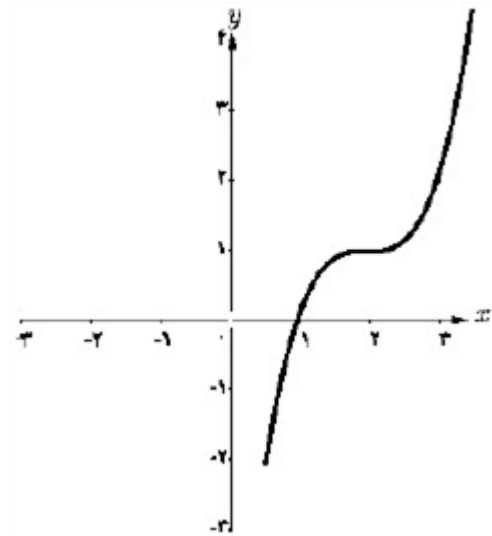


ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4$ $D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty)$	
۲	<p>در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است.</p> <p>الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید.</p> <p>ب) مقدار $g \circ f(0)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>الف)</p> <p>پاسخ: ۱</p> $g(f(0)) = g(2) = 0$	

به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



پاسخ: ۱

۳

جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.
تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ ۲

۴

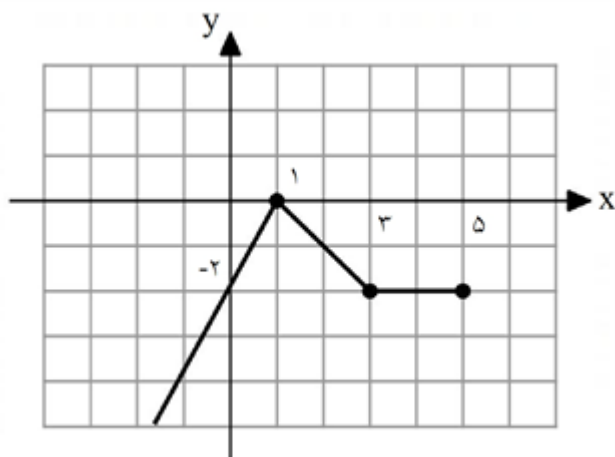
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x - 1}$ دامنه تابع $y = (f^{-1} \text{ of } f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

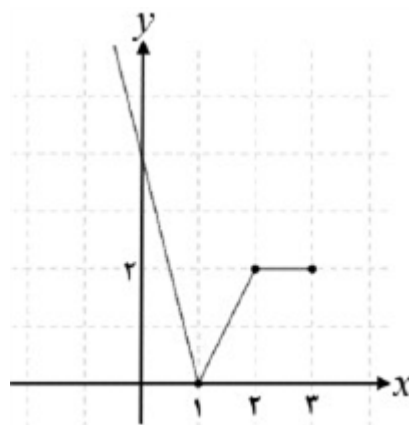
۵

نمودار تابع $f(x)$ در مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ دامنه: $(-\infty, 3]$
برد: $[0, +\infty)$



جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.
تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ چهارم

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

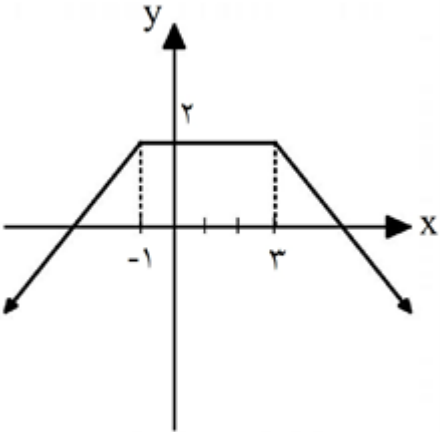
پاسخ: ۱ درست

اگر $f(x) = x^2 - 1$ ، مقدار $f^{-1}(7)$ را به دست آورید.

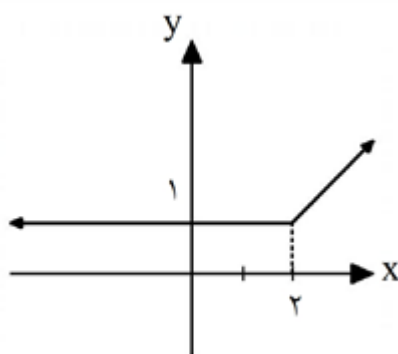
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

$$f^{-1}(7) = a \Rightarrow f(a) = 7 \Rightarrow a^2 - 1 = 7 \Rightarrow a = 2$$

پاسخ: ۱

	<p>اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$، مقدار $f^{-1}(2)$ را محاسبه کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $2 = \sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7$	۱۰
	<p>تابع زیر در بازهٔ حداکثری و در بازهٔ حداکثری اکیداً صعودی و در بازهٔ حداکثری نزولی است.</p>  <p>سوال‌ات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$(-\infty, -1]$ $[-1, +\infty)$</p>	۱۱
	<p>نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 5$ را ابتدا دو واحد به سمت راست و سپس ۵ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. نمودار جدید را g می‌نامیم. نمودارهای f و g یکدیگر را با چه طولی قطع می‌کنند؟</p> <p>سوال‌ات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>دو واحد به سمت راست $f(x) = x^2 + 2x + 5 \xrightarrow{\text{منتقل می‌کنیم}} y = (x-2)^2 + 2(x-2) + 5$</p> <p>واحد به پایین ۵ $\xrightarrow{\text{منتقل می‌کنیم}} y = (x-2)^2 + 2(x-2) + 5$</p> <p>$\Rightarrow g(x) = x^2 - 4x + 4 + 2x - 4 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x$</p> <p>برای یافتن طول نقاط برخورد f و g باید آن‌ها را برابر یکدیگر قرار دهیم.</p> <p>$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 5 = x^2 - 2x \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$</p>	۱۲

تابع در بازه حداکثری هم صعودی و هم نزولی و در بازه حداکثری صعودی است.

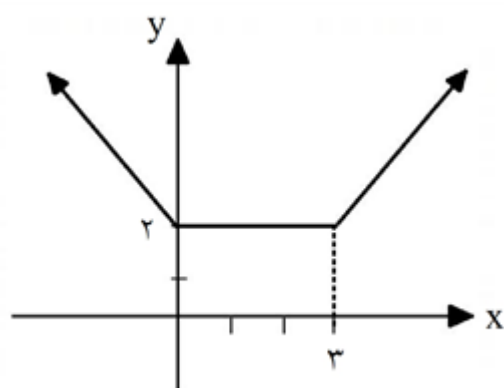


۱۳

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ $(-\infty, 2]$
 $(-\infty, +\infty)$

تابع زیر در بازه حداکثری اکیداً نزولی و در بازه حداکثری صعودی است.



۱۴

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ $(-\infty, 0]$
 $[0, +\infty)$

اگر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin(3x) + c$ به ترتیب ۱۲ و ۲ باشد:
 الف) مقادیر $|a|$ و c را بیابید.
 ب) دوره تناوب تابع را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ الف)

۱۵

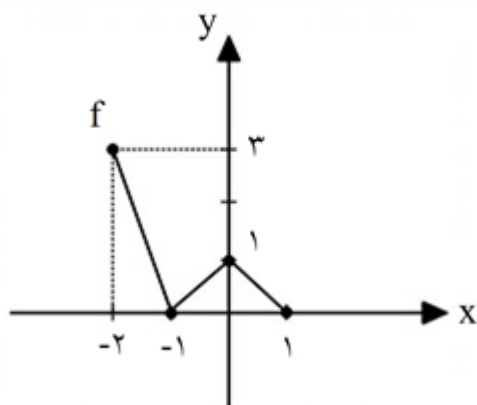
$$\begin{aligned} \max &= |a| + c \\ \min &= -|a| + c \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 12 \\ -|a| + c = 2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 14 \Rightarrow c = 7$$

$$\xrightarrow{c=7} |a| + 7 = 12 \Rightarrow |a| = 5$$

ب)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{b=3} T = \frac{2\pi}{3}$$

نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = -2f(1-x) + 2$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید.

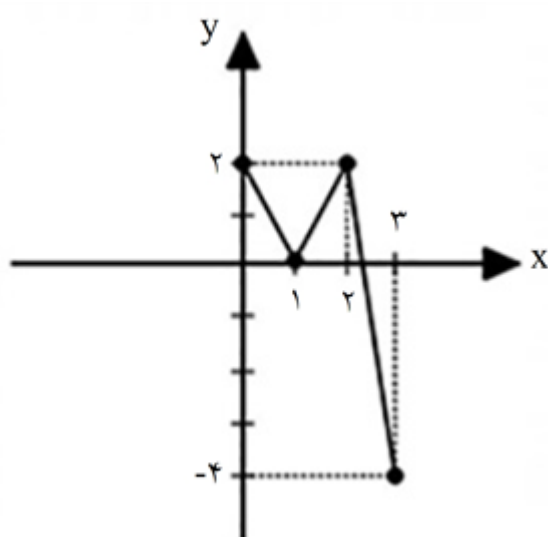


سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

$1-x$	-2	-1	0	1
x	3	2	1	0
f	3	0	1	0
$y = -2f + 2$	-4	2	0	2

پاسخ: ۱

سپس به کمک x و y نمودار حاصل را رسم می‌کنیم.



$$D = [0, 3]$$

$$R = [-4, 2]$$

۱۶

تابع $f(x) = x^2 - 6x + 7$ در بازه $(-\infty, k]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار k را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ بازه موردنظر باید تا قبل از رأس سهمی باشد.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow k = 3$$

۱۷

- جاهای خالی را با کلمه مناسب کامل کنید.
- الف) اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود. (انقباض عمودی - انقباض افقی)
- ب) اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود. (انبساط عمودی - انبساط افقی)

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

پاسخ: ۱ الف) انقباض عمودی
ب) انبساط افقی

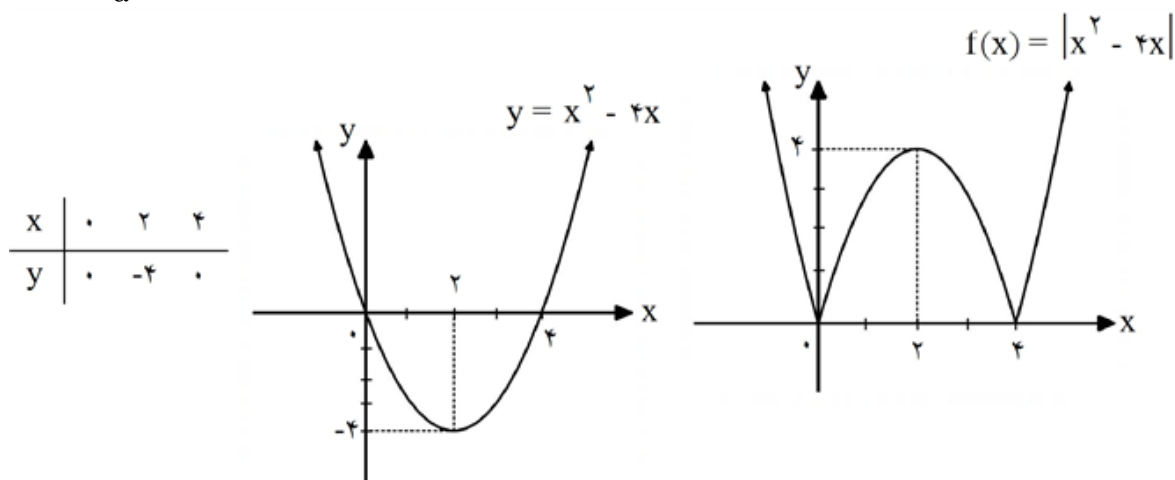
نمودار $f(x) = |x^2 - 4x|$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

پاسخ: ۱ ابتدا نمودار $y = x^2 - 4x$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار $f(x) = |x^2 - 4x|$ را رسم می‌کنیم و تابع را در هر بازه از نظر صعودی یا نزولی بررسی می‌کنیم.

$$y = x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y_0 = -4$$



در بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[2, 4]$ اکیداً نزولی است و در بازه‌های $[0, 2]$ و $[4, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 2$ را دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به طرف پایین منتقل می‌کنیم. مساحت مثلث محدود بین صفرهای تابع و رأس سهمی را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

واحد به سمت راست $\xrightarrow{\quad}$ $f(x) = x^2 - 2x - 2 \rightarrow y = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 2$

پاسخ: ۱

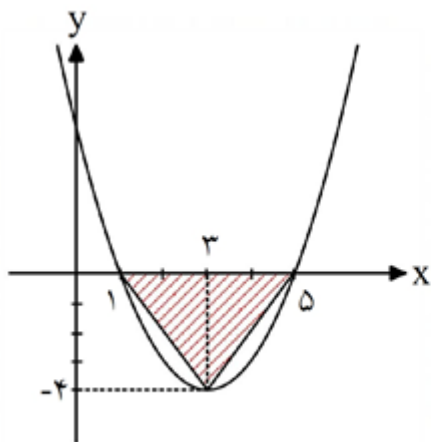
یک واحد به طرف پایین $\xrightarrow{\quad}$ $y = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 - 3$

$\Rightarrow y = x^2 - 6x + 5$

برای یافتن صفرهای تابع، ضابطه را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y_1 = (3)^2 - 6(3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$



$S = \frac{(5 - 1) + |-4|}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$

۲۰

نمودار $y = x^2 + 4x$ را سه واحد به طرف x های منفی منتقل می‌کنیم و سپس یک واحد به طرف y های مثبت منتقل می‌کنیم. مختصات رأس سهمی را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱ روش اول:

سه واحد به طرف چپ $\xrightarrow{\quad}$ $y = x^2 + 4x \rightarrow y = (x + 3)^2 + 4(x + 3)$

یک واحد به طرف بالا $\xrightarrow{\quad}$ $y = (x + 3)^2 + 4(x + 3) + 1$

$\Rightarrow y = x^2 + 6x + 9 + 4x + 12 + 1 \Rightarrow y = x^2 + 10x + 22$

$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2} = -5 \Rightarrow y_1 = 25 - 50 + 22 = -3 \Rightarrow S'(-5, -3)$

روش دوم: می‌توان ابتدا مختصات رأس سهمی را حساب کرد و سپس رأس سهمی را انتقال داد.

$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y_1 = 4 - 8 = -4$

$S(-2, -4) \xrightarrow{\text{سه واحد به طرف چپ}} (-2 - 3, -4) \xrightarrow{\text{یک واحد به طرف بالا}} (-5, -4 + 1)$

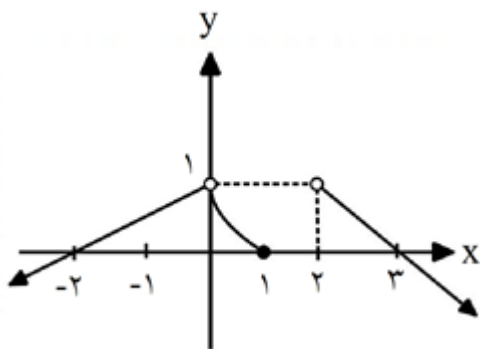
$\Rightarrow S'(-5, -3)$

۲۱

	<p>اگر نقطه $A(2, 5)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه متناظر با A روی نمودار $y = 3f(2x - 1) + 4$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(2, 5)$ باشد ۲ برابر x و ۵ برای y است.</p> $A(2, 5) \xrightarrow{x=2 \text{ و } y=5} f(2) = 5$ <p>برای قسمت دوم سؤال باید:</p> $2x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ $x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 3f(2) + 4 \Rightarrow y = 3(5) + 4 \Rightarrow y = 19$ <p>بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'\left(\frac{3}{2}, 19\right)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.</p>	۲۲
	<p>اگر نقطه $A(3, a)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد و نقطه متناظر با A روی نمودار $y = 3f(x - 1) + 1$ نقطه $A'(b, 1)$ باشد، مقدار b و a را حساب کنید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $A(3, a) \Rightarrow f(3) = a$ <p>برای قسمت دوم سؤال داریم:</p> $x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$ <p>برای نقطه A' است، بنابراین $b = 4$ است.</p> $x = 4 \rightarrow y = 3f(3) + 1 = 3a + 1 = 1 \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0$	۲۳
	<p>اگر نقطه $A(1, a)$ روی نمودار $y = 2f(3x - 1) + 4$ باشد و نقطه متناظر با A روی نمودار $y = 2f(1 - x) + 1$ باشد، مقدار b و a را حساب کنید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(1, a)$ باشد ۱ برابر x و a برای y است.</p> $A(1, a) \xrightarrow{x=1 \text{ و } y=a} a = 2f(3 - 1) + 4 \Rightarrow 2f(2) = a - 4 \Rightarrow f(2) = \frac{a - 4}{2}$ <p>برای قسمت دوم سؤال داریم:</p> $1 - x = 2 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$ <p>برای نقطه A' است، بنابراین $b = -1$ است.</p> $x = -1 \rightarrow y = 2f(2) + 1 = 2\left(\frac{a - 4}{2}\right) + 1 = 7 \Rightarrow a - 4 + 1 = 7 \Rightarrow a = 10$	۲۴

	<p>اگر نقطه $A(2, 3)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه متناظر با A روی نمودار $y = 2f(3x - 1) + 1$ را به دست آورید.</p> <p>سؤالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(2, 3)$ باشد ۲ برابر x و ۳ برابر y است.</p> $A(2, 3) \xrightarrow{x=2 \text{ و } y=3} f(2) = 3$ <p>برای قسمت دوم سؤال باید:</p> $3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$ $\xrightarrow{x=1} y = 2f(2) + 1 \Rightarrow y = 2(3) + 1 \Rightarrow y = 7$ <p>بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'(1, 7)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.</p>
	<p>اگر بر روی نمودار $y = 2f(x - 1) + 5$ نقطه $A(-1, 3)$ باشد، نقطه متناظر با A روی نمودار $y = 3f(2 - 3x) + 1$ را به دست آورید.</p> <p>سؤالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(-1, 3)$ باشد -۱ برابر x و ۳ برابر y است.</p> $A(-1, 3) \xrightarrow{x=-1 \text{ و } y=3} 3 = 2f(-1 - 1) + 5 \Rightarrow 2f(-2) = -2 \Rightarrow f(-2) = -1$ <p>برای قسمت دوم سؤال باید:</p> $2 - 3x = -2 \Rightarrow -3x = -4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ $\xrightarrow{x=\frac{4}{3}} y = 3f(-2) + 1 \Rightarrow y = 3(-1) + 1 \Rightarrow y = -2$ <p>بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'\left(\frac{4}{3}, -2\right)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.</p>

نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر است. دامنه تابع $g(x) = f(3x - 8)$ را به دست آورید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

۲۷

پاسخ: ۱ ابتدا دامنه $y = f(x)$ را می‌نویسیم.

$$D_f : x > 2 \text{ یا } x \leq 1 \text{ و } x \neq 0$$

سپس با توجه به دامنه $f(x)$ دامنه حاصل را حساب می‌کنیم.

$$g(x) = f(3x - 8) \Rightarrow 3x - 8 > 2 \text{ یا } 3x - 8 \leq 1 \text{ و } 3x - 8 \neq 0$$

$$\Rightarrow x > \frac{10}{3} \text{ یا } x \leq 3 \text{ و } x \neq \frac{8}{3}$$

$$D_g = \left(-\infty, 3\right] \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right) - \left\{\frac{8}{3}\right\}$$

اگر تابع نمایی $y = (3k - 1)^x$ اکیداً نزولی باشد، حدود k را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲-دوازدهم

۲۸

پاسخ: ۱ برای آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع اکیداً نزولی باشد، باید $0 < a < 1$ باشد.

$$0 < 3k - 1 < 1 \xrightarrow{+1} 1 < 3k < 2 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$$

اگر تابع نمایی $y = (2m - 1)^x$ اکیداً صعودی باشد، حدود m را حساب کنید.

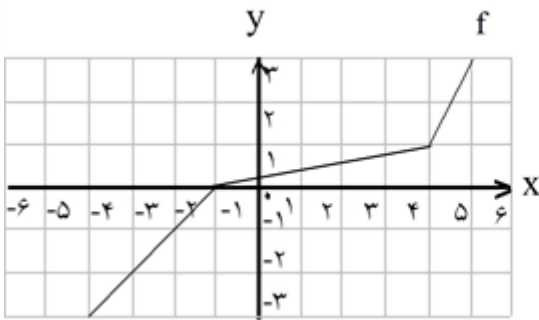
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲-دوازدهم

۲۹

پاسخ: ۱ برای آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، باید $a > 1$ باشد.

$$2m - 1 > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow m > 1$$

با توجه به نمودار f که در شکل زیر داده شده است، جدول را کامل کنید.



x	-3	-1	1	3
$f^{-1}(x)$				

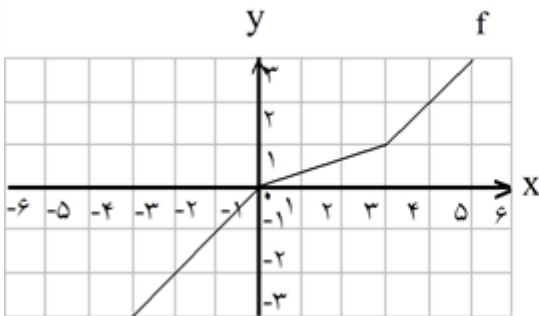
۳۰

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

پاسخ: ۱ در واقع این x هایی که در جدول نوشته شده است برای نمودار تابع رسم شده همان y است. بنابراین کافی است x این نقاط را در نمودار مشخص کنیم که همان y است.

x	-3	-1	1	3
$f^{-1}(x)$	-4	-2	4	5

با توجه به نمودار f که در شکل زیر داده شده است، جدول را کامل کنید.



x	1	2	-1	-3
$f^{-1}(x)$				

۳۱

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

پاسخ: ۱ در واقع این x هایی که در جدول نوشته شده است برای نمودار تابع رسم شده همان y است. بنابراین کافی است x این نقاط را در نمودار مشخص کنیم که همان y است.

x	1	2	-1	-3
$f^{-1}(x)$	3	4	-1	-3

اگر $f(x) = \frac{x}{5} - 1$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(24)$ را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(24) = g^{-1}(f^{-1}(24))$$

پاسخ: ۱

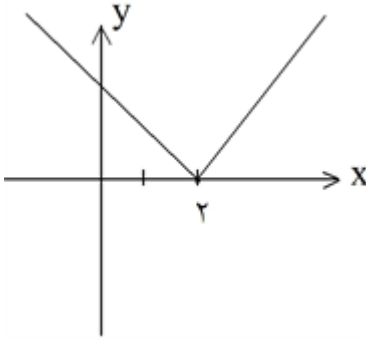
عدد ۲۴ برای تابع f خروجی تابع است.

$$f(x) = \frac{x}{5} - 1 = 24 \Rightarrow \frac{x}{5} = 25 \Rightarrow x = 125$$

عدد ۱۲۵ برای تابع g خروجی تابع است.

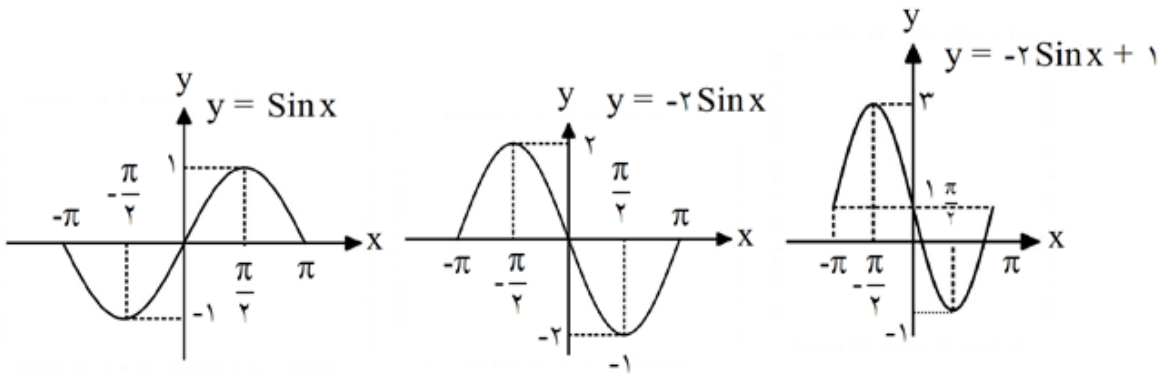
$$x^3 = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y^{-1}(125) = 5$$

۳۲

	<p>اگر $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ و $g(x) = x^2 + x$ باشد، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(14)$ را حساب کنید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>عدد ۱۴ برای تابع f خروجی تابع است.</p> $(g^{-1} \circ f^{-1})(14) = g^{-1}(f^{-1}(14))$ $f(x) = \frac{x}{2} - 1 = 14 \Rightarrow \frac{x}{2} = 15 \Rightarrow x = 30$ <p>عدد ۳۰ برای تابع g خروجی تابع است.</p> $x^2 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$	۳۳
	<p>ضابطه تابع وارون تابع یک به یک زیر را به دست آورید.</p> $f(x) = -3 - \sqrt{1 - 7x}$ <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>به توان می رسانیم</p> $y = -3 - \sqrt{1 - 7x} \Rightarrow \sqrt{1 - 7x} = -3 - y \xrightarrow{2} 1 - 7x = 9 + 6y + y^2$ $\Rightarrow -7x = y^2 + 6y + 8 \xrightarrow{\div(-7)} x = \frac{y^2 + 6y + 8}{-7}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{-7}$	۳۴
	<p>دامنه تابع $f(x) = x - 2$ را چنان محدود کنید که تابع یک به یک باشد.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>با توجه به نمودار تابع دامنه محدود شده باید $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, 2]$ باشد.</p> 	۳۵
	<p>ضابطه تابع وارون تابع یک به یک زیر را به دست آورید.</p> $f(x) = 4 - \sqrt{x - 2}$ <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>به توان می رسانیم</p> $y = 4 - \sqrt{x - 2} \Rightarrow \sqrt{x - 2} = 4 - y \xrightarrow{2} x - 2 = 16 - 8y + y^2$ $\Rightarrow x = y^2 - 8y + 18 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 8x + 18$	۳۶

نمودار تابع $y = 1 - 2 \sin x$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم



پاسخ: ۱

۳۷

اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x+5}$ دامنه fog را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

$$D_f = R - \{1\}$$

$$D_g = R - \{-5\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq -5 \mid \frac{1}{x+5} \neq 1\right\}$$

$$\frac{1}{x+5} \neq 1 \Rightarrow x+5 \neq 1 \Rightarrow x \neq -4$$

$$D_{fog} = R - \{-4, -5\}$$

پاسخ: ۱

۳۸

اگر $f(x) = \sqrt{x-7}$ و $g(x) = x^2 - 9$ باشد، دامنه و ضابطه fog را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

$$D_f = [7, +\infty)$$

$$D_g = R$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid x^2 - 9 \geq 7\}$$

$$x^2 - 9 \geq 7 \Rightarrow x^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4 \text{ یا } x \geq 4$$

$$\Rightarrow D_{fog} = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 9 - 7} = \sqrt{x^2 - 16}$$

پاسخ: ۱

۳۹

اگر $f(x) = 5x - 1$ و $g(x) = 3x + 2$ باشد، معادله $(fog)(x) = 4$ را حل کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 5(3x + 2) - 1 = 15x + 9 = 4 \Rightarrow 15x = -5 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

پاسخ: ۱

۴۰

اگر $f = \{(1, 5), (4, 3), (-1, 2), (7, 11)\}$ و $g = \{(5, -1), (3, 7), (11, 1), (9, 25)\}$ باشد، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ دوازدهم

پاسخ: ۱ $g \circ f = \{(1, -1), (4, 7), (7, 1)\}$ $f \circ g = \{(5, 2), (3, 11), (11, 5)\}$

$$\begin{array}{lcl} 5 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 2 & & 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -1 \\ 3 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 11 & & 4 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 7 \\ 11 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 5 & & -1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \times \\ 9 \xrightarrow{g} 25 \xrightarrow{f} \times & & 7 \xrightarrow{f} 11 \xrightarrow{g} 1 \end{array}$$

۴۱

کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟
الف) $f(x) = 2x + 7$ و $g(x) = 5x + 9$ باشد، $(g \circ f)(1) = 54$ است.
ب) اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g(2) = 5$ باشد، $(f \circ g)(2) = 5$ است.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ دوازدهم

پاسخ: ۱ الف) درست
ب) نادرست

۴۲

با توجه به جدولهای زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	f(x)	x	g(x)
5	2	11	2
1	-1	-1	4
4	11	3	5

الف) $(f \circ g)(3)$
ب) $(g \circ f)(4)$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ دوازدهم

پاسخ: ۱ الف) $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(5) = 2$
ب) $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(11) = 2$

۴۳

با توجه به جدولهای زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	f(x)	x	g(x)
2	7	4	1
5	1	7	5
1	-1	-1	2

الف) $(f \circ g)(4)$
ب) $(g \circ f)(2)$

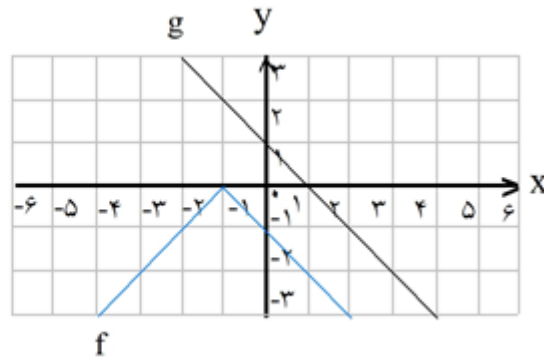
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ دوازدهم

پاسخ: ۱ الف) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = -1$
ب) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(7) = 5$

۴۴

با توجه به نمودارهای f و g مقادیر مقابل زیر را در صورت وجود بیابید.

- الف) $(fog)(2)$
ب) $(gof)(-2)$



۴۵

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

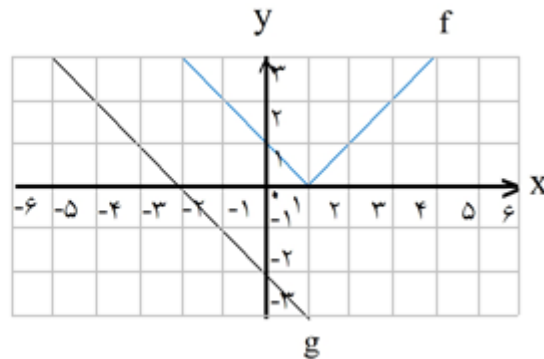
$$(fog)(2) = f(g(2)) = f(-1) = 0$$

$$(gof)(-2) = g(f(-2)) = g(-1) = 2$$

پاسخ: ۱ الف)
ب)

با توجه به نمودارهای f و g مقادیر مقابل زیر را در صورت وجود بیابید.

- الف) $(fog)(-2)$
ب) $(gof)(1)$



۴۶

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

$$(fog)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 1$$

$$(gof)(1) = g(f(1)) = g(0) = -2$$

پاسخ: ۱ الف)
ب)

تابع خطی $f(x) = (x+a)(x+b) + 2(a+b)x^2$ از نقطه $(-1, 4)$ می‌گذرد، تابع $f^{-1}(x)$ را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰-دوازدهم

$$f(x) = x^2 + ax + bx + ab + 2(a+b)x^2$$

$$f(x) = (1 + 2a + 2b)x^2 + (a+b)x + ab$$

پاسخ: ۱

برای آنکه تابع خطی باشد باید ضریب x^2 برابر صفر باشد، بنابراین:

$$1 + 2a + 2b = 0 \Rightarrow 2a + 2b = -1 \xrightarrow{\div 2} a + b = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x + ab$$

از نقطه $(-1, 4)$ می‌گذرد، در نتیجه:

$$(-1, 4) \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} + ab \Rightarrow ab = 4 - \frac{1}{2} \Rightarrow ab = \frac{7}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} 2y = -x + 7 \Rightarrow x = 7 - 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = 7 - 2x$$

۴۷

وارون تابع $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 1}{x - 1}$ ، تابع $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + ax + b}{5x + c}$ است. a و b و c را حساب کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ دوازدهم

$$f(x) = \frac{(5x - 1)(x - 1)}{x - 1} \Rightarrow f(x) = 5x - 1 \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

پاسخ: ۱

۴۸

$$\xrightarrow{x=1} y = 4 \Rightarrow R_f = R - \{4\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f$$

$$y = 5x - 1 \Rightarrow y + 1 = 5x \Rightarrow x = \frac{y + 1}{5} \Rightarrow y = \frac{x + 1}{5}$$

باید در $x - 4$ ضرب و تقسیم کنیم.

$$f^{-1}(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{5}\right)(x-4)}{x-4} = \frac{x^2 - 3x - 4}{5x - 20} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \\ c = -20 \end{cases}$$

وارون تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$ ، تابع $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + ax + b}{3x + c}$ است. مقدار $b - a + c$ کدام است؟

۱۴ (۴)

-۱۰ (۳)

۱۰ (۲)

-۶ (۱)

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ دوازدهم

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(3x + 1)(x - 2)}{x - 2} \Rightarrow f(x) = 3x + 1 \Rightarrow D_f = R - \{2\}$$

$$\xrightarrow{x=2} y = 7 \Rightarrow R_f = R - \{7\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f$$

$$y = 3x + 1 \Rightarrow y - 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{y - 1}{3} \Rightarrow y = \frac{x - 1}{3}$$

باید در $x - 7$ ضرب و تقسیم کنیم.

$$f^{-1}(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)(x-7)}{x-7} = \frac{x^2 - 8x + 7}{3x - 21} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 7 \\ c = -21 \end{cases}$$

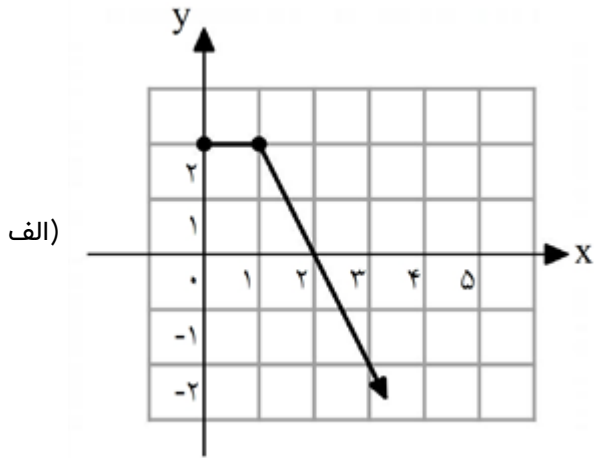
$$b - a + c = 7 + 8 - 21 = -6$$

۴۹

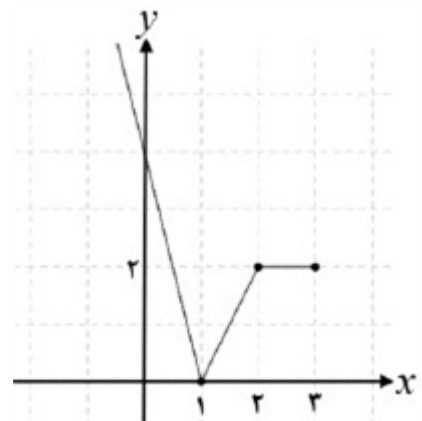
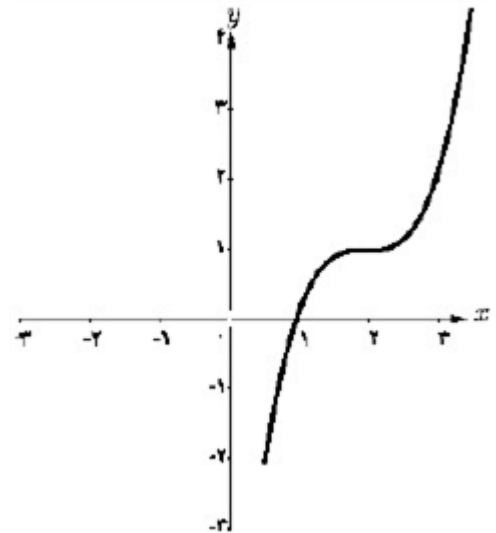
$$y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty)$$



ب) $g(f(0)) = g(2) = 0$



$$f^{-1}(7) = a \Rightarrow f(a) = 7 \Rightarrow a^2 - 1 = 7 \Rightarrow a = 2$$

$$2 = \sqrt{x-3} \Rightarrow x-3=4 \Rightarrow x=7$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 5 \xrightarrow[\text{منتقل می کنیم}]{\text{دو واحد به سمت راست}} y = (x-2)^2 + 2(x-2) + 5$$

$$\xrightarrow[\text{منتقل می کنیم}]{\text{واحد به پایین ۵}} y = (x-2)^2 + 2(x-2) + 5$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 4x + 4 + 2x - 4 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x$$

برای یافتن طول نقاط برخورد f و g باید آن‌ها را برابر یکدیگر قرار دهیم.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 5 = x^2 - 2x \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c \\ \min &= -|a| + c \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 12 \\ -|a| + c = 2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 14 \Rightarrow c = 7$$

$$\xrightarrow{c=7} |a| + 7 = 12 \Rightarrow |a| = 5$$

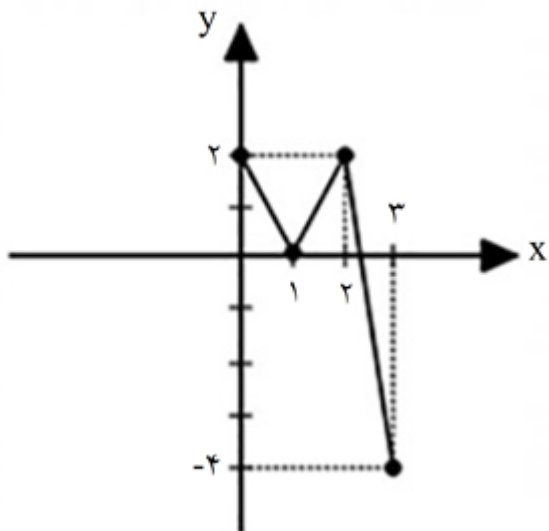
(ب)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{b=2} T = \frac{2\pi}{2}$$

$1 - x$	-۲	-۱	۰	۱
x	۳	۲	۱	۰
f	۳	۰	۱	۰
$y = -۲f + ۲$	-۴	۲	۰	۲

۱۶

سپس به کمک x و y نمودار حاصل را رسم می‌کنیم.



$$D = [0, 3]$$

$$R = [-4, 2]$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow k = 3$$

۱۷ بازه موردنظر باید تا قبل از رأس سهمی باشد.

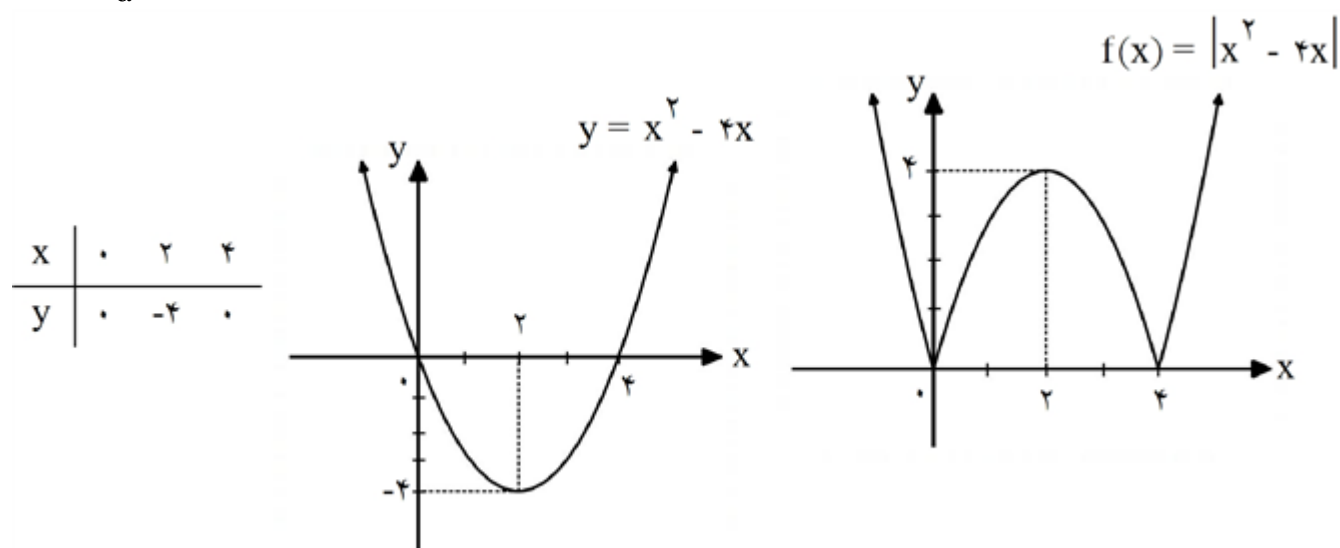
۱۸ الف) انقباض عمودی

ب) انبساط افقی

ابتدا نمودار $y = x^2 - 4x$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار $f(x) = |x^2 - 4x|$ را رسم می‌کنیم و تابع را در هر بازه از نظر صعودی یا نزولی بررسی می‌کنیم.

$$y = x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y_1 = -4$$



در بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[2, 4]$ اکیداً نزولی است و در بازه‌های $[0, 2]$ و $[4, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

$$f(x) = x^2 - 4x - 2 \xrightarrow{\text{واحد به سمت راست}} y = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 2$$

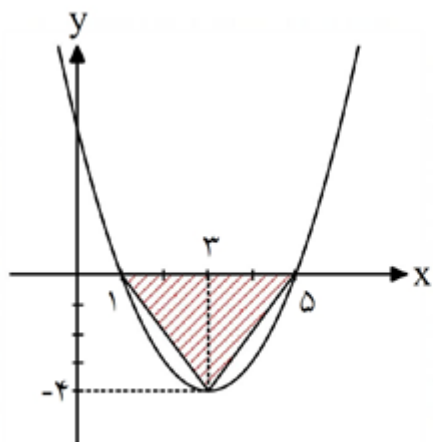
$$\xrightarrow{\text{یک واحد به طرف پایین}} y = (x - 2)^2 - 2(x - 2) - 2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 - 3$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 6x + 5$$

برای یافتن صفرهای تابع، ضابطه را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y_1 = (3)^2 - 6(3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$



$$S = \frac{(5 - 1) + |-4|}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$y = x^2 + 4x \xrightarrow{\text{سه واحد به طرف چپ}} y = (x + 3)^2 + 4(x + 3)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به طرف بالا}} y = (x + 3)^2 + 4(x + 3) + 1$$

$$\Rightarrow y = x^2 + 6x + 9 + 4x + 12 + 1 \Rightarrow y = x^2 + 10x + 22$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2} = -5 \Rightarrow y_1 = 25 - 50 + 22 = -3 \Rightarrow S'(-5, -3)$$

روش دوم: می‌توان ابتدا مختصات رأس سهمی را حساب کرد و سپس رأس سهمی را انتقال داد.

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y_1 = 4 - 8 = -4$$

$$S(-2, -4) \xrightarrow{\text{سه واحد به طرف چپ}} (-2 - 3, -4) \xrightarrow{\text{یک واحد به طرف بالا}} (-5, -4 + 1) \\ \Rightarrow S'(-5, -3)$$

۲۲ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(2, 5)$ باشد ۲ برابر x و ۵ برای y است.

$$A(2, 5) \xrightarrow{x=2 \text{ و } y=5} f(2) = 5$$

برای قسمت دوم سؤال باید:

$$2x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}} y = 3f\left(\frac{3}{2}\right) + 4 \Rightarrow y = 3(5) + 4 \Rightarrow y = 19$$

بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'\left(\frac{3}{2}, 19\right)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.

$$A(3, a) \Rightarrow f(3) = a$$

۲۳ برای قسمت دوم سؤال داریم:

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$$

$x = 4$ برای نقطه A' است، بنابراین $b = 4$ است.

$$\xrightarrow{x=4} y = 3f(3) + 1 = 3a + 1 = 1 \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

۲۴ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(1, a)$ باشد ۱ برابر x و a برای y است.

$$A(1, a) \xrightarrow{x=1 \text{ و } y=a} a = 2f(3 - 1) + 4 \Rightarrow 2f(2) = a - 4 \Rightarrow f(2) = \frac{a - 4}{2}$$

برای قسمت دوم سؤال داریم:

$$1 - x = 2 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$x = -1$ برای نقطه A' است، بنابراین $b = -1$ است.

$$\xrightarrow{x=-1} y = 2f(2) + 1 = 2\left(\frac{a - 4}{2}\right) + 1 = 7 \Rightarrow a - 4 + 1 = 7 \Rightarrow a = 10$$

برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(2, 3)$ باشد ۲ برابر x و ۳ برابر y است.

$$A(2, 3) \xrightarrow{x=2 \text{ و } y=3} f(2) = 3$$

برای قسمت دوم سؤال باید:

$$3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\xrightarrow{x=1} y = 2f(2) + 1 \Rightarrow y = 2(3) + 1 \Rightarrow y = 7$$

بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'(1, 7)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.

برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(-1, 3)$ باشد -۱ برابر x و ۳ برابر y است.

$$A(-1, 3) \xrightarrow{x=-1 \text{ و } y=3} 3 = 2f(-1 - 1) + 5 \Rightarrow 2f(-2) = -2 \Rightarrow f(-2) = -1$$

برای قسمت دوم سؤال باید:

$$2 - 3x = -2 \Rightarrow -3x = -4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{4}{3}} y = 3f(-2) + 1 \Rightarrow y = 3(-1) + 1 \Rightarrow y = -2$$

بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'\left(\frac{4}{3}, -2\right)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.

ابتدا دامنه $y = f(x)$ را می‌نویسیم.

$$D_f : x > 2 \text{ یا } x \leq 1 \text{ و } x \neq 0$$

سپس با توجه به دامنه $f(x)$ دامنه حاصل را حساب می‌کنیم.

$$g(x) = f(3x - 8) \Rightarrow 3x - 8 > 2 \text{ یا } 3x - 8 \leq 1 \text{ و } 3x - 8 \neq 0$$

$$\Rightarrow x > \frac{10}{3} \text{ یا } x \leq 3 \text{ و } x \neq \frac{8}{3}$$

$$D_g = \left(-\infty, 3\right] \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right) - \left\{\frac{8}{3}\right\}$$

برای آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع اکیداً نزولی باشد، باید $0 < a < 1$ باشد.

$$0 < 3k - 1 < 1 \xrightarrow{+1} 1 < 3k < 2 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$$

برای آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، باید $a > 1$ باشد.

$$2m - 1 > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow m > 1$$

در واقع این x هایی که در جدول نوشته شده است برای نمودار تابع رسم شده همان y است. بنابراین کافی است x این

نقاط را در نمودار مشخص کنیم که همان y است.

x	-3	-1	1	3
$f^{-1}(x)$	-4	-2	4	5

۳۱

در واقع این x هایی که در جدول نوشته شده است برای نمودار تابع رسم شده همان y است. بنابراین کافی است x این نقاط را در نمودار مشخص کنیم که همان y است.

x	۱	۲	-۱	-۳
$f^{-1}(x)$	۳	۴	-۱	-۳

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(24) = g^{-1}(f^{-1}(24))$$

۳۲

عدد ۲۴ برای تابع f خروجی تابع است.

$$f(x) = \frac{x}{5} - 1 = 24 \Rightarrow \frac{x}{5} = 25 \Rightarrow x = 125$$

عدد ۱۲۵ برای تابع g خروجی تابع است.

$$x^r = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y^{-1}(125) = 5$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(14) = g^{-1}(f^{-1}(14))$$

۳۳

عدد ۱۴ برای تابع f خروجی تابع است.

$$f(x) = \frac{x}{2} - 1 = 14 \Rightarrow \frac{x}{2} = 15 \Rightarrow x = 30$$

عدد ۳۰ برای تابع g خروجی تابع است.

$$x^r + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

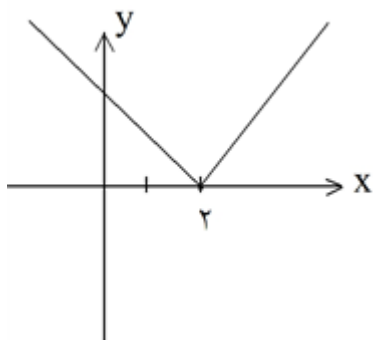
$$y = -3 - \sqrt{1 - 4x} \Rightarrow \sqrt{1 - 4x} = -3 - y \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}} 1 - 4x = 9 + 6y + y^2$$

۳۴

$$\Rightarrow -4x = y^2 + 6y + 8 \xrightarrow{\div (-4)} x = \frac{y^2 + 6y + 8}{-4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{-4}$$

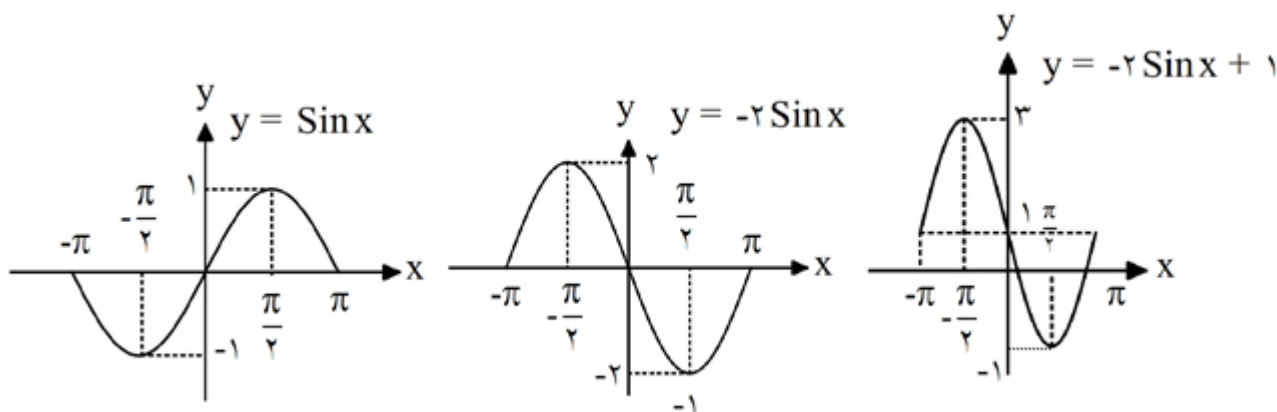
۳۵ با توجه به نمودار تابع دامنه محدود شده باید $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, 2]$ باشد.



$$y = 4 - \sqrt{x - 2} \Rightarrow \sqrt{x - 2} = 4 - y \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}} x - 2 = 16 - 8y + y^2$$

۳۶

$$\Rightarrow x = y^2 - 8y + 18 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 8x + 18$$



۳۷

$$D_f = R - \{1\}$$

$$D_g = R - \{-5\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq -5 \mid \frac{1}{x+5} \neq 1\right\}$$

$$\frac{1}{x+5} \neq 1 \Rightarrow x+5 \neq 1 \Rightarrow x \neq -4$$

$$D_{f \circ g} = R - \{-4, -5\}$$

$$D_f = [1, +\infty)$$

$$D_g = R$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid x^2 - 9 \geq 1\}$$

$$x^2 - 9 \geq 1 \Rightarrow x^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4 \text{ یا } x \geq 4$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 9} - 1 = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5(3x + 2) - 1 = 15x + 9 = 4 \Rightarrow 15x = -5 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

۴۰

$$f \circ g = \{(5, 2), (3, 11), (11, 5)\} \quad \text{gof} = \{(1, -1), (4, 7), (7, 1)\}$$

۴۱

$$\begin{array}{lcl} 5 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 2 & & 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -1 \\ 3 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 11 & & 4 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 7 \\ 11 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 5 & & -1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \times \\ 9 \xrightarrow{g} 25 \xrightarrow{f} \times & & 7 \xrightarrow{f} 11 \xrightarrow{g} 1 \end{array}$$

الف) درست

۴۲

ب) نادرست

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(5) = 2$$

الف)

۴۳

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(11) = 2$$

ب)

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = -1$$

الف ۴۴

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 5$$

ب

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-1) = 0$$

الف ۴۵

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(-1) = 2$$

ب

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 1$$

الف ۴۶

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = -2$$

ب

$$f(x) = x^2 + ax + bx + ab + 2(a+b)x^2$$

۴۷

$$f(x) = (1 + 2a + 2b)x^2 + (a+b)x + ab$$

برای آنکه تابع خطی باشد باید ضریب x^2 برابر صفر باشد، بنابراین:

$$1 + 2a + 2b = 0 \Rightarrow 2a + 2b = -1 \xrightarrow{\div 2} a + b = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x + ab$$

از نقطه $(-1, 4)$ می‌گذرد، در نتیجه:

$$(-1, 4) \Rightarrow 4 = -\frac{1}{2} + ab \Rightarrow ab = 4 - \frac{1}{2} \Rightarrow ab = \frac{7}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} 2y = -x + 7 \Rightarrow x = 7 - 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = 7 - 2x$$

$$f(x) = \frac{(\Delta x - 1)(x - 1)}{x} \Rightarrow f(x) = \Delta x - 1 \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

۴۸

$$\xrightarrow{x=1} y = 4 \Rightarrow R_f = R - \{4\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f$$

$$y = \Delta x - 1 \Rightarrow y + 1 = \Delta x \Rightarrow x = \frac{y+1}{\Delta} \Rightarrow y = \frac{x+1}{\Delta}$$

باید در $x - 4$ ضرب و تقسیم کنیم.

$$f^{-1}(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{\Delta}\right)(x-4)}{x-4} = \frac{x^2 - 3x - 4}{\Delta x - 20} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \\ c = -20 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{(3x+1)(x-1)}{x-1} \Rightarrow f(x) = 3x+1 \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

$$\xrightarrow{x=1} y=1 \Rightarrow R_f = R - \{1\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f$$

$$y = 3x+1 \Rightarrow y-1 = 3x \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow y = \frac{x-1}{3}$$

باید در $x-1$ ضرب و تقسیم کنیم.

$$f^{-1}(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{3}\right)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 21} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -21 \end{cases}$$

$$b - a + c = 1 + 2 - 21 = -18$$

