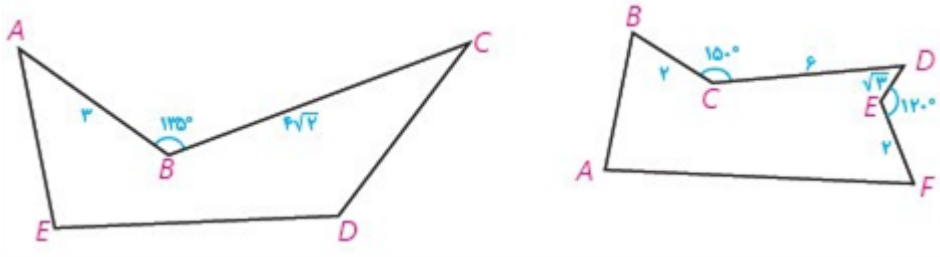
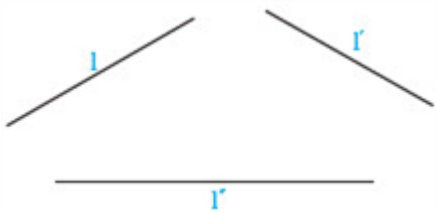
نام و نام خانوادگی :　　زمان آزمون :

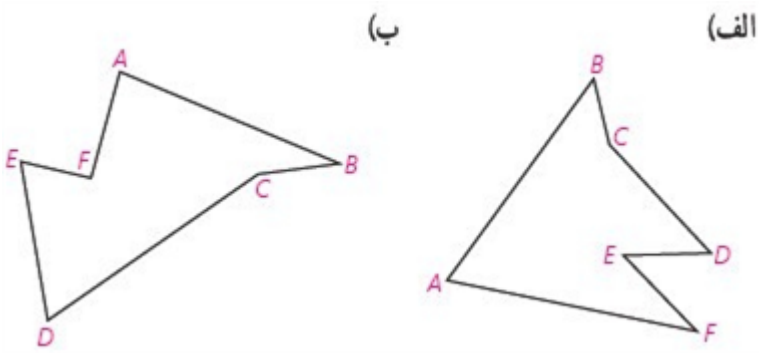
پایه تحصیلی :　　نام درس :

نام دبیر :　　نام آموزشگاه :

عنوان آزمون : هندسه ۱۱ فصل ۲　　تاریخ برگزاری

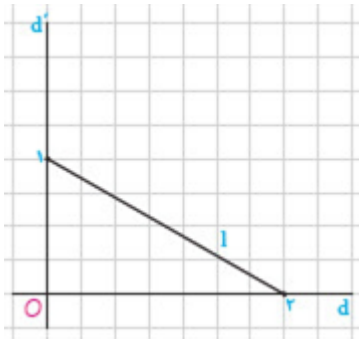
ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آن‌که محیط این زمین تغییر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۲	فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{۱}{۲}$ باشد. الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟ ب) مساحت مثلث A'B'C' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟ مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	
۳	سه خط دو به دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l'، و موازی l'' باشد.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)	

۴ دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۵ در شکل روبه‌رو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ تصویر کنیم و آن‌را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چه‌قدر است؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۶ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۷ دایره $C(O,R)$ و نقطه‌ی M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه‌ی M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k = ۲$

ب) $k = -۲$

پ) $k = \frac{۱}{۲}$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۸ در تجانسی با نسبت $k < ۰$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB درنظر بگیرید) نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۹ نقطه‌ی A' تصویر نقطه‌ی A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط OA' چه‌قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۰ نقطه‌ی A به فاصله‌ی $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه‌ی A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه‌ی A' می‌نامیم. نقطه‌ی A را حول نقطه‌ی A' به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی "A حاصل شود. طول پاره‌خط "AA را محاسبه کنید.

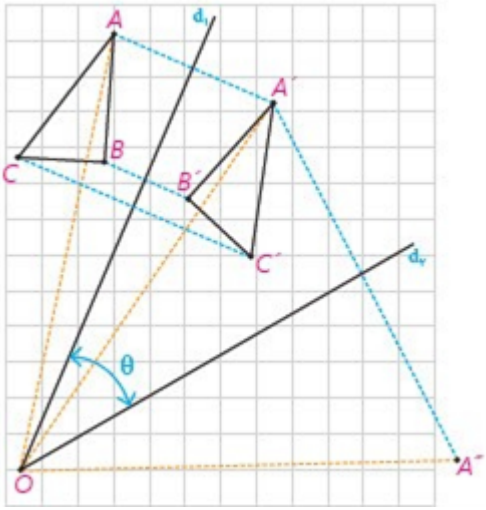
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۱ در شکل، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با زاویه‌ی θ یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به خط $d_۱$ است. بازتاب مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ را نسبت به خط $d_۲$ رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\triangle}{B}''C'''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = ۲\theta$

ب) اندازه‌ی $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چه‌قدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C'''$ را تصویر $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

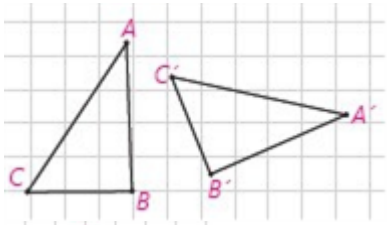


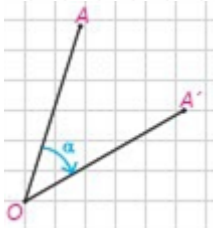
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۲ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شکل مقابل نقطه‌ی A' دوران یافته‌ی نقطه‌ی A در دوران به مرکز O و زاویه‌ی α است. نشان دهید عمودمنصف AA' از نقطه‌ی O می‌گذرد.

ب) اگر بدانیم $A'\overset{\triangle}{B}C$ دوران یافته‌ی $A\overset{\triangle}{B}C$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟

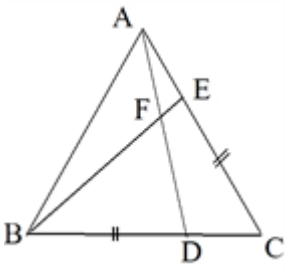
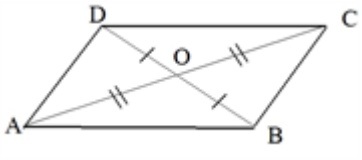
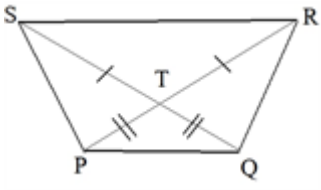
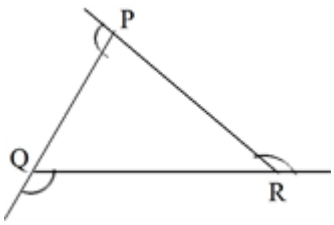




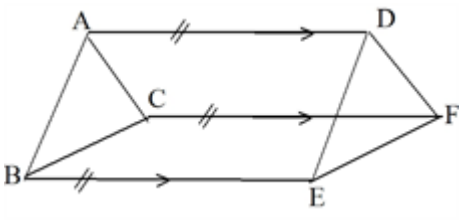
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۳ در حالتی‌که پاره‌خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر A'B' بازتاب AB باشد، AB و A'B' هم‌اندازه‌اند.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

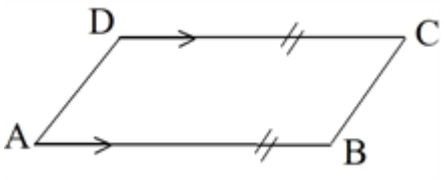
۱۴	مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. با استفاده از دوران ثابت کنید: $AD = BE$ و $\widehat{BFD} = ۶۰^\circ$  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۱۵	قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند. با استفاده از دوران ثابت کنید: ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۱۶	با استفاده از دوران ثابت کنید هر گاه دو خط یکدیگر را قطع کنند، زاویه‌های مقابل مساوی یکدیگرند. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۱۷	در شکل روبه‌رو PR و QS قطرها، $PT = QT$ و $RT = ST$ با استفاده از بازتاب ثابت کنید: $PQS \cong QPR$  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۱۸	با استفاده از بازتاب ثابت کنید: فاصله‌ی هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، تا دو سر آن به یک اندازه است. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	
۱۹	در مثلث دلخواه PQR، با استفاده از انتقال ثابت کنید: مجموع زاویه‌های خارجی ۳۶۰° است.  مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲	

۲۰ پاره‌خطهای AD، BE، CF مساوی و موازیند.
با استفاده از انتقال ثابت کنید: $ABC \cong DEF$.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۲۱ در چهارضلعی ABCD، $AB \parallel DC$ و $AB = DC$،
با استفاده از انتقال ثابت کنید: $AD \parallel BC$ و $AD = BC$

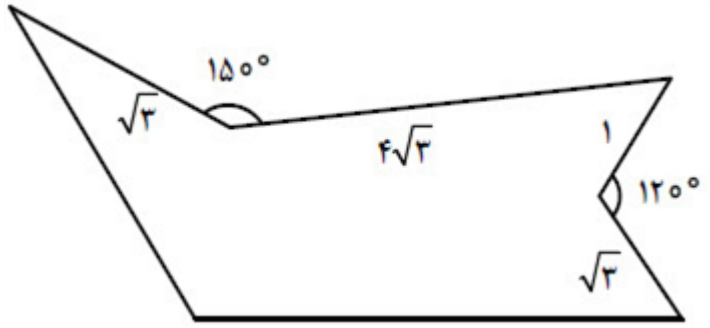


مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۲۲ مقدار a را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای ۸ و ۳ و خط المرکزین $d = ۱۳$، $۵a-۳$ باشد.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

۲۳ میزان افزایش مساحت شکل مقابل، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۷/۵ ۴) ۴/۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۴ در کدام تبدیل، همواره جهت شکل حفظ نمی‌شود؟

۱) بازتاب ۲) دوران ۳) انتقال ۴) تجانس

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۵ پاره‌خط AB به طول ۵ در یک طرف خط d قرار دارد. فاصله دوسر پاره‌خط AB از خط d به ترتیب ۱ و ۵ است. نقطه C طوری روی خط d انتخاب می‌شود که محیط مثلث ABC کمترین مقدار باشد، حداقل مجموع اندازه‌های دو ضلع AC و BC کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۷}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۶}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۶ در مربع ABCD، نقطه $(۶,۲)$ رأس C و عرض رأس‌های A و D به‌ترتیب ۲ و ۱- است. اگر بازتاب نقطه A نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات، چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳۴}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $۲\sqrt{۱۷}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۲۷ در بین مثلث‌هایی با مساحت ۳۰ واحد مربع که در ضلعی به اندازه ۱۵ واحد مشترک هستند، کمترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۲۸ در مربع ABCD، نقطه $(۳,۵)$ رأس B و طول رأس‌های C و D به‌ترتیب $۵/۵$ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور xها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $۲/۵$ ۲) $\sqrt{۶/۵}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۲۹ در مربع ABCD، نقطه $(۴,۱)$ رأس A و عرض رأس‌های C و D به‌ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطه C نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۷}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰ چهار نقطه‌ی $A(۱,۳)$، $B(۱۵,۹)$، $M(a,۰)$ و $N(a+۵,۰)$ در صفحه‌ی مختصات مفروض‌اند. کم‌ترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۱ مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار دارد، انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت اولیه باشد، اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

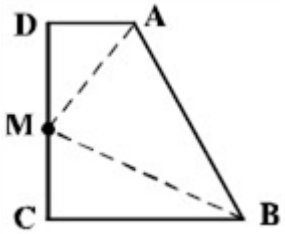
سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۳۲ در رسم بزرگ‌ترین مربع ممکن داخل مثلث ABC، به طوری‌که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد. از کدام تبدیل هندسی، استفاده می‌شود؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) بازتاب ۴) دوران

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳ در ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ی ABCD، اندازه‌های $CB = CD = ۶$ و $AD = ۲$ هستند، نقطه‌ی M روی ساق قائم CD متحرک است. کم‌ترین مقدار $MA + MB$، کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۱/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۴ نقطه‌ی A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هریک از این دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) دوران

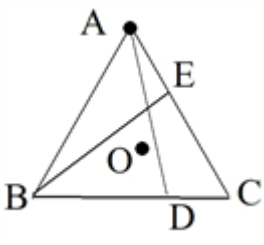
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۵ معادله‌ی تصویر خط $۲y + x = ۶$، تحت تجانس به مرکز $O'(۲, ۱)$ و نسبت تجانس $\frac{۳}{۲}$، کدام است؟

۱) $y + ۲x = ۲$ ۲) $۲y + x = ۷$ ۳) $۲y + x = ۹$ ۴) $۳y + x = ۹$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۶ نقطه‌ی O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $BD = CE$ ، کدام بیان نادرست است؟



۱) $OE = OD$ ۲) $OD \perp BE$ ۳) $E\hat{O}D = ۱۲۰^\circ$ ۴) $A\hat{O}C = ۱۲۰^\circ$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۷ دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB در صفحه آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱ در شکل راست اگر بازتاب C نسبت به خط BD و بازتاب E نسبت به DE و در شکل چپ اگر بازتاب B نسبت به خط AC را رسم کنیم بدون آنکه محیط تغییر کند، مساحت افزایش می‌یابد. منظور بازتاب مثلث BCD نسبت به BD و بازتاب مثلث EDF نسبت به DF و در شکل راست بازتاب مثلث ABC نسبت به AC در شکل چپ است.

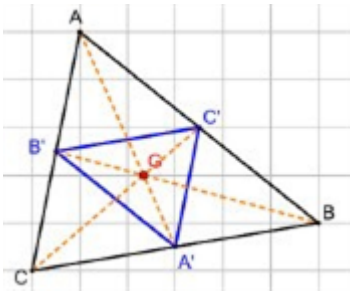
$$\text{افزایش مساحت شکل چپ} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴\sqrt{۲}\times \text{Sin}\,۱۳۵\right) = ۱۲$$

$$\text{افزایش مساحت شکل راست} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\times \text{Sin}\,۱۵۰ + \frac{۱}{۲}\times\sqrt{۳}\times ۲\times \text{Sin}\,۱۲۰\right) = ۹$$

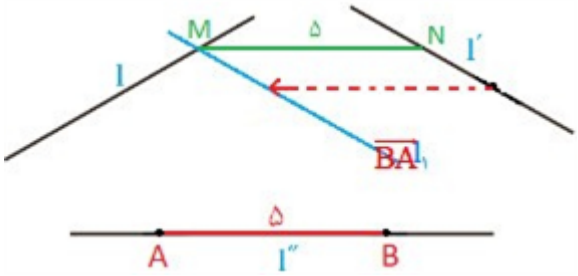
۲ الف) A' وسط BC، B' وسط AC و C' وسط AB قرار دارند.

با توجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{۱}{۲}GA$ هم‌چنین نقطه‌ی G بین A و A' پس نقطه‌ی A' مجانس نقطه‌ی A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است. همین مطلب در مورد نقاط B' و C' نیز صدق می‌کند.

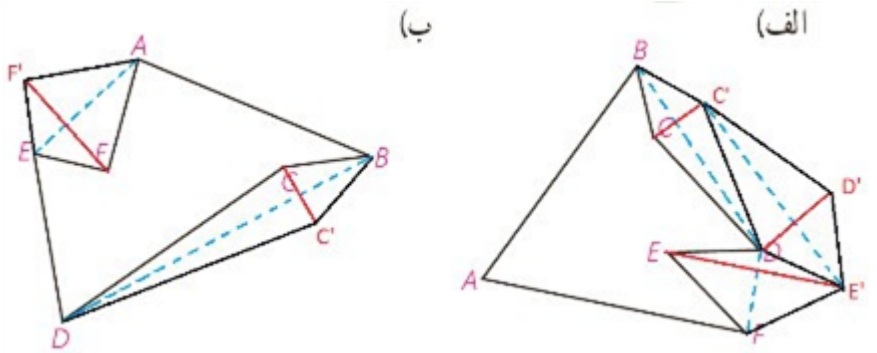
ب) با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است.



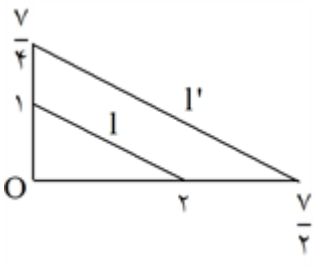
۳ ابتدا روی خط l'' پاره‌خط دلخواه AB به طول ۵ سانتی‌متر را مشخص می‌کنیم. خط l' را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می‌دهیم تا خط $l_۱$ به دست آید این خط l را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. از نقطه‌ی M موازی خط "l خطی رسم می‌کنیم تا خط 'l را در نقطه‌ی N قطع کند. پاره‌خط MN جواب مسئله است.



۴



۵ با توجه به نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ مثلث بزرگتر با وتر l' ایجاد می‌شود. حال اختلاف مساحت‌های مثلث‌ها برابر مساحت خواسته شده است:



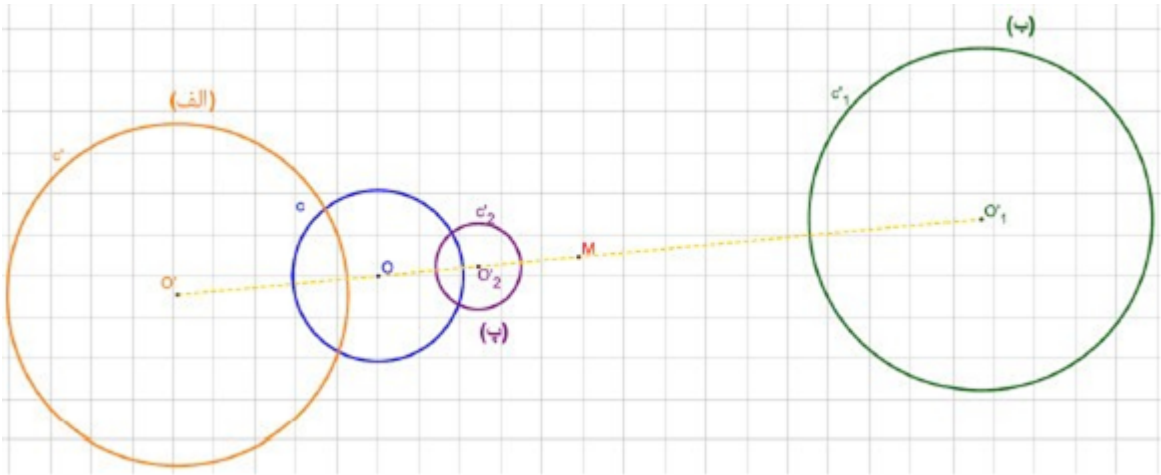
$$S_{\text{مطلوب}} = S_{\text{مثلث بزرگ}} - S_{\text{مثلث کوچک}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۴}\times\frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲}\times ۱\times ۲ = \frac{۳۳}{۱۶}$$

۶

$$\frac{S_{\text{تصویر مربع}}}{S_{\text{مربع اولیه}}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\text{تصویر}} = \frac{۴}{۹}S_{\text{مربع}} \quad \text{و} \quad S_{\text{مربع}} - S_{\text{تصویر}} = ۵ \Rightarrow \frac{۵}{۹}S_{\text{مربع}} = ۵$$

$$\Rightarrow S_{\text{مربع اولیه}} = ۹ = a^{۲} \Rightarrow a = ۳ \quad \text{و} \quad \text{محیط مربع اولیه} = ۴a = ۱۲$$

۷ برای پیدا کردن مجانس دایره، مجانس مرکز دایره را به دست آورده، به مرکز نقطه‌ی به دست آمده و k برابر شعاع دایرهٔ اول، دایره‌ای ترسیم می‌کنیم.

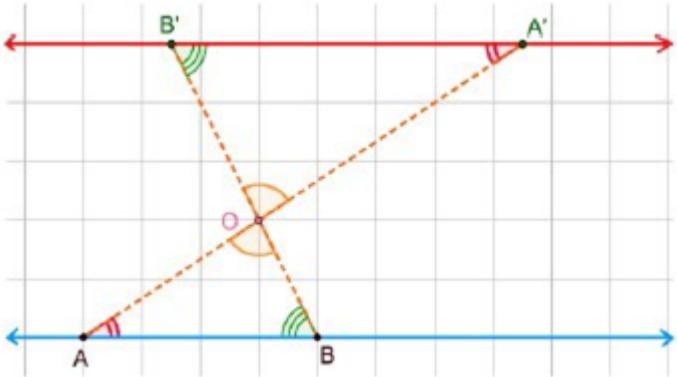


۸ الف) ۱) در حالتی که نقطه‌ی O روی خط AB قرار دارد و $k < ۰$ بدیهی است که نقاط 'A و 'B مجانس‌های نقاط A و B روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین 'A'B بر AB واقع است و شیب تغییر نمی‌کند.

۲) در حالتی‌که نقطه‌ی O روی خط AB قرار ندارد و $k < ۰$ در این صورت اگر نقاط 'A و 'B به‌ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA' = k.OA\\ OB' = k.OB\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k\\ \widehat{A'OB} = \widehat{AOB}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{A'OB'}$$

$$\Rightarrow \widehat{OB'A} = \widehat{OBA},\ \widehat{OA'B} = \widehat{OAB}$$



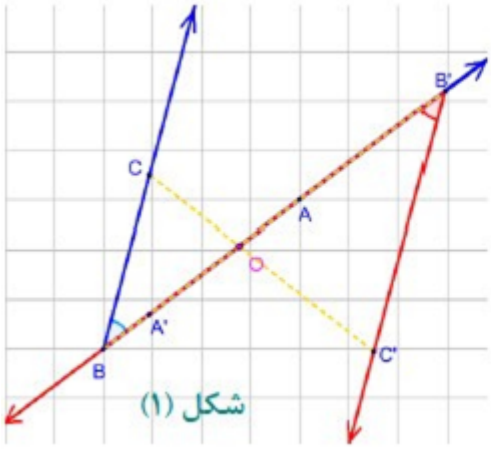
پس بنابر عکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط 'A'B است بنابراین شیب خط ها در تجانس حفظ می‌شود.

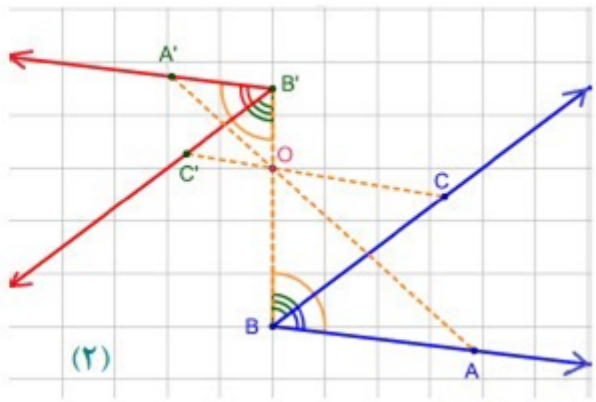
ب) زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ را در صفحه درنظر می‌گیریم:

۱) اگر نقطه‌ی O روی رأس زاویه یعنی نقطه‌ی B باشد آن‌گاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'B'C'}$ روی زاویه $\widehat{ABC}$ منطبق می‌شود. پس اندازه‌ی آن حفظ می‌شود.

۲) اگر نقطه‌ی O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل ۱ آن‌گاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند

پس: $BC \parallel B'C'$, BB' مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$



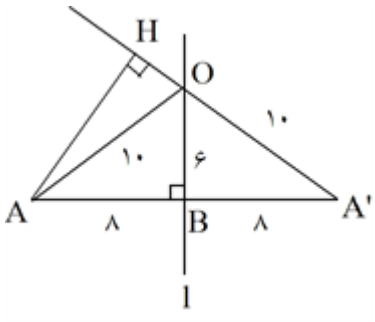


۳) اگر نقطه‌ی O نه روی اضلاع و نه روی رأس زاویه باشد مانند شکل ۲ با توجه به بند قبلی، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند پس:

$$\left.\begin{array}{l}BC \parallel B'C',\ BB' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{CBB'} = \widehat{C'B'B}\\ AB \parallel A'B',\ BB' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B}\end{array}\right\}$$

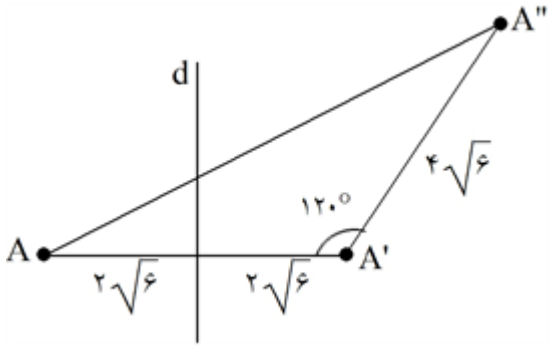
$$\Rightarrow \widehat{ABB'} - \widehat{CBB'} = \widehat{A'B'B} - \widehat{C'B'B} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

۹ بنا بر فرض سؤال، شکل مقابل را داریم و مساحت مثلث AOA' را از دو طریق نوشته و برابر می‌گذاریم تا AH حاصل شود:



$$۲S_{AOA'} = AH \times OA' = OB \times AA' \Rightarrow AH = \frac{۶ \times ۱۶}{۱۰} = ۹/۶$$

۱۰ بنا بر فرض سؤال، شکل زیر را داریم و برای آن قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$AA''^{۲} = (۴\sqrt{۶})^{۲} + (۴\sqrt{۶})^{۲} - ۲ \times ۴\sqrt{۶} \times ۴\sqrt{۶} \times \cos ۱۲۰ \Rightarrow AA'' = \sqrt{۲۸۸}$$

۱۱ الف) خط $d_۱$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه AOA' است یعنی: $\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$

خط $d_۲$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه A'OA" است یعنی: $\widehat{O}_۳ = \widehat{O}_۴$

$$\widehat{AOA''} = \widehat{O}_۱ + \widehat{O}_۲ + \widehat{O}_۳ + \widehat{O}_۴ \xrightarrow[\widehat{O}_۳=\widehat{O}_۴]{\widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲}$$

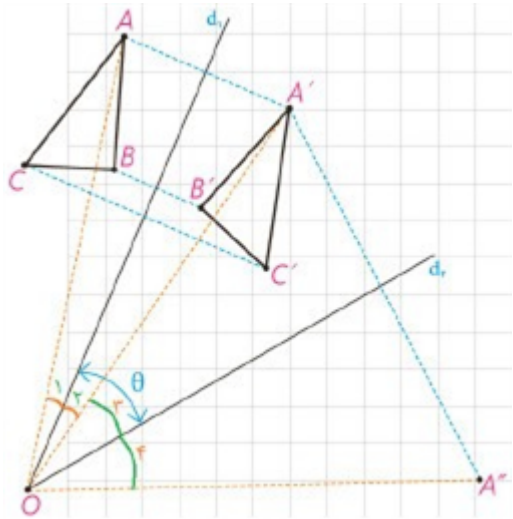
$$\widehat{AOA''} = ۲\widehat{O}_۲ + ۲\widehat{O}_۳ \Rightarrow \widehat{AOA''} = ۲\underbrace{(\widehat{O}_۲ + \widehat{O}_۳)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA''} = ۲\theta$$

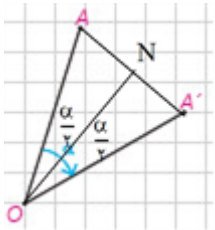
ب) بنابر اثبات الف به روش مشابه: $\widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = ۲\theta$

پ) با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ و زاویه‌ای به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط (۲θ) می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.



۱۲ الف) نیمساز زاویه $A\widehat{O}A'$ را رسم می‌کنیم.



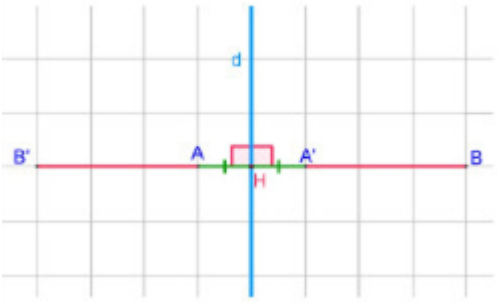
$$\left.\begin{array}{c} ON = ON \\ \frac{\alpha}{۲} = \frac{\alpha}{۲} \\ AO = A'O \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AON} = \overset{\triangle}{A'ON} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} AN = A'N \\ A\widehat{N}O = A'\widehat{N}O \end{array}\right.$$

$$A\widehat{N}O + A'\widehat{N}O = ۱۸۰ \Rightarrow A\widehat{N}O = A'\widehat{N}O = ۹۰^\circ$$

پس ON عمودمنصف AA' است و از نقطه O می‌گذرد.

ب) کافیست عمودمنصف AA' و BB' را رسم کنیم، محل تلاقی مرکز دوران مثلث ABC می‌باشد.

۱۳



$B'H = \mathrm{BH} \Rightarrow B'A + \mathrm{AH}$ بنا بر تعریف بازتاب

$$= \mathrm{BA}' + A'H \xrightarrow[\text{بنا بر تعریف بازتاب}]{\mathrm{AH}=A'H}$$

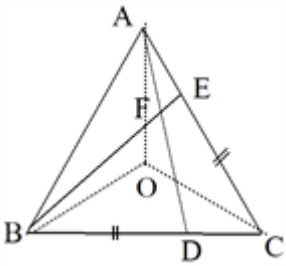
$$B'A = \mathrm{BA}'$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{AB} = \mathrm{AA}' + A'B \\ A'B' = \mathrm{AA}' + B'A \\ B'A = \mathrm{BA}'\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{AB} = A'B'$$

۱۴ نیمسازهای زاویه‌های A و B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. در این صورت $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ و $\widehat{\mathrm{AOB}} = \widehat{\mathrm{AOC}} = \widehat{\mathrm{BOC}} = ۱۲۰^\circ$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\mathrm{OA} = \mathrm{OB} \\ \widehat{\mathrm{AOB}} = ۱۲۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۲۰^\circ \text{ به مرکز } O} B \\ \overset{\triangle}{\mathrm{OAE}} \cong \overset{\triangle}{\mathrm{OCD}} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\mathrm{OE} = \mathrm{OD} \\ \widehat{\mathrm{EOD}} = ۱۲۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow D \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۲۰^\circ \text{ به مرکز } O} E\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{AD} \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۲۰^\circ \text{ به مرکز } O} \mathrm{BE}$$

پس تبدیل ایزومتری است. پس $\mathrm{AD} = \mathrm{BE}$. از طرفی زاویه‌ی بین هر خط و دوران یافته‌ی آن با زاویه‌ی دوران برابرست.

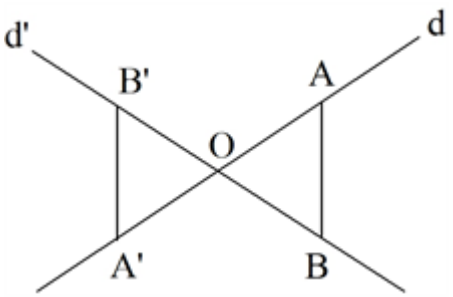


۱۵

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\mathrm{OC} = \mathrm{OA} \\ \widehat{\mathrm{AOC}} = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} C \\ \left.\begin{array}{r}\mathrm{OB} = \mathrm{OD} \\ \widehat{\mathrm{BOD}} = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} D\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{AB} \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} \mathrm{CD}$$

دوران ۱۸۰ درجه یک تبدیل ایزومتری بوده و شیب را حفظ می‌کند. پس $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$ و $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$. بنابراین ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۱۶ دو خط d و d' در نقطه‌ی O متقاطع هستند. نقاط A و A' را روی خط d در نظر می‌گیریم. به طوری که O وسط آنها باشد. و نقاط B' و B را روی خط d' در نظر می‌گیریم به طوری که O وسط B و B' باشد.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}OA = OA' \\ \widehat{AOA'} = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} A' \\ \left.\begin{array}{r}OB = OB' \\ \widehat{BOB'} = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} B' \\ O \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} O\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABO} \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} \overset{\triangle}{A'B'O}$$

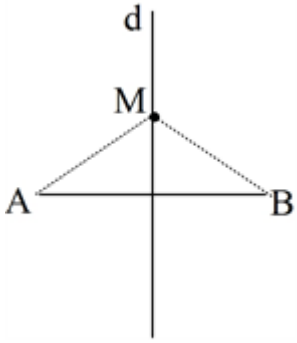
دوران تبدیل ایزومتری است. پس $ABO \cong A'B'O'$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$.

۱۷ از نقطه‌ی T خط d بر SR و PQ عمود می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}S \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} R \\ P \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} Q \\ Q \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} P\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{SPQ} \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} \overset{\triangle}{RQP}$$

بازتاب نسبت به خط ایزومتری است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{SPQ}$ و $\overset{\triangle}{RQP}$ مساویند.

۱۸ فرض کنید خط d عمودمنصف پاره خط AB باشد و M نقطه‌ای از خط d باشد.

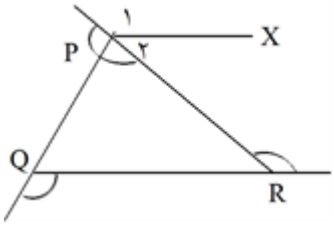


$$\left.\begin{array}{l}A \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} B \\ M \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} M\end{array}\right\} \Rightarrow AM \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} BM$$

بازتاب نسبت به خط تبدیل ایزومتری است پس $AM = BM$.

۱۹ Px را موازی با QR ترسیم می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی $P_۱$ انتقال یافته‌ی زاویه R تحت بردار $\overrightarrow{RP}$ می‌باشد. از طرفی زاویه‌ی $P_۲$ انتقال یافته‌ی زاویه Q تحت بردار $\overrightarrow{QP}$ می‌باشد. انتقال ایزومتری است پس داریم:

$$\begin{cases} \widehat{R} = \widehat{P}_۱ \\ \widehat{Q} = \widehat{P}_۲ \\ \widehat{P} + \widehat{P}_۱ + \widehat{P}_۲ = ۳۶۰ \end{cases} \Rightarrow \widehat{P} + \widehat{R} + \widehat{Q} = ۳۶۰^\circ$$



۲۰ اگر $\overrightarrow{AD}$ را به عنوان بردار انتقال در نظر بگیریم با توجه به فرض بردارهای CF, AD و BE مساویند.

$$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AD}} D \\ C \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AD}} F \\ B \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AD}} E \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ACB} \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AB}} \overset{\triangle}{DFE}$$

انتقال تبدیل ایزومتری است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ACB}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ مساویند.

۲۱ اگر $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان بردار انتقال در نظر بگیریم خواهیم داشت.

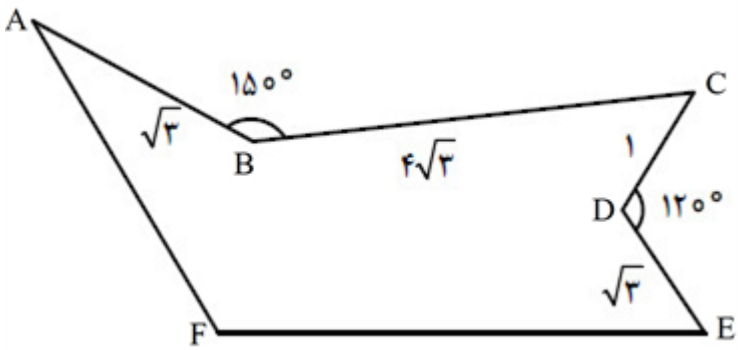
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \\ AB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{AB}]{\text{تحت انتقال با}} C \\ A \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{AB}]{\text{تحت انتقال با}} B \end{array}\right\} \Rightarrow AD \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{AB}]{\text{تحت انتقال با}} BC$$

انتقال یک تبدیل ایزومتری است و شیب را حفظ می‌کند پس $AD \parallel BC$ و $AD = BC$.

۲۲ مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \to ۵a - ۳ = \sqrt{۱۳^۲ - (۸ - ۳)^۲}$

$\to ۵a - ۳ = ۱۲ \to ۵a = ۱۵ \Rightarrow a = ۳$

۲۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هم پیرامونی میزان افزایش مساحت برابر $۲S_{\text{ABC}} + ۲S_{\text{DEC}}$ است.



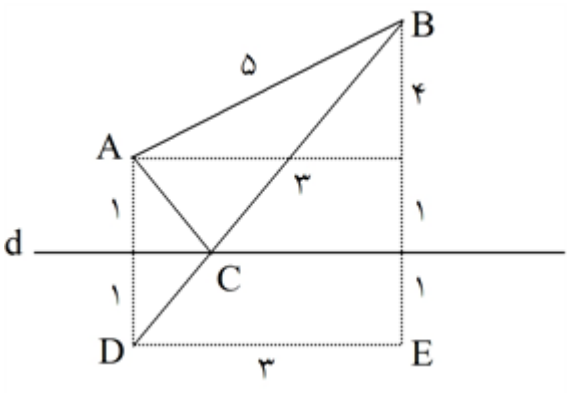
$$۲S_{\text{ABC}} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\text{AB} \times \text{BC Sin } ۱۵۰^\circ\right)$$
$$= \sqrt{۳} \times ۴\sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲} = ۶$$
$$۲S_{\text{DEC}} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\text{DC} \times \text{DE Sin } ۱۲۰^\circ\right)$$
$$= ۱ \times \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $۱۶ + \frac{۳}{۲} = ۷/۵$ است.

۲۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

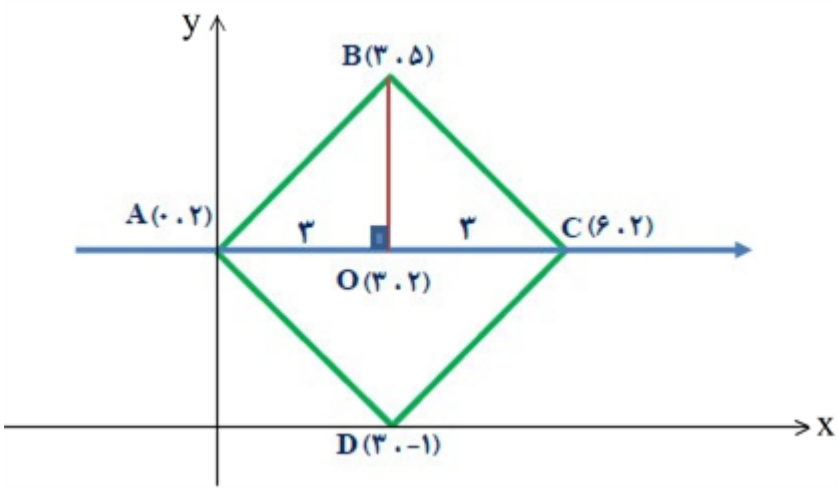
تذکر: سؤال موجود در دفترچه سازمان سنجش غلط بود و صورت سؤال به شکل صحیح ویرایش شد.

۲۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\text{Min}\,(\text{AC} + \text{BC}) = \text{BD}$$
$$\text{BD}^۲ = \text{BE}^۲ + \text{DE}^۲ \Rightarrow \text{BD}^۲ = ۶^۲ + ۳^۲$$
$$\Rightarrow B = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

۲۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه A نسبت به محور yها بر خودش منطبق شده است، پس A روی محور yها است. چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگر و با هم مساویند. پس مختصات سایر رأس‌های مربع به صورت شکل زیر است.



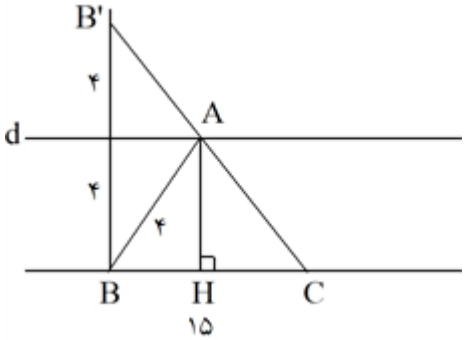
فاصله B تا مبدأ مختصات $= \sqrt{۳^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۳۴}$

۲۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های با مساحت ۳۰ و ضلع مشترک ۱۵ واحد دارای ارتفاع برابر $h = \frac{۲ \times ۳۰}{۱۵} = ۴$ هستند. اگر ABC مثلث موردنظر باشد و $BC = ۱۵$، آنگاه رأس A روی خط d موازی BC به فاصلهٔ $h = ۴$ قرار دارد. برای پیدا کردن رأس A روی خط d به طوری که محیط ABC مینیمم باشد از مسئله هرون استفاده کرده بازتاب B را نسبت به d نقطهٔ B' نامیده از B' به C وصل می‌کنیم تا خط d را در A قطع کند در این صورت $AB + AC$ مینیمم است. در این صورت چون $AH \parallel BB'$ طبق قضیهٔ تالس $\frac{CH}{BC} = \frac{AH}{BB'} = \frac{۱}{۲}$ پس AH میانه است بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$\overset{\triangle}{AHC} : AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴^۲ + \left(\frac{۱۵}{۲}\right)^۲ = ۱۶ + \frac{۲۲۵}{۴} = \frac{۲۸۹}{۴} \Rightarrow AC = \frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین:

$$\text{مینیمم محیط } \overset{\triangle}{ABC} = AB + AC + BC = \frac{۱۷}{۲} + \frac{۱۷}{۲} + ۱۵ = ۱۷ + ۱۵ = ۳۲$$



۲۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه‌ی D نسبت به محور xها بر خودش منطبق است پس نقطه‌ی D روی محور xها قرار دارد پس: $D=(۳,۰)$.

مسلماً بازتاب نقطه‌ی C نسبت به قطر BD نقطه‌ی A است زیرا قطرهای مربع عمود منصف یکدیگرند. فرض کنیم $C=(۵/۵,y)$ و $A=(x,y)$ در این صورت چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند بنابراین:

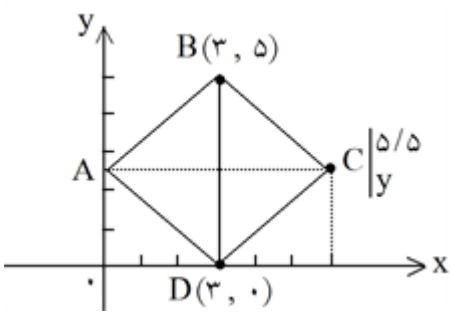
$$A+C=B+D\Rightarrow(x,y)+(۵/۵,y)=(۳,۵)+(۳,۰)=(x+۵/۵,۲y)=(۶/۵)$$

پس:

$$\begin{cases} x+۵/۵=۶\Rightarrow x=۰/۵ \\ ۲y=۵\Rightarrow y=۲/۵ \end{cases}\Rightarrow A(۰/۵,۲/۵)$$

بنابراین:

$$\mathrm{OA}=\sqrt{۰/۵^۲+۲/۵^۲}=\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}=\sqrt{۶/۵}$$



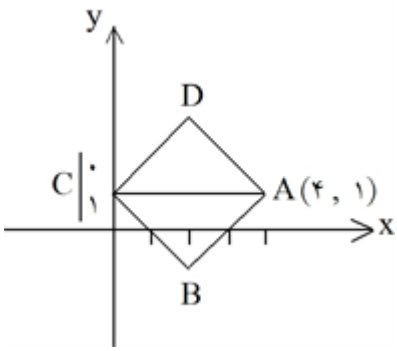
۲۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق است پس نقطهٔ C روی محور y ها قرار دارد پس مختصات C به صورت $(۰,۱)$ است. در ضمن عرض نقطهٔ D برابر ۳ است. فرض کنیم $D(x,۳)$ چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند پس رأس $B(x,y)$ بازتاب D نسبت به قطر AC است و چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند. پس:

$$A+C=B+D\Rightarrow(۴,۱)+(۰,۱)=(x,۳)+(x,y)$$

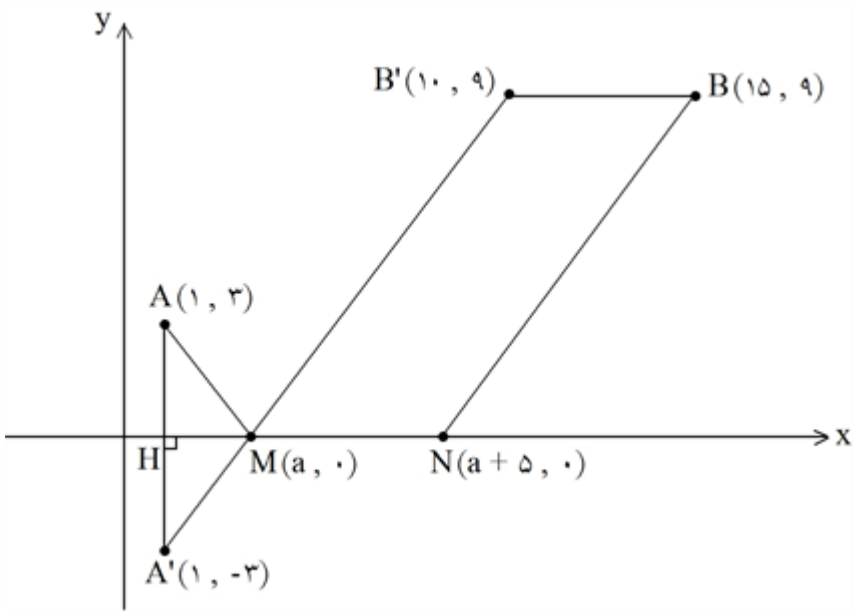
$$A+C=B+D\Rightarrow(۴,۱)+(۰,۱)=(x,۳)+(x,y)\Rightarrow\begin{cases} ۴=۲x\Rightarrow x=۲ \\ ۲=۳+y\Rightarrow y=-۱ \end{cases}\Rightarrow B(۲,-۱)$$

بنابراین:

$$\mathrm{OB}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$



۳۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



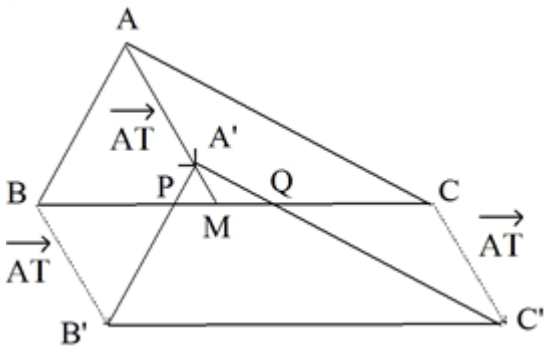
با توجه به شکل و موقعیت نقاط A , B , M , N این سؤال همان مسئله جاده‌ی ساحلی است که می‌خواهیم از A به B برویم به طوری که $MN = ۵$ قسمتی از مسیر در ساحل رودخانه باشد.

برای تعیین مسیر مینیمم ابتدا B را به اندازه‌ی ۵ واحد در راستای محور xها به طرف A منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم و بازتاب A را نسبت به محور xها نقطه‌ی A' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا محور xها در M قطع شود آن‌گاه مسیر AMNB مسیر مینیمم است و طول آن برابر $A'B' + BB'$ است.

$$\begin{matrix} A'(۱,-۳) \\ B'(۱۰,۹) \end{matrix} \Rightarrow A'B' = \sqrt{(۱۰-۱)^۲ + (۹+۳)^۲} = \sqrt{۸۱+۱۴۴} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

$$\text{مسیر مینیمم} = A'B' + BB' = ۱۵ + ۵ = ۲۰$$

۳۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید مثلث A'B'C' تصویر مثلث ABC تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AT}$ باشد. بنابر فرض سوال مساحت مثلث A'PQ مساوی $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت مثلث ABC است داریم.

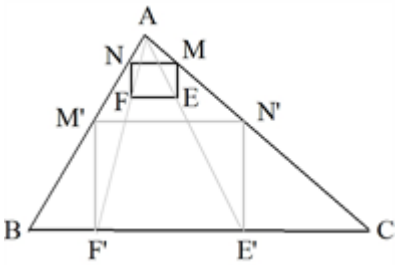


$$A'\overset{\triangle}{P}Q \sim A\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{S_{A'PQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'M}{AM}\right)^۲ \xrightarrow{\frac{S_{A'PQ}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۱۶}} \frac{A'M}{AM} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}}$$

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{AM = \frac{BC}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴} \frac{AA'}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow AA' = ۳$$

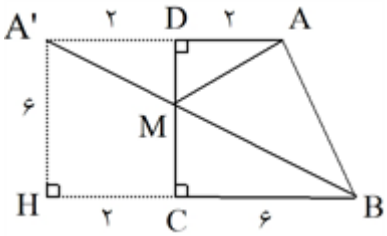
پس اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$ برابر ۳ است.

۳۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مربع دلخواه MNEF به طوری‌که MN موازی با BC باشد را مطابق شکل ترسیم می‌کنیم. از A به E و F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در 'E و 'F قطع کند. در نقاط 'E و 'F عمودهایی بر BC رسم کرده تا اضلاع AC و AB را در نقاط 'N و 'M قطع کند در این صورت 'M'N'E'F مجانس مربع MNEF به مرکز A است پس 'M'N'E'F مربع مطلوب است.

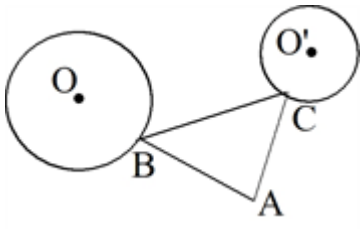


۳۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به DC نقطه‌ی 'A می‌نامیم، از 'A به B وصل می‌کنیم تا DC را در نقطه‌ی M قطع کند. در این صورت AMB کوتاه‌ترین مسیر است یعنی مقدار $\mathrm{MA}+\mathrm{MB}$ کم‌ترین است و چون بازتاب ایزومتری است $\mathrm{MA}+\mathrm{MB}$ برابر 'A'B است. مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی 'A'HB می‌توان طول 'A'B را به دست آورد.

$$A'\overset{\triangle}{H}B : A'\check{B} = A'\check{H} + \mathrm{BH}^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow A'B = ۱۰$$



۳۴ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین مثلث مطلوب باشد آن‌گاه نقاط B و C دوران یک‌دیگر به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰ درجه هستند بنابراین دوران برای این رسم قابل استفاده است.



۳۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی دلخواه (x, y) تحت تجانسی به مرکز $(۲, ۱)$ و ضریب $\frac{۳}{۲}$ به راحتی چنین است:

$$\begin{cases} x' - ۲ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \\ y' - ۱ = \frac{۳}{۲}(y - ۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x' = \frac{۳}{۲}x - ۱ \\ y' = \frac{۳}{۲}y - \frac{۱}{۲} \end{matrix}$$

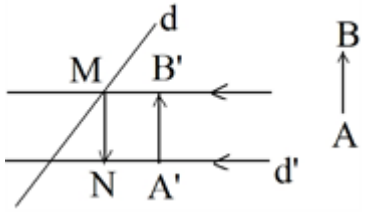
از این دو معادله، x و y را محاسبه کرده در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x = \frac{۲}{۳}(x' + ۱) \\ y = \frac{۲}{۳}\left(y' + \frac{۱}{۲}\right) \end{matrix} \xrightarrow{۲y+x=۶} \frac{۴}{۳}\left(y' + \frac{۱}{۲}\right) + \frac{۲}{۳}(x' + ۱) = ۶$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}y' + \frac{۲}{۳}x' + \frac{۴}{۳} = ۶ \Rightarrow ۴y' + ۲x' + ۴ = ۱۸ \Rightarrow ۴y' + ۲x' = ۱۴ \Rightarrow ۲y' + x' = ۷$$

۳۶ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث $\overset{\triangle}{OAE}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ مساویند پس $\mathrm{OE} = \mathrm{OD}$ و از طرفی $\overset{\triangle}{AOC} = ۱۲۰$ پس $\overset{\triangle}{EOD} = ۱۲۰$ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ و۴ درست هستند و در نتیجه گزینه‌ی ۲ غلط می‌باشد.

۳۷ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار AB انتقال می‌دهیم تا به نقطه‌ی B' برسیم و از آن‌جا خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را درنقطه‌ی M قطع کند. حال نقطه‌ی M را با بردار BA انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی N واقع برخط d' حاصل می‌شود. اکنون پاره خط MN همان پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $\mathrm{MB}'A'N$ متوازی الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره‌خط‌ها را تغییر دهد و به همین دلیل گزینه‌های ۳ و۴ از ابتدا به راحتی حذف می‌شوند.



پاسخنامه کلیدی

۲۳	۱	۲	**۳**	۴
۲۴	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	**۳**	۴
۲۶	**۱**	۲	۳	۴
۲۷	۱	**۲**	۳	۴
۲۸	۱	**۲**	۳	۴
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	**۳**	۴
۳۱	**۱**	۲	۳	۴
۳۲	۱	**۲**	۳	۴
۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	**۴**
۳۵	۱	**۲**	۳	۴
۳۶	۱	**۲**	۳	۴
۳۷	۱	**۲**	۳	۴