



p30konkor.com

زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

تاریخ برگزاری :

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون : آمار و احتمال ۱۱ فصل ۲

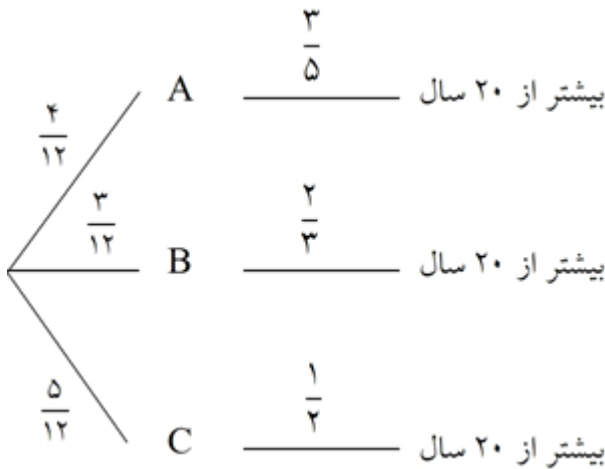
بارم	لطفاً پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	ردیف
	<p>جعبه A شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است و جعبه B شامل ۳ مهره آبی، ۴ مهره سبز و ۵ مهره قرمز است. از جعبه A به تصادف یک مهره را انتخاب کرده، در جعبه B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبه B انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره خارج شده از جعبه B سبز باشد را حساب کنید. (مهره‌ها همگی متمایز هستند).</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>جعبه A</p> <p>آبی $\frac{5}{12}$</p> <p>سبز $\frac{3}{12}$</p> <p>قرمز $\frac{4}{12}$</p> </div> <div style="margin-right: 20px;"> <p>جعبه B</p> <p>آبی $\frac{4}{13}$</p> <p>سبز $\frac{5}{13}$</p> <p>قرمز $\frac{4}{13}$</p> </div> <div> <p>۴ آبی</p> <p>۴ سبز</p> <p>۵ قرمز</p> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>۳ آبی</p> <p>۵ سبز</p> <p>۵ قرمز</p> </div> <div> <p>۳ آبی</p> <p>۴ سبز</p> <p>۶ قرمز</p> </div> </div> $P = \frac{5}{12} \times \frac{4}{13} + \frac{3}{12} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{12} \times \frac{4}{13} = \frac{20}{156} + \frac{15}{156} + \frac{16}{156} = \frac{51}{156}$	<p>۱</p> <p>پاسخ: ۱</p>



۲

پاسخ: ۱

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم

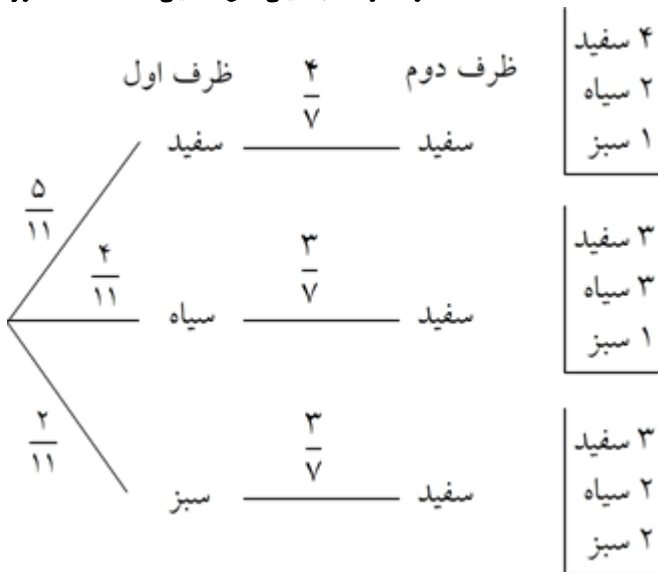


$$P = \frac{4}{12} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{12} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{24 + 20 + 25}{120} = \frac{69}{120} = \frac{23}{40}$$

۳

پاسخ: ۱

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم



$$P(A) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{11} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{11} \times \frac{3}{7} = \frac{20}{77} + \frac{12}{77} + \frac{6}{77} = \frac{38}{77}$$

۴	<p>فرض کنید جمعیت یک کشور شامل ۳۰ درصد کودک و نوجوان، ۴۰ درصد بزرگسالان و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری واگیردار در این دسته‌ها به ترتیب ۲ درصد، ۴ درصد و ۷ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا می‌شود؟</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم</p> <p>بیمار ۰/۰۲ کودک و نوجوان</p> <p>بیمار ۰/۰۴ بزرگسال</p> <p>بیمار ۰/۰۷ سالمند</p> <p>پاسخ: ۱</p> $P(A) = 0.3 \times 0.02 + 0.4 \times 0.04 + 0.3 \times 0.07$ $P(A) = 0.006 + 0.016 + 0.021$ $P(A) = 0.043$
۵	<p>در جعبه‌ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. دو مهره به‌طور متوالی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه هر دو مهره آبی باشد، چقدر است؟</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $p(\text{دوم آبی} \text{اول آبی}) \times p(\text{اول آبی}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$
۶	<p>در جعبه‌ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. دو مهره به‌طور متوالی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه مهره اول آبی و مهره دوم قرمز باشد، چقدر است؟</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $p(\text{دوم قرمز} \text{اول آبی}) \times p(\text{اول آبی}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$
۷	<p>در بین دانش‌آموزان یک کلاس، احتمال آنکه فردی در تیم فوتبال مدرسه باشد، ۰/۳ و احتمال آنکه یک عضو تیم فوتبال معدل بالای ۱۹ داشته باشد، ۰/۴ است. دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عضو تیم فوتبال و معدل بالای ۱۹ داشته باشد، چقدر است؟</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>عضو تیم فوتبال F و معدل بالای ۱۹، M</p> $p(F) = 0.3$ $p(M F) = 0.4$ $p(F \cap M) = p(F) \times p(M F) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$
۸	<p>فضای نمونه برای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۳ فرزند را بنویسید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\left\{ \begin{array}{l} (د, پ, د) و (پ, پ, د) و (د, د, پ) و (د, د, د) \\ (پ, پ, پ) و (د, پ, پ) و (پ, د, پ) و (د, د, پ) \end{array} \right\}$
۹	<p>در پرتاب ۱ سکه و ۲ تاس، فضای نمونه چند عضو دارد؟</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $2^1 \times 6^2 = 2 \times 36 = 72$ <p>پرتاب ۱ سکه</p> <p>پرتاب ۲ تاس</p>



	<p>اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = ۰/۱$ و $P(A \cap B') = ۰/۴$، حاصل $P(A \cup B')$ را به دست آورید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱ $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow ۰/۴ = P(A) - ۰/۱ \Rightarrow P(A) = ۰/۵$</p> <p>B و A بودن مستقل به توجه به $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$:</p> <p>$۰/۱ = ۰/۵ \times P(B) \Rightarrow P(B) = ۰/۲ \Rightarrow P(B') = ۱ - ۰/۲ = ۰/۸$</p> <p>$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \Rightarrow P(A \cup B') = ۰/۵ + ۰/۸ - ۰/۴ = ۰/۹$</p>	۱۰
	<p>احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، $۰/۹$ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال این که داروی ساخته شده، روی همه ی افراد جواب منفی داشته باشد، چه قدر است؟</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱ $۱ - ۰/۹ = ۰/۱$: احتمال عدم موفقیت دارو برای هر شخص</p> <p>افراد از یک دیگر مستقل هستند. بنابراین:</p> <p>$(۰/۱)^{۱۰} = ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱$</p>	۱۱
	<p>جعبه ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که:</p> <p>(الف) هر سه لامپ معیوب باشند.</p> <p>(ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱ (الف) این سه پیشامد از یک دیگر مستقلند. بنابراین:</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;"> $m_1 \quad m_2 \quad m_3$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ اولی دومی سومی معیوب معیوب معیوب </div> <div style="margin: 0 20px;"> $\xrightarrow{\text{مستقل}}$ </div> <div style="text-align: center;"> $\frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$ </div> </div> <p>(ب) احتمال این که تمام لامپ ها سالم باشند را به دست می آوریم:</p> $\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{55}$ <p>و با استفاده از احتمال متمم داریم:</p> $1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$ <p>احتمال این که حداقل یک لامپ معیوب باشد</p>	۱۲

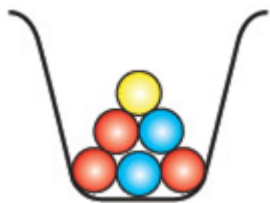


در یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن‌که:

(الف) هر دو مهره قرمز باشند.

(ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

(پ) هر دو مهره هم‌رنگ باشند.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

پاسخ: ۱ الف) دو پیشامد قرمز بودن مهره اول و مهره دوم مستقل از یکدیگرند و احتمال قرمز بودن هر مهره برابر

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \quad \text{است با } \frac{3}{6} \text{ بنابراین داریم:}$$

(ب) احتمال این‌که حداقل یک مهره آبی باشد، متمم احتمال این است که هیچ‌کدام آبی نباشد:

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36} \quad \text{احتمال این‌که هیچ‌کدام آبی نباشد:}$$

$$1 - \frac{16}{36} = \frac{5}{9} \quad \text{احتمال حداقل یک مهره آبی:}$$

(پ) هر دو مهره هم‌رنگ باشند یعنی یا هر دو قرمز باشند و یا هر دو آبی باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{احتمال قرمز بودن هر دو مهره} \\ \text{احتمال آبی بودن هر دو مهره} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} \\ \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{احتمال هم‌رنگ} \\ \text{بودن هر دو مهره} \end{array} : \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$$

۱۳

در یک امتحان پنج‌گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن‌را به دست آورید که:

(الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

(ب) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد.

(پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

پاسخ: ۱ الف) با توجه به این‌که پیشامدهای پاسخ دادن به هر سؤال مستقل از سؤال‌های دیگر است، داریم:

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{5^{10}}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{5^5} \quad \text{(ب) برای پنج سؤال اول که پاسخ صحیح داده باشد، داریم:}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 \quad \text{و برای پنج سؤال دوم داریم:}$$

$$\frac{1}{5^5} \times \frac{4^5}{5^5} = \frac{4^5}{5^{10}} = \frac{(2^2)^5}{5^{10}} = \frac{2^{10}}{5^{10}} = (0.4)^{10}$$

(پ) در این‌جا انتخاب پنج سؤال از بین ده سؤال را داریم و با توجه به قسمت ب داریم:

$$\binom{5}{10} \times (0.4)^{10}$$

۱۴

	<p>یک سکه و دو تاس به طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال این‌که سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چه قدر است؟</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱ روش اول:</p> $n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72, A = \{(6, 6, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{72}$ <p>روش دوم: اگر A را پیشامد رو آمدن سکه و B را پیشامد ۶ آمدن دو تاس در نظر بگیریم این دو پیشامد از هم مستقل هستند. بنابراین داریم:</p> $\begin{cases} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{72}$	۱۵
	<p>از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> $\begin{cases} A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{10} \\ B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} \neq \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \\ P(A \cap B) = \{6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10} \end{cases}$ <p>پاسخ: ۱</p> <p>$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$</p> <p>A و B مستقل نیستند.</p>	۱۶
	<p>در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$ $B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}, (A \cap B) = \{(3, 2), (3, 4)\}$ $\begin{cases} P(A) = \frac{10}{36} \\ P(B) = \frac{6}{36} \Rightarrow \frac{10}{36} \times \frac{6}{36} \neq \frac{2}{36} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \\ P(A \cap B) = \frac{2}{36} \end{cases}$ <p>پاسخ: ۱</p> <p>A* و B مستقل نیستند.</p>	۱۷



اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل اند.
الف) A و B' ب) A' و B

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$$

پاسخ: ۱ الف) باید نشان دهیم:

با توجه به مستقل بودن A و B \rightarrow

$$P(B \cap A') = P(A - B) = P(B) - P(B \cap A)$$

$$P(B) - P(A) \times P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P(A')$$

ب) راه حل اول:

با توجه به قسمت الف \rightarrow

$$P(A' \cap B') = P(A' - B) = P(A') - P(A' \cap B)$$

$$P(A') - P(A') \times P(B) = P(A')(1 - P(B)) = P(A') \times P(B')$$

راه حل دوم: بدون استفاده از قسمت الف

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

با توجه به مستقل بودن A و B \rightarrow

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(A') - P(B)(1 - P(A)) = P(A') - P(B) \times P(A')$$

$$= P(A')(1 - P(B)) = P(A') \times P(B')$$

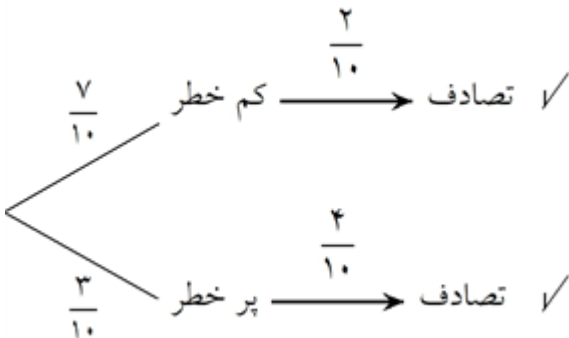
۱۸

یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال 0.4 تصادف می کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال 0.2 است. می دانیم که ۳۰ درصد از بیمه گزاران پرخطرند.

الف) احتمال این که یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال این که جزء گروه پرخطر باشد چه قدر است؟

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال



پاسخ: ۱

۱۹

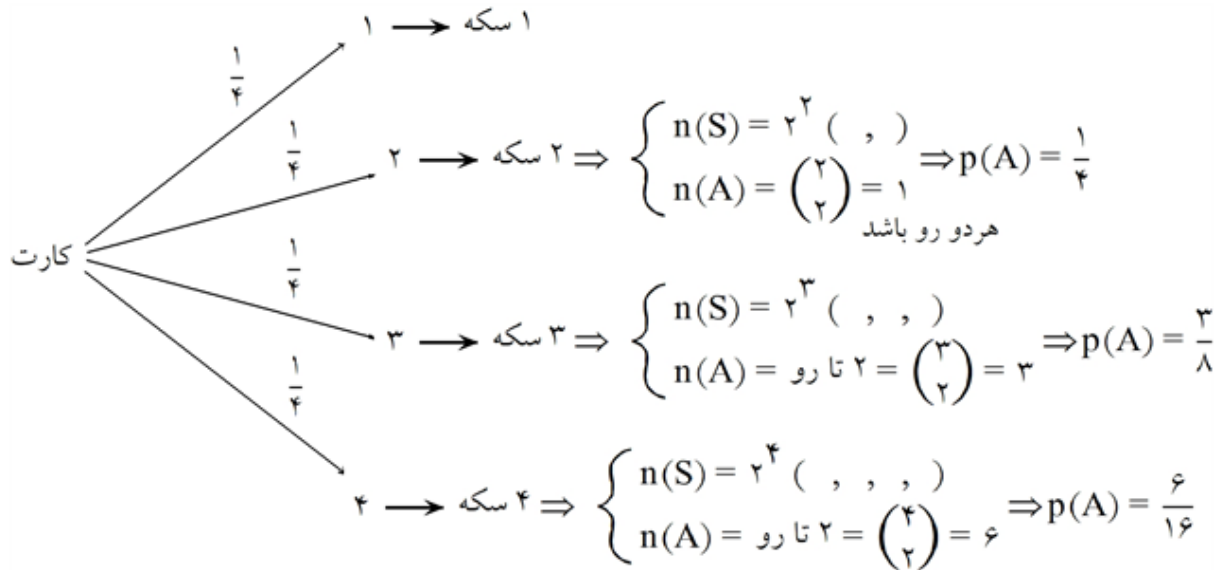
الف) $\frac{7}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{26}{100} = 0.26$

ب) $p(\text{تصادف} | \text{پرخطر}) = \frac{p(\text{تصادف} \cap \text{پرخطر})}{p(\text{تصادف})} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{4}{10}}{\frac{26}{100}} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$



فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴، کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال این‌که شماره‌ی کارت خارج شده ۳ باشد چه قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

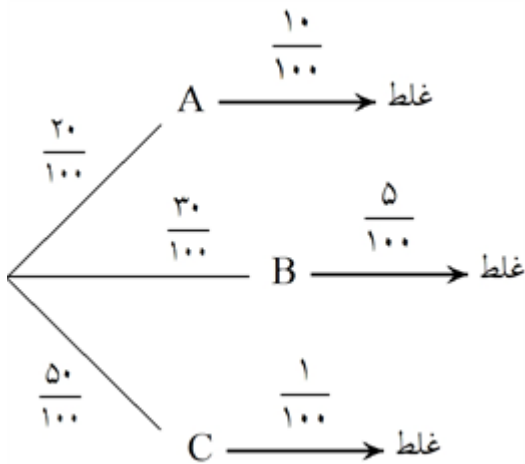


۲۰ پاسخ: ۱

$$p(\text{بیاید} | \text{تا ۲ رو}) = \frac{p(\text{تا ۲ رو} \cap \text{بیاید})}{p(\text{تا ۲ رو})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{16}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16}} = \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسه‌ی انتشاراتی‌اند که به‌ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال این‌که این سه نفر صفحه‌ای که به آن‌ها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به‌ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال این‌که مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چه قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال



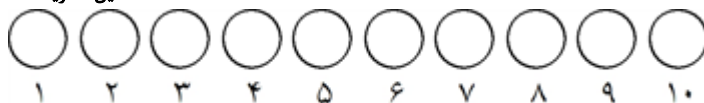
۲۱ پاسخ: ۱

$$p(A | \text{غلط}) = \frac{P(A \cap \text{غلط})}{p(\text{غلط})} = \frac{\frac{20}{100} \times \frac{10}{100}}{\frac{20}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{1}{100}} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$



امیر و بابک عضو تیم ده نفره‌ی والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال این‌که امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چه قدر است؟ احتمال این‌که امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چه قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال



پاسخ: ۱

تعداد حالاتی که امیر بلندتر از بابک است

$$\rightarrow \binom{10}{2} \times 8!$$

جایگشت بقیه

الف)

امیر بلندترین باشد

$$\rightarrow 1 \times 9!$$

جایگشت بقیه
نفر ۱۰

$$p = \frac{9!}{45 \times 1!} = \frac{1}{5}$$

ب) $n(S) = \binom{10}{2} \times 8!$

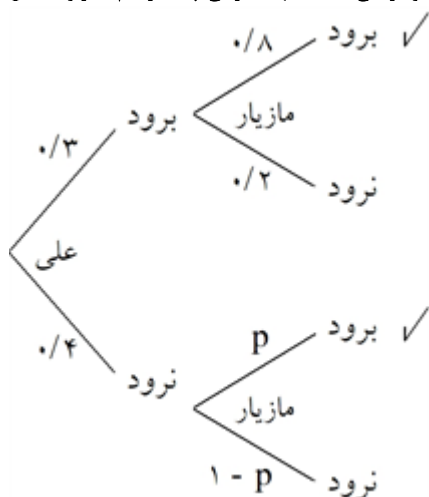
$$n(B) = 1 \times \binom{8}{1} \times 8! \rightarrow p(B) = \frac{\binom{8}{1} \times 8!}{\binom{10}{2} \times 8!} = \frac{8}{45}$$

امیر نهم بابک

۲۲

علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال‌های $0/3$ و $0/4$ برای دیدن یک مسابقه‌ی ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال $0/8$ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

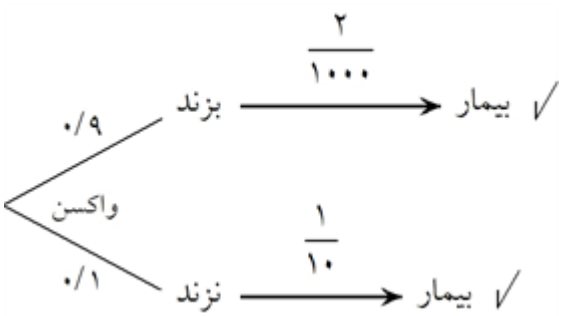
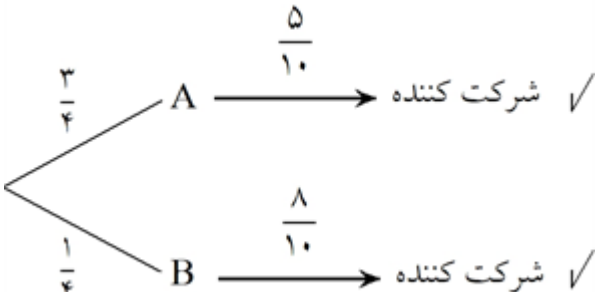


پاسخ: ۱

$$p(\text{مازیار برود}) = 0/4 \Rightarrow 0/3 \times 0/8 + 0/4 \times p = 0/4 \Rightarrow 0/4 p = 0/12 \Rightarrow p = 0/3 \Rightarrow 1 - p = 0/7$$

۲۳



	<p>قانون بیز را ثابت کنید:</p> $P(B_i A) = \frac{P(B_i)P(A B_i)}{P(A)}$ <p>راهنمایی: در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را ببینید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱</p> $p(B_i A) = \frac{p(B_i \cap A)}{p(A)} \quad (I)$ $p(A B_i) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(B_i)} \Rightarrow p(B_i \cap A) = p(B_i) \times p(A B_i) \quad (II)$ $I, II \rightarrow p(B_i A) = \frac{p(B_i) \times p(A B_i)}{p(A)}$	۲۴
	<p>احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال این که یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چه قدر است؟</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\Rightarrow p(\text{بیمار}) = \frac{9}{100} \times \frac{2}{1000} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{118}{10000} = 0.0118$  <p>The diagram shows a tree starting from 'واکسن' (Vaccine). One branch is 'بزند' (Get it) with probability ۰/۹, leading to 'بیمار' (Sick) with probability ۲/۱۰۰۰. The other branch is 'نزند' (Don't get it) with probability ۰/۱, leading to 'بیمار' (Sick) with probability ۱/۱۰.</p>	۲۵
	<p>۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی دهنده های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱</p>  <p>The diagram shows a tree starting from a point. One branch is 'A' with probability ۳/۴, leading to 'شرکت کننده' (Participant) with probability ۵/۱۰. The other branch is 'B' with probability ۱/۴, leading to 'شرکت کننده' (Participant) with probability ۸/۱۰.</p> $p(A \text{شرکت کننده}) = \frac{p(A \cap \text{شرکت کننده})}{p(\text{شرکت کننده})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10}}{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10}} = \frac{15}{23}$	۲۶



در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال این‌که یک راننده‌ی مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۱ انجام می‌دهند. احتمال این‌که یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چه قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

$$P(A \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = 0/034$$

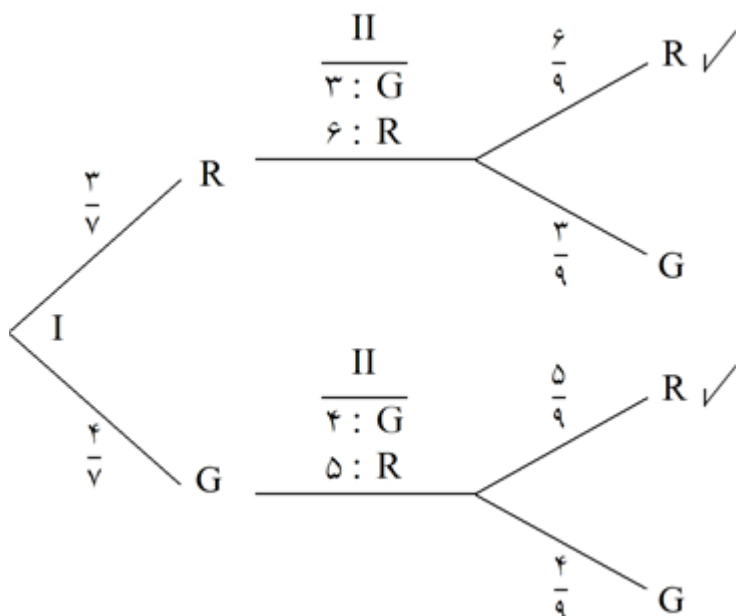
پاسخ: ۱

دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن‌را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

$$\Rightarrow p(R) = \frac{3}{7} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{38}{63}$$

پاسخ: ۱



روش دوم:

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \times \frac{3}{7} + \frac{8}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{3}{63} + \frac{5}{9} = \frac{38}{63}$$

قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه‌ی احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

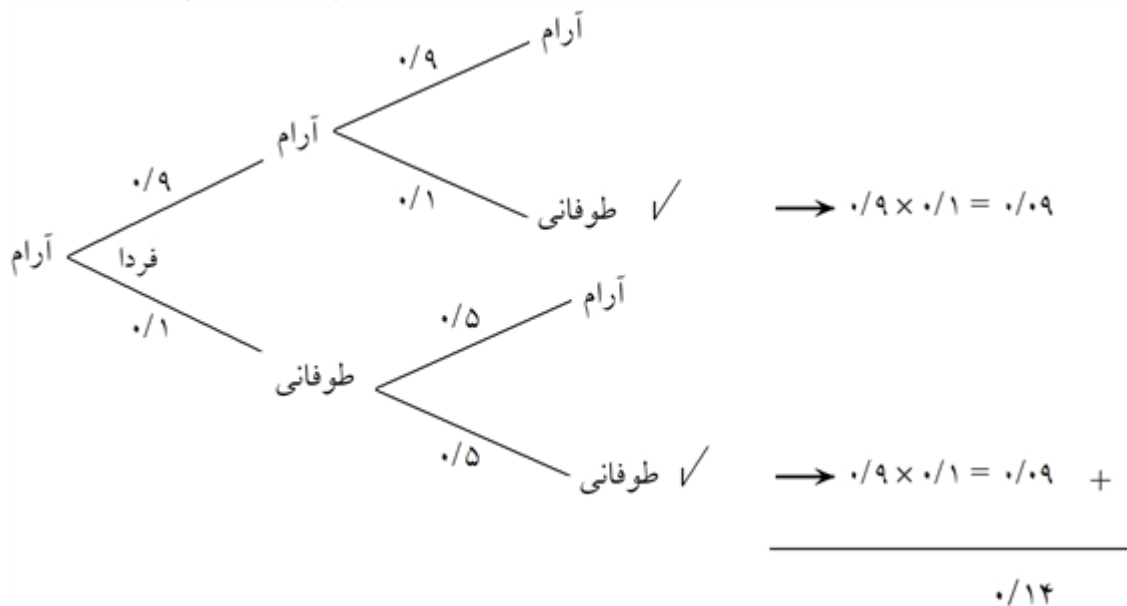
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

پاسخ: ۱

بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره‌ی هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال این‌که در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چه قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال



پاسخ: ۱

۳۰

درباره‌ی خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آن‌ها پسر است. احتمال این‌که دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چه قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

$$n(S) = 2^4 = 16 \xrightarrow[\text{حداقل یکی پسر}]{\text{کاهش}} n(S_1) = 16 - 1 = 15$$

↓
ممکنی دختر باشند

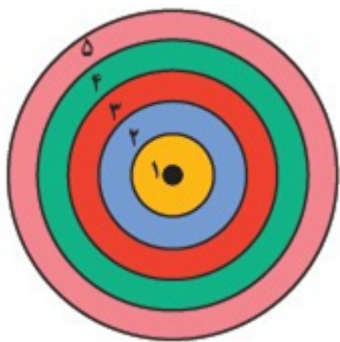
پاسخ: ۱

۳۱

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6 \rightarrow p(A|S_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$



در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه‌ی اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه‌ی k ام، $(2k - 1)x$ باشد: الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید. ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه‌ی دوم یا پنجم؟



۳۲

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

الف) $P(k) = (2k - 1)x$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1$$

$$\Rightarrow 25x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow p(1) = \frac{1}{25}, p(2) = \frac{3}{25}, p(3) = \frac{5}{25}, p(4) = \frac{7}{25}, p(5) = \frac{9}{25}$$

ب) $\begin{cases} p(1) + p(3) + p(4) = \frac{1+5+7}{25} = \frac{13}{25} \\ p(2) + p(5) = \frac{3+9}{25} = \frac{12}{25} \end{cases}$ پس اولی بیشتر است.

در یک تجربه‌ی تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x), P(y), P(z)$ یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

$$p(x) = k$$

$$p(y) = k + \frac{1}{4}$$

$$+ p(z) = k + \frac{2}{4}$$

پاسخ: ۱

۳۳

$$\underbrace{p(x) + p(y) + p(z)}_1 = 3k + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 3k = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1}{12} \\ p(y) = \frac{4}{12} \\ p(z) = \frac{7}{12} \end{cases}$$



	<p>در پرتاب یک سکه‌ی ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\begin{cases} p(\text{پشت}) = 2x \\ p(\text{رو}) = x \end{cases}$ $p(\text{پشت}) + p(\text{رو}) = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow p(\text{پشت}) = \frac{2}{3}$	۳۴
	<p>عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:</p> <p>الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.</p> <p>ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.</p> <p>پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$n(S) = 100$</p> <p>هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳: مضرب ۶</p> <p>الف) $n(2 \cup 3) = n(2) + n(3) - n(2 \cap 3)$</p> <p>مضرب ۲ یا ۳</p> $\left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{3} \right] - \left[\frac{100}{6} \right] = 67 \Rightarrow p = \frac{67}{100}$ <p>ب) $n(2 \cap \bar{3}) = n(2 - 3) = n(2) - n(2 \cap 3) = \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{6} \right] = 34 \Rightarrow p = \frac{34}{100}$</p> <p>ج) $n(\bar{2} \cap \bar{3}) = n((2 \cup 3)') = n(S) - n(2 \cup 3) = 100 - 67 = 33 \Rightarrow p = \frac{33}{100}$</p> <p>توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left[\frac{n}{k} \right]$.</p>	۳۵
	<p>فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:</p> <p>الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A - B) = P(A) - P(B)$.</p> <p>ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(A) \leq P(A)$.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$</p> <p>$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$</p> <p>ب) $B \subseteq A \Rightarrow B \leq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$</p>	۳۶



۳۷

در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

پاسخ: ۱ $\{ \text{صاف یا نیمه ابری یا ابری} \} \times \{ \text{باد نمی وزد یا باد می وزد} \} \times \{ \text{مرطوب یا خشک} \} \times \{ \text{گرم یا سرد} \}$
 $\times \{ \text{بارندگی رخ نداده یا بارندگی رخ داده} \} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$

۳۸

یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دوعضوی برابر نیست. فرض کنید آن‌ها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آن‌ها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال این‌که اولین کسی که وارد می‌شود، بلندقدترین عضو تیم باشد چه قدر است؟

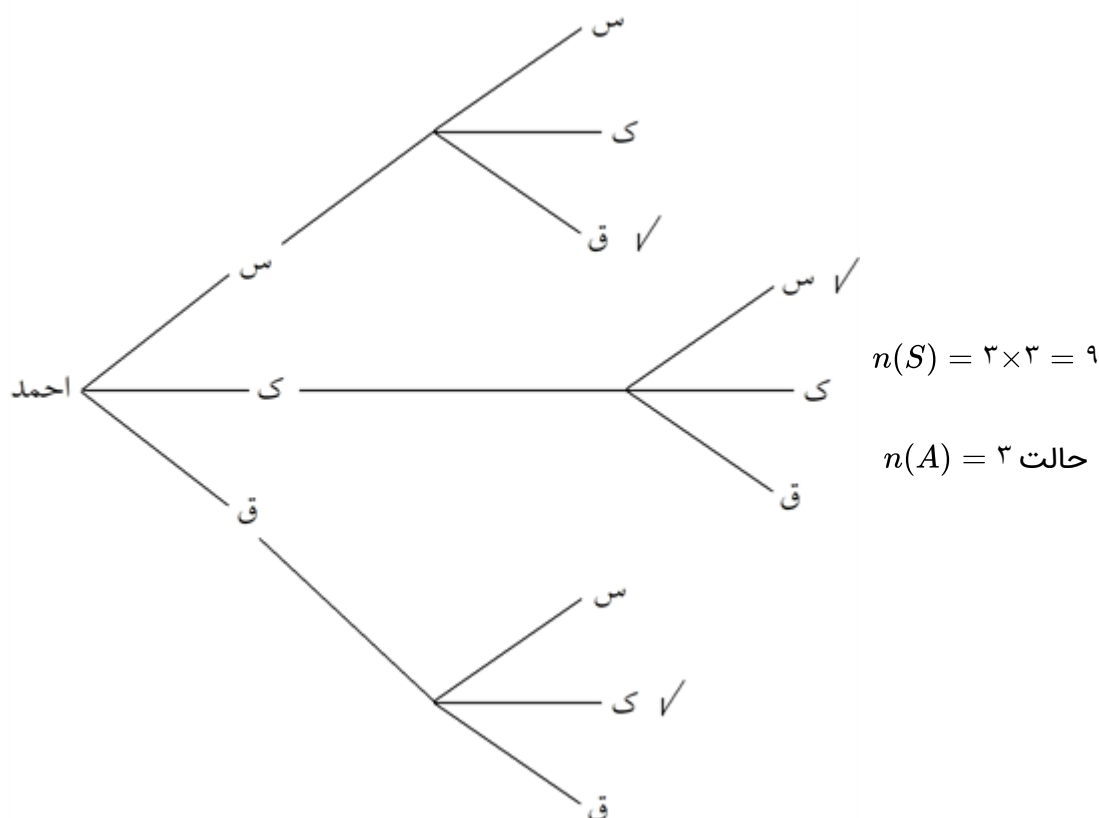
مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال

پاسخ: ۱ به ترتیب قد $S = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$
 $A = \{14\} \rightarrow p(A) = \frac{1}{14}$

۳۹

احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده‌ی بازی است؟

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-آمار و احتمال



پاسخ: ۱

	<p>اگر B_1, B_2, B_3 سه پیشامد دو به دو ناسازگار و با احتمال مثبت باشند که اجتماع آن‌ها برابر با S است و اگر A پیشامدی از S باشد ثابت کنید:</p> $P(B_i A) = \frac{P(A B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^3 P(A B_i)P(B_i)}, i = 1, 2, 3$ <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال چهارم-ریاضیات گسسته</p> <p>پاسخ: ۱ می‌دانیم اگر B_1, B_2, B_3 افزایشی فضای نمونه باشند طبق قانون کلی احتمال داریم:</p> $P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A B_i)$ <p>از طرفی می‌دانیم:</p> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A B)$ $\Rightarrow P(B_i A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A B_i)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A B_i)}$	۴۰
<p>جعبه‌ای محتوی ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف از جعبه بدون جایگذاری برمی‌داریم. به ۲ سوال بعدی پاسخ دهید:</p>		
	<p>اگر اولین مهره سیاه باشد، احتمال اینکه دومین مهره هم سیاه باشد چه قدر است؟</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال چهارم-ریاضیات گسسته</p> <p>پاسخ: ۱ اگر اولی سیاه باشد، در جعبه ۳ سفید و ۱ سیاه می‌ماند، پس احتمال اینکه دومی سیاه باشد برابر $\frac{1}{4}$ است.</p> <p style="text-align: center;">اولی سیاه ↑ $P(b_2 b_1) = \frac{1}{4}$ ↓ دومی سیاه باشد.</p>	۴۱
	<p>احتمال اینکه مهره‌ی دوم هم‌رنگ مهره‌ی اول باشد چقدر است؟</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال چهارم-ریاضیات گسسته</p> <p>می‌دانیم: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A B) \iff P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$</p> <p>حل: $P(w_1 \cap w_2) + P(b_1 \cap b_2) = P(b_1) \times P(b_2 b_1) + P(w_1) \times P(w_2 w_1)$</p> $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$	۴۲

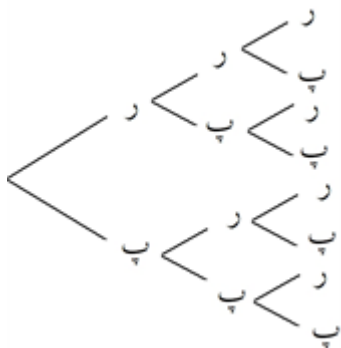


سکه‌ای همگن را ۳ بار می‌اندازیم. اگر A پیشامد رخ دادن رو در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن پشت در پرتاب سوم، و C پیشامد رخ دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد، نشان دهید که A و B مستقل ولی B و C مستقل نیستند.

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال چهارم-ریاضیات گسسته

پاسخ: ۱ می‌دانیم فضای نمونه ۳ بار پرتاب سکه شامل 2^3 تایی مرتب است:

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), \dots, (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(S) = 8$$



$$A = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(ر, ر, پ), (ر, پ, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{(پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{(ر, ر, پ)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B)$$

A و B مستقل

$$B \cap C = \{(پ, ر, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(B \cap C) = 2 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(B) \cdot P(C)$$

پس B و C مستقل نیستند.

توجه: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم اگر و فقط اگر: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

به کمک استقرای ریاضی نامساوی $P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$ را برای n پیشامد ثابت کنید.

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-جبر و احتمال

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$P(A \cup B) \geq 0 : P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq 0 : P(A) + P(B) \geq P(A \cap B)$$

$$n = 2 : P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

$$\text{فرض } n = k : P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$$

$$\text{حکم } n = K + 1 : P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_{k+1})$$

$$\text{اثبات } P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(B \cap A_{k+1}) \leq P(B) + P(A_{k+1})$$

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{k+1})$$

پاسخ: ۱

۴۴



	<p>در جریان یک مسابقه بسکتبال در صورت خطا روی بازیکن در محوطه‌ای مشخص، دو پناستی پشت سر هم اعلام می‌شود. بازیکن A با احتمال ۸۰ درصد پناستی اول خود را گل می‌کند، در این صورت احتمال گل شدن پناستی دوم ۶۰ درصد و در غیر این صورت ۵۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال در خطای منجر به پناستی روی بازیکن A، حداقل یک پناستی گل می‌شود؟</p> <p>۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۸۸ ۴) ۰/۸</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>۱ - (هیچ کدام گل نشود) $\Rightarrow 1 - P(A') \times P(B') \Rightarrow 1 - \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} = 1 - \frac{10}{100} = 0/9$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۴۵
	<p>یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد فرد بیاید ۱ تاس دیگر پرتاب کرده و در غیر این صورت ۲ تاس پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال همه اعداد ظاهر شده یکسان هستند؟</p> <p>۱) $\frac{7}{36}$ ۲) $\frac{7}{72}$ ۳) $\frac{5}{36}$ ۴) $\frac{5}{72}$</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.</p> <p>فرد بودن: $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{12}$</p> <p>زوج بودن: $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$</p> <p>$\Rightarrow \frac{1}{24} + \frac{6}{12} = \frac{7}{24}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۴۶
	<p>سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، ۲ سکه پرتاب کرده و اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال همه سکه‌ها یکسان ظاهر می‌شوند؟</p> <p>۱) $\frac{3}{12}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{5}{16}$</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>$\frac{1}{2} \rightarrow \begin{matrix} \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \Rightarrow P(\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}, \text{پ}) = \frac{1}{16} \\ \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \Rightarrow P(\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}, \text{پ}) = \frac{1}{16} \\ \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \Rightarrow P(\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}, \text{پ}) = \frac{1}{16} \\ \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \Rightarrow P(\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}, \text{پ}) = \frac{1}{16} \end{matrix}$</p> <p>$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{16}$</p> <p>سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳</p>	۴۷



در جریان یک مسابقه بازیکن A دو پنالتی می‌زند. این بازیکن با احتمال ۶۰ درصد پنالتی اول را گل می‌کند، در این صورت احتمال گل شدن پنالتی دوم ۸۰ درصد و در غیر این صورت ۳۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال وضعیت گل شدن دو پنالتی متفاوت است؟

۰/۳ (۴)

۰/۶ (۳)

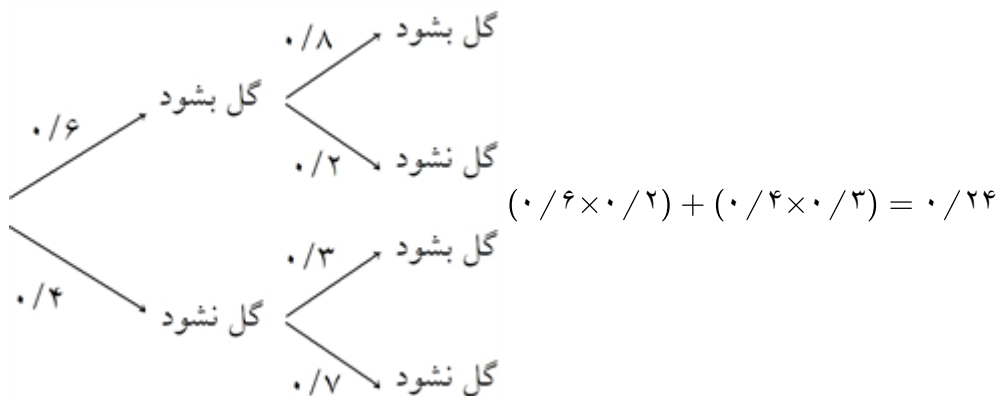
۰/۲۴ (۲)

۰/۴۴ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴۸



دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آنها حداقل ۶ است؟

$\frac{13}{18}$ (۴)

$\frac{11}{18}$ (۳)

$\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴۹

$n(S) = 36$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 5) \\ (2, 4)(2, 5)(2, 6) \\ (3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6) \\ (4, 2)(4, 3)(4, 5) \\ (5, 1)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6) \\ (6, 2)(6, 3)(6, 5) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$



دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۶۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه A و ۷۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش‌آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول‌شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از مدرسه A است؟

$$\frac{3}{8} \quad \text{۴}$$

$$\frac{5}{8} \quad \text{۳}$$

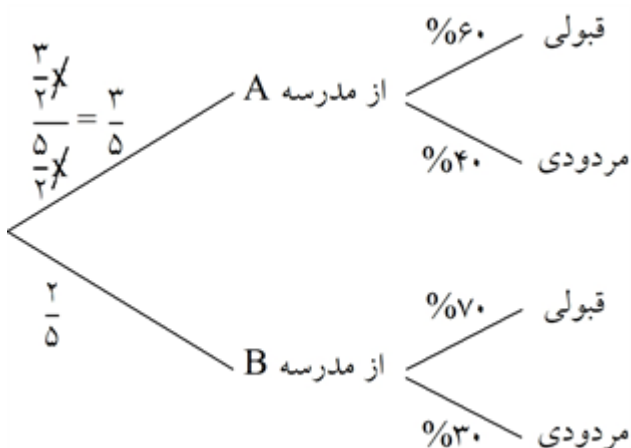
$$\frac{7}{16} \quad \text{۲}$$

$$\frac{9}{16} \quad \text{۱}$$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

$$\text{مجموع دانش‌آموزان} = \frac{3}{4}x + x = \frac{5}{4}x$$

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$P(A|\text{قبولی}) = \frac{P(A \cap \text{قبولی})}{P(\text{قبولی})} = \frac{\frac{3}{5} \times 0.6}{\frac{3}{5} \times 0.6 + \frac{1}{4} \times 0.7} = \frac{0.36}{0.36 + 0.175} = \frac{36}{53.5} = \frac{72}{107} \approx \frac{9}{16}$$

۵۰

اگر $P(A - B) = \frac{3}{5}$ و $P(B - A) = \frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad \text{۴}$$

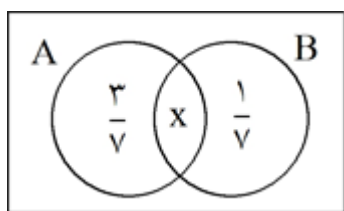
$$\frac{5}{4} \quad \text{۳}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + \frac{2}{5}}{x + \frac{1}{5}}$$

$$\frac{2}{5} + x + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{5}$$

تابع هموگرافیک نزولی است $\Rightarrow ad - bc = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} < 0$

$$\text{Min} \left(\frac{P(A)}{P(B)} \right) = \frac{\frac{2}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

۵۱



چهار کارت به شماره ۱ تا ۴ با احتمال متناسب با عدد نوشته شده روی آنها در اختیار است. کارتی به تصادف انتخاب شده و سپس به تعداد عدد کارت، یک سکه پرتاب می‌شود. اگر سکه یک بار «رو» آمده باشد، با کدام احتمال سکه دقیقاً یک بار پرتاب شده است؟

$$\frac{4}{29} \quad \text{۴}$$

$$\frac{12}{23} \quad \text{۳}$$

$$\frac{4}{13} \quad \text{۲}$$

$$\frac{12}{19} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(1) = x, P(2) = 2x, P(3) = 3x, P(4) = 4x$$

$$\text{جمع احتمالات} = 1 \Rightarrow x + 2x + 3x + 4x = 1 \Rightarrow 10x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} = \text{احتمال یک بار رو آمدن} &\Rightarrow \frac{1}{10} = \text{احتمال انتخاب کارت ۱} \\ \frac{2}{4} = \text{احتمال یک بار رو آمدن} &\Rightarrow \frac{2}{10} = \text{کارت ۲} \\ \frac{3}{4} = \text{کارت ۳} &\Rightarrow \frac{3}{10} \\ \frac{4}{4} = \text{کارت ۴} &\Rightarrow \frac{4}{10} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{4}}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{4}} = \frac{4}{29}$$

۵۲

یک دستگاه طوری طراحی شده که به تصادف یکی از دو حرف A یا B را از ورودی می‌گیرد و پس از طی سه مرحله حرفی را در خروجی چاپ می‌کند. در هر مرحله حرف ورودی با احتمال $\frac{1}{4}$ بدون تغییر به مرحله بعد می‌رود یا به شکل حرف دیگری درآمده و به مرحله بعدی وارد می‌شود. اگر احتمال انتخاب حرف A، ۲ برابر حرف B باشد، با کدام احتمال حرف A چاپ شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است؟

$$\frac{17}{41} \quad \text{۴}$$

$$\frac{9}{41} \quad \text{۳}$$

$$\frac{21}{23} \quad \text{۲}$$

$$\frac{14}{23} \quad \text{۱}$$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۳

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} A \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \begin{array}{l} A \rightarrow \frac{7}{16} \\ B \rightarrow \frac{9}{16} \end{array} \\ B \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \begin{array}{l} A \rightarrow \frac{9}{16} \\ B \rightarrow \frac{7}{16} \end{array} \end{array} \quad \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \right) + \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \right) + \left(\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \right) \\ \frac{28}{64} = \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{16}}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{9}{16} \right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{16} \right)} = \frac{\frac{14}{48}}{\frac{9+14}{48}} = \frac{14}{23} \end{array}$$

هریک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۶ است؟

$$\frac{4}{15} \quad \text{ف}$$

$$\frac{2}{15} \quad \text{ب}$$

$$\frac{3}{10} \quad \text{د}$$

$$\frac{1}{10} \quad \text{ا}$$

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵۴

$$n(s) = \binom{5}{3} \times 3! = 60, A = \underbrace{\{132, 312\}}_2, \underbrace{\{432, 342, 234, 324\}}_4, \underbrace{\{254, 524\}}_2 \Rightarrow n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{8}{60} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{15}$$

در یک گروه ۱۵۰ نفری دانش‌آموزی، ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم الف و ۷۵ نفر فقط بلیت فیلم ب را خریداری کرده‌اند. اگر $P(A)$ و $P(B)$ به ترتیب احتمال خرید بلیت فیلم‌های الف و ب باشند، بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

$$\frac{15}{22} \quad \text{ف}$$

$$\frac{8}{15} \quad \text{ب}$$

$$\frac{38}{45} \quad \text{د}$$

$$\frac{15}{29} \quad \text{ا}$$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

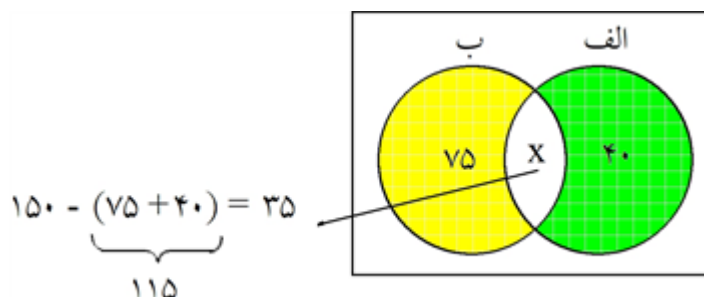
پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۵۵

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{40 + x}{75 + x} = \frac{40 + 35}{75 + 35} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$$

Max

باید اشتراک حداکثر شود.



احتمال اینکه یک کشتی‌گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{1}{5}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{1}{3}$ بوده و در صورتی که اصلی‌ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{1}{4}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی‌گیر قهرمان می‌شود یا رقیب اصلی خود را می‌برد؟

$$\frac{7}{15} \quad \text{۴}$$

$$\frac{13}{30} \quad \text{۳}$$

$$\frac{11}{30} \quad \text{۲}$$

$$\frac{4}{15} \quad \text{۱}$$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{بررسی رقیب اصلی: } A \\ \text{قهرمانی: } B \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{5} \\ P(B) = \frac{1}{3} \\ P(B|A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \end{array} \right.$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{6 + 10 - 1}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

سه ظرف یکسان داریم که هر کدام به ترتیب حاوی ۱۶، ۱۵ و ۱۴ مهره هستند. تعداد مهره‌های قرمز سه ظرف، به ترتیب ۴، ۶ و ۵ مهره است. احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره‌های آن ظرف است. یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و مهره‌ای بیرون می‌کشیم، با کدام احتمال، مهره انتخابی قرمز است؟

$$\frac{17}{120} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{۳}$$

$$\frac{131}{560} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۱}$$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P = \frac{16}{45} \times \frac{4}{16} + \frac{15}{45} \times \frac{6}{15} + \frac{14}{45} \times \frac{5}{14} = \frac{4 + 6 + 5}{45} = \frac{1}{3}$$

سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد سوم ۱۰ باشد، برابر $\frac{1}{15}$

است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد، با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟

$$\frac{5}{51} \quad \text{۴}$$

$$\frac{15}{91} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۱}$$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(\text{عدد سوم} = 10) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{15} \Rightarrow n = 15$$

$$10 = \text{تعداد مضارب غیر } 3 \Rightarrow 5 = \text{تعداد} \Rightarrow \{3, 6, 9, 12, 15\} = \text{مضارب } 3 \Rightarrow 1, 2, 3, \dots, 15 : \text{اعداد}$$

$$P = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

۵۶

۵۷

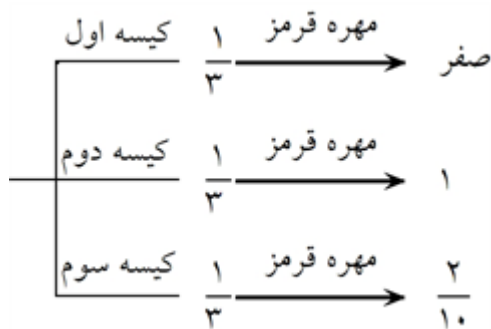
۵۸

سه کیسه یکسان، هر کدام شامل ۱۰ گوی در اختیار داریم. کیسه اول دارای گوی‌های سبز، کیسه دوم دارای گوی‌های قرمز و کیسه سوم دارای ۲ گوی قرمز و ۸ گوی سبز است. کیسه ای به تصادف انتخاب کرده، یک گوی خارج می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. با کدام احتمال همه گوی‌های آن کیسه قرمز است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار درختی را برای این مسئله رسم می‌کنیم:



طبق قانون بیز داریم:

$$P(\text{مهره قرمز} | \text{کیسه دوم}) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \left(0 + 1 + \frac{2}{10} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$$

در پرتاب همزمان دو تاس، اعداد روشده m و n هستند. با کدام احتمال، معادله $x^2 - mx + n = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است؟

$\frac{8}{9}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فضای نمونه پرتاب دو تاس دارای $n(S) = 36$ حالت است.

شرط وجود دو ریشه حقیقی و متمایز برای معادله $x^2 - mx + n = 0$ آن است که:

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(1)(n) > 0 \Rightarrow m^2 > 4n$$

از طرفی چون ترتیبی برای m و n قائل نشده است پس هر جفت می‌تواند هم ابتدای جای m بعد n و برعکس

باشد و تنها زوج‌هایی که نمی‌توانند ناتساوی را برقرار کنند، $(1, 1)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 3)$ و $(4, 4)$ هستند. پس:

$$n(A) = 32$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

	<p>پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(B' A')$ کدام است؟</p> <p>۱ $۰/۷$ ۲ $۰/۵$ ۳ $۰/۵۵$ ۴ $۰/۷۵$</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو پیشامد A و B ناسازگار هستند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ پس:</p> $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ <p>طبق رابطه احتمال شرطی داریم:</p> $P(B' A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{10} = ۰/۷$	۶۱
<p>سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱</p>	<p>در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z, t\}$ یک فضای نمونه‌ای است و $P(x), P(y), P(z)$ و $P(t)$ یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. اگر کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S برابر $\frac{1}{12}$ باشد، بیشترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S، چقدر است؟</p> <p>۱ $\frac{5}{12}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{11}{24}$ ۴ $\frac{1}{3}$</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.</p> $\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12} + d\right) + \left(\frac{1}{12} + 2d\right) + \left(\frac{1}{12} + 3d\right) = 1 \Rightarrow 4d = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow P_{\max} = \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{6} \Rightarrow P_{\max} = \frac{5}{12}$	۶۲
<p>سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱</p>	<p>در جعبه‌ای ۵ کارت با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. دو کارت به تصادف و با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. می‌دانیم یکی از کارت‌ها شماره ۴ است. با کدام احتمال، عدد کارت دیگر، زوج است؟</p> <p>۱ $\frac{4}{9}$ ۲ $\frac{2}{5}$ ۳ $\frac{3}{10}$ ۴ $\frac{1}{3}$</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون دو کارت با جایگذاری انتخاب می‌شوند پس تأثیری بر روی هم ندارند. از این رو اگر یکی ۴ باشد، احتمال اینکه دیگری زوج شود برابر $\frac{2}{5}$ است.</p>	۶۳



	<p>فرض کنید علی و حسن دو کماندار باشند که با احتمال‌های $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ به هدف می‌زنند. اگر هر کدام از آن‌ها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟</p> <p> $\frac{15}{19}$ (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{17}{25}$ (۴) </p> <p>۶۴</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به هدف زدن علی و حسن دو پیشامد مستقل است. یعنی:</p> $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ <p>سؤال از ما حاصل $P(A A \cup B)$ را خواسته است. پس داریم:</p> $P(A A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$
	<p>سه دانش‌آموز، به تنهایی در مورد مسئله‌ای فکر می‌کنند. اگر احتمال حل این مسئله توسط هر کدام از این سه دانش‌آموز به ترتیب $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{6}$ باشد، با کدام احتمال، این مسئله حل می‌شود؟</p> <p> $\frac{1}{40}$ (۱) $\frac{7}{10}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) </p> <p>۶۵</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>مسئله زمانی حل می‌شود که حداقل یکی آن را حل کند، پس می‌توان از متمم کمک گرفت یعنی هیچکس حل نکند.</p> $P(1 \cup 2 \cup 3) = 1 - P(\overline{1} \cap \overline{2} \cap \overline{3}) = 1 - \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \right) = \frac{7}{10}$
	<p>دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟</p> <p> $\frac{1}{18}$ (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) </p> <p>۶۶</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فضای نمونه پرتاب دو تاس:</p> $n(S) = 6^2 = 36$ $A = \{(3, 4)(4, 3)(6, 1)(1, 6)\} \rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$



مجموعه $S = \{x, y, z, t, w\}$ ، فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{x, y\}$ ، $B = \{x, y, z, t\}$ و $C = \{x, y, w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $P(C)$ کدام است؟

$$\frac{11}{35} \quad \text{④}$$

$$\frac{19}{35} \quad \text{③}$$

$$\frac{16}{35} \quad \text{②}$$

$$\frac{24}{35} \quad \text{①}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

$$P(A) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(x) + P(y) = \frac{1}{7}$$

$$P(B) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(B') = \frac{2}{5} \Rightarrow P(W) = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = \underbrace{P(x) + P(y)}_{\frac{1}{7}} + \underbrace{P(w)}_{\frac{2}{5}} = \frac{1}{7} + \frac{2}{5} = \frac{19}{35}$$

پاسخ: ③ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶۷

در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به طور متوالی و بدون جایگذاری، به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کمتر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟

$$\frac{1}{4} \quad \text{④}$$

$$\frac{1}{8} \quad \text{③}$$

$$\frac{1}{12} \quad \text{②}$$

$$\frac{1}{16} \quad \text{①}$$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ③ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A : 16 \text{ گوی اول} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{16} \Rightarrow A \subseteq B$$

$$B : \text{شماره گوی دوم از اول کمتر} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

روش دوم:

$$n(A) = 1 \times 15$$

↓
اولی ۱۶ بیاید
↓
تعداد حالت دومی

$$n(S) = 16 \times 15 \times \frac{1}{2}$$

↓
تعداد حالت مهره اول
↓
تعداد حالت مهره دوم

ر نصف حالتها اولی از دومی بزرگتر است

$$\Rightarrow P(A) = \frac{15}{8 \times 15} = \frac{1}{8}$$

۶۸



در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ یک فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله هندسی با قدر نسبت کمتر از واحد، تشکیل دهند و واسطه هندسی آنها $\frac{1}{5}$ باشد، کمترین مقدار احتمال یک پیشامد ساده در S ، چقدر است؟

$\frac{2 - \sqrt{2}}{5}$ (۱)
 $\frac{2 - \sqrt{3}}{5}$ (۲)
 $\frac{2 - \sqrt{3}}{10}$ (۳)
 $\frac{2 - \sqrt{2}}{10}$ (۴)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۶۹

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $P(x), P(y), P(z) \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \frac{1}{5r}, \frac{1}{5}, \frac{r}{5}$

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5r} + \frac{1}{5} + \frac{r}{5} \Rightarrow 1 + r + r^2 = 5r$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{r < 1} r = 2 - \sqrt{3}$$

$$P(z) = \frac{r}{5} = \frac{2 - \sqrt{3}}{5}$$

روی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس به دلخواه یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. اگر عدد فرد باشد یک تاس پرتاب کرده و عدد رو شده را در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. سپس از اعداد ساخته شده، در همه‌ی حالت‌های ممکن، مجموعه‌ی A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعه‌ی A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر است؟

$\frac{9}{34}$ (۱)
 $\frac{1}{4}$ (۲)
 $\frac{9}{40}$ (۳)
 $\frac{2}{9}$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۰

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = 6 \times 11 + 6 \times 6 = 102$$

\downarrow \downarrow
 کارت اول زوج کارت اول فرد

به ازای هریک از اعداد رو شده‌ی زوج در کارت اول، اعداد ۴، ۸ و ۱۲ برای کارت دوم قابل قبول است ولی حالت‌های ۴۴ و ۸۸ و ۱۲۱۲ امکان‌پذیر نیست.

به ازای هریک از اعداد رو شده‌ی فرد در کارت اول، اعداد ۲ و ۶ در کارت دوم قابل قبول است، بنابراین تعداد اعضای پیشامد تصادفی برابر است با:

$$n(A) = (6 \times 3) - 3 + (2 \times 6) = 27$$

$$P(A) = \frac{27}{102} = \frac{9}{34}$$

بنابراین احتمال برابر است با:



در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیش‌تر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره آبی باشد، کدام است؟

$$\frac{11}{18} \quad \text{۴}$$

$$\frac{19}{30} \quad \text{۳}$$

$$\frac{11}{30} \quad \text{۲}$$

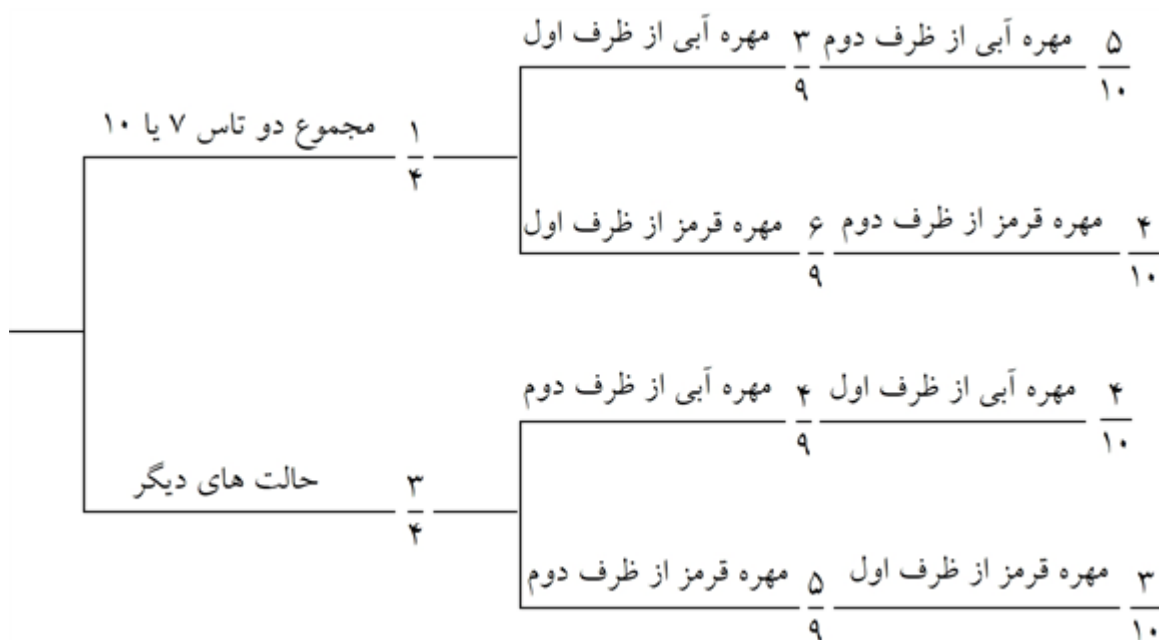
$$\frac{7}{18} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۷ یا ۱۰ می‌شود، عبارت‌اند از:

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (4, 6), (5, 2), (5, 5), (6, 1), (6, 4)\}$$

بنابراین احتمال آمدن مجموع برابر ۷ یا ۱۰، برابر $\frac{9}{36}$ یا $\frac{1}{4}$ است.



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{10} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{39}{90} + \frac{3}{4} \times \frac{31}{90} = \frac{132}{360} = \frac{11}{30}$$

در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده بیش‌تر از ۹ باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیش‌تر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره قرمز باشد، کدام است؟

$$\frac{180}{270} \quad \text{④}$$

$$\frac{173}{270} \quad \text{③}$$

$$\frac{165}{270} \quad \text{②}$$

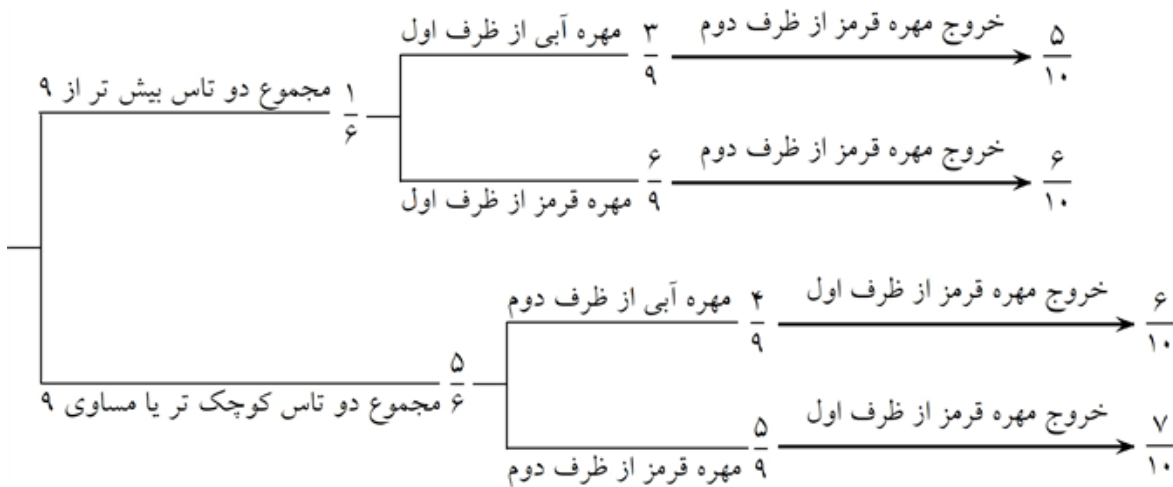
$$\frac{157}{270} \quad \text{①}$$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

پاسخ: ③ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پیشامد آن‌که مجموع دو تاس عددی بیش‌تر از ۹ باشد، به صورت مجموعه‌ی زیر است:

$$\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

یعنی احتمال این پیشامد برابر $\frac{1}{6}$ و در نتیجه متمم آن برابر $\frac{5}{6}$ است. طبق نمودار درختی داریم:



بنابراین طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{1}{6} \left(\frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{6}{10} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{4}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{7}{10} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{51}{90} + \frac{5}{6} \times \frac{59}{90} = \frac{346}{540} = \frac{173}{270}$$



ارزش گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow r$ ، نادرست است. احتمال این‌که q نادرست باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{3}{8} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{1}{3} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{1}{4} \quad \boxed{1}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: $\boxed{2}$ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق جدول ارزش گزاره‌ها برای سه گزاره‌ی p ، q و r داریم:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، در ردیف‌های ۲، ۴ و ۶، ارزش گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است.

در بین این سه ردیف، تنها در ردیف ۴، ارزش گزاره‌ی q نادرست است، پس احتمال موردنظر برابر $\frac{1}{3}$ است.



هریک از اعداد ۱ تا ۲۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس دو کارت به تصادف و به ترتیب از کیسه خارج کرده و کنار یکدیگر قرار می‌دهیم تا عدد جدیدی حاصل شود. اعداد تشکیل شده از تمامی حالت‌های ممکن را در مجموعه‌ی A قرار می‌دهیم، یک عدد از مجموعه‌ی A انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

$$\frac{67}{417}$$

(۴)

$$\frac{11}{70}$$

(۳)

$$\frac{65}{417}$$

(۲)

$$\frac{65}{401}$$

(۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در حالت کلی $21 \times 20 = 420$ حالت داریم که تعداد ۱۹ تا از آنها تکراری است:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} \right\}$$

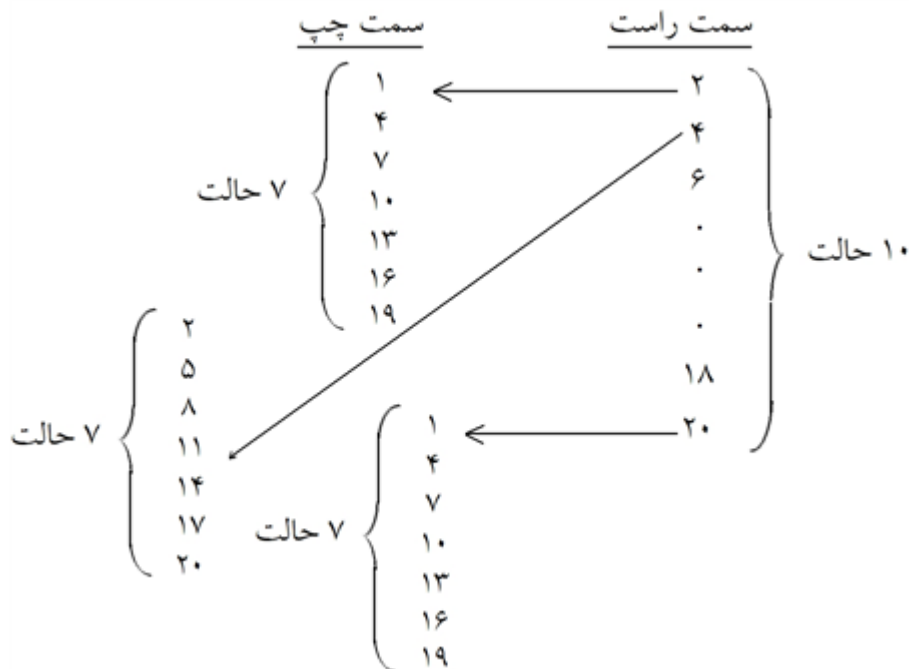
$$\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 420 - 19 = 401$$

حال اگر بخواهد مضرب ۶ باشد، باید زوج و مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد. پس ابتدا در سمت راست اعداد زوج را قرار می‌دهیم سپس در سمت چپ اعدادی که مجموع ارقام مضرب ۳ می‌شود را قرار می‌دهیم:



برای هر عدد سمت راست ۷ حالت در سمت چپ داریم.

یعنی ۷۰ حالت از طرفی اعداد ۲۱۶ و ۱۱۴ تکراری است و اعداد ۶۶ و ۱۲۱۲ و ۱۸۱۸ نشدنی است، یعنی ۶۵ حالت.

۱۲	۲۴	۳۶
۴۲	۵۴	نشدنی
۷۲	۸۴	۹۶
۱۰۲	۱۱۴	۱۲۶
۱۳۲	۱۴۴	۱۵۶
۱۶۲	۱۷۴	۱۸۶

۱۸	۲۱۰	۳۱۲
۴۸	۵۱۰	۶۱۲
۷۸	۸۱۰	۹۱۲
۱۰۸	۱۱۱۰	نشدنی
۱۳۸	۱۴۱۰	۱۵۱۲
۱۶۸	۱۷۱۰	۱۸۱۲



		۱۹۲ ۲۰۴ (۲۱۶)	۱۹۸ ۲۰۱۰ ۲۱۱۲																																														
		(۱۱۲) (۲۱۶) ۳۱۸ ۴۱۲ ۵۱۶ ۶۱۸	۱۲۰ ۲۲۰																																														
	ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال این که ارزش گزاره‌ی r نادرست باشد، کدام است؟	$\frac{2}{3}$ (۴) ۷۱۴ ۱۰۱۴ ۱۳۱۴	$\frac{3}{7}$ (۱) ۷۲۰ ۱۰۲۰ ۱۳۲۰																																														
سراسری-ریاضی-۱۴۰۰	گزینه ۱ پاسخ صحیح است. همان طور که در جدول مشاهده می شود، در ۷ ردیف ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است که در ردیف های ۲، ۶ و ۸ یعنی ۳۱ ردیف آن ارزش گزاره‌ی r نادرست است.																																																
	$\Rightarrow P(A) = \frac{65}{401}$	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>r</th><th>$q \vee r$</th><th>$p \Rightarrow (q \vee r)$</th></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td></tr></table>			p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	د	د	د	د	د	د	د	ن	د	د	د	ن	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	د	د	د	د	ن	د	ن	د	د	ن	ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن	د
p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$																																													
د	د	د	د	د																																													
د	د	ن	د	د																																													
د	ن	د	د	د																																													
د	ن	ن	ن	ن																																													
ن	د	د	د	د																																													
ن	د	ن	د	د																																													
ن	ن	د	د	د																																													
ن	ن	ن	ن	د																																													
		پس: $\begin{cases} n(S) = 7 \\ n(A) = 3 \end{cases} \rightarrow P(A) = \frac{3}{7}$																																															
				۷۵																																													
	احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دوره‌ی بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می گیرد).	$\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{10}$ (۳)	$\frac{2}{3}$ (۲)	$\frac{20}{27}$ (۱)																																													
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی	گزینه ۴ پاسخ صحیح است.	$\frac{6}{7} = \frac{6}{10} \Rightarrow \text{نر دوم به شرط نر اول} \times \text{نر اول}$																																															
				۷۶																																													



یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

$$\frac{31}{72} \quad (4)$$

$$\frac{91}{216} \quad (3)$$

$$\frac{41}{108} \quad (2)$$

$$\frac{13}{36} \quad (1)$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از احتمال متمم استفاده می‌کنیم، یعنی در هر ۳ بار اصلاً ۶ نیاید:

$$p(A) = 1 - p(\bar{I} \cap \bar{II} \cap \bar{III}) \stackrel{\text{مستقل}}{=} 1 - [p(\bar{I}) \times p(\bar{II}) \times p(\bar{III})] = 1 - \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{91}{216}$$

\bar{I} بار اول نیاید \bar{II} بار دوم نیاید \bar{III} بار سوم نیاید

۷۷

در جعبه‌ای ۶ مهره سفید، ۴ مهره سیاه است. دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهره دوم، سفید است؟

$$0/72 \quad (4)$$

$$0/64 \quad (3)$$

$$0/6 \quad (2)$$

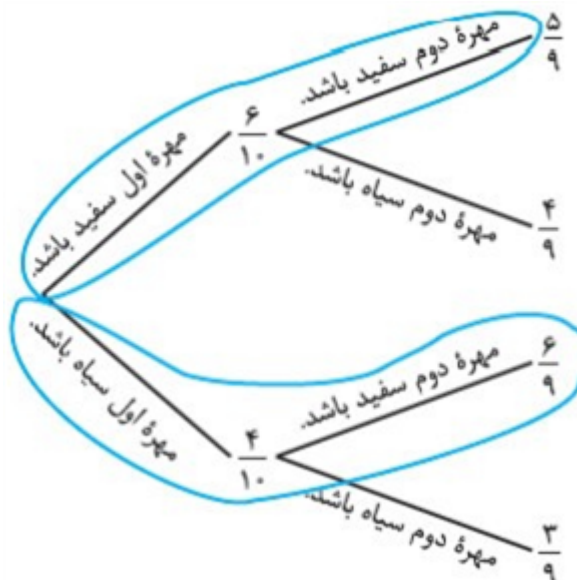
$$0/5 \quad (1)$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مهره دوم می‌تواند هر یک از ده مهره داخل جعبه باشد. یعنی می‌تواند هر یک از ده مهره باشد ولی ما می‌خواهیم یکی از شش مهره سفید باشد. بنابراین:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{10}$$

توجه کنید که چون رنگ مهره اول را نمی‌دانیم، این‌که این مهره چه رنگی باشد، در نهایت تأثیری در احتمال سفید بودن مهره دوم نمی‌گذارد. اما برای درک این نکته، سؤال را یک بار با توجه به رنگ مهره اول پاسخ می‌دهیم.



$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن مهره دوم}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{54}{90} = 0/6$$

۷۸



امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ در یک مسابقه‌ی علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر $\frac{1}{5}$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟

$\frac{9}{14}$ (۱) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{11}{14}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۷۹ پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. احتمال شرکت کردن امید در مسابقه را با A و احتمال شرکت کردن بهروز در مسابقه را با B نشان می‌دهیم. داریم:

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{20}$$

بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بسته ریاضی، ۷ بسته تجربی و ۶ بسته علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{9}$ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟

$\frac{25}{36}$ (۱) $\frac{29}{36}$ (۲) $\frac{30}{36}$ (۳) $\frac{31}{36}$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۸۰ پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{5}{18} \times \frac{7}{10} + \frac{7}{18} \times \frac{8}{10} + \frac{6}{18} \times \frac{9}{10} = \frac{29}{36}$$

در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب، و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟

$\frac{11}{26}$ (۱) $\frac{6}{13}$ (۲) $\frac{7}{13}$ (۳) $\frac{15}{26}$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۱ پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P(A) = \frac{\frac{3}{100} \times \frac{55}{100}}{\left(\frac{3}{100} \times \frac{55}{100}\right) + \left(\frac{5}{100} \times \frac{45}{100}\right)} = \frac{11}{26}$$

به ازای کدام مقدار a تابع $x = 0, 1, 2, 3, 4$ یک تابع احتمال است؟ $P(X = x) = \frac{\binom{4}{x}}{a}$

۸۰ **۴**

۷۵ **۳**

۷۲ **۲**

۷۰ **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: **۱** گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۸۲

$$\frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{a} = 1$$

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = a \Rightarrow a = 70$$

در آزمایش تکراری پرتاب دو تاس با هم، احتمال آمدن مجموع ۱۱ قبل از آمدن عدد هر دو تاس یکسان، کدام است؟

$\frac{1}{2}$ **۴**

$\frac{1}{3}$ **۳**

$\frac{1}{4}$ **۲**

$\frac{1}{5}$ **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: **۲** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. احتمال آمدن مجموع ۱۱ به طور کلی در یک پرتاب

$$x + y = 11 \quad (5, 6), (6, 5) \quad \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

احتمال آمدن هر دو یکسان نیز $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$ است.

فرض کنید در مرحله n ام برای اولین بار مثل هم بیایند و در تمام مراحل قبلی جمع ۱۱ نباشد. یعنی در هر گام احتمال $\frac{28}{36}$ همان $\frac{7}{9}$ داریم در گام n ام $\frac{1}{6}$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \frac{7}{9}}\right) = \frac{3}{4}$$

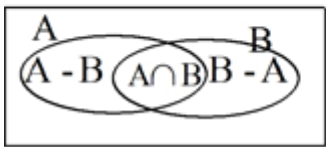
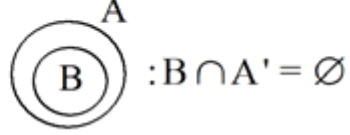
ولی سؤال دقیقاً پیشامد متمم را می‌خواهد که می‌شود: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

۸۳



	<p>ظرف A شامل ۸ مهره از عدد ۱ تا ۸ و ظرف B دارای ۵ مهره از عدد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع آن‌ها از ۸ بیش‌تر است؟</p> <p> $\frac{3}{8}$ (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) </p> <p>کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.</p> <p> $x + y = 9$ حالت (۴, ۵) / (۵, ۴) / (۶, ۳) / (۷, ۲) / (۸, ۱) $x + y = 10$ حالت (۵, ۵) / (۶, ۴) / (۷, ۳) / (۸, ۲) $x + y = 11$ حالت (۶, ۵) / (۷, ۴) / (۸, ۳) $x + y = 12$ حالت ۲ $x + y = 13$ حالت ۱ </p> <p>بنابراین:</p> $P(A) = \frac{5 + 4 + 3 + 2 + 1}{\binom{8}{1} \binom{5}{1}} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$	۸۴
	<p>سه سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که لااقل یکی از پیشامدهای سکه فقط یک «رو» یا عدد تاس زوج باشد، کدام است؟</p> <p> $\frac{9}{16}$ (۱) $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{11}{16}$ (۴) </p> <p>کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی</p> <p>پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.</p> <p> $P(A) = P(\text{فقط یک رو}) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ $P(B) = P(\text{تاس زوج}) = \frac{1}{2}$ $P(B, A \text{ از یکی}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$ </p>	۸۵
	<p>از کیسه‌ای که محتوی آن ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است، به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، بین مهره‌های خارج شده، مهره سفید نیست یا مهره سیاه نیست؟</p> <p> $\frac{17}{44}$ (۱) $\frac{17}{44}$ (۲) $\frac{9}{22}$ (۳) $\frac{19}{44}$ (۴) </p> <p>کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.</p> <p> $P(W' \cup B') = P(W') + P(B') - P(W' \cap B')$ $= \frac{\binom{7}{3} + \binom{8}{3} - \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{35 + 56 - 1}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$ </p>	۸۶



	<p>احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟</p> <p>۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه در مسائل <u>احتمال لااقل</u> یکی داشتیم از متمم استفاده می‌کنیم.</p> $P(A') = \frac{16}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{4}{100} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100}$
۸۷	<p>اگر دو مجموعه‌ی A و B غیر تهی و $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $B \cap A'$ برابر کدام است؟</p> <p>۱) A ۲) B ۳) A' ۴) \emptyset</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p> <p>پاسخ: ۴ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A$  </div> <div style="text-align: center;"> $A \cup B = A : B \subset A$  </div> </div>
۸۹	<p>در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی، خارج می‌شود؟</p> <p>۱) $\frac{31}{42}$ ۲) $\frac{37}{42}$ ۳) $\frac{67}{84}$ ۴) $\frac{73}{84}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.</p> $P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} \xrightarrow{\text{حداقل یک آبی}} P(A') = 1 - P(A) = \frac{37}{42}$ <p style="text-align: center;">اصلاً آبی نیاید.</p>



در ظرفی ۴ مهره سیاه و ۳ مهره سفید قرار دارد. اگر ۳ مهره از این ظرف انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد فقط یک مهره سیاه باشد؟

$$\frac{12}{35} \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{7} \quad (2)$$

$$\frac{2}{35} \quad (4)$$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

پاسخ: ۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

$$n(A) = n(\text{فقط یک مهره سیاه}) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{35}$$

\downarrow \downarrow
 دوسفید و یک سیاه

۹۰

اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بر روی ۶ مهره‌ی یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌باشد؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۹۱

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15$$

$$A = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 6\}\} \Rightarrow \text{مجموع مساوی } 3, 6, 9$$

$$n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$



در یک آزمون از دو کلاس A و B ، ۴۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد داوطلبین در کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود، تقریباً با کدام احتمال، این فرد از کلاس A است؟

۱ ۰/۴۳

۲ ۰/۵۷

۳ ۰/۶۱

۴ ۰/۶۳

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

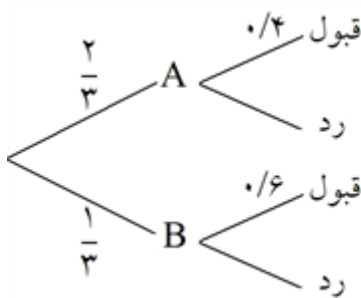
پاسخ: ۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$P(A|\text{قبولی}) = \frac{P(A \cap \text{قبولی})}{P(\text{قبولی})}$$

$$P(\text{قبولی}) = \frac{40}{100} \times \frac{2x}{3x} + \frac{60}{100} \times \frac{x}{3x} = \frac{140}{300}$$

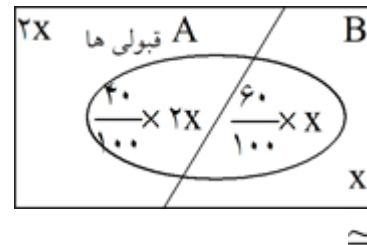
$$P(A \cap \text{قبولی}) = \frac{2x \times \frac{40}{100}}{3x} = \frac{80}{300}$$

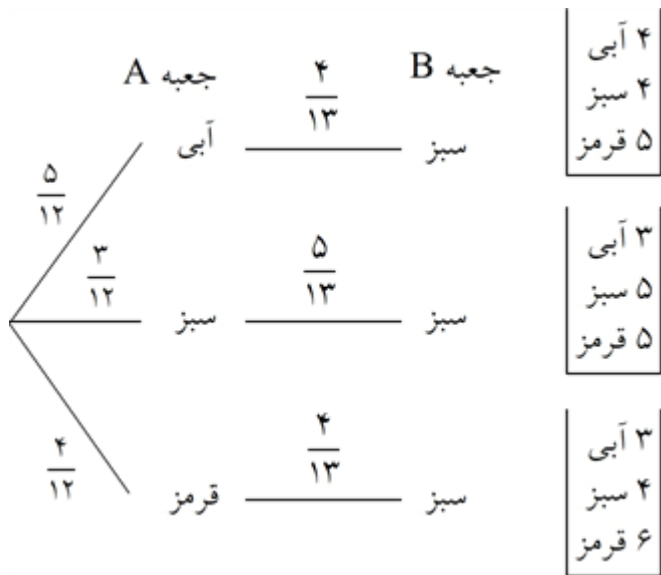
$$P(A \cap \text{قبولی}) = \frac{\frac{80}{300}}{\frac{140}{300}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$



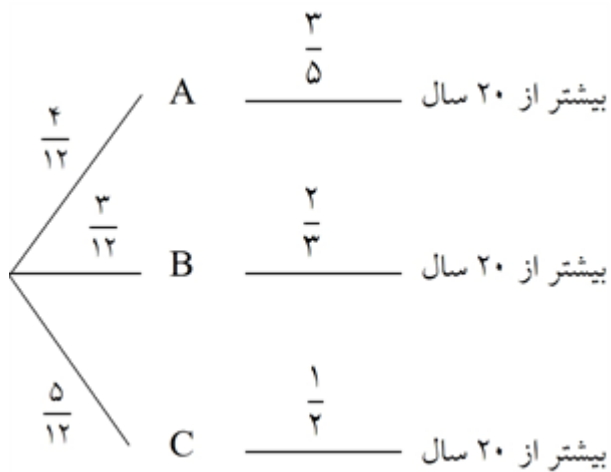
روش دوم:

$$P(\text{قبول}|A) = \frac{P(A, \text{قبول})}{P(\text{قبول})} = \frac{\frac{2}{3} \times 0.4}{\frac{2}{3} \times 0.4 + \frac{1}{3} \times 0.6} \approx 0.57$$

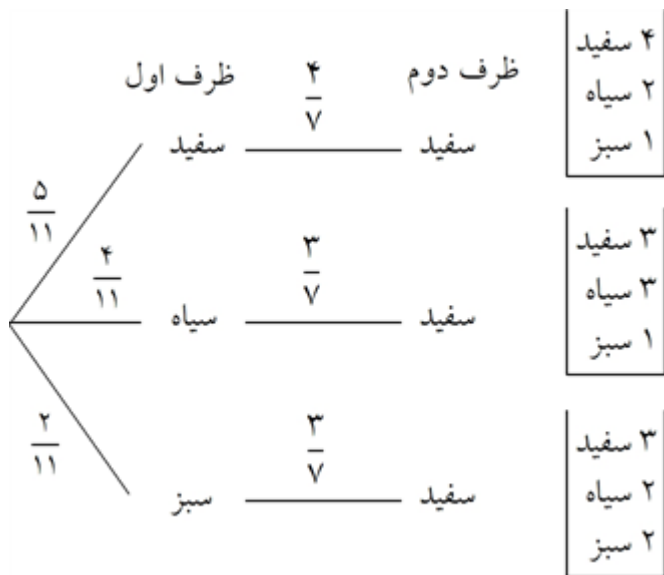




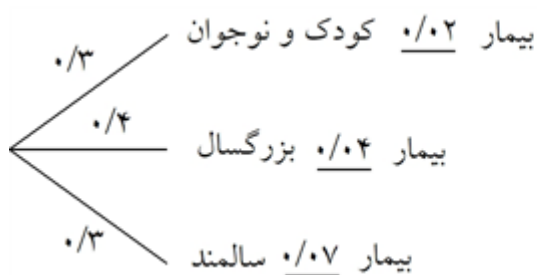
$$P = \frac{5}{12} \times \frac{4}{13} + \frac{3}{12} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{12} \times \frac{4}{13} = \frac{20}{156} + \frac{15}{156} + \frac{16}{156} = \frac{51}{156}$$



$$P = \frac{4}{12} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{12} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{24 + 20 + 25}{120} = \frac{69}{120} = \frac{23}{40}$$



$$P(A) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{11} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{11} \times \frac{3}{7} = \frac{20}{77} + \frac{12}{77} + \frac{6}{77} = \frac{38}{77}$$



$$P(A) = 0.3 \times 0.2 + 0.4 \times 0.4 + 0.3 \times 0.7$$

$$P(A) = 0.06 + 0.16 + 0.21$$

$$P(A) = 0.43$$

$$p(\text{اول آبی} \cap \text{دوم آبی}) = p(\text{اول آبی}) \times p(\text{دوم آبی} | \text{اول آبی}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

$$p(\text{اول آبی} \cap \text{دوم قرمز}) = p(\text{اول آبی}) \times p(\text{دوم قرمز} | \text{اول آبی}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

عضو تیم فوتبال F و معدل بالای ۱۹، M

$$p(F) = 0.3$$

$$p(M | F) = 0.4$$

$$p(F \cap M) = p(F) \times p(M | F) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (د, پ, د) و (د, پ, پ) و (د, د, پ) و (د, د, د) \\ (پ, پ, پ) و (پ, پ, د) و (پ, د, پ) و (پ, د, د) \end{array} \right\}$$

$$2^1 \times 6^2 = 2 \times 36 = 72$$

پرتاب ۱ سکه پرتاب ۲ تاس

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow ۰/۴ = P(A) - ۰/۱ \Rightarrow P(A) = ۰/۵$$

B و A بودن مستقل به توجّه به $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$۰/۱ = ۰/۵ \times P(B) \Rightarrow P(B) = ۰/۲ \Rightarrow P(B') = ۱ - ۰/۲ = ۰/۸$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \Rightarrow P(A \cup B') = ۰/۵ + ۰/۸ - ۰/۴ = ۰/۹$$

احتمال عدم موفقیت دارو برای هر شخص $۱ - ۰/۹ = ۰/۱$

افراد از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین:

$$۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ = (۰/۱)^{۱۰}$$

الف) این سه پیشامد از یکدیگر مستقلند. بنابراین:

$$\begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{اولی} & \text{دومی} & \text{سومی} \\ \text{معیوب} & \text{معیوب} & \text{معیوب} \end{array} \xrightarrow{\text{مستقل}} \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$$

$$\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{55}$$

ب) احتمال این که تمام لامپ ها سالم باشند را به دست می آوریم:

و با استفاده از احتمال متمم داریم:

$$۱ - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

احتمال این که حداقل یک لامپ معیوب باشد

الف) دو پیشامد قرمز بودن مهره اول و مهره دوم مستقل از یکدیگرند و احتمال قرمز بودن هر مهره برابر است با $\frac{3}{6}$ بنابراین

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

داریم:

ب) احتمال این که حداقل یک مهره آبی باشد، متمم احتمال این است که هیچ کدام آبی نباشد:

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$$

احتمال این که هیچ کدام آبی نباشد:

$$۱ - \frac{16}{36} = \frac{5}{9}$$

احتمال حداقل یک مهره آبی:

پ) هر دو مهره هم رنگ باشند یعنی یا هر دو قرمز باشند و یا هر دو آبی باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{احتمال قرمز بودن هر دو مهره} \\ \text{احتمال آبی بودن هر دو مهره} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} \\ \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{احتمال هم رنگ} \\ \text{بودن هر دو مهره} \end{array} : \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$$

الف) با توجه به این که پیشامدهای پاسخ دادن به هر سؤال مستقل از سؤال‌های دیگر است، داریم:

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{5^{10}}$$

ب) برای پنج سؤال اول که پاسخ صحیح داده باشد، داریم: $\left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{5^5}$

و برای پنج سؤال دوم داریم: $\left(\frac{4}{5}\right)^5$

$$\frac{1}{5^5} \times \frac{4^5}{5^5} = \frac{4^5}{5^{10}} = \frac{(2^2)^5}{5^{10}} = \frac{2^{10}}{5^{10}} = (0.4)^{10}$$

پ) در این جا انتخاب پنج سؤال از بین ده سؤال را داریم و با توجه به قسمت ب داریم:

$$n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72, A = \{(r, r, r)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{72}$$

روش اول: ۱۵

روش دوم: اگر A را پیشامد رو آمدن سکه و B را پیشامد ۶ آمدن دو تاس در نظر بگیریم این دو پیشامد از هم مستقل هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{72} \\ P(B) = \frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{72} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{2592}$$

$$\begin{cases} A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{10} \\ B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} \neq \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \\ P(A \cap B) = \{6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

A و B مستقل نیستند.

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$$

$$B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}, (A \cap B) = \{(3, 2), (3, 4)\}$$

$$\begin{cases} P(A) = \frac{10}{36} \\ P(B) = \frac{6}{36} \Rightarrow \frac{10}{36} \times \frac{6}{36} \neq \frac{2}{36} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \\ P(A \cap B) = \frac{2}{36} \end{cases}$$

A* و B مستقل نیستند.

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$$

$$P(B \cap A') = P(A - B) = P(B) - P(B \cap A) \xrightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B}$$

$$P(B) - P(A) \times P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P(A')$$

(ب) راه حل اول:

$$P(A' \cap B') = P(A' - B) = P(A') - P(A' \cap B) \xrightarrow{\text{با توجه به قسمت الف}}$$

$$P(A') - P(A') \times P(B) = P(A')(1 - P(B)) = P(A') \times P(B')$$

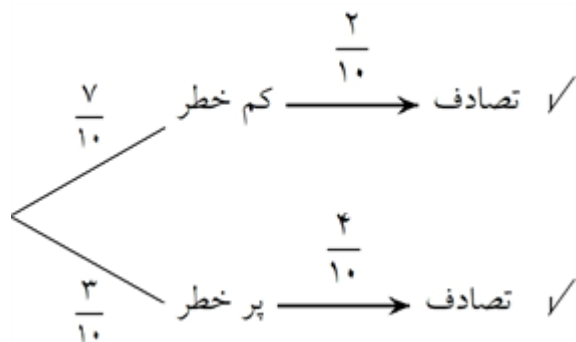
راه حل دوم: بدون استفاده از قسمت الف

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= \underbrace{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}_{P(A')} \xrightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B}$$

$$1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(A') - P(B)(1 - P(A)) = P(A') - P(B) \times P(A')$$

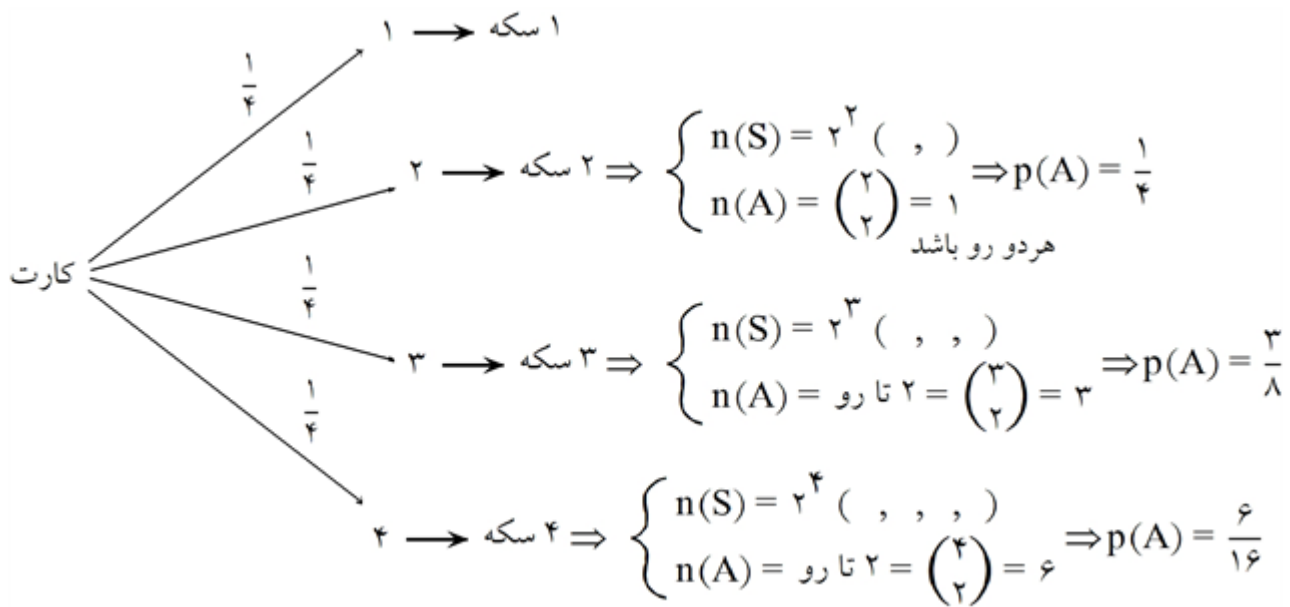
$$= P(A')(1 - P(B)) = P(A') \times P(B')$$



$$\text{الف)} \quad \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{26}{100} = 0.26$$

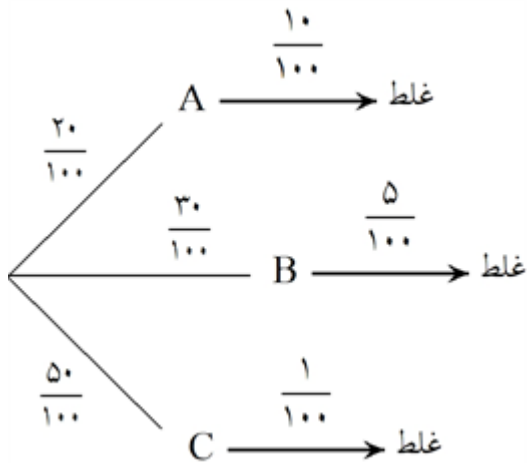
$$\text{ب)} \quad p(\text{تصادف} | \text{پرخطر}) = \frac{p(\text{تصادف} \cap \text{پرخطر})}{p(\text{تصادف})} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{4}{10}}{\frac{26}{100}} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$





۲۰

$$p(\text{بیاید ۳} | \text{تا رو ۲}) = \frac{p(\text{بیاید ۳} \cap \text{تا رو ۲})}{p(\text{تا رو ۲})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{2}{8}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{16}} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{6}{16}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$



۲۱

$$p(A | \text{غلط}) = \frac{P(A \cap \text{غلط})}{p(\text{غلط})} = \frac{\frac{20}{100} \times \frac{10}{100}}{\frac{20}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{1}{100}} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$





۲۲

تعداد حالاتی که امیر بلندتر از بابک است

$$\rightarrow \binom{10}{2} \times 8! \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{جایگشت بقیه} \end{array}$$

الف)

امیر بلندترین باشد

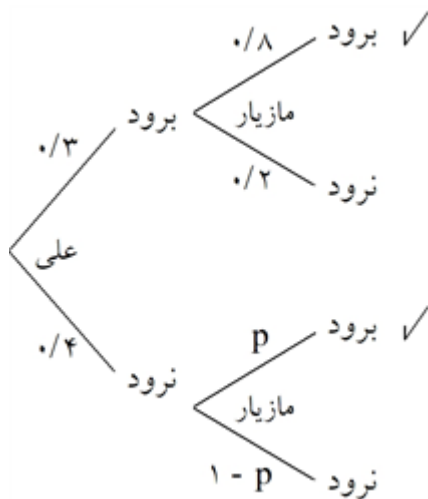
$$\rightarrow 1 \times 9! \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{جایگشت بقیه} \\ \text{۱۰ نفر} \end{array}$$

$$p = \frac{9!}{10 \times 9!} = \frac{1}{10}$$

ب) $n(S) = \binom{10}{2} \times 8!$

$$n(B) = 1 \times \binom{8}{1} \times 8! \rightarrow p(B) = \frac{\binom{8}{1} \times 8!}{\binom{10}{2} \times 8!} = \frac{8}{45}$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{امیر نهم} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{بابک} \end{array}$



۲۳

$$p(\text{مازیار برود}) = 0.4 \Rightarrow 0.3 \times 0.8 + 0.4 \times p = 0.4 \Rightarrow 0.4p = 0.12 \Rightarrow p = 0.3 \Rightarrow 1 - p = 0.7$$

می‌دانیم: $p(B_i|A) = \frac{p(B_i \cap A)}{p(A)}$ (I)

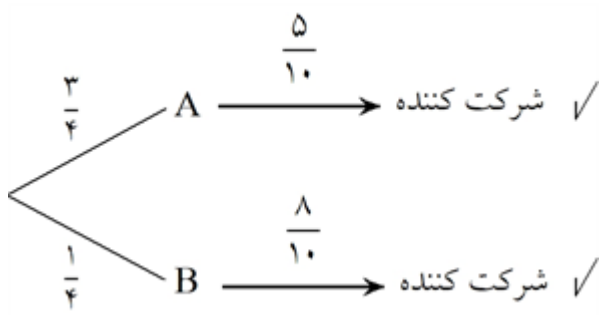
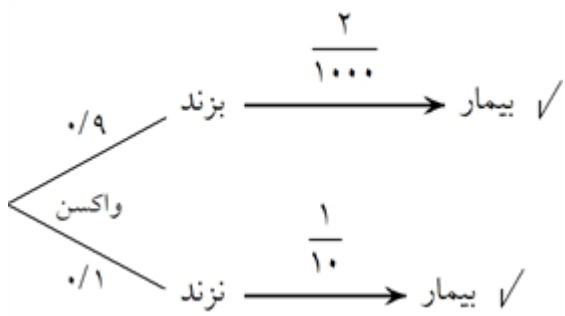
از طرفی: $p(A|B_i) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(B_i)} \Rightarrow p(B_i \cap A) = p(B_i) \times p(A|B_i)$ (II)

$$I, II \rightarrow p(B_i|A) = \frac{p(B_i) \times p(A|B_i)}{p(A)}$$

۲۴



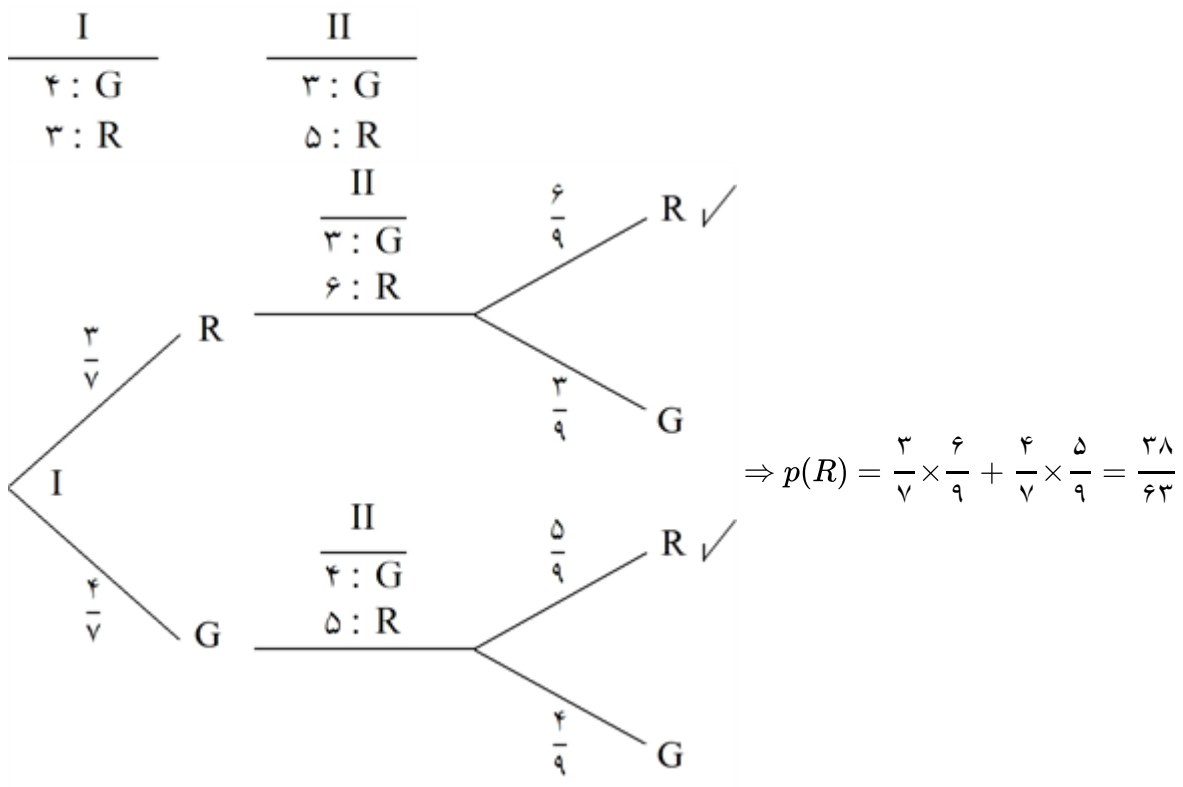
$$\Rightarrow p(\text{بیمار}) = \frac{9}{20} \times \frac{2}{1000} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{118}{10000} = 0.0118$$



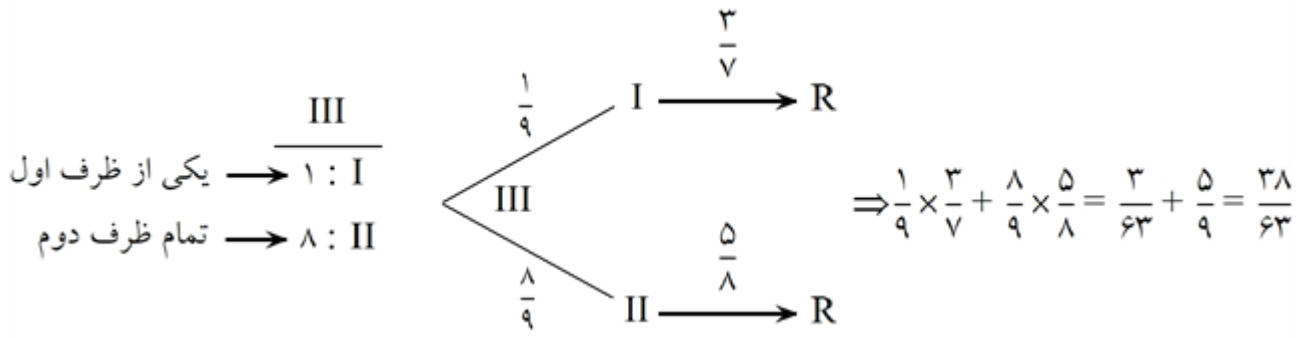
$$p(A|\text{شرکت کننده}) = \frac{p(A \cap \text{شرکت کننده})}{p(\text{شرکت کننده})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10}}{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10}} = \frac{15}{23}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = 0.034$$



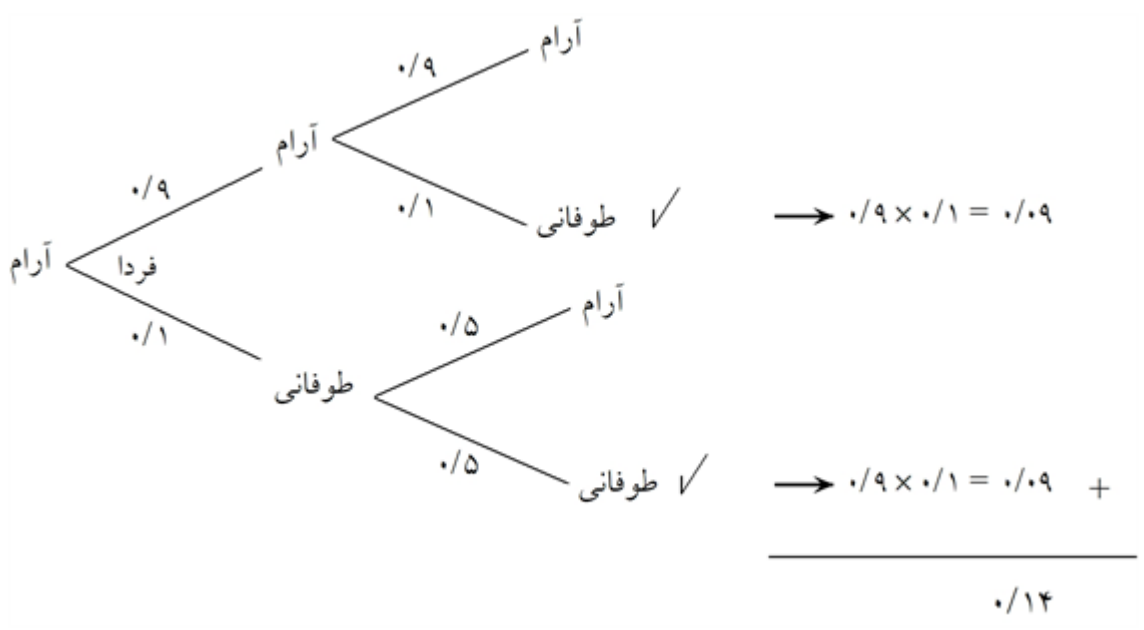


روش دوم:



$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$



$$n(S) = 2^4 (, , ,) \xrightarrow[\text{حداقل یکی پسر}]{\text{کاهش}} n(S_1) = 16 - 1 = 15$$

↓
ممگی دختر باشند

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6 \rightarrow p(A|S_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

الف) $P(k) = (2k - 1)$

$$\Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1$$

$$\Rightarrow 25x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow p(1) = \frac{1}{25}, p(2) = \frac{3}{25}, p(3) = \frac{5}{25}, p(4) = \frac{7}{25}, p(5) = \frac{9}{25}$$

ب) $\begin{cases} p(1) + p(3) + p(4) = \frac{1+5+7}{25} = \frac{13}{25} \\ p(2) + p(5) = \frac{3+9}{25} = \frac{12}{25} \end{cases}$ پس اولی بیشتر است.

$$p(x) = k$$

$$p(y) = k + \frac{1}{4}$$

$$+ p(z) = k + \frac{2}{4}$$

$$\underbrace{p(x) + p(y) + p(z)}_1 = 3k + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 3k = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1}{12} \\ p(y) = \frac{4}{12} \\ p(z) = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(\text{پشت}) = 2x \\ p(\text{رو}) = x \end{cases}$$

$$\text{می دانیم: } p(\text{پشت}) + p(\text{رو}) = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow p(\text{پشت}) = \frac{2}{3}$$

۳۱

۳۲

۳۳

۳۴



$$n(S) = 100$$

هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳: مضرب ۶

$$\begin{aligned} n(2 \cup 3) &= n(2) + n(3) - \overbrace{n(2 \cap 3)}^{\text{مضرب ۶}} \\ \text{الف)} \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{مضرب ۲ یا ۳} \quad \left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{3} \right] - \left[\frac{100}{6} \right] &= 67 \Rightarrow p = \frac{67}{100} \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad n(2 \cap \bar{3}) = n(2 - 3) = n(2) - \overbrace{n(2 \cap 3)}^{\text{مضرب ۶}} = \left[\frac{100}{2} \right] - \left[\frac{100}{6} \right] = 34 \Rightarrow p = \frac{34}{100}$$

$$\text{ج)} \quad n(\bar{2} \cap \bar{3}) = n((2 \cup 3)') = n(S) - n(2 \cup 3) = 100 - 67 = 33 \Rightarrow p = \frac{33}{100}$$

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left[\frac{n}{k} \right]$.

$$\text{الف)} \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$$

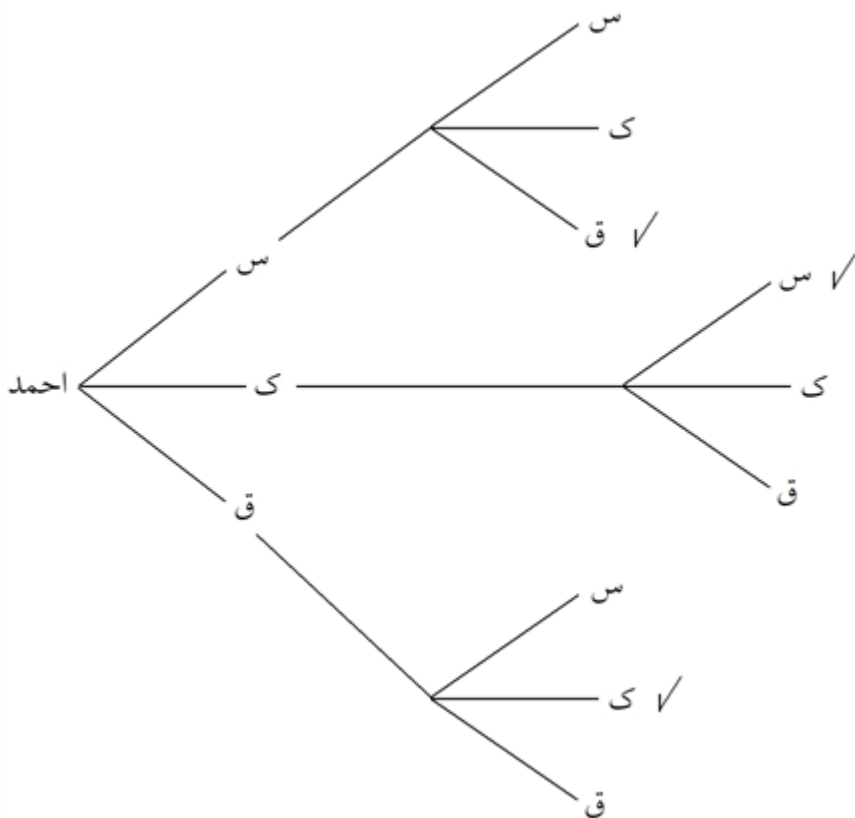
$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$$

$$\text{ب)} \quad B \subseteq A \Rightarrow B \leq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

$$\begin{aligned} &\{ \text{صاف یا نیمه ابری یا ابری} \} \times \{ \text{باد نمی وزد یا باد می وزد} \} \times \{ \text{مرطوب یا خشک} \} \times \{ \text{گرم یا سرد} \} \\ &\times \{ \text{بارندگی رخ نداده یا بارندگی رخ داده} \} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48 \end{aligned}$$

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 14\} \text{ به ترتیب قد}$$

$$A = \{14\} \text{ بلندقدترین} \rightarrow p(A) = \frac{1}{14}$$



۳۹

می‌دانیم اگر B_3, B_2, B_1 افرازهای فضای نمونه باشند طبق قانون کلی احتمال داریم:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

$$\Rightarrow P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

۴۱ اگر اولی سیاه باشد، در جعبه ۳ سفید و ۱ سیاه می‌ماند، پس احتمال اینکه دومی سیاه باشد برابر $\frac{1}{4}$ است.

$$P(b_2|b_1) = \frac{1}{4}$$

↑
اولی سیاه
↓
دومی سیاه باشد.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \Leftarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ می‌دانیم:}$$

$$\text{حل: } P(w_1 \cap w_2) + P(b_1 \cap b_2) = P(b_1) \times P(b_2|b_1) + P(w_1) \times P(w_2|w_1)$$

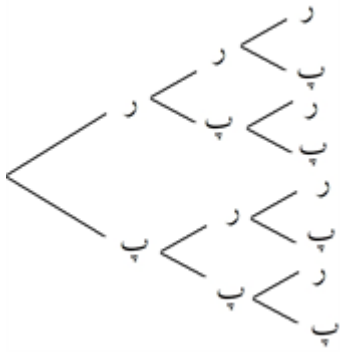
$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

۴۲



می‌دانیم فضای نمونه ۳ بار پرتاب سکه شامل 2^3 تایی مرتب است:

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), \dots, (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(S) = 8$$



$$A = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(ر, ر, پ), (ر, پ, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{(پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (ر, پ, پ)\} \Rightarrow n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{(ر, ر, پ)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \text{ مستقل } B, A$$

$$B \cap C = \{(ر, پ, پ), (پ, ر, پ)\} \Rightarrow n(B \cap C) = 2 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(B) \cdot P(C)$$

پس C, B مستقل نیستند.

توجه: دو پیشامد B, A را مستقل گوییم اگر و فقط اگر: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$P(A \cup B) \geq \dots : P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq \dots : P(A) + P(B) \geq P(A \cap B)$$

$$n = 2 : P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

$$n = k : P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$$

$$n = K + 1 : P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) \leq P(A_1) + \dots + P(A_{k+1})$$

$$\text{اثبات } P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(B \cap A_{k+1}) \leq P(B) + P(A_{k+1})$$

$$\text{از طرفی } P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{k+1})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 - (\text{هیچ کدام گل نشود}) \Rightarrow 1 - P(A') \times P(B') \Rightarrow 1 - \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} = 1 - \frac{10}{100} = 9/10$$



گزینه ۴۶؟ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{فرد بودن} & \rightarrow \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{12} \\ \text{زوج بودن} & \rightarrow \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{24} + \frac{6}{12} = \frac{7}{24}$$

گزینه ۴۷؟ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} & \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \rightarrow \text{پ} \Rightarrow P(\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}, \text{پ}) = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & \rightarrow \text{ن} \rightarrow \text{ن} \rightarrow \text{ن} \rightarrow \text{ن} \Rightarrow P(\text{ن}, \text{ن}, \text{ن}, \text{ن}) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{16}$$

گزینه ۴۸؟ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{0}{6} & \rightarrow \text{گل بشود} \rightarrow \begin{cases} \frac{0}{8} \rightarrow \text{گل بشود} \\ \frac{0}{2} \rightarrow \text{گل نشود} \end{cases} \\ \frac{0}{4} & \rightarrow \text{گل نشود} \rightarrow \begin{cases} \frac{0}{3} \rightarrow \text{گل بشود} \\ \frac{0}{7} \rightarrow \text{گل نشود} \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\frac{0}{6} \times \frac{0}{2}) + (\frac{0}{4} \times \frac{0}{3}) = \frac{0}{24}$$

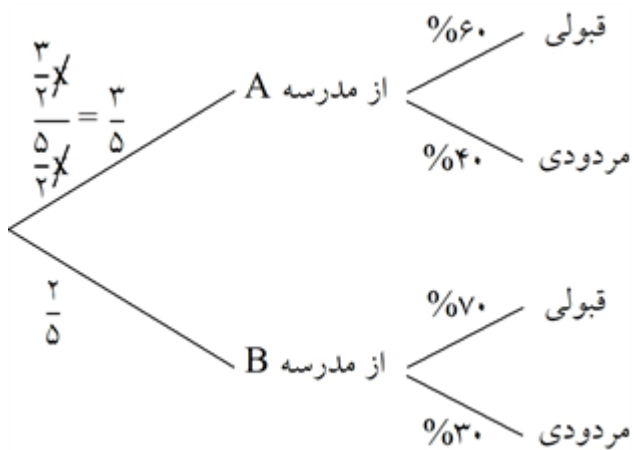
گزینه ۴۹؟ پاسخ صحیح است.

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 5) \\ (2, 4)(2, 5)(2, 6) \\ (3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6) \\ (4, 2)(4, 3)(4, 5) \\ (5, 1)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6) \\ (6, 2)(6, 3)(6, 5) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

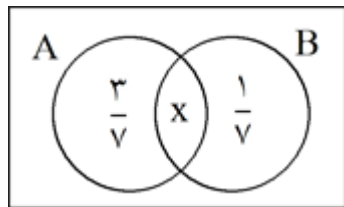
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۰

$$\frac{3}{2}x + x = \frac{5}{2}x$$



$$P(A|\text{قبولی}) = \frac{P(A \cap \text{قبولی})}{P(\text{قبولی})} = \frac{\frac{3}{5} \times 0.6}{\frac{3}{5} \times 0.6 + \frac{2}{5} \times 0.7} = \frac{0.36}{0.36 + 0.28} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۱



$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{x + \frac{3}{5}}{x + \frac{1}{5}}$$

$$\frac{3}{5} + x + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{5}$$

تابع هموگرافیک نزولی است $\Rightarrow ad - bc = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} < 0$

$$\text{Min} \left(\frac{P(A)}{P(B)} \right) = \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۲

$$P(1) = x, P(2) = 2x, P(3) = 3x, P(4) = 4x$$

$$\text{جمع احتمالات} = 1 \Rightarrow x + 2x + 3x + 4x = 1 \Rightarrow 10x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{احتمال یک بار رو آمدن} &= \frac{1}{10} \Rightarrow \text{احتمال انتخاب کارت ۱} \\ \text{کارت ۲} &= \frac{2}{10} \Rightarrow \text{احتمال یک بار رو آمدن} \\ \text{کارت ۳} &= \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{3}{8} \\ \text{کارت ۴} &= \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{4}{16} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{16}}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{16}} = \frac{4}{29}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۳

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 A \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \begin{array}{l} A \rightarrow \frac{5}{16} \\ B \rightarrow \frac{9}{16} \end{array} \\
 B \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \begin{array}{l} A \rightarrow \frac{9}{16} \\ B \rightarrow \frac{7}{16} \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \right)$$

$$\frac{28}{64} = \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{16}}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{9}{16} \right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{16} \right)} = \frac{\frac{10}{48}}{\frac{9+14}{48}} = \frac{10}{23}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۴

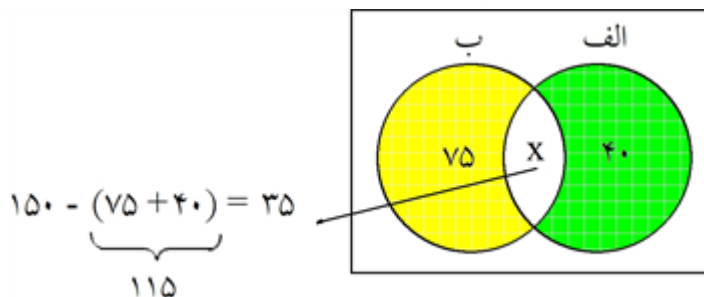
$$n(s) = \binom{5}{3} \times 3! = 60, A = \underbrace{\{132, 312, 432\}}_2, \underbrace{\{242, 234, 324\}}_4, \underbrace{\{354, 534\}}_2 \Rightarrow n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{8}{60} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{15}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۵

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{40 + x}{75 + x} = \frac{40 + 35}{75 + 35} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$$

Max



باید اشتراک حداکثر شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۶

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{بررسی رقیب اصلی: } A \\ \text{قهرمانی: } B \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{5} \\ P(B) = \frac{1}{3} \\ P(B|A) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{6 + 10 - 3}{30} = \frac{13}{30}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۷

$$P = \frac{16}{45} \times \frac{4}{16} + \frac{15}{45} \times \frac{6}{15} + \frac{14}{45} \times \frac{5}{14} = \frac{4 + 6 + 5}{45} = \frac{1}{3}$$

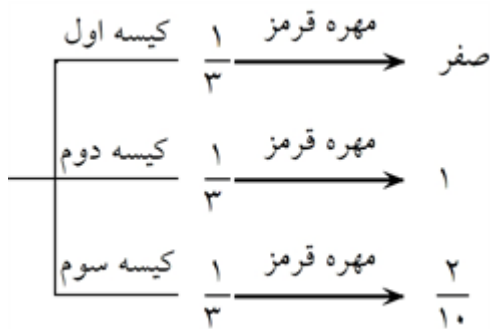
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۸

$$P(\text{عدد سوم} = 10) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{15} \Rightarrow n = 15$$

$10 = \text{تعداد مضارب غیر } 3 \Rightarrow 5 = \text{تعداد} \Rightarrow \{3, 6, 9, 12, 15\} = \text{مضارب } 3 \Rightarrow 1, 2, 3, \dots, 15$ اعداد

$$P = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار درختی را برای این مسئله رسم می‌کنیم: ۵۹



$$P(\text{مهره قرمز | کیسه دوم}) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \left(0 + 1 + \frac{2}{10} \right)} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

طبق قانون بیز داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فضای نمونه پرتاب دو تاس دارای $n(S) = 36$ حالت است. ۶۰

شرط وجود دو ریشه حقیقی و متمایز برای معادله $x^2 - mx + n = 0$ آن است که:

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(1)(n) > 0 \Rightarrow m^2 > 4n$$

از طرفی چون ترتیبی برای m و n قائل نشده است پس هر جفت می‌تواند هم ابتدای جای m بعد n و برعکس باشد و تنها

زوج‌هایی که نمی‌توانند ناتساوی را برقرار کنند، $(1, 1)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 3)$ و $(4, 4)$ هستند. پس:

$$n(A) = 32$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو پیشامد A و B ناسازگار هستند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ پس: ۶۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{10} = 0.7$$

طبق رابطه احتمال شرطی داریم:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۲

$$\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12} + d\right) + \left(\frac{1}{12} + 2d\right) + \left(\frac{1}{12} + 3d\right) = 1 \Rightarrow 6d = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow P_{\max} = \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{9} \Rightarrow P_{\max} = \frac{5}{12}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون دو کارت با جایگذاری انتخاب می‌شوند پس تأثیری بر روی هم ندارند. از این رو اگر یکی ۴ باشد، احتمال اینکه دیگری زوج شود برابر $\frac{2}{5}$ است. ۶۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به هدف زدن علی و حسن دو پیشامد مستقل است. یعنی: ۶۴

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/6 \times 0/4 = 0/24$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 + 0/4 - 0/24 = 0/76$$

سؤال از ما حاصل $P(A|A \cup B)$ را خواسته است. پس داریم:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0/6}{0/76} = \frac{15}{19}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۵

مسئله زمانی حل می‌شود که حداقل یکی آن را حل کند، پس می‌توان از متمم کمک گرفت یعنی هیچکس حل نکند.

$$P(1 \cup 2 \cup 3) = 1 - \overbrace{P(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3})}^{\text{مستقل}} = 1 - \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}\right) = 0/7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فضای نمونه پرتاب دو تاس: ۶۶

$$n(S) = 6^2 (-, -)$$

$$A = \{(3, 4)(4, 3)(6, 1)(1, 6)\} \rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۷

$$P(A) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(x) + P(y) = \frac{1}{7}$$

$$P(B) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(B') = \frac{3}{5} \Rightarrow P(W) = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = \underbrace{P(x) + P(y)}_{\frac{1}{7}} + \underbrace{P(w)}_{\frac{2}{5}} = \frac{1}{7} + \frac{2}{5} = \frac{19}{35}$$



$$A: ۱۶ \Rightarrow P(A) = \frac{1}{16} \Rightarrow A \subseteq B$$

$$B: \text{پیشامد شماره گوی دوم از اول کمتر} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

روش دوم:

$$n(S) = 16 \times 15 \times \frac{1}{2}$$

تعداد حالت مهره اول
تعداد حالت مهره دوم
نصف حالتها اولی از دومی بزرگتر است

$$\Rightarrow P(A) = \frac{15}{16 \times 15} = \frac{1}{16}$$

$$n(A) = 1 \times 15$$

اولی ۱۶ بیاید
تعداد حالت دومی

$$P(x), P(y), P(z) \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \frac{1}{5r}, \frac{1}{5}, \frac{r}{5}$$

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5r} + \frac{1}{5} + \frac{r}{5} \Rightarrow 1 + r + r^2 = 5r$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{r < 1} r = 2 - \sqrt{3}$$

$$P(z) = \frac{r}{5} = \frac{2 - \sqrt{3}}{5}$$

$$n(S) = 6 \times 11 + 6 \times 6 = 102$$

کارت اول زوج
کارت اول فرد

به ازای هریک از اعداد رو شدهی زوج در کارت اول، اعداد ۴، ۸ و ۱۲ برای کارت دوم قابل قبول است ولی حالت‌های ۴۴ و ۸۸ و ۱۲۱۲ امکان‌پذیر نیست.

به ازای هریک از اعداد رو شدهی فرد در کارت اول، اعداد ۲ و ۶ در کارت دوم قابل قبول است، بنابراین تعداد اعضای پیشامد

$$n(A) = (6 \times 3) - 3 + (2 \times 6) = 27$$

تصادفی برابر است با:

$$P(A) = \frac{27}{102} = \frac{9}{34}$$

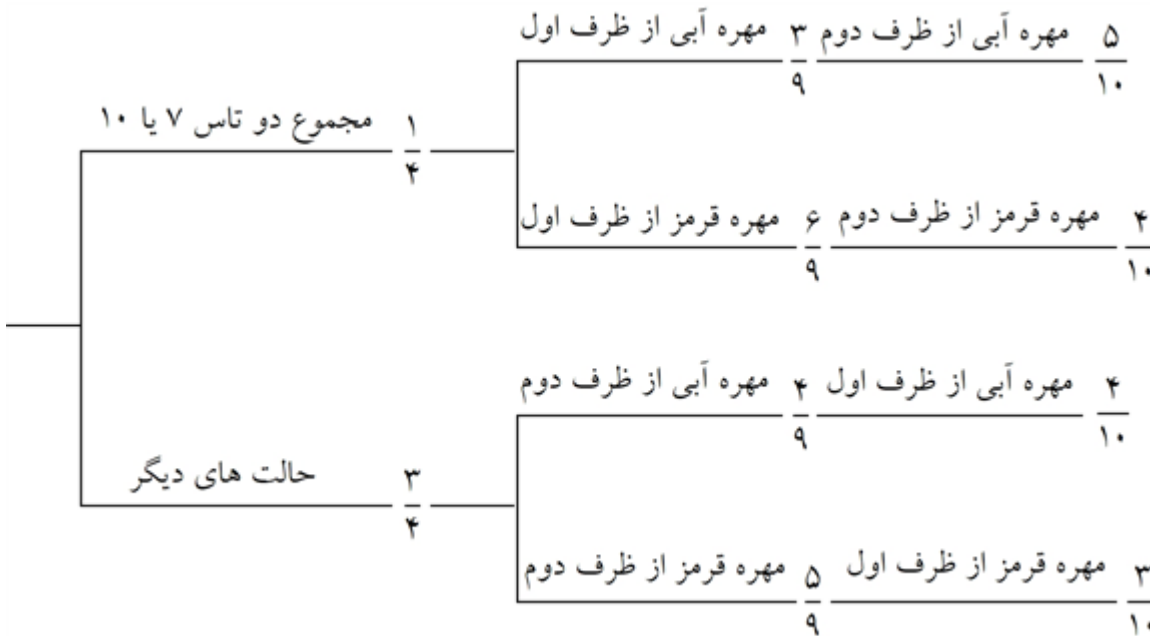
بنابراین احتمال برابر است با:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۷ یا ۱۰ می‌شود، عبارت‌اند از:

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (4, 6), (5, 2), (5, 5), (6, 1), (6, 4)\}$$

بنابراین احتمال آمدن مجموع برابر ۷ یا ۱۰، برابر $\frac{9}{36}$ یا $\frac{1}{4}$ است.



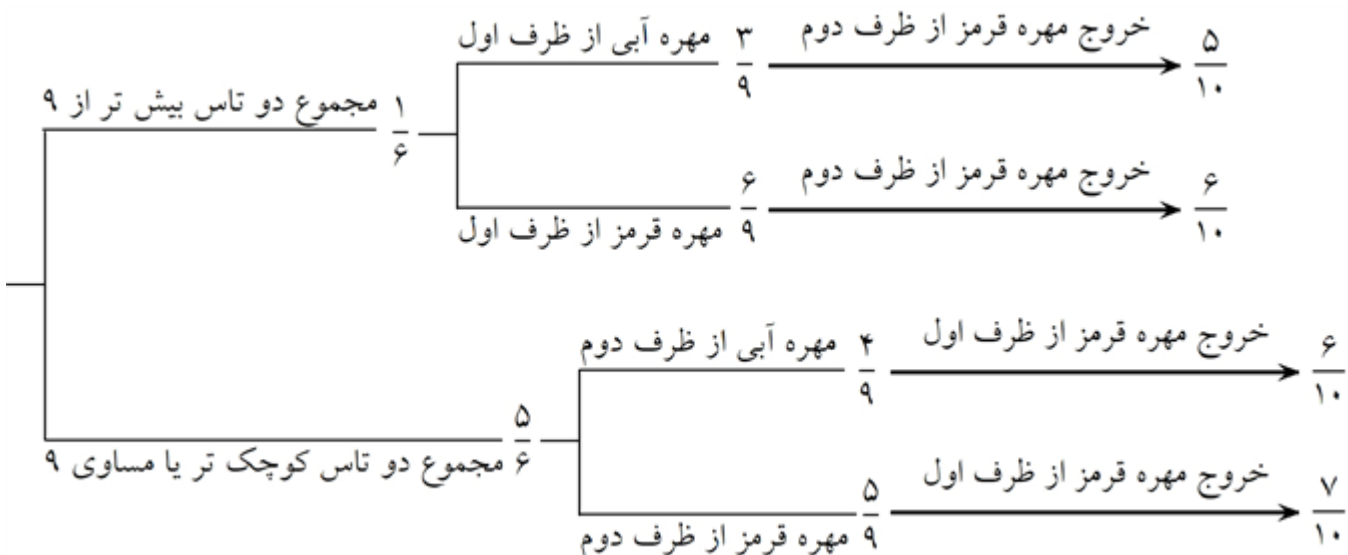
طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{10} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{39}{90} + \frac{3}{4} \times \frac{31}{90} = \frac{132}{360} = \frac{11}{30}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پیشامد آن که مجموع دو تاس عددی بیش‌تر از ۹ باشد، به صورت مجموعه‌ی زیر است:

$$\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

یعنی احتمال این پیشامد برابر $\frac{1}{6}$ و در نتیجه متمم آن برابر $\frac{5}{6}$ است. طبق نمودار درختی داریم:



بنابراین طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{1}{6} \left(\frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{6}{10} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{4}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{7}{10} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{51}{90} + \frac{5}{6} \times \frac{59}{90} = \frac{346}{540} = \frac{173}{270}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق جدول ارزش گزاره‌ها برای سه گزاره‌ی p ، q و r داریم:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، در ردیف‌های ۲، ۴ و ۶، ارزش گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است. در بین این سه ردیف، تنها در ردیف ۴، ارزش گزاره‌ی q نادرست است، پس احتمال موردنظر برابر $\frac{1}{3}$ است.

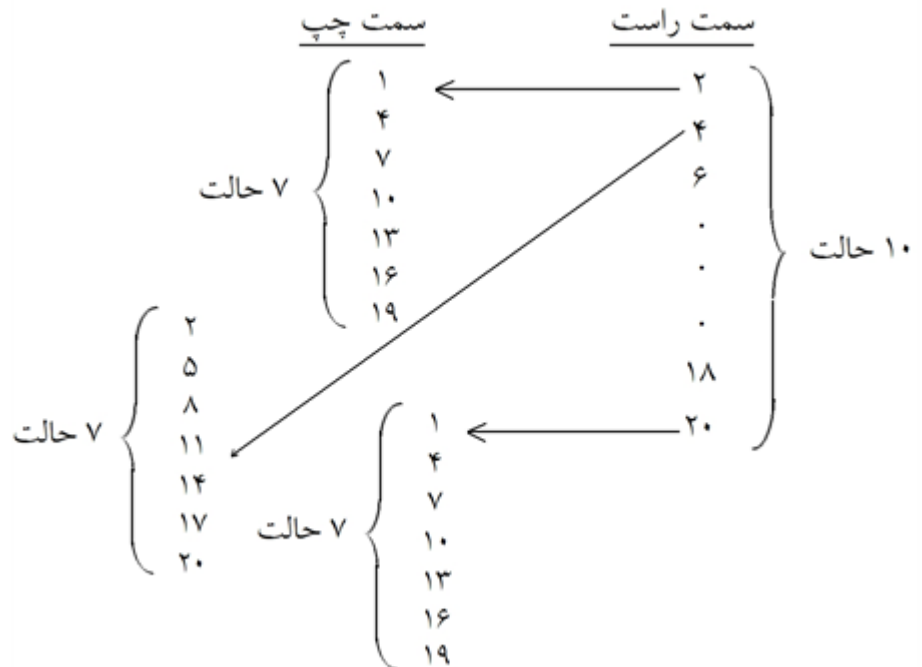


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در حالت کلی $20 \times 21 = 420$ حالت داریم که تعداد ۱۹ تا از آنها تکراری است:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} \right\} \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} / \left\{ \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n(S) = 420 - 19 = 401$$

حال اگر بخواهد مضرب ۶ باشد، باید زوج و مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد. پس ابتدا در سمت راست اعداد زوج را قرار می‌دهیم سپس در سمت چپ اعدادی که مجموع ارقام مضرب ۳ می‌شود را قرار می‌دهیم:



برای هر عدد سمت راست ۷ حالت در سمت چپ داریم.

یعنی ۷۰ حالت از طرفی اعداد ۲۱۶ و ۱۱۴ تکراری است و اعداد ۶۶ و ۱۲۱۲ و ۱۸۱۸ نشدنی است، یعنی ۶۵ حالت.

۱۲	۲۴	۳۶	۱۸	۲۱۰	۳۱۲
۴۲	۵۴	نشدنی	۴۸	۵۱۰	۶۱۲
۷۲	۸۴	۹۶	۷۸	۸۱۰	۹۱۲
۱۰۲	<u>۱۱۴</u>	۱۲۶	۱۰۸	۱۱۱۰	نشدنی
۱۳۲	۱۴۴	۱۵۶	۱۳۸	۱۴۱۰	۱۵۱۲
۱۶۲	۱۷۴	۱۸۶	۱۶۸	۱۷۱۰	۱۸۱۲
۱۹۲	۲۰۴	<u>۲۱۶</u>	۱۹۸	۲۰۱۰	۲۱۱۲
<u>۱۱۴</u>	<u>۲۱۶</u>	۳۱۸	۱۲۰		
۴۱۴	۵۱۶	۶۱۸	۴۲۰		
۷۱۴	۸۱۶	۹۱۸	۷۲۰		
۱۰۱۴	۱۱۱۶	۱۲۱۸	۱۰۲۰		
۱۳۱۴	۱۴۱۶	۱۵۱۸	۱۳۲۰		
۱۶۱۴	۱۷۱۶	نشدنی	۱۶۲۰		
۱۹۱۴	۲۰۱۶	۲۱۱۸	۱۹۲۰		



$$\Rightarrow P(A) = \frac{65}{100}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. همان طور که در جدول مشاهده می شود، در ۷ ردیف ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است که در ردیف‌های ۲، ۶ و ۸ یعنی ۳ ردیف آن، ارزش گزاره‌ی r نادرست است.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

پس:
$$\begin{cases} n(S) = 7 \\ n(A) = 3 \end{cases} \rightarrow P(A) = \frac{3}{7}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
$$\text{نر اول} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{6}{10} = \text{نر دوم به شرط نر اول} \Rightarrow \frac{6}{10} = \text{نر دوم به شرط نر اول} \times \text{نر اول}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از احتمال متمم استفاده می کنیم، یعنی در هر ۳ بار اصلاً ۶ نیاید:

$$p(A) = 1 - p(\bar{I} \cap \bar{II} \cap \bar{III}) \stackrel{\text{مستقل}}{=} 1 - [p(\bar{I}) \times p(\bar{II}) \times p(\bar{III})] = 1 - \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \right) = \frac{91}{216}$$

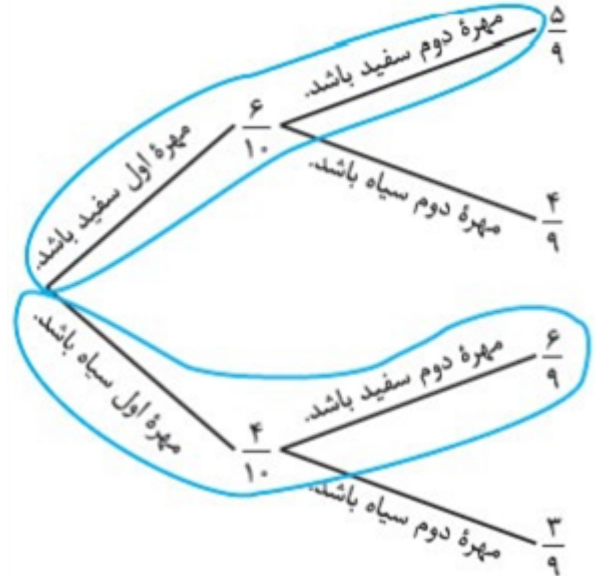
بار اول نیاید
بار سوم نیاید
بار دوم نیاید



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مهره دوم می‌تواند هر یک از ده مهره داخل جعبه باشد. یعنی می‌تواند هر یک از ده مهره باشد ولی ما می‌خواهیم یکی از شش مهره سفید باشد. بنابراین:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{10}$$

توجه کنید که چون رنگ مهره اول را نمی‌دانیم، این‌که این مهره چه رنگی باشد، در نهایت تأثیری در احتمال سفید بودن مهره دوم نمی‌گذارد. اما برای درک این نکته، سؤال را یک بار با توجه به رنگ مهره اول پاسخ می‌دهیم.



$$\Rightarrow P(\text{سفید بودن مهره دوم}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{54}{90} = 0.6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. احتمال شرکت کردن امید در مسابقه را با A و احتمال شرکت کردن بهروز در مسابقه را با B نشان می‌دهیم. داریم:

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.3, P(A|B) = 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.3} = 0.5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.6 - 0.15}{0.7} = \frac{0.45}{0.7} = \frac{9}{14}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{5}{18} \times \frac{7}{10} + \frac{7}{18} \times \frac{8}{10} + \frac{6}{18} \times \frac{9}{10} = \frac{29}{36}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P(A) = \frac{\frac{3}{100} \times \frac{55}{100}}{\left(\frac{3}{100} \times \frac{55}{100}\right) + \left(\frac{5}{100} \times \frac{45}{100}\right)} = \frac{11}{26}$$



$$\frac{\binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2}{1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2} = 1$$

$$\frac{a}{1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2} = a \Rightarrow a = 70$$

$$x + y = 11 \quad (5, 6), (6, 5) \quad \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

احتمال آمدن هر دو یکسان نیز $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$ است.

فرض کنید در مرحله ی n ام برای اولین بار مثل هم بیایند و در تمام مراحل قبلی جمع ۱۱ نباشد. یعنی در هر گام احتمال $\frac{28}{36}$ همان $\frac{7}{9}$ داریم در گام n ام $\frac{1}{6}$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \frac{7}{9}} \right) = \frac{3}{4}$$

ولی سؤال دقیقاً پیشامد متمم را می‌خواهد که می‌شود: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} x + y = 9 & \quad 5 \text{ حالت } (4, 5) / (5, 4) / (6, 3) / (7, 2) / (8, 1) \\ x + y = 10 & \quad 4 \text{ حالت } (5, 5) / (6, 4) / (7, 3) / (8, 2) \\ x + y = 11 & \quad 3 \text{ حالت } (6, 5) / (7, 4) / (8, 3) \\ x + y = 12 & \quad 2 \text{ حالت } x + y = 13 \quad 1 \text{ حالت} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$P(A) = \frac{5 + 4 + 3 + 2 + 1}{\binom{8}{1} \binom{5}{1}} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = P(\text{فقط یک رو}) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = P(\text{تاس زوج}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B, A \text{ از یکی}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۶

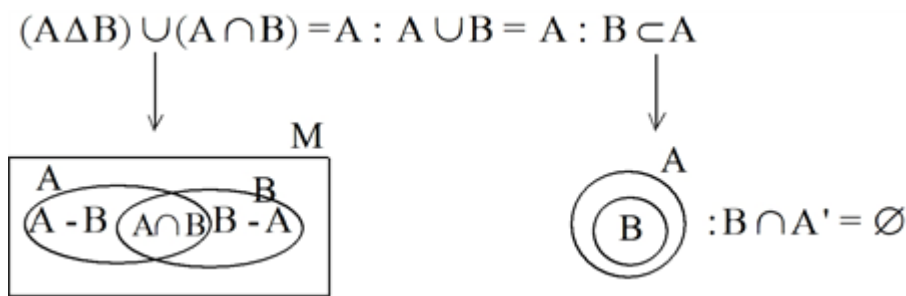
$$P(W' \cup B') = P(W') + P(B') - P(W' \cap B')$$

$$= \frac{\binom{7}{3} + \binom{8}{3} - \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{35 + 56 - 1}{220} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه در مسائل احتمال لااقل یکی داشتیم از متمم استفاده می‌کنیم. ۸۷

$$P(A') = \frac{16}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{4}{100} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۸



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۹

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} \xrightarrow{\text{حداقل یک آبی}} P(A') = 1 - P(A) = \frac{37}{42}$$

اصلاً آبی نیاید.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۰

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

$$n(A) = n(\text{فقط یک مهره سیاه}) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{35}$$

دو سفید و یک سیاه

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۱

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15$$

$$A = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 6\}\} \Rightarrow \text{مجموع مساوی } 3, 6, 9 \Rightarrow \text{مجموع دو مهره مضرب } 3$$

$$n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

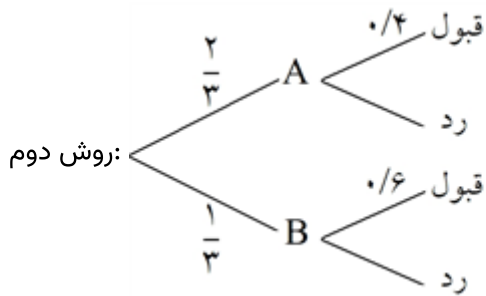


$$P(A|\text{قبولی}) = \frac{P(A \cap \text{قبولی})}{P(\text{قبولی})}$$

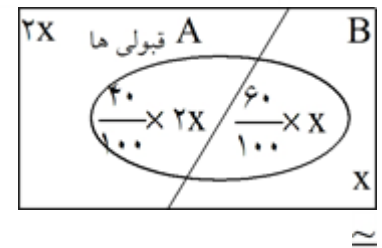
$$P(\text{قبولی}) = \frac{40}{100} \times \frac{2x}{3x} + \frac{60}{100} \times \frac{x}{3x} = \frac{140}{300}$$

$$P(A \cap \text{قبولی}) = \frac{2x \times \frac{40}{100}}{3x} = \frac{80}{300}$$

$$P(A \cap \text{قبولی}) = \frac{\frac{80}{300}}{\frac{140}{300}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$



$$P(\text{قبول}|A) = \frac{P(A, \text{قبول})}{P(\text{قبول})} = \frac{\frac{2}{3} \times 0.4}{\frac{2}{3} \times 0.4 + \frac{1}{3} \times 0.6} \approx 0.57$$



پاسخنامه کلیدی

۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴

۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴

