2} = \alpha\beta = -3 \Rightarrow b = -6$ $\left[\frac{ab}{4}\right] = \left[-\frac{6}{4}\right] = -2$
۸۷	<p>نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟</p> <p>۱ $\sqrt{5} + 3/0$ ۲ $(1 + \sqrt{5})/2$ ۳ $0/6 + 0/2\sqrt{5}$ ۴ $0/4(1 + \sqrt{5})$</p> <p>پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.</p> <p>سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه</p> <p>طول مستطیل جدید $(\sqrt{5} + 1) \Rightarrow x = 2(\sqrt{5} + 1)$</p> $\frac{S_2}{S_1} = \frac{4 \times 2(\sqrt{5} + 1)}{4 \times 5} = 0/4(\sqrt{5} + 1)$
۸۸	<p>نقطه $(2, 4/5)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟</p> <p>۱ $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{17}}{4}$ ۳ $2\sqrt{17}$ ۴ $\sqrt{17}$</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو خط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ بر هم عمودند و نقطه $(2, 4/5)$ روی هیچ‌کدام از آن‌ها نیست، پس فاصله این نقطه از خط‌های داده شده اضلاع مستطیل را می‌دهد:</p> <p>فاصله $(2, 4/5)$ از خط اول $a = \frac{ 4 \times (4/5) + 2 - 3 }{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$</p> <p>فاصله نقطه از خط دوم $b = \frac{ 4/5 - 4(2) - 5 }{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{8/5}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$</p> <p>فاصله وسط قطراز هر ضلع (طبق تعمیم قضیه تالس) برابر نصف ضلع دیگر است، پس بیشترین فاصله موردنظر $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است.</p>

مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9}$ کدام است؟

۲/۲۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۷۵ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که $\frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2}$ است، معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + t\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - t\right)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{4} + t^2 - t + \frac{1}{4} + t^2 + t}{\left(\frac{1}{4} - t^2\right)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2t^2 + \frac{1}{2}}{t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}} = \frac{160}{9}$$

و داریم:

$$\Rightarrow 160t^4 - 80t^2 + 10 = 18t^4 + \frac{9}{2} \Rightarrow 160t^4 - 98t^2 + \frac{11}{2} = 0$$

در این معادله دو مجذوری، Δ ، S و P همگی مثبت هستند، یعنی ۴ مقدار متفاوت برای t پیدا می‌شود که دو به دو قرینه هستند، پس داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(\frac{1}{2} + t_1\right) + \left(\frac{1}{2} - t_1\right) + \left(\frac{1}{2} + t_2\right) + \left(\frac{1}{2} - t_2\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

راه دوم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{(x-1)^2 + x^2}{(x^2 - x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\xrightarrow{x^2-x=t} \frac{2t+1}{t^2} = \frac{160}{9} \xrightarrow{+1} \frac{2t+1}{t^2} + \frac{t^2}{t^2} = \frac{160}{9} + \frac{9}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{(t+1)^2}{t^2} = \frac{169}{9} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{t} = \frac{13}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x = \frac{3}{10} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \\ 1 + \frac{1}{t} = -\frac{13}{3} \Rightarrow t = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x = -\frac{3}{16} \Rightarrow x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 = 2$$

اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $4\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{۳}$$

$$\frac{2}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{۱}$$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \text{ یا } x^2 - x + P = 0$$

در این معادله $S = 1$ است. حال داریم:

$$4\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\beta = 17 \Rightarrow 2\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{17}{2} \\ \Rightarrow \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{S^2 - 2P} + \underbrace{\beta^2 - \beta}_{-P} = \frac{17}{2} \Rightarrow 1 - 2P = \frac{17}{2} \Rightarrow P = -\frac{1}{2}$$

اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۹۰

نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقطه‌ای با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$\frac{2}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{2}{3} \quad \text{۲}$$

$$-\frac{1}{3} \quad \text{۱}$$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول رأس سهمی $x_S = \frac{-5+3}{2} = -1$ و عرض آن $y_S = 1$ است. پس معادله

سهمی $y = a(x+1)^2 + 1 = ax^2 + 2ax + a + 1$ خواهد بود. جواب‌های معادله $y = 0$ ، α و β هستند و داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 4 - \frac{2a+2}{a} = 5 \Rightarrow \frac{2a+2}{a} = -1 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

در نتیجه عرض از مبدأ سهمی $a+1 = \frac{1}{3}$ خواهد شد.

۹۱

اگر نقطه $A(2, -3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $4x + 3y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

۴ ۹

۳ ۸

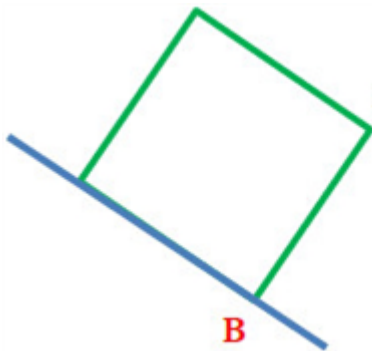
۲ ۴

۱ ۲

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹۲



$$A(2, -3) \quad 4x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow AB = \frac{|4(2) + 3(-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

$$S = AB^2 = 2^2 \Rightarrow S = 4$$

معادله $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x}}$ دارای چند جواب است؟

۴ صفر

۳ ۱

۲ ۲

۱ ۳

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۹۳

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x^2 + 2x}}{-4x} = \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x}} \Rightarrow x^2 + 2x = -2x^2 - 10x \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

خط $x - 2y = 2$ و نقطه $A(2, 5)$ مختصات یک رأس از مستطیلی هستند. اگر طول قطر مستطیل

$4\sqrt{5}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۲۰ $\sqrt{3}$ ۴

۲۰ $\sqrt{2}$ ۳

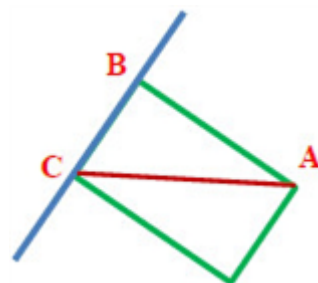
۱۰ $\sqrt{2}$ ۲

۱۰ $\sqrt{3}$ ۱

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۹۴



$$x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow AB = \frac{|2 - 10 - 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}}, BC = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{60}$$

$$S = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{60} \Rightarrow S = 20\sqrt{3}$$

α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\beta < \alpha < 0$ و $\alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

$\frac{11}{3}$ (۲)

$\frac{33}{4}$ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به دلیل اینکه ضریب x زوج است، بهتر است طرفین معادله را تقسیم بر ۲ کنیم تا محاسبات ساده‌تر شود:

$$x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{a}{2} = 0$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 \\ P = \alpha\beta = \frac{a}{2} \\ \beta = \frac{-3 - \sqrt{9 - 2a}}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow S^2 - 2PS + \beta^2 = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -27 - 3\left(\frac{a}{2}\right)(-3) + \left(\frac{9 + 9 - 2a + 6\sqrt{9 - 2a}}{4}\right) = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -27 + \frac{9a}{2} + \frac{9}{2} - \frac{a}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{9 - 2a} = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow 9 - 2a = 3 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۹۵

ضرایب معادله $2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$ صحیح هستند. اگر حاصل ضرب ریشه‌های این معادله دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟

۲۸ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرط $\Delta > 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. بنابراین:

$$2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{-(4k + 5)}{2k} = -2 - \frac{5}{2k}$$

چون ضرایب معادله صحیح هستند پس $2k$ عددی صحیح است. از طرفی حاصل ضرب ریشه‌ها باید بیشترین

مقدار را داشته باشد، پس $2k$ حداکثر مقدار صحیح منفی یعنی $2k = -1$ باشد. پس $k = -\frac{1}{2}$ در نتیجه:

$$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$$

۹۶

	<p>اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 7x - 3 = 0$ و $\alpha > 0$ باشد، حاصل $\alpha + 2\beta + \alpha - \beta$ کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ $2\alpha + 3\beta$ <input type="radio"/> ۲ $-2\alpha - 3\beta$ <input type="radio"/> ۳ $-\beta$ <input type="radio"/> ۴ β </p> <p>سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.</p> <p>چون $\alpha > 0$ و از طرفی $p = \frac{c}{a} = -3$ پس ریشه دیگر $\beta < 0$ است و $\beta = -\beta$</p> <p>$\Rightarrow \alpha + 2\beta + \alpha - (-\beta) = \alpha + \beta + \beta + \alpha + \beta$</p> <p>$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} = -7 \Rightarrow$ عبارت $= -7 + \beta - 7 = 7 - \beta - 7 = -\beta$ جمع ریشه</p>	۹۷
	<p>دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(1, 2)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ $2/5$ <input type="radio"/> ۲ $3/5$ <input type="radio"/> ۳ $\sqrt{46}$ <input type="radio"/> ۴ $2\sqrt{34}$ </p> <p>سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>موازی: $a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1$</p> <p> $\begin{cases} a=1: y=x, y=x+1 \quad \checkmark (1, 2) \\ a=-1: y=-x+2, y=-x+1 \quad \times \end{cases}$ </p> <p>فاصله نقطه $(1, 2)$ عرض = $\frac{ 2-1 }{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ از خط $y=x$</p> <p>$\left\{ \begin{array}{l} \text{عرض} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{قطر} = 5 \end{array} \right. \Rightarrow \text{طول} = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3/5$</p>	۹۸
	<p>معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ ۳ <input type="radio"/> ۲ ۲ <input type="radio"/> ۳ ۱ <input type="radio"/> ۴ صفر </p> <p>سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.</p> <p>جواب ندارد $\sqrt{1} = \sqrt{2} - \sqrt{0}$ جایگذاری $x=2$ $\left\{ \begin{array}{l} 2-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=2$</p>	۹۹

معادله $\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^3+8} = \frac{6x}{x^2-2x+4}$ دارای چند جواب مثبت است؟

۱ ☐ ۴

۲ ☐ ۳

۳ ☐ ۲

۴ ☐ صفر

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. x^3+8 را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4))$$

$$\frac{x^2-2x+4 - (x^2-9x-2)}{x^3+8} = \frac{6x(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 7x+6 = 6x^2+12x \Rightarrow 6x^2+5x-6=0$$

$$\Rightarrow (2x+3)(3x-2)=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند که فقط x_2 مثبت است.

۱۰۰

$$2x^2 - 10x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{10}{2} = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 5^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right) = 25 - a$$

$$\xrightarrow{x=\alpha} 2\alpha^2 - 10\alpha + a = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 10\alpha = -a \xrightarrow{\div 2} \alpha^2 - 5\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 5\alpha = 7 \Rightarrow \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{25 - a} + \underbrace{\alpha^2 - 5\alpha}_{-\frac{a}{2}} = 7 \Rightarrow 25 - a - \frac{a}{2} = 7 \Rightarrow -\frac{3}{2}a = -18$$

$$\Rightarrow a = 12$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} + \frac{5 + \sqrt{7}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ P = \alpha\beta = \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2}\right) = \frac{25 - 7}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{9}{2} = 0$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} = x-3 \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} x+3 = (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = x+3$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ق ق } \\ x=6 \text{ ق ق } \end{cases}$$

اگر طول از مبدأ ۴ باشد، یعنی خط از نقطه (۴, ۰) می‌گذرد.

$$(4, 0) \Rightarrow (a-1) \times 4 - b(0) = 12 \Rightarrow 4a - 4 = 12 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

اگر عرض از مبدأ برابر ۲ باشد، یعنی خط از نقطه (۰, ۲) می‌گذرد.

$$(0, 2) \Rightarrow (a-1) \times 0 - b(2) = 12 \Rightarrow -2b = 12 \Rightarrow b = -6$$

$$\text{الف) } \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{x+5}{x^2-4} \xrightarrow{\times(x+2)(x-2)} x(x-2) + x+2 = x+5$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + x + 2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = 3 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \sqrt{x+2} = x-4 \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ق ق غ} \\ x = 7 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 + 5 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 5 - \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} 2x+1 = 25 - 10\sqrt{x} + x$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{x} = 24 - x \xrightarrow{\sqrt{x}=t} 10t = 24 - t^2 \Rightarrow t^2 + 10t - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (t+12)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -12 \text{ ق ق غ} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

۱۰) اگر طول از مبدأ ۲ باشد، یعنی خط از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد.

$$(2, 0) \Rightarrow (m-2) \times 2 + 2n(0) = 10 \Rightarrow 2m - 4 = 10 \Rightarrow 2m = 14 \Rightarrow m = 7$$

اگر عرض از مبدأ برابر ۳ باشد، یعنی خط از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد.

$$(0, 3) \Rightarrow (m-2) \times 0 + 2n(3) = 10 \Rightarrow 6n = 10 \Rightarrow n = \frac{10}{6} \Rightarrow n = \frac{5}{3}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(-2) - 3(4) + 12|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$$

$$\sqrt{x+1} = x-5 \Rightarrow x+1 = (x-5)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ (ق ق غ)} \quad x = 8 \text{ (ق ق)}$$

۱۳) $c < 0$ (منفی) و $b > 0$ (مثبت)

$$\sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 2 \text{ ق ق غ} \end{cases}$$

$$S = \frac{2 - \sqrt{3}}{5} + \frac{2 + \sqrt{3}}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{5} \right) \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{5} \right) = \frac{1}{25}$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

توجه: هر مضرب غیرصفر از معادله بالا صحیح است.

$$\left(x - \frac{2 - \sqrt{3}}{5} \right) \left(x - \frac{2 + \sqrt{3}}{5} \right) = x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

راه حل دوم:

توجه: هر مضرب غیرصفر از معادله بالا صحیح است.

$$r = \frac{|12 + 3|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$S = 9\pi$$

ابتدا نقطه M (وسط AC) را محاسبه می‌کنیم و خط گذرنده از BM را به دست می‌آوریم.

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) \Rightarrow M(0, 3)$$

$$m_{BM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 3 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 3$$

ابتدا معادله خط AB را حساب می‌کنیم و سپس فاصله نقطه C تا خط AB برابر ارتفاع است.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$$

$$CH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(5) + 7 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} \Rightarrow CH = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

ابتدا باید نقطه وسط AB را محاسبه کنیم و فاصله C تا M (وسط AB) برابر طول پاره خط است.

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3 - 1}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) \Rightarrow M(1, 3)$$

$$CM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ابتدا شیب خط AC را به دست می‌آوریم و سپس قرینه و معکوس می‌کنیم.

$$m_{AC} = \frac{5 - 0}{-1 - 9} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{BH} = 2$$

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 4$$

معادله ارتفاع BH برابر $y = 2x + 4$ است.

$$\text{الف) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3x+5}{x^2+3x} \xrightarrow{\times x(x+3)} x+3+x=3x+5$$

$$\Rightarrow -x=2 \Rightarrow x=-2 \quad \text{ق ق}$$

$$\text{ب) } \sqrt{3x-1} = 5 \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} 3x-1=25 \Rightarrow 3x=26 \Rightarrow x=\frac{26}{3} \quad \text{ق ق}$$

فاصله نقطه $(-1, 1)$ تا خط $3x+4y+9=0$ برابر شعاع دایره است.

$$r=d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-3+4+9|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$$

$$P=2\pi r=2\pi \times 2=4\pi$$

$$\xrightarrow{x=t} t^2-7t+10=0 \Rightarrow (t-2)(t-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=5 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{الف) } \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{5x+4}{x^2+7x+10} \xrightarrow{\times (x+2)(x+5)} x(x+5)+x+2=5x+4$$

$$\Rightarrow x^2+5x+x+2=5x+4 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x=1 \\ \text{غ ق ق } x=-2 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \sqrt{x-1}=x-7 \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین تساوی به توان ۲}} x-1=x^2-14x+49$$

$$\Rightarrow x^2-15x+50=0 \Rightarrow (x-5)(x-10)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق } x=5 \\ \text{ق ق } x=10 \end{cases}$$

$$\text{الف) } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = \frac{4x-2}{x^2+2x-3} \xrightarrow{\times (x-1)(x+3)} x+3+x-1=4x-2$$

$$\Rightarrow 2x+2=4x-2 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=2 \quad \text{ق ق}$$

$$\text{ب) } \sqrt{4x-1}-7=0 \Rightarrow \sqrt{4x-1}=7 \xrightarrow[\text{به توان ۲ می رسانیم}]{\text{طرفین تساوی را}} 4x-1=49$$

$$\Rightarrow 4x=50 \Rightarrow x=\frac{50}{4}=\frac{25}{2} \quad \text{ق ق}$$

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=14 \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-7 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{14}{-7} = -2$$

۲۱

۲۲

۲۳

۲۴

۲۵

۲۶

فاصله نقطه $(-1, 5)$ تا خط $3x + 4y + 3 = 0$ برابر شعاع دایره است.

۲۷

$$r = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3 + 20 + 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$$

$$A(2, 0), x - y - 2 = 0$$

۲۸

$$\text{فاصله نقطه از خط} = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 0 + 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{طول ضلع مربع} = d = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{مساحت} = d^2 = 8$$

$$\sqrt{2-x} = 1 - 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2-x = 4x^2 - 4x + 1$$

۲۹

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \text{غیرقابل قبول} \\ x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۳۰ $(-3, 6)$

۳۱ درست

$$x_1 = 2, x_1 + x_2 = 2 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

۳۲

$$x_1, x_2 = 2x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2b}{a}$$

$$2 + x_2 = -x_2 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$\xrightarrow{3-x^2=u} u^2 + 2u - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ u = -5 \end{cases}$$

۳۳

$$4 - x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1, 4 - x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm 3$$

۳۴ منفی a / منفی b / منفی c

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad ۳۵$$

$$A(1, 0), x + y - k = 0 \Rightarrow d = \frac{|1 + 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |1 - k| = 2 \Rightarrow 1 - k = \pm 2 \Rightarrow k = -1, 3 \quad ۳۶$$

$$t = \frac{1}{x-2} \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3, 1 \quad ۳۷$$

$$\frac{1}{x-2} = -3 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{x-2} = 1 \Rightarrow x = 3 \quad (\text{ص ۱۹})$$

$$y = a(x - 2)(x - 4) \xrightarrow{(\cdot, 2)} 2 = a(\cdot - 2)(\cdot - 4) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

$$2x = \sqrt{4x - 1} \Rightarrow 4x^2 = 4x - 1 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ق ق}$$

درست.

$$x + \frac{1}{x} = -2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x \neq 0$$

نادرست.

$$r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(1) + 3(2) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

درست.

$$O = (3, 1)$$

$$R = OA = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 6$$

ویژگی	شماره نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است	(۳)
دارای مینیمم است و ریشه ندارد	(۴)
علامت c منفی است.	(۱) و (۲)

۳

درست

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 3 - 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \sqrt{5} \Rightarrow S = d^2 = 5$$

$$y = a(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow 3 = a(0 - 2)^2 + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$$

۵۲ ۳

۵۳ -۲

$$2 + \sqrt{1 + x} = x - 3 \Rightarrow \sqrt{1 + x} = x - 3 - 2 = x - 5$$

۵۴

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$1 + x = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \end{cases}$$

جواب $x = 3$ غیرقابل قبول است.

$$\begin{bmatrix} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{4+0}{2} = 2 \end{bmatrix}$$

۵۵ مختصات نقاط M وسط ضلع BC:

$$AM = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + m + 1 - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

۵۶

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۵۷ -۲

$$(2x - 1)^2 = (-\sqrt{2 - x})^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

۵۸

$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ غیرقابل قبول}, x_2 = \frac{-1}{4}$$

$$AH = \frac{|-3 + 0 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{64}{2} = 32$$

۵۹

۶۰ ۲

$$2 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ غ ق} \\ x = 1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۶۱

$$O \text{ مرکز دایره} \begin{cases} x_o = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_o = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{cases}$$

۶۲

۶۳

چون مثلث در رأس B قائمه است، پس دو ضلع BA, BC بر هم عمود هستند. (ص ۳۱)

$$m_{BC} = \frac{-k}{k-1}, m_{BA} = \frac{2-0}{4-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{-k}{k-1} = -1$$

$$-2k = -(3k-3) \Rightarrow -2k + 3k = 3 \Rightarrow k = 3$$

۶۴

$$x^2 - 6x - 11 = 0$$

۶۵

دو خط بر هم عمودند و نقطه A روی این دو خط قرار ندارد، برای به دست آوردن طول و عرض مستطیل کافیت فاصله نقطه A را

$$AH = \frac{|2 \times 1 + 3 \times 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

از این دو خط به دست آوریم:

$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{10}{\sqrt{13}} \times \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{50}{13}$$

$$AH' = \frac{|3 \times 1 - 2 \times 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

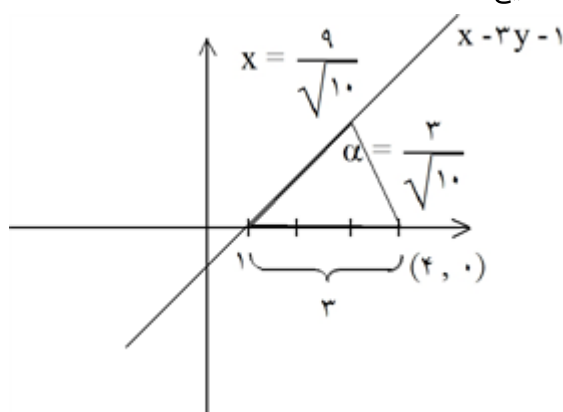
$$\sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-7)(x-2) = 0$$

غ ق ق ۲

$$x = 7$$

۶۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۶۷

$$d = \frac{|4-1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$x = \sqrt{9 - \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{81}{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{27}{2 \times 10} = 1/35$$

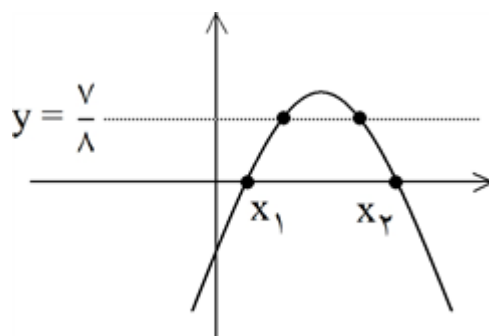
$$x_s = -\frac{3}{2a} \Rightarrow a\left(-\frac{3}{2a}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2a}\right) + a = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{9}{4a} - \frac{9}{2a} + a = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{-9 + 4a^2}{4a} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow 8a^2 - 7a - 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 & \checkmark \\ a = -\frac{7}{8} & \times \end{cases}$$

تذکر: در اصل سؤال به مثبت بودن a اشاره نشده بود که در این صورت به ازای $-\frac{7}{8} < a < 0$ و محدود کردن دامنه می‌توان به

کمترین مقدار $\frac{7}{8}$ رسید و در این صورت بی‌شمار مقدار برای a وجود خواهد داشت که در گزینه‌ها نیست. به طور مثال اگر

$a = -1$ در این صورت اگر $D_f = [x_1, x_2]$ فرض شود، کمترین مقدار سهمی $\frac{7}{8}$ است.



$$\text{شرط: } x = 2y - 4 > 0 \Rightarrow y > 2$$

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{y-4}{2y-8} \times \frac{y}{2y-2} = -1$$

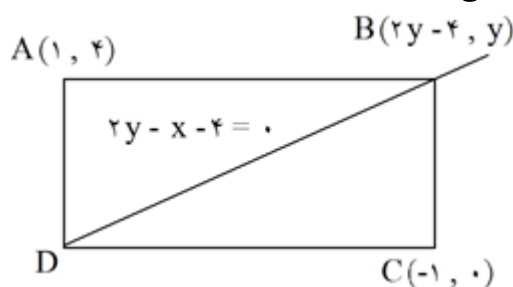
$$\Rightarrow -y^2 + 4y = 4y^2 - 16y + 16 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y = 3 \quad \checkmark$$

$$y = 1 \quad \times$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{matrix} B(2, 3) \\ C(-1, 0) \end{matrix} \Rightarrow |BC| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{طول} \quad \checkmark$$

$$\begin{matrix} B(2, 3) \\ A(1, 4) \end{matrix} \Rightarrow |AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{عرض}$$



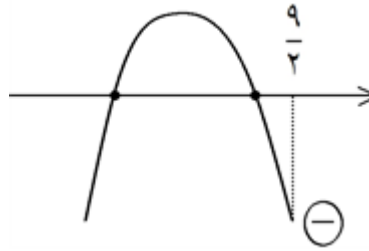
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله خط را می‌نویسیم و سپس نقطه $(-x, -x)$ را در آن قرار می‌دهیم.

$$y = -8x - 6$$

$$-x = -8(-x) - 6 \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{قطر} = \sqrt{2}x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{9}{2}\right) < 0 \Rightarrow -\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{9}{2}\right) + m < 0 \\ \Rightarrow -\frac{81}{4} + \frac{45}{2} + m < 0 \\ \Rightarrow m < -\frac{9}{4} = -2/25 \\ \Delta > 0 \Rightarrow 25 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{25}{4} = -6/25 \\ -6/25 < m < -2/25 \Rightarrow m = -6, -5, -4, -3 \end{cases}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۲ $x_s = -\frac{1}{2a}$ راس سهمی

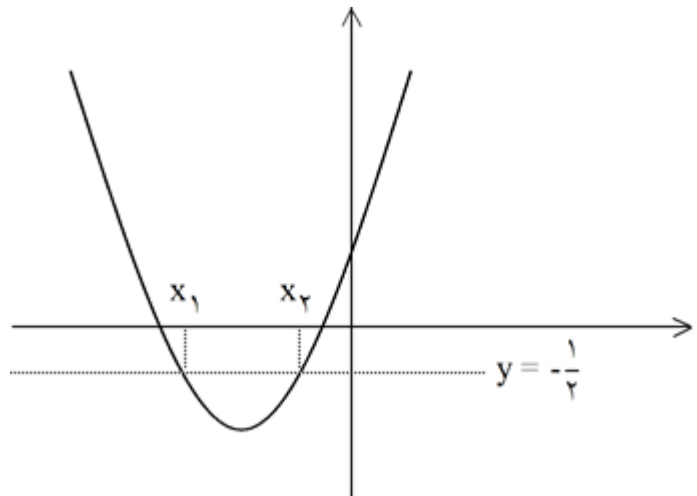
$$y_s = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) + 2a = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + 2a = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \text{ ق ق} \\ a = \frac{1}{2} \text{ غ ق} \Rightarrow \text{بیشترین مقدار ندارد} \end{cases}$$

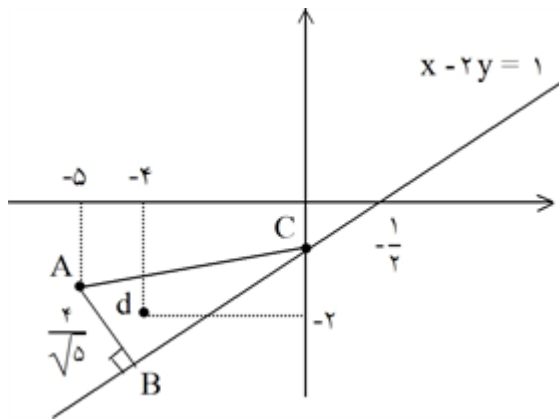
تذکر: در اصل سؤال، به مقدار منفی a اشاره نشده بود که در این صورت به ازای $0 \leq a < \frac{1}{4}$ و محدود کردن دامنه می‌توان به

ماکزیمم $-\frac{1}{4}$ رسید و در این حالت بی‌شمار مقدار برای a وجود دارد که در گزینه‌ها موجود نیست! به طور مثال اگر $a = \frac{1}{5}$

$$y = \frac{1}{5}x^2 + x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(x^2 + 5x + 2) \quad \text{آنگاه:}$$



با محدود کردن دامنه به فاصله $[x_1, x_2]$ ماکزیمم سهمی $-\frac{1}{4}$ می‌شود.



AB خط : $y + 2x + 11 = 0 \Rightarrow B(-4/2, -2/2)$

L خط : $x - 2y = 1$

$C(0, -1/2)$

فاصله نقطه C تا خط AB $\Rightarrow \frac{|-1/2 + 0 + 11|}{\sqrt{5}} = \frac{21}{\sqrt{5}}$

مساحت مثلث $S = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{21}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{5} = 4/2$

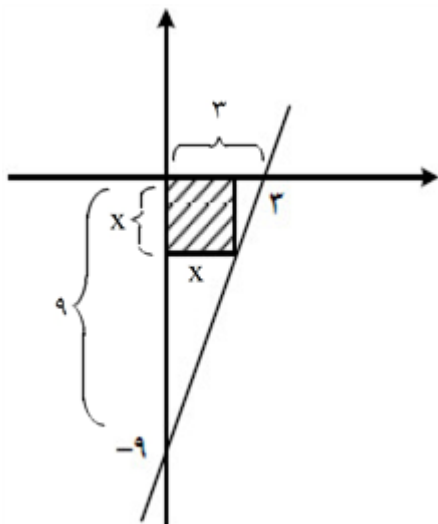
$$\underbrace{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4})}_2 \underbrace{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4})}_t = (x+a) - (x-4) = a+4$$

$2t = a + 4 \Rightarrow t = \frac{a+4}{2} = \frac{a}{2} + 2 \Rightarrow \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2 = \frac{a}{2}$

$$\left. \begin{aligned} BD = AC &\Rightarrow \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{10} \\ x_B - 3y_B &= 3 \\ x_D - 3y_D &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_B - x_D = 3(y_B - y_D)$$

$$9(y_B - y_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = 10 \Rightarrow (y_B - y_D)^2 = 1 \Rightarrow |y_B - y_D| = 1$$

$$\Rightarrow |x_B - x_D| = 3 \times 1 = 3$$



$$\text{تالس: } \frac{2}{x} = \frac{9}{9-x} \Rightarrow 27 - 3x = 9x \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$\text{قطر} = x\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha, \beta > -3 \Rightarrow S > -6, \Delta > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{8} = 6.125$$

$$-\frac{7}{2} > -6 \checkmark$$

$$49 - 8m > 0$$

x	(-3)	α	β	
$2x^2 + 7x + m$	+	○	○	+

$$f(-3) > 0 \Rightarrow 18 - 21 + m > 0 \Rightarrow m > 3 \Rightarrow 3 < m < \frac{49}{8} \Rightarrow m \in \{4, 5, 6\} \text{ مقادیر صحیح}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{AC وسط } M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

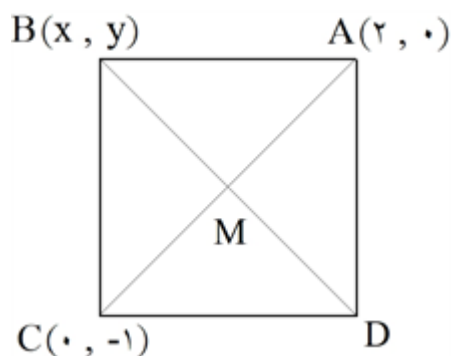
$$\text{AC شیب خط} = \frac{-(-1)}{1-1} = \frac{1}{1} \Rightarrow m_{BD} = -2$$

$$\text{BD معادله خط: } y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + \frac{3}{2}$$

$$AC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \Rightarrow MB = MD = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$MB = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(-2x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5(x-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |x-1| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ x-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۹

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-4}{25\alpha} \quad (۱)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \begin{cases} 25\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5} \\ \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4}{25\alpha} \Rightarrow 25\alpha^2 = -4 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{-4}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{(۱)} \frac{1}{5} + \beta = -\frac{4}{25} \Rightarrow \beta = -\frac{9}{25} & \beta < \alpha \text{ غ ق} \\ \alpha = -\frac{1}{5} \xrightarrow{(۱)} -\frac{1}{5} + \beta = \frac{4}{25} \Rightarrow \beta = \frac{9}{25} & \beta > \alpha \text{ ق غ} \end{cases}$$

$$y = -5x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5} > 0 \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} \xrightarrow{\Delta > 0} y_S > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{رأس سهمی در ناحیه اول قرار دارد.}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اولاً $a = 0$ قابل قبول است؛ زیرا در این صورت $x = 0$ جواب صحیح معادله است. ۸۰

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-a} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \quad \text{از طرفی اگر } a \neq 0 \text{ باشد، داریم:}$$

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان}} x - a = a^2 + x - 2a\sqrt{x} \Rightarrow 2a\sqrt{x} = a^2 + a \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a+1}{2}$$

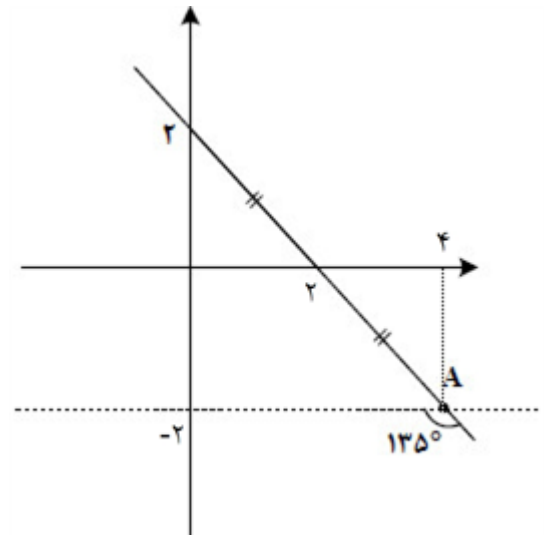
$$x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد، لازم است a عددی فرد باشد که در بین اعداد طبیعی یکرقمی مقادیر ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ قابل قبول اند. پس در مجموع ۶ مقدار صحیح و یکرقمی برای a قابل قبول است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۱

معادله خط داده شده $y = 2 - x$ است؛ زیرا شیب آن برابر $\tan 135^\circ = -1$ است. حال طبق شکل مقابل مختصات نقطه A

به صورت $A(4, -2)$ است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اختلاف ریشه‌های معادله برابر $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = \sqrt{4k^2 - 20} = 2\sqrt{k^2 - 5}$$

که باید برابر $\frac{4}{3}k$ قرار دهیم:

$$2\sqrt{k^2 - 5} = \frac{4}{3}k \Rightarrow \sqrt{k^2 - 5} = \frac{2k}{3} \Rightarrow k^2 - 5 = \frac{4k^2}{9} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \left[\frac{k^2}{2}\right] = [9/5] = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در یک سهمی، اگر دو نقطه هم‌عرض داشته باشیم، طول رأس سهمی میانگین طول این دو نقطه

است. در این سؤال طول رأس سهمی $x_S = \frac{3}{4}$ است و در نتیجه مجموع صفرهای سهمی برابر $\frac{3}{4}x_S = \frac{9}{16}$

$$x_S = \frac{-1/5 + 3}{2} = \frac{1/5}{2} = \frac{3}{4} \text{ است.}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{4-1}{-1-3} = \frac{-2}{2x+1} \Rightarrow 2x+1=4 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$AB \perp BC \Rightarrow \frac{-2}{4} \times \frac{y-1}{-\frac{1}{2}} = -1 \Rightarrow \frac{y-1}{2} = -1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

$$\text{محیط} = 2(AB + BC) = 2\left(5 + \frac{5}{2}\right) = 15$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 - (m+2)x + m = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, \frac{m}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right|$$

$y(0) = m$: محور عرض

$$\Rightarrow \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |m(m-2)| = 3 \begin{cases} m = -1 \Rightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \checkmark \\ m = 3 \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-a}{2a} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha', \beta' = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha, \beta = -\frac{3}{2}, 2 \Rightarrow \frac{b}{2} = \alpha\beta = -3 \Rightarrow b = -6$$

$$\left[\frac{ab}{4} \right] = \left[-\frac{6}{4} \right] = -2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{نسبت طلایی} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow x = 2(\sqrt{5} + 1)$$

طول مستطیل جدید $(\sqrt{5} + 1) \times 2$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4 \times 2(\sqrt{5} + 1)}{4 \times 5} = 0.4(\sqrt{5} + 1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو خط $x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ بر هم عمودند و نقطه $(2, 4/5)$ روی هیچ‌کدام از آنها نیست، پس فاصله این نقطه از خط‌های داده شده اضلاع مستطیل را می‌دهد:

$$a = \frac{|4 \times (4/5) + 2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$b = \frac{|4/5 - 4(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{8/5}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

فاصله وسط قطراز هر ضلع (طبق تعمیم قضیه تالس) برابر نصف ضلع دیگر است، پس بیشترین فاصله موردنظر $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که $\frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2}$ است، معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + t\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - t\right)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{4} + t^2 - t + \frac{1}{4} + t^2 + t}{\left(\frac{1}{2} - t^2\right)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2t^2 + \frac{1}{2}}{t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}} = \frac{160}{9}$$

و داریم:

$$\Rightarrow 160t^4 - 80t^2 + 10 = 18t^4 + \frac{9}{2} \Rightarrow 160t^4 - 98t^2 + \frac{11}{2} = 0$$

در این معادله دو مجذوری، Δ ، S و P همگی مثبت هستند، یعنی ۴ مقدار متفاوت برای t پیدا می‌شود که دو به دو قرینه هستند، پس داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(\frac{1}{2} + t_1\right) + \left(\frac{1}{2} - t_1\right) + \left(\frac{1}{2} + t_2\right) + \left(\frac{1}{2} - t_2\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

راه دوم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{(x-1)^2 + x^2}{(x^2 - x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\xrightarrow{x^2-x=t} \frac{2t+1}{t^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2t+1}{t^2} + \frac{t^2}{t^2} = \frac{160}{9} + \frac{9}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{(t+1)^2}{t^2} = \frac{169}{9} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{t} = \frac{13}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x = \frac{3}{10} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \\ 1 + \frac{1}{t} = -\frac{13}{3} \Rightarrow t = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x = -\frac{3}{16} \Rightarrow x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 = 2$$

$$x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \text{ یا } x^2 - x + P = 0$$

در این معادله $S = 1$ است. حال داریم:

$$\begin{aligned} 4\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\beta &= 17 \Rightarrow 2\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{17}{2} \\ \Rightarrow \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{S^2 - 2P} + \underbrace{\beta^2 - \beta}_{-P} &= \frac{17}{2} \Rightarrow 1 - 2P = \frac{17}{2} \Rightarrow P = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

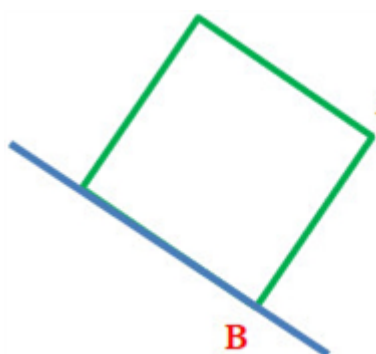
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول رأس سهمی $x_S = \frac{-5+3}{2} = -1$ و عرض آن $y_S = 1$ است. پس معادله سهمی

$y = a(x+1)^2 + 1 = ax^2 + 2ax + a + 1$ خواهد بود. جواب‌های معادله α و β هستند و داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 4 - \frac{2a+2}{a} = 2 \Rightarrow \frac{2a+2}{a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

در نتیجه عرض از مبدأ سهمی $\frac{1}{3} = a + 1$ خواهد شد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



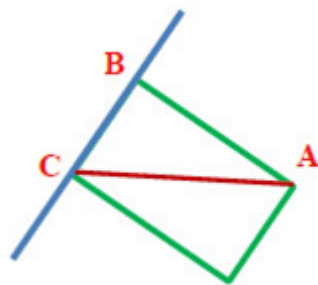
$$A(2, -3) \quad 4x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow AB = \frac{|4(2) + 3(-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

$$S = AB^2 = 2^2 \Rightarrow S = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + 2x}} &= \frac{x+5}{\sqrt{x^2 + 2x}} \\ \Rightarrow \frac{2\sqrt{x^2 + 2x}}{-4x} &= \frac{x+5}{\sqrt{x^2 + 2x}} \Rightarrow x^2 + 2x = -2x^2 - 10x \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$



$$x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow AB = \frac{|2 - 10 - 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}}, BC = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{60}.$$

$$S = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{60} \Rightarrow S = 20\sqrt{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به دلیل اینکه ضریب x زوج است، بهتر است طرفین معادله را تقسیم بر ۲ کنیم تا محاسبات ساده‌تر شود:

$$2x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{a}{2} = 0$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 \\ P = \alpha\beta = \frac{a}{2} \\ \beta = \frac{-3 - \sqrt{9 - 2a}}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow S^2 - 2PS + \beta^2 = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -27 - 3\left(\frac{a}{2}\right)(-3) + \left(\frac{9 + 9 - 2a + 6\sqrt{9 - 2a}}{4}\right) = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -27 + \frac{9a}{2} + \frac{9}{2} - \frac{a}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{9 - 2a} = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow 9 - 2a = 3 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرط $\Delta > 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$$

بنابراین:

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{-(4k + 5)}{2k} = -2 - \frac{5}{2k}$$

چون ضرایب معادله صحیح هستند پس $2k$ عددی صحیح است. از طرفی حاصل ضرب ریشه‌ها باید بیش‌ترین مقدار را داشته

باشد، پس $2k$ حداکثر مقدار صحیح منفی یعنی $2k = -1$ باشد. پس $k = -\frac{1}{2}$ در نتیجه:

$$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$$

$$|\alpha + 2\beta| + |\alpha| - |\beta|$$

چون $\alpha > 0$ و از طرفی $p = \frac{c}{a} = -3$ پس ریشه دیگر $\beta < 0$ است و $|\beta| = -\beta$

$$\Rightarrow |\alpha + 2\beta| + \alpha - (-\beta) = |\alpha + \beta + \beta| + \alpha + \beta$$

$$\text{جمع ریشه: } \alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} = -7 \Rightarrow \text{عبارت} = |-7 + \beta| - 7 = 7 - \beta - 7 = -\beta$$

$$\text{موازی: } a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1$$

$$\begin{cases} a = 1 : y = x, y = x + 1 \quad \checkmark (1, 2) \\ a = -1 : y = -x + 2, y = -x + 1 \quad \times \end{cases}$$

$$\text{عرض} = \text{فاصله نقطه } (1, 2) \text{ از خط } y = x = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} \text{عرض} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{قطر} = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{طول} = \sqrt{5^2 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3.5$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sqrt{1} = \sqrt{2} - \sqrt{0} \text{ جواب ندارد}$$

$$(x^2 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4))$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x^2 + 8$ را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^2 - 2x + 4 - (x^2 - 2x - 2)}{x^2 + 8} = \frac{6x(x + 2)}{x^2 + 8} \Rightarrow 7x + 6 = 6x^2 + 12x \Rightarrow 6x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 3)(3x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$$

هر دو جواب قابل قبول اند که فقط x_2 مثبت است.

۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴

۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴

