



p30konkor.com

عنوان آزمون : هندسه ۱۲ فصل ۲

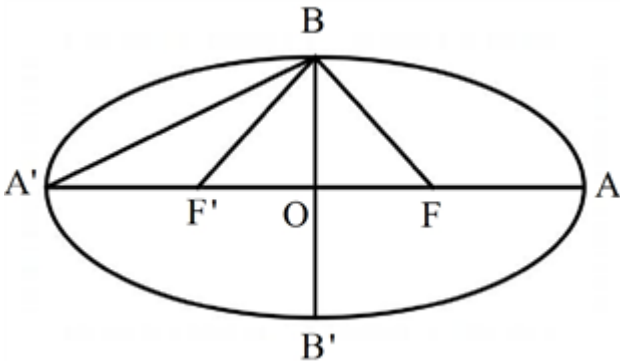
زمان آزمون :

تاریخ برگزاری

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>یک شعاع نورانی در امتداد خط <math>x = ۴</math> بر سهمی <math>y = x^۲</math> می‌تابد. معادله خط بازتاب را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p><math>(x = ۴ \Rightarrow y = ۲) \Rightarrow A(۳, ۲)</math></p> <p>خط بازتاب از کانون می‌گذرد. <math>y = ۲, F(۰, ۲) \Rightarrow (۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲)</math></p>	
۲	<p>معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن <math>y = -۲</math> و کانون آن <math>F(۱, -۴)</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p><math>S = (۱, -۳), a = ۱ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = -۴(y + ۳)</math></p>	
۳	<p>یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و <math>F'</math> مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر <math>S_{\triangle FBF'} = S_{\triangle BAO}</math> باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{S_{\triangle FBF'}}{S_{\triangle BAO}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2c \times b}{\frac{1}{2} \times a \times b} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{8}$	
۴	<p>نقاط <math>B(-۱, ۲)</math> و <math>B'(-۱, -۴)</math> دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی <math>۲\sqrt{۳}</math> واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p><math>BB' = ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳, ۲c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow c = \sqrt{۳}</math></p> <p><math>a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۳^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow AA' = ۲a = ۴\sqrt{۳}</math></p>	

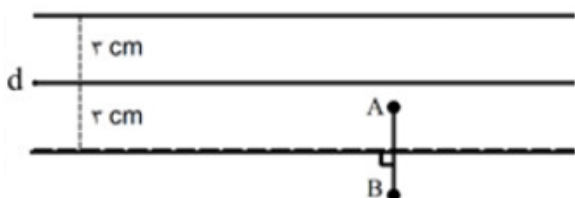
	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که خط‌های <math>x + y = 1</math> و <math>x - y = 3</math> شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادله <math>x + y = 2</math> وتری به طول <math>2\sqrt{2}</math> ایجاد می‌کند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow O(2, -1) \Rightarrow OH = \frac{1}{\sqrt{2}}, r^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{5}{2}$ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$	۵
	<p>وضعیت دایره به معادله <math>x^2 + y^2 - 6x + 12y + 20 = 0</math>، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $O(3, -6), R = 5$ $O'(0, 0), R' = 3$ $OO' = 3\sqrt{5},  R - R'  < OO' < R + R' \Rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$	۶

دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروضند، نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

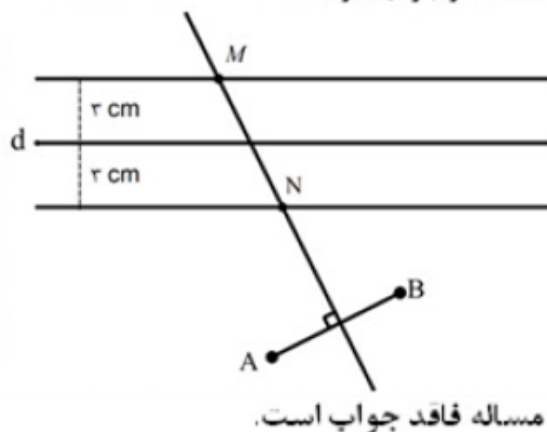
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

**پاسخ: ۱** مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ cm باشد، دو خط موازی ی به فاصله ۳ cm از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد عمودمنصف AB و دو خط موازی d، جواب مسئله است.

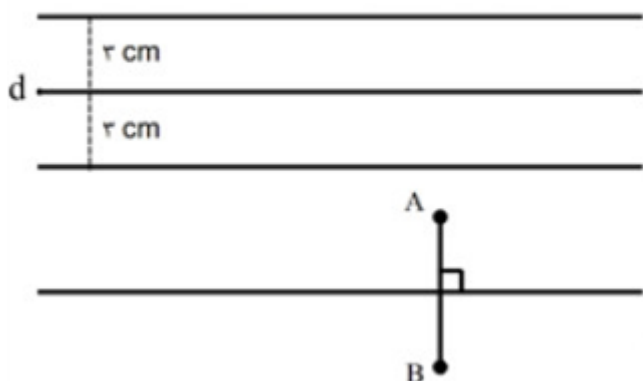
مسئله بی شمار جواب دارد.



مسئله دو جواب دارد.



مسئله فاقد جواب است.



دایره‌هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله  $(y - 1)^2 = -(x + 1)^8$  واقع است و از کانون سهمی می‌گذرند، بر خط به معادله ..... مماس هستند.

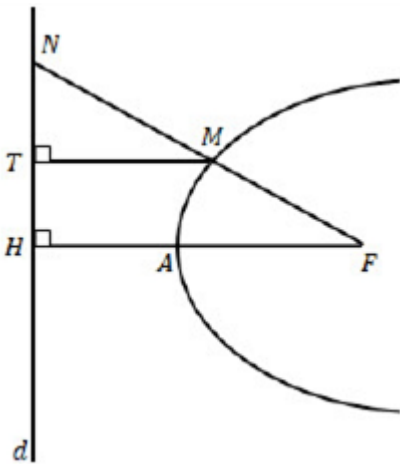
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$x = 1$$

**پاسخ: ۱**

در شکل مقابل، سهمی با رأس  $A$  و کانون  $F$  و خط هادی  $d$  رسم شده است. از  $F$  به نقطه دلخواه  $M$  روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا  $d$  را در نقطه  $N$  قطع کند و از نقطه  $M$ ،  $MT$  را بر  $d$  عمود کرده‌ایم.

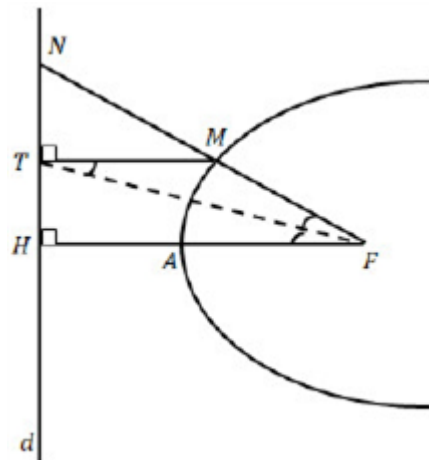
ثابت کنید:  $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$



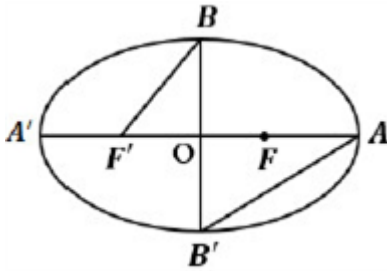
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ بنا به تعریف سهمی  $MT = MF$  و لذا مثلث  $MFT$  متساوی الساقین است پس  $\widehat{MFT} = \widehat{MTF}$  از طرفی  $MT \parallel FH$  و  $FT$  خط مورب می‌باشد پس بنابر قضیه خطوط موازی و مورب  $\widehat{MTF} = \widehat{TFH}$  از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که  $TF$  نیمساز زاویه  $\widehat{NFH}$  می‌باشد. با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث  $FHN$  داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NH}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{NT}{TH}$$



در بیضی مقابل، خروج از مرکز برابر  $\frac{4}{5}$  است. نسبت مساحت مثلث  $OBF'$  به مساحت مثلث  $OAB$  را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{S_{\triangle OBF'}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{\frac{1}{2}OB \times OF'}{\frac{1}{2}OB \times OA} = \frac{\frac{1}{2}bc}{\frac{1}{2}ba} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

وضعیت خط  $x + y = 3$  و دایره  $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$  را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x \quad (\text{ص } ۴۵)$$

روش اول:

پاسخ: ۱

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (3 - x)^2 - 2(3 - x) - 3 = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

دلتای معادله اخیر مثبت است بنابراین دو ریشه متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطعاند.

روش دوم:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 &\Rightarrow O(0, 1), r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 12} = 2 \\ OH = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} < 2 \Rightarrow OH < r$$

پس خط و دایره متقاطعند.

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0, 1)$  بوده و با دایره  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$  مماس داخل باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

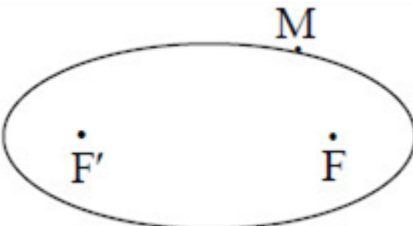
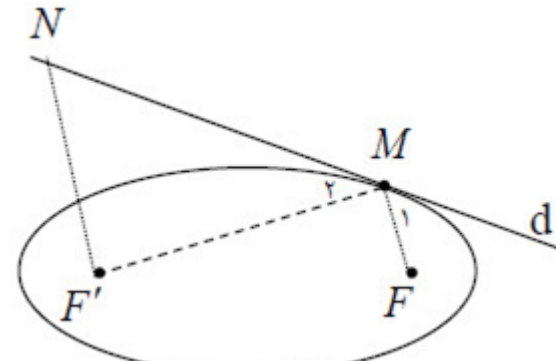
$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \Rightarrow O'(2, 3), r' = 4 \quad (\text{ص } ۴۴)$$

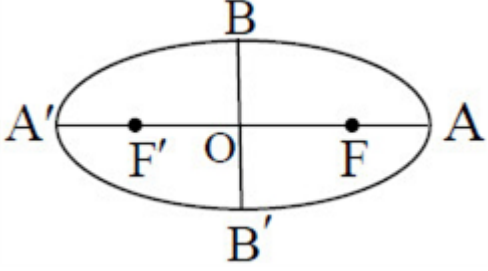
پاسخ: ۱

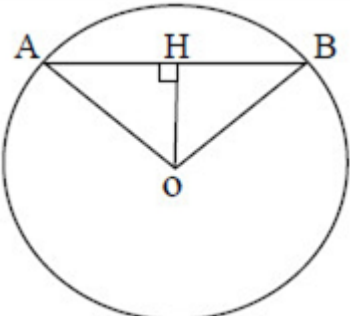
$$d = OO' = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{8}$$

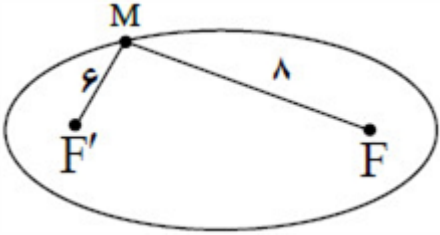
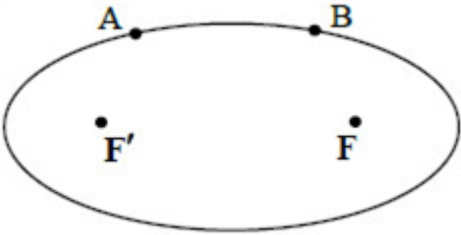
$$|r - r'| = d \Rightarrow |r - 4| = \sqrt{8} \Rightarrow r = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (4 \pm 2\sqrt{2})^2$$

	<p>نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۳ سانتیمتر و از d به فاصله ۴ سانتیمتر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید).</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را در نظر می‌گیریم. اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت. اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد. اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت. (ص ۳۹)</p>	۱۳
	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A_{n \times n}</math> ماتریس دلخواه <math>I_n</math> ماتریس همانی و <math>A^T - A = I</math> باشد، وارون ماتریس A، برابر <math>(I - A)</math> است.</p> <p>ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره <math>C(O, r)</math> در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره <math>C'(O, 2r)</math> است.</p> <p>پ) بردار <math>\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)</math>، یک بردار یکه است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ الف) نادرست (ص ۲۲)      ب) درست (ص ۳۹)      پ) درست (ص ۷۵)</p>	۱۴
	<p>در شکل مقابل، نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده است. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید <math>MF' = NF</math>.</p>  <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ مجموع <math>MF + MF'</math> کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های <math>\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2</math> از طرفی: <math>NF' \parallel MF</math> و d مورب، در نتیجه <math>\widehat{N} = \widehat{M}_1</math> نتیجه می‌شود <math>\widehat{N} = \widehat{M}_2</math> مثلث MNF' متساوی‌الساقین است. یعنی <math>MF' = NF</math>. (ص ۵۷)</p> 	۱۵

	<p>معادله سهمی با کانون <math>F(1, 2)</math> و خط هادی <math>x = -3</math> را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $F(\alpha + a, \beta) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad (\text{ص } 52 \text{ و } 58)$ $\left. \begin{array}{l} x = \alpha - a \\ x = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha - a = -3 \xrightarrow{\alpha + a = 1} \begin{cases} a = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$ $(y - 2)^2 = 8(x + 1)$ <p>روش دوم: برای حل مسئله با استفاده از شکل، نمره لحاظ گردد.</p>	۱۶
	<p>در یک بیضی با کانون‌های <math>F</math> و <math>F'</math>، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه <math>F'\hat{B}F</math> را به دست آورید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $BB' = \frac{1}{2}AA' \Rightarrow 2b = \frac{1}{2}(2a) \Rightarrow a = 2b$ $\cos F'\hat{B}O = \frac{BO}{BF'} = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow F'\hat{B}O = 60^\circ \Rightarrow F'\hat{B}F = 120^\circ$ <p>روش دوم: برای حل مسئله با استفاده از تانژانت زاویه <math>F'\hat{B}O</math> نمره لحاظ گردد. (ص ۵۸)</p>	۱۷
	<p>وضعیت دو دایره به معادلات <math>(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1</math> و <math>x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0</math> را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه راه‌حل)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow O(1, -2), R = 1$ $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow O'(-3, -1), R' = 4, d = OO' = \sqrt{17}$ <p>بنابراین دو دایره متقاطع هستند. <math>3 &lt; \sqrt{17} &lt; 5</math> (ص ۴۶)</p>	۱۸

	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن <math>O(0, 1)</math> بوده و روی خط <math>3x + 4y + 6 = 0</math> وترى به طول <math>2\sqrt{5}</math> جدا کند. سپس محل تلاقی آن دایره با محور <math>y</math>ها را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>  $OH = \frac{ 3(0) + 4(1) + 6 }{\sqrt{9+16}} = 2$ $AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow AH = \sqrt{5} \Rightarrow R = 3$ $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 9$ <p>پاسخ: ۱</p> $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \Rightarrow (0, 4) \\ y = -2 \Rightarrow (0, -2) \end{cases} \quad (\text{ص ۴۴})$	۱۹
	<p>نقاط <math>A, B, C</math> و <math>D</math> در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله و از <math>C</math> و <math>D</math> نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>مکان هندسی نقاطی که از نقاط <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط <math>AB</math> است.</p> <p>مکان هندسی نقاطی که از نقاط <math>C</math> و <math>D</math> به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط <math>CD</math> است.</p> <p>محل برخورد دو عمودمنصف، جواب مسأله است.</p> <p>حالت‌های ممکن: یک جواب، بدون جواب، بی‌شمار جواب. (ص ۳۹)</p>	۲۰
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>در هر سهمی، هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست (ص ۵۶)</p>	۲۱
	<p>جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.</p> <p>اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آنگاه سطح مقطع حاصل یک ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ بیضی (ص ۳۵)</p>	۲۲
	<p>اگر اندازه گودی (عمق) یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصله کانونی این دیش چه تغییری می‌کند؟ (با ارائه راه‌حل)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> $\frac{a'}{a} = \frac{\frac{b^2}{4(2h)}}{\frac{b^2}{4h}} = \frac{1}{2}$ <p>پاسخ: ۱ نصف می‌شود. (ص ۵۹)</p>	۲۳

	<p>سهمی با رأس <math>A(1, 2)</math> و کانون <math>F(1, -2)</math> مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>۲۴ پاسخ: ۱ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی قائم و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد.  فاصله کانونی سهمی برابر با <math>a = AF = 4</math> است.  معادله آن برابر است با: <math>(x - 1)^2 = -16(y - 2)</math>  معادله خط هادی سهمی <math>y = 6</math> است. (ص ۵۸)</p>	
	<p>در شکل روبه‌رو نقطه <math>M</math> روی بیضی با کانون‌های <math>F</math> و <math>F'</math> قرار دارد، به طوری که <math>MF = 8</math> و <math>MF' = 6</math>. اگر خروج از مرکز بیضی <math>\frac{1}{7}</math> باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید.</p>  <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>۲۵ پاسخ: ۱ نقطه <math>M</math> روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:</p> $MF + MF' = 2a = 14 \Rightarrow a = 7$ $\frac{c}{a} = \frac{1}{7} \xrightarrow{a=7} c = 1$ $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 48 \Rightarrow b = 4\sqrt{3} \text{ (ص ۵۸)}$	
	<p>در شکل روبه‌رو دو نقطه <math>A</math> و <math>B</math> روی بیضی با کانون‌های <math>F</math> و <math>F'</math> قرار دارند. اگر <math>AF' = BF</math> و همچنین <math>AF</math> و <math>BF'</math> یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند <math>M</math> قطع کنند، نشان دهید: مثلث <math>FMF'</math> متساوی‌الساقین است و <math>M</math> روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.</p>  <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>۲۶ پاسخ: ۱ نقاط <math>A</math> و <math>B</math> روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:</p> $AF + AF' = 2a = BF + BF' \xrightarrow{AF' = BF} AF = BF'$ <p>دو مثلث <math>AFF'</math> و <math>BFF'</math> بنا به حالت <math>(AF = BF', AF' = BF, FF' = FF')</math> برابری سه ضلع همنهشت هستند، نتیجه دو زاویه <math>\widehat{AFF'} = \widehat{BFF'}</math>، مثلث <math>MFF'</math> متساوی‌الساقین است و <math>MF = MF'</math> یعنی <math>M</math> روی عمودمنصف پاره‌خط <math>AFF'</math> (قطر کوچک بیضی) است.</p>	

۲۷	<p>مقدار <math>c</math> را چنان بیابید که دایره <math>x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0</math> بر دایره <math>(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2</math> مماس بیرون باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow O'(-1, 1), r' = \sqrt{2}$ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 - c \Rightarrow O(1, -1), r = \sqrt{2 - c}$ $OO' = 2\sqrt{2}$ $OO' = r + r' \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2 - c} \Rightarrow c = 0 \text{ (ص ۴۳)}$
۲۸	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که <math>O(1, 0)</math> مرکز آن بوده و بر خط <math>x = -3</math> مماس باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>روش اول:</p> $OH = \frac{ 1 + 3 }{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 4, OH = R, (x-1)^2 + y^2 = 16$ <p>روش دوم: با استفاده از رسم شکل و پیدا کردن شعاع و نوشتن معادله دایره (ص ۴۳)</p>
۲۹	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>بعضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>نادرست (ص ۵۱)</p>
۳۰	<p>مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، ..... آن زاویه است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>نیمساز (ص ۳۹)</p>
۳۱	<p>مختصات نقاط برخورد سهمی <math>y^2 + 7x + 5 = 0</math> و دایره <math>x^2 + y^2 = 25</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\begin{cases} y^2 + 7x + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (-7x - 5) = 25 \Rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0$ <p>(ص ۵۸) <math>x = -3, x = 10</math></p> $\begin{cases} x = -3 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (-3, 4), (-3, -4) \\ x = 10 \Rightarrow y^2 = -75 \end{cases}$

معادله سهمی را بنویسید که  $F(-3, 2)$  مختصات کانون و معادله خط هادی آن  $x = 1$  باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۳۲ پاسخ: ۱ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

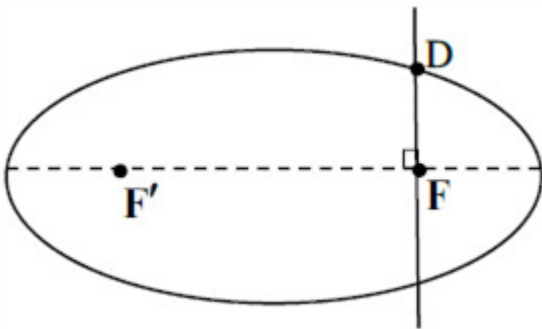
مختصات رأس سهمی  $A(-1, 2)$ ، در این سهمی  $a = AF = 2$

معادله آن برابر است با:  $(y - 2)^2 = -8(x + 1)$

(ص ۵۸)

بیضی با قطر بزرگ  $2a$ ، قطر کوچک  $2b$  و کانون‌های  $F$  و  $F'$  مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون  $F$  بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه  $D$  قطع کند، ثابت کنید:

$$DF = \frac{b^2}{a}$$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۳۳ پاسخ: ۱ نقطه  $D$  روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:  $DF + DF' = 2a$

در مثلث قائم‌الزاویه  $DF'F$  بنا به قضیه فیثاغورت داریم:

$$DF^2 + FF'^2 = DF'^2 \Rightarrow DF^2 + (2c)^2 = (2a - DF)^2$$

$$DF = \frac{a^2 - c^2}{a} \xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2} DF = \frac{b^2}{a}$$

در یک بیضی مختصات کانون‌ها  $F(4, 0)$  و  $F'(-2, 0)$  و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه  $P(1, m)$  روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار  $m$  را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۳۴ پاسخ: ۱  $PF + PF' = 2a \Rightarrow \sqrt{9 + m^2} + \sqrt{9 + m^2} = 10 \Rightarrow m = \pm 4$  (ص ۴۸)

در دایره به معادله ضمنی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره

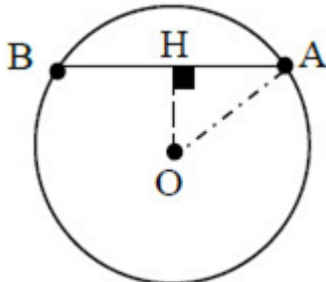
$$\text{برابر با } r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ است.}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

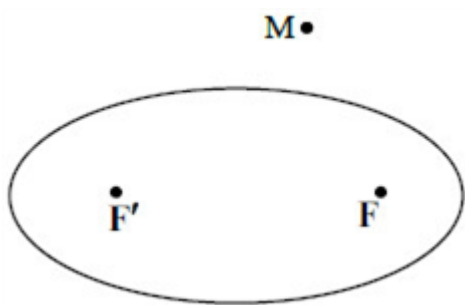
۳۵ پاسخ: ۱  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

(ص ۴۱)

	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که <math>O(2, -1)</math> مرکز آن بوده و از خط <math>3x - 4y + 10 = 0</math> وتری به طول ۶ جدا کند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.</p>  $AH = \frac{1}{2}AB = 3$ $OH = \frac{ 3(2) - 4(-1) + 10 }{\sqrt{9+16}} = 4$ $OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow r^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25, (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$	۳۶
	<p>مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایره <math>(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16</math> مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز <math>O(1, -2)</math> و شعاع ..... است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ ۵ (ص ۳۹)</p>	۳۷
	<p>هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحه P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحه P و سطح ایجاد شده بیضی است. (درست - نادرست)</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست (ص ۳۹)</p>	۳۸
	<p>الف) معادله سهمی را بنویسید که <math>A(2, 3)</math> رأس آن بوده و معادله خط هادی آن <math>x = 3</math> باشد.          ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.          پ) مختصات نقطه برخورد سهمی با محور طولها را حساب کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.          در این سهمی <math>a = 1</math> و معادله آن برابر است با:  <math>(y-3)^2 = -4(x-2)</math>          ب) مختصات کانون سهمی <math>F(-a+h, k) = (-1+2, 3) = (1, 3)</math>          پ) مختصات محل برخورد با محور طولها برابر است با:  <math>y = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}, \left(\frac{-1}{4}, 0\right)</math> (ص ۵۴ و ۵۸)</p>	۳۹
	<p>اگر در یک بیضی طول <math>AA'</math> (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز <math>\frac{3}{4}</math> باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ (ص ۴۹) <math>\frac{c}{a} = \frac{3}{4} \xrightarrow{a=8} c=6 \Rightarrow AF = a-c = 2</math></p>	۴۰

اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانونهای F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.

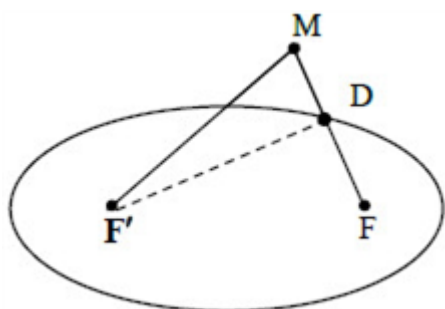


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ از نقطه M به کانونهای بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار

دارد بنا بر تعریف بیضی:  $DF + DF' = 2a$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF}$$

$$DF + MD + MF' > DF + DF'$$

$$\Rightarrow MF + MF' > 2a$$

(ص ۴۷)

وضعیت خط  $x + y = 1$  و دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4, O = (1, 1), r = 2, d = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d < r$$

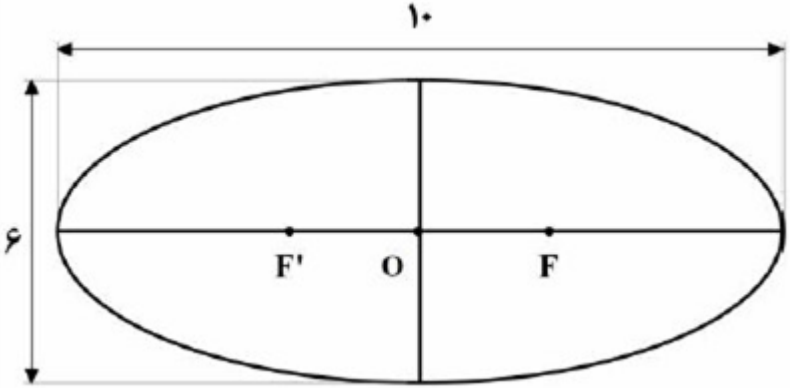
خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.

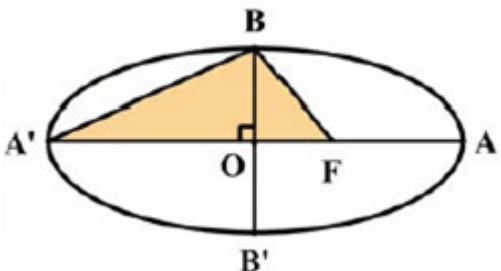
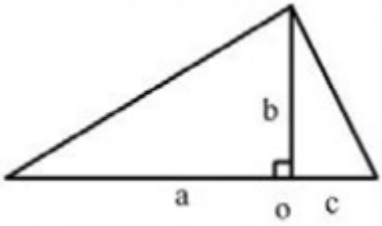
حدود a را طوری به دست آورید که  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$  معادله یک دایره باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 16 + 36 > 4a \Rightarrow a < 13 \text{ (ص ۴۶)}$$

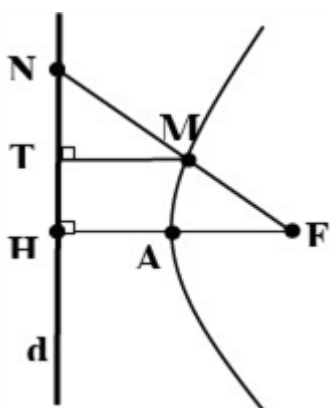
پاسخ: ۱

	<p>دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمود منصف پاره خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و ا می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط <math>d'</math>, <math>d''</math> می‌باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط <math>d'</math>, <math>d''</math> با خط a جواب مساله است.</p> <p>الف - اگر خط a دو خط <math>d'</math>, <math>d''</math> را قطع کند مسئله دو جواب دارد.</p> <p>ب - اگر خط a بر یکی از دو خط <math>d'</math> یا <math>d''</math> منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.</p> <p>پ - اگر خط a هیچ‌یک از دو خط <math>d'</math>, <math>d''</math> را قطع نکند مسئله جواب ندارد.</p> <p>رسم یک مورد شکل برای مسأله الزامی است. (ص ۳۸)</p>	۴۴
	<p>سه‌می، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست - نادرست)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> درست (ص ۵۱)</p>	۴۵
	<p>اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> بیضی (ص ۳۵)</p>	۴۶
	<p>معادله گسترده دایره <math>C(O, R)</math> به شکل <math>x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0</math> است.</p> <p>الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.</p> <p>ب) آیا نقطه <math>A(0, 3)</math> روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> الف) <math>O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3</math></p> <p>ب) خیر زیرا: <math>(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0</math></p>	۴۷
	<p>در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و <math>F'</math> کانون‌های بیضی هستند).</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> <math>a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \Rightarrow FF' = 8</math></p>	۴۸

	<p>معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن <math>(۱, ۴)</math> و بر خط <math>۳x + ۴y = -۱</math> مماس باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $r = \frac{ ۳ \times ۱ + ۴(۴) + ۱ }{\sqrt{۳^2 + ۴^2}} = ۴ \Rightarrow (x - ۱)^2 + (y - ۴)^2 = ۱۶$	۴۹
	<p>اگر طول قطر بزرگ <math>AA'</math> و قطر کوچک <math>BB'</math> بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:</p> <p>الف) مقدار <math>A'F</math> را به دست آورید. (F کانون بیضی است)</p> <p>ب) مساحت مثلث هاشورخورده <math>(\triangle BFA')</math> چقدر است؟</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math>a = ۵</math>  <math>b = ۴ \Rightarrow c^2 = ۲۵ - ۱۶ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow A'F = ۸</math></p> <p>ب)</p>  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} (۵ + ۳) \times ۴ = ۱۶$	۵۰
	<p>کدام یک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله <math>x^2 + y^2 - ۲x + ۴y + ۱ = ۰</math> قرار دارد؟</p> <p>(۱, ۰) ۱    (۰, -۱) ۳    (۱, ۰) ۲    (-۱, ۰) ۴</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p><math>O \left  \begin{smallmatrix} ۱ \\ -۲ \end{smallmatrix} \right., R = \sqrt{۱ + ۴ - ۱} = \sqrt{۴} = ۲</math></p> <p><math>A \left  \begin{smallmatrix} ۱ \\ ۰ \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow OA = \sqrt{(۱ - ۱)^2 + (۰ + ۲)^2} = ۲ \Rightarrow OA = R</math> (گزینه ۲)</p>	۵۱
	<p>در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>- خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{۳}{۴}$	۵۲

در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید:  $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۵۳

پاسخ: ۱ روش اول:

بنا به تعریف سهمی  $MF = MT$  مثلث MFT متساوی الساقین است.

$$\widehat{MTF} = \widehat{TFM} \quad (۱)$$

از طرفی بنا به خطوط موازی  $FH \parallel MT$  و مورب FT نتیجه می‌شود  $\widehat{MTF} = \widehat{TFH} \quad (۲)$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=FA} \frac{NF}{FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{NT}{TH} \quad (\text{ص } ۵۸)$$

روش دوم:

$FH \parallel MT$  با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left. \begin{aligned} \frac{NM}{MF} &= \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} &= \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{FH=FA} \frac{NF}{FA} = \frac{NT}{TH}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{NT}{TH}$$

الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادله  $y^2 - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$  را بیابید.  
ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

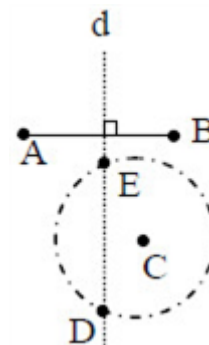
۵۴

پاسخ: ۱

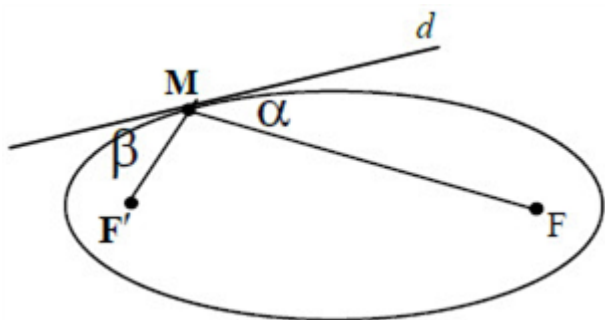
الف) معادله متعارف سهمی  $(y - ۱)^2 = ۸(x - ۱)$  و فاصله کانونی  $a = ۲$

ب) رأس سهمی  $(۱, ۱)$  معادله خط هادی  $x = -۱$  و مختصات کانون آن  $(۳, ۱)$  (ص ۵۵)

	<p>در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرهای برابر ۱۰ و ۶ است،          الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.          ب) مختصات کانون‌ها <math>(F', F)</math>، مختصات دوسر قطر بزرگ <math>(A', A)</math> و دوسر قطر کوچک <math>(B', B)</math> را به دست آورید.          پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>الف) <math>\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 2</math></p> <p>ب) <math>A(5, 0), A'(-5, 0)</math>  <math>F(2, 0), F'(-2, 0)</math>  <math>B(0, 3), B'(0, -3)</math></p> <p>پ) رسم بیضی (ص ۱۴۹)</p>	۵۵
	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه <math>O(1, -1)</math> و بر خط <math>3x - 4y + 3 = 0</math> مماس باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p><math>d = \frac{ 3(1) - 4(-1) + 3 }{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2</math></p> <p>(ص ۱۴۳) <math>(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4</math></p>	۵۶
	<p>نقاط <math>A, B</math> و <math>C</math> در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله و از <math>C</math> به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>مکان هندسی نقاطی که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط <math>AB</math> است. و مکان هندسی نقاطی که از نقطه <math>C</math> به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز <math>C</math> و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف <math>d</math> و دایره جواب مسئله است. (نقاط <math>E</math> و <math>D</math>)</p> <p>الف) اگر خط عمودمنصف <math>(d)</math> و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد. (ص ۳۹)</p> <p>ب) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.</p> <p>پ) در صورتی‌که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.</p>	۵۷



درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.  
 - در شکل روبرو اگر خط  $d$  در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد، زاویه  $\widehat{F'MF}$  باشد آنگاه اندازه زاویه  $\alpha = \beta = 60^\circ$  است.



۵۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ نادرست،  $\alpha = \beta = 65^\circ$  (ص ۵۰)

درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.  
 - اگر صفحه  $P$  به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه  $P$  و سطح مخروطی یک هذلولی است.

۵۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست (ص ۳۵)

عبارت زیر را کامل کنید.  
 - نقطه  $A(1, -2)$  در ..... دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  قرار دارد.

۶۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ داخل (ص ۱۴۶)

عبارت زیر را کامل کنید.  
 - اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به ..... نزدیکتر می‌شود.

۶۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ دایره (ص ۱۴۹)

معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن  $(0, 3)$  و بر خط  $3x - 4y = 3$  مماس باشد.

۶۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$r = \frac{|3 \times 0 - 4 \times 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

پاسخ: ۱

سهمی  $y^2 = 2x + 4y$  را در نظر بگیرید.  
الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.  
ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

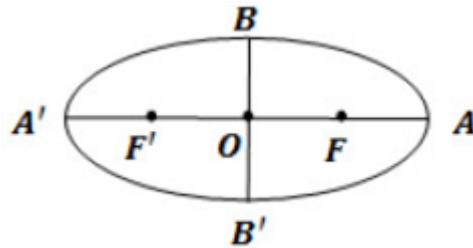
$$y^2 = 2x + 4y \Rightarrow (y - 2)^2 = 2(x + 2)$$

پاسخ: ۱ ۶۳

نوع افقی رو به راست رأس سهمی نقطه  $(-2, 2)$  پارامتر سهمی  $a = \frac{1}{2}$  مختصات کانون سهمی برابر

با  $(-\frac{3}{2}, 2)$  معادله خط هادی برابر است با  $x = -\frac{5}{2}$  است و مختصات نقاط برخورد با محور  $y$ ها برابر است با  $(0, 4)$  و  $(0, 0)$  و محور  $x$ ها  $(0, 0)$

در بیضی روبه‌رو:  $OF = OF' = c, OB = OB' = b, OA = OA' = a$



ثابت کنید:  $b^2 + c^2 = a^2$

۶۴

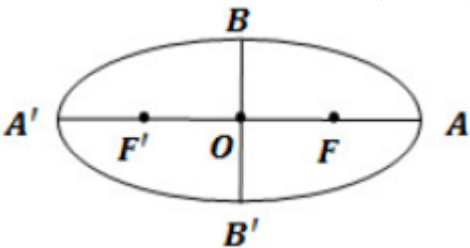
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نقطه B روی بیضی است  $BF + BF' = 2a$

از طرفی نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط  $FF'$  قرار دارد  $BF = BF'$  بنابراین  $BF = BF' = a$

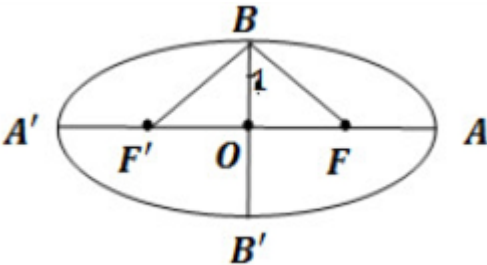
در مثلث قائم‌الزاویه OFB داریم:  $OB^2 + OF^2 = BF^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه  $\widehat{F'BF}$  چند درجه است؟



۶۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰



$$a = 2b \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2$$

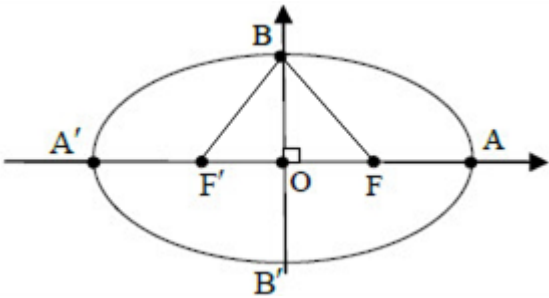
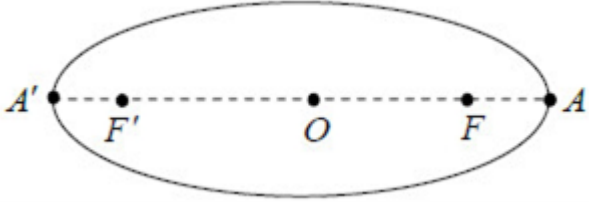
$$\Rightarrow c = \sqrt{3}b$$

$$\tan B_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow B_1 = 60^\circ$$

$$\widehat{F'BF} = 2 \times 60 = 120^\circ$$

پاسخ: ۱

۶۶	<p>در نقطه <math>A(۲, ۳)</math> روی دایره به معادله <math>x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳</math> مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۵ \Rightarrow O = (۱, ۱)$ $m_{OA} = \frac{۳ - ۱}{۲ - ۱} = ۲$ <p>شیب خط مماس <math>m' = \frac{۱}{m} = \frac{-۱}{۲}</math> است، پس معادله خط مماس به صورت</p> $y - ۲ = \frac{-۱}{۲}(x - ۳) \text{ است.}$
۶۷	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن <math>O(۲, ۳)</math> بوده و <math>M(۱, ۱)</math> یک نقطه از آن باشد.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $R = OM = \sqrt{(۱ - ۲)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۵}$ $(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۵$
۶۸	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.</p> <p>ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.</p> <p>پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.</p> <p>ت) اگر برای دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> داشته باشیم: <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} </math>، در این صورت زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر ..... است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ الف) ماتریس ب) مشترک پ) خارج ت) صفر</p>
۶۹	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A و B دو ماتریس <math>۲ \times ۲</math> باشند آن‌گاه: <math> AB  =  A   B </math></p> <p>ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (I) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.</p> <p>پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.</p> <p>ت) نقطه با مختصات <math>(-۲, ۳, -۴)</math> در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست</p>
۷۰	<p>وضعیت خط <math>x + y = ۳</math> و دایره <math>x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰</math> را نسبت به هم مشخص کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $R = \frac{۱}{۲} \sqrt{۴ + ۰ + ۱۳} = ۲, O(۱, ۰)$ $OH = \frac{ ۱ \times ۱ + ۰ \times ۱ - ۳ }{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \sqrt{۲} \Rightarrow OH < R$ <p>خط و دایره متقاطع‌اند.</p>

۷۱	<p>در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴, ۵) باشد:          الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.          ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math>c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2\sqrt{5}</math>          ب) <math>A(4 + 3, 5), A'(4 - 3, 5)</math></p>
۷۲	<p>سهمی به معادله <math>y^2 - 2y + 8x + 9 = 0</math> را در نظر بگیرید:          الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.          ب) نمودار سهمی را رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math>y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = -8(x + 1) \Rightarrow A = (-1, 1), a = 2</math>  <math>F(-3, 1), x = 1</math>          ب) رسم سهمی (ص ۵۵)</p>
۷۳	<p>در بیضی مقابل، طول قطر کوچک <math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math> طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه <math>F'BF</math> را به دست آورید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ در مثلث BOF داریم:</p> $\cos \widehat{OBF} = \frac{BO}{BF} \xrightarrow{BF=a, BO=b} \cos \widehat{OBF} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OBF} = 30^\circ$ <p><math>\Rightarrow \widehat{F'BF} = 2\widehat{OBF} = 60^\circ</math> (ص ۵۸)</p>
۷۴	<p>در بیضی روبه‌رو نقاط <math>A, A'</math> دو سر قطر بزرگ و نقاط <math>F, F'</math> کانون‌های بیضی هستند ثابت کنید: <math>A'F' = AF</math></p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ نقطه <math>A, A'</math> روی بیضی قرار دارند بنا به تعریف بیضی داریم <math>A'F' + A'F = 2a</math> و <math>AF' + AF = 2a</math></p> <p>نتیجه می‌گیریم: (ص ۴۸)</p> $A'F' + A'F = AF' + AF \Rightarrow A'F' + (A'F' + FF') = AF + (AF + FF') \Rightarrow AF = A'F'$

در نقطه  $A(2, 3)$  روی دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

**پاسخ: ۱** مرکز دایره برابر است با  $O(1, 1)$  شیب خط عمود بر دایره در نقطه  $A(2, 3)$  برابر است با:

$$m_{AO} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

شیب خط مماس بر دایره در نقطه  $A(2, 3)$  قرینه و برعکس شیب خط عمود است:

$$m' = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 2) \quad \text{معادله خط مماس بر دایره برابر است با:}$$

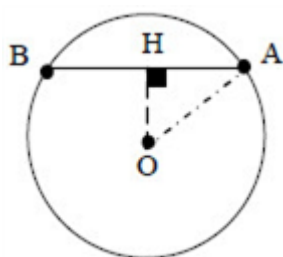
(ص ۴۵)

۷۵

معادله دایره‌ای را بنویسید که  $O(0, 1)$  مرکز آن بوده و روی خط به معادله  $x + y = 2$  وتری به طول  $2\sqrt{2}$  جدا کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

**پاسخ: ۱** از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود  $OH$  وتر  $AB$  را نصف می‌کند. (ص ۴۳)



$$OH = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OA^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{10}{4} = R^2$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = \frac{10}{4} \quad \text{معادله دایره}$$

۷۶

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $3 \times 3$  دلخواه باشند آن‌گاه عبارت  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  همواره برقرار است.

ب) اگر صفحه‌ی  $P$  به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه  $P$  و سطح مخروطی یک هذلولی است.

پ) نقطه  $(-2, 3)$  روی دایره  $x^2 + y^2 + 2x = 0$  قرار دارد.

ت) برای سه بردار  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در  $R^3$  داریم:  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پ) نادرست (ص)

ب) نادرست (ص ۳۹)

الف) نادرست (ص ۲۱)

ت) درست (ص ۸۱)

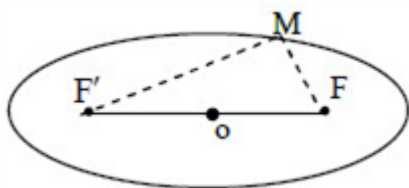
(۴۲)

**پاسخ: ۱**

۷۷

	<p>در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> اگر قطر دهانه دیش را با <math>2r</math> و گودی را با <math>h</math> نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر <math>a = \frac{r^2}{4h}</math> است.</p> <p><math>2r = 60, h = 9</math> با جایگذاری در رابطه فوق داریم:</p> $a = \frac{(2r)(2r)}{16h} = \frac{60 \times 60}{16(9)} = 25$ <p>(اگر رابطه فوق به صورت <math>a = \frac{r^2}{4h} = \frac{(30)^2}{4(9)} = 25</math> نوشته شود درست است.)</p>	۷۸
	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.</p> <p>ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.</p> <p>پ) در حالتی که <math>\frac{c}{a} = 1</math> بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود.</p> <p>ت) بردار <math>\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}</math> در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی ..... منطبق است.</p> <p>(xoz, yoz, xoy)</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> الف) قطری (ص ۱۲) ب) مشترک (ص ۳۶) پ) پاره‌خط (ص ۴۹) ت) yoz (ص ۷۳)</p>	۷۹
	<p>اگر نقطه ی <math>A(2, 3)</math> رأس سهمی و <math>y = 7</math> معادله‌ی خط هادی سهمی باشد:</p> <p>الف) معادله سهمی را به دست آورید.</p> <p>ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت:</p> $a = 4$ <p>دهانه سهمی رو به پایین است و معادله آن برابر است با:</p> $(x - 2)^2 = -4(4)(y - 3)$ <p>ب) مختصات کانون سهمی برابر است با:</p> $F = (2, -1)$	۸۰

نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.  
 الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.  
 ب) طول MF را به دست آورید.  
 (F, F' کانون‌های بیضی هستند و  $MF < MF'$ ).



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ الف) 
$$\begin{cases} 2a = 10 \rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

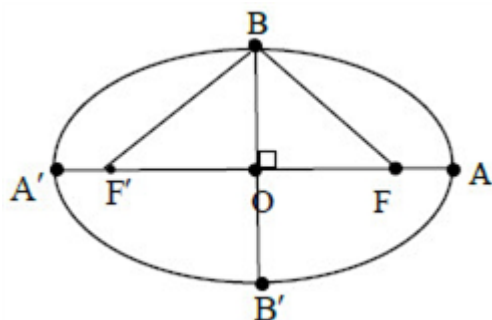
در مثلث MFF' میانه وارد بر یک ضلع  $MO = \frac{1}{2}FF' = 4$  نصف ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب)  $MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' = 10 - MF$

$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 8^2 \Rightarrow MF = 5 - \sqrt{5}$

۸۱

در شکل مقابل اگر  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OF = c$  باشد، ثابت کنید:  $a^2 = b^2 + c^2$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد در نتیجه:  $BF = BF'$  (۱)

فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$BF + BF' = 2a \xrightarrow{(1)} BF = BF' = a$

بنا به رابطه فیثاغورت در مثلث BOF داریم:

$OF^2 + OB^2 = BF^2 \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2$

۸۲

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(2, 1)$  بوده و بر خط  $3x + 4y = -5$  مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است:

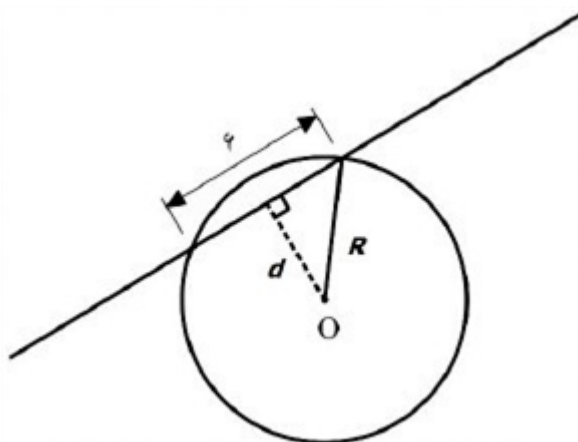
$$r = \frac{|3(2) + 4(1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

معادله دایره‌ای برابر است با:  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

۸۳

۸۴	<p>وضعیت دایره <math>x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0</math> با دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> مرکز و شعاع دایره <math>x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1</math> برابر است با:  <math>O' = (3, 1), r' = 1</math>          فاصله دو مرکز برابر <math>d = OO' = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}</math> و <math>d &gt; r + r' = 2</math> دو دایره بیرون یک‌دیگرند (متخارجند).</p>
۸۵	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر ماتریس <math>\begin{bmatrix} 2 &amp; 0 &amp; f \\ 0 &amp; a &amp; 0 \\ e &amp; c &amp; b \end{bmatrix}</math> اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است.</p> <p>ب) اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس <u>سطح مخروطی عبور کند</u>، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.</p> <p>پ) در بیضی، در حالتی که <math>\frac{c}{a} = 0</math> بیضی به ..... تبدیل می‌شود.</p> <p>ت) در فضای <math>R^3</math>، نقطه <math>(-3, 2, -5)</math> در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> الف) ۸      ب) خط      پ) دایره      ت) ۶</p>
۸۶	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و <math>r</math> یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و <math>rA = rB</math> آن‌گاه داریم: <math>A = B</math>.</p> <p>ب) مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.</p> <p>پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.</p> <p>ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> الف) درست      ب) نادرست      پ) درست      ت) نادرست</p>

مرکز دایره‌ای، نقطه  $O(2, -3)$  است. این دایره روی خط  $3x - 4y + 2 = 0$  وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.



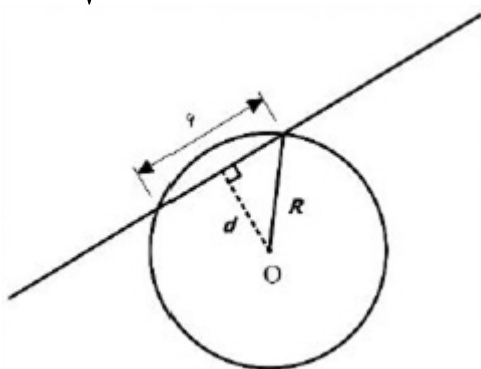
۸۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$d = \frac{|3 \times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$$

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

پاسخ: ۱



کانون‌های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  است.  
الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.  
ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه‌ی قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

الف)  $O \left| \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right.$  مرکز  $FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2C \Rightarrow C = 4$

ب)  $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$

پاسخ: ۱

۸۸

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.  
- شعاع دایره‌ای به معادله  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ ۲

۸۹

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.  
- هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ درست

۹۰

معادله سهمی را بنویسید که رأس  $A(1, 2)$  و  $F(1, -2)$  کانون آن باشد، و سپس معادله خط هادی آن را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

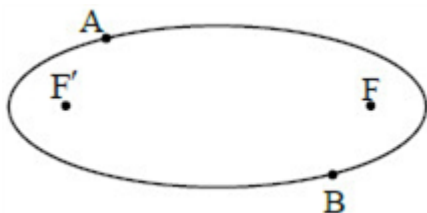
سهمی رو به پایین و  $a = 4$

$$(x - 1)^2 = -16(y - 2) \quad \text{معادله سهمی:}$$

$$y = 6 \quad \text{معادله خط هادی:}$$

۹۱

دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و  $F'$  کانون‌های بیضی‌اند اگر  $AF' = BF$  باشد ثابت کنید دو پاره‌خط AF و  $BF'$  موازی‌اند.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم. نقطه A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی

$$AF + AF' = 2a \quad (1)$$

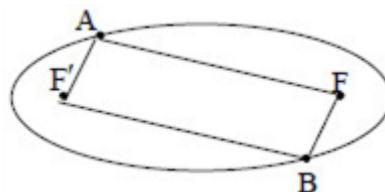
نقطه B روی بیضی قرار دارد.

$$BF + BF' = 2a \quad (2)$$

از ۱ و ۲ و فرض  $(AF' = BF)$  نتیجه می‌شود:  $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی  $AFBF'$  یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند.

$$AF \parallel BF'$$



۹۲

وضعیت دو دایره  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  و  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

پاسخ: ۱ مرکز و شعاع دایره  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  برابر است با:  $O(1, 0), r = 1$

و مرکز و شعاع دایره  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  برابر  $O'(0, 1), r' = 1$

$$r - r' = 0 \text{ و } r + r' = 2 \text{ و } OO' = \sqrt{2}$$

$$|r - r'| < OO' < r + r'$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

۹۳

معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x + 3y = -5$  بر آن مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}, r = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

پاسخ: ۱

۹۴

مرکز دایره  $O(2, -1)$  و شعاع آن برابر  $r = 2$  است. معادله دایره برابر با:  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  است.

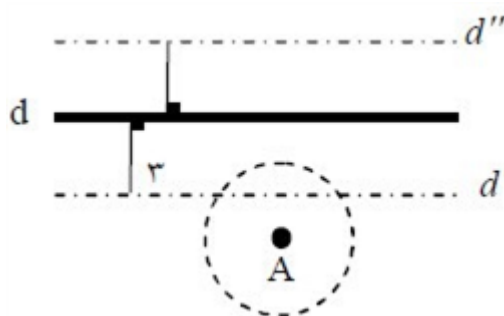
نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. بحث کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد دو خط  $d', d''$  در طرفین خط d و به موازات d است این دو خط را رسم می‌کنیم محل برخورد دو خط  $d', d''$  با دایره مطابق شکل جواب مسئله است.

اگر یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  دایره را قطع کند مساله ۲ جواب دارد.  
اگر یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  بر دایره مماس باشد مساله ۱ جواب دارد.  
اگر هیچ‌یک از دو خط  $d'$  یا  $d''$  دایره را قطع نکند مساله جواب ندارد.

۹۵



اگر معادله دایره به شکل  $x^2 + y^2 + (x + 1) = 4$  باشد:  
الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.  
ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

الف)  $O(-1, 0), R = 2$

ب)  $(1, 0), (-3, 0)$

پاسخ: ۱

۹۶

خروج از مرکز یک بیضی افقی  $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن  $(-4, -1)$  و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.  
الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.  
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\text{الف) } c = \frac{4}{5}a \Rightarrow 9 + \frac{16}{25}a^2 = a^2 \Rightarrow a = 5, c = 4 \Rightarrow FF' = 8, AA' = 10$$

ب)  $A(1, -1), A'(-9, -1)$

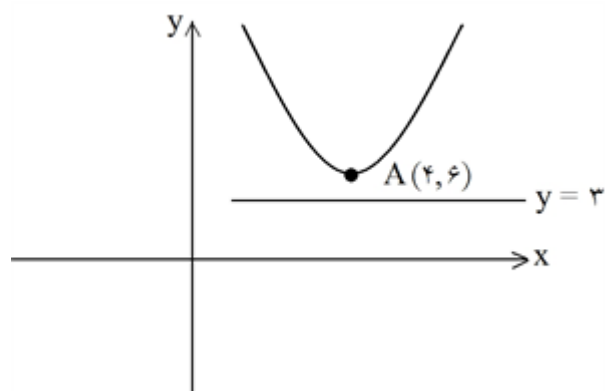
پاسخ: ۱

۹۷

۹۸	<p>عبارت مناسب را انتخاب کنید. اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل ..... نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ دایره</p>
۹۹	<p>معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط <math>۳x + ۴y = ۱</math> مماس بوده و مرکز آن <math>(۱, ۲)</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $R = \frac{ ۳ \times ۱ + ۴ \times ۲ - ۱ }{\sqrt{۳^2 + 4^2}} = ۲, (x - ۱)^2 + (y - ۲)^2 = ۴$
۱۰۰	<p>کانون‌های یک بیضی نقاط <math>(۲, ۵)</math> و <math>(۲, -۳)</math> و <math>a = ۵</math> است. مختصات مرکز و اندازه‌ی قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $O(۲, ۱), c = ۴ \Rightarrow ۲۵ = b^2 + ۱۶ \Rightarrow ۲b = ۶$
۱۰۱	<p>عبارت مناسب را انتخاب کنید. اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی ..... خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ بیضی</p>
۱۰۲	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن <math>O(۰, ۱)</math> باشد و با دایره به معادله <math>x^2 + y^2 - ۸x + ۴y + ۱۶ = ۰</math> مماس داخل باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $(x - ۴)^2 + (y + ۲)^2 = ۴ \Rightarrow O'(۴, -۲), r' = ۲$ $OO' = \sqrt{۴^2 + ۳^2} = ۵$ $ r - r'  = OO' \Rightarrow  r - ۲  = ۵ \Rightarrow \begin{cases} r = ۷ \\ r = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{غ ق ق} \\ \text{غ ق ق} \end{matrix} \Rightarrow x^2 + (y - ۱)^2 = ۴۹$

معادله‌ی سهمی را بنویسید که رأس  $A(4, 6)$  و  $y = 3$  معادله خط هادی آن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹



پاسخ: ۱ ۱۰۳

با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه سهمی رو به بالا است و  $a = 3$  فرم استاندارد سهمی به صورت:

$$(x - h)^2 = 4a(y - k) \Rightarrow (x - 4)^2 = 12(y - 6)$$

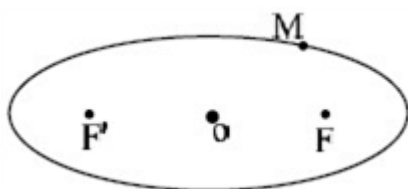
مختصات کانون، رأس و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله  $y^2 - 6y + 16x + 25 = 0$  را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ فرم استاندارد سهمی به صورت  $(y - 3)^2 = -16(x + 1)$  است. سهمی افقی و دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. راس سهمی نقطه  $A(-1, 3)$  است. و  $a = 4$  مختصات کانون آن نقطه  $F(-a + h, k) = (-5, 3)$  است. معادله خط هادی سهمی به صورت  $x = a + h = -1$  است.

۱۰۴

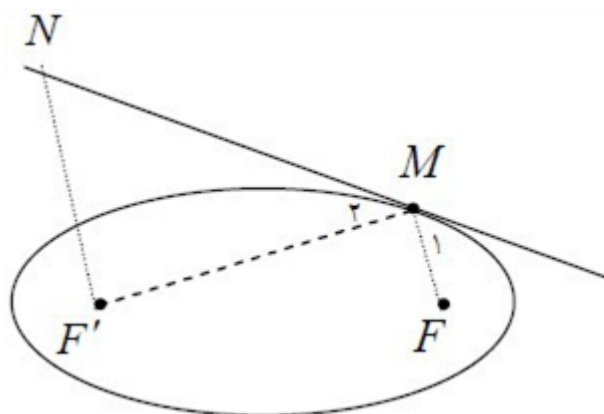
در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خط موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید:  $NF' = MF'$



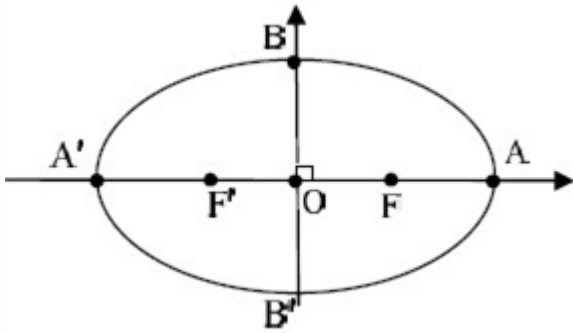
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ مجموع  $MF + MF'$  کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های  $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ . از طرفی:  $NF' \parallel MF$  و d مورب، در نتیجه  $\widehat{N} = \widehat{M}_1$  نتیجه می‌شود  $\widehat{N} = \widehat{M}_2$ . مثلث MNF' متساوی‌الساقین است. یعنی  $MF' = NF'$ .

۱۰۵



مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای  $x$  و  $y$  منطبق هستند و فاصله  $F$  از هر دو نقطه  $O$  و  $A$  برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



۱۰۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$OF = c = 4, OA = a = 8 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2b = 8\sqrt{3}$$

پاسخ: ۱

وضعیت خط  $x - y - 1 = 0$  و دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$  را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

پاسخ: ۱ فاصله مرکز دایره تا خط  $x - y - 1 = 0$  را به دست آورده با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2 \Rightarrow O(1, -2), r = \sqrt{2}$$

$$d = \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

چون فاصله  $O$  تا خط برابر شعاع دایره است پس خط بر دایره مماس است.

۱۰۷

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که  $O(3, 1)$  مرکز آن بوده و بر خط به معادله  $4x + 3y + 5 = 0$  مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|12 + 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

پاسخ: ۱

۱۰۸

درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در دستگاه  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + by = c \end{cases}$ ، اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) هرگاه صفحه‌ی  $P$  بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

ت) رابطه  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$  معادله‌ی یک دایره است.

۱۰۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

ت) نادرست

پ) درست

ب) درست

الف) نادرست

پاسخ: ۱

	<p>جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) در ماتریس قطری <math>A = \begin{bmatrix} 3 &amp; 0 \\ m-1 &amp; 4 \end{bmatrix}</math> مقدار <math>m</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) اگر <math>A</math> یک ماتریس <math>3 \times 3</math> و <math> A  = 5</math> باشد آن گاه <math>\left  \frac{1}{2}A \right </math> برابر ..... است.</p> <p>پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر ..... است.</p> <p>ت) سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ الف) <math>m = 1</math> ب) <math>\frac{5}{8}</math> پ) <math>\frac{1}{2}</math> ت) نقطه</p>
	<p>کانون‌های یک بیضی نقاط <math>(1, 3)</math> و <math>(1, -5)</math> است.</p> <p>الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.</p> <p>ب) اگر <math>a = 5</math> باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ الف) مرکز <math>O \left( \frac{1+1}{2} = 1, \frac{3-5}{2} = -1 \right)</math> <math>FF' =  3 - (-5)  = 8 = 2c \Rightarrow c = 4</math></p> <p>و معادله قطر بزرگ: <math>x = 1</math></p> <p>ب) <math>b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow BB' = 2b = 6, e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}</math></p>
	<p>سهمی <math>y^2 = 4x - 4</math> مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ <math>y^2 = 4(x-1) \Rightarrow S(1, 0), F(2, 0)</math></p> <p><math>(x-2)^2 + y^2 = 9, \begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ق ق} \\ x = -3 \text{ غ ق} \end{cases}</math></p> <p><math>M(3, 2\sqrt{2}), M'(3, -2\sqrt{2})</math></p>

الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی  $x^2 - 4y + 8x = 0$  را به دست آورید.  
ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ الف) فرم استاندارد سهمی به صورت  $(y + 4) = 4(x + 4)^2$  است. سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا

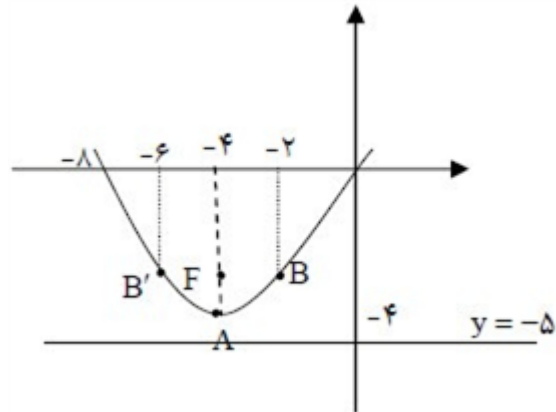
باز می‌شود. راس سهمی نقطه  $A(-4, -4)$  است و  $a = 1$ ، مختصات کانون آن نقطه

$F(-4, -4 + 1) = (-4, -3)$  است. معادله خط هادی سهمی به صورت  $y = -4 - 1 = -5$

است.

ب) نقاط کمکی  $B(-2, -3)$  و  $B'(-6, -3)$

رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی



۱۱۳

اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

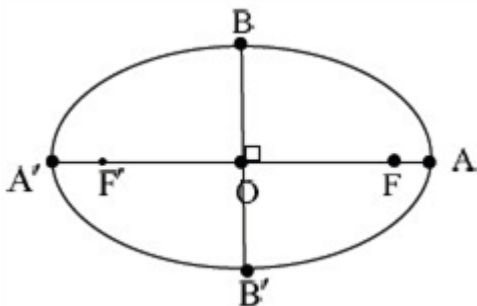
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ در بیضی فاصله کانون تا مرکز آن برابر  $c$  است. پس  $c = 5$  و داریم:

$$2b = 24, b = 12, c = 5 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow a = 13, \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

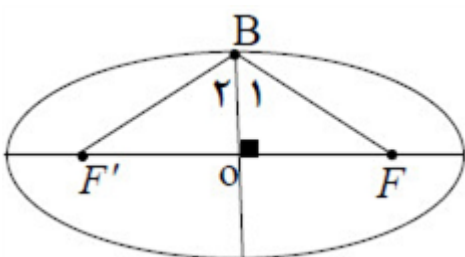
۱۱۴

در بیضی مقابل طول قطر بزرگ  $\sqrt{2}$  برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه  $\widehat{BFB'}$  چند درجه است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ در بیضی  $OB = b$  و  $OF = c$  و  $BF = a$  است. بنابر فرض سؤال داریم:

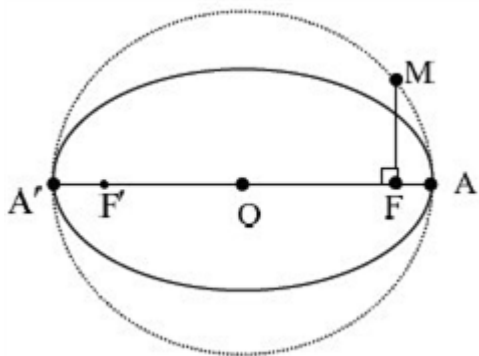


$$\begin{aligned} 2a &= \sqrt{2}(2b) \Rightarrow a = b\sqrt{2} \Rightarrow \cos B_1 = \frac{OB}{BF} \\ &= \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B_1 = 45^\circ \end{aligned}$$

پس  $\widehat{BFB'} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

۱۱۵

قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۱۱۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$OM = OA = a$$

پاسخ: ۱

$$\triangle OMF : OF^2 + MF^2 = OM^2 \Rightarrow c^2 + MF^2 = a^2 \Rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

وضعیت نقطه  $A(1, -2)$  نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

۱۱۷

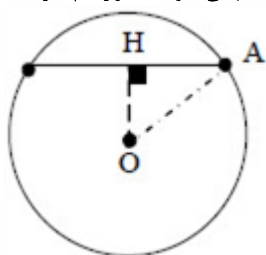
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow o(1, -1), r = \sqrt{2}$$

$$OA = 1 \Rightarrow OA < r$$

نقطه داخل دایره قرار دارد.

معادله دایره‌ای را بنویسید که  $O(-1, -1)$  مرکز آن بوده و روی خط  $2x + y = 2$  وتری به طول ۴ ایجاد کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



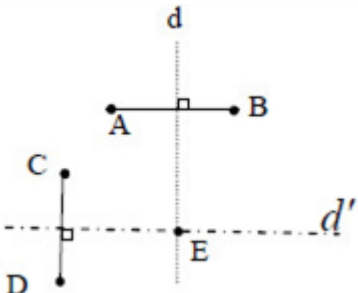
$$OH = \frac{|2(-1) + 1(-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\triangle AOH (H = 90^\circ) : OH^2 + AH^2 = OA^2$$

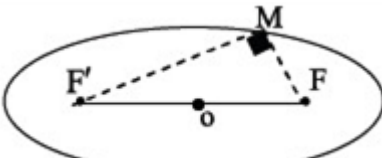
$$\Rightarrow (\sqrt{5})^2 + 2^2 = r^2 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

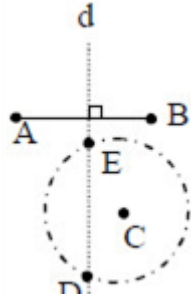
پاسخ: ۱

۱۱۸

<p>نقاط <math>A, B, C</math> و <math>D</math> در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله و از <math>C</math> و <math>D</math> نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> مکان هندسی نقاطی که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط <math>AB</math> است این خط را <math>d</math> می‌نامیم و مکان هندسی نقاطی که از نقطه <math>C</math> و <math>D</math> به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط <math>CD</math> است این خط را <math>d'</math> می‌نامیم. بنابراین نقطه برخورد خطوط <math>d</math> و <math>d'</math> جواب مسئله است. (نقطه <math>E</math>) اگر خطوط <math>d</math> و <math>d'</math> متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد. اگر خطوط <math>d</math> و <math>d'</math> منطبق باشند مسئله بی‌شمار جواب دارد. اگر خطوط <math>d</math> و <math>d'</math> موازی باشند مسئله جواب ندارد.</p> 	<p>۱۱۹</p>
<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.</p> <p>ب) اگر <math>A</math> یک ماتریس <math>3 \times 3</math> و <math> A  = 2</math> باشد آن‌گاه <math> 2A  = 16</math> است.</p> <p>پ) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت <math>r</math> که بر دایره‌ی <math>C(O, r)</math> در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره <math>C'(O, 2r)</math> است.</p> <p>ت) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> الف) نادرست      ب) درست      پ) درست      ت) نادرست</p>	<p>۱۲۰</p>
<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A = \begin{bmatrix} a &amp; 8 \\ 3 &amp; -4 \end{bmatrix}</math> وارون پذیر نباشد، مقدار <math>a</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن‌را یک ماتریس ..... می‌نامیم.</p> <p>پ) اگر مجموع فواصل نقطه <math>A</math> از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه <math>A</math> در ..... بیضی است.</p> <p>ت) هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از ..... خواهد گذشت.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> الف) ۶-      ب) اسکالر      پ) بیرون      ت) کانون سهمی</p>	<p>۱۲۱</p>
<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>در حالتی که صفحه‌ی <math>P</math> بر محور سطح مخروطی (<math>l</math>) عمود نباشد و با مولد آن (<math>d</math>) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p> <p><b>پاسخ: ۱</b> درست (۰/۲۵)</p>	<p>۱۲۲</p>

۱۲۳	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک ..... می‌شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ دایره (۰/۲۵)</p>
۱۲۴	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ ویژگی مشترک (۰/۲۵)</p>
۱۲۵	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>
۱۲۶	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. معادله‌ی <math>x^2 + y^2 + ax + by + c = 0</math> معادله یک دایره است اگر و تنها اگر <math>a^2 + b^2 &lt; 4c</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۱۲۷	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>
۱۲۸	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را ..... می‌نامیم.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ سهمی</p>
۱۲۹	<p>سهمی <math>y^2 = 4x - 4</math> مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $y^2 = 4(x - 1) \rightarrow S(1, 0), a = 1, F(2, 0)$ $(x - 2)^2 + y^2 = 9, \begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \rightarrow x = \pm 3$ $M(3, 2\sqrt{2}), M'(3, -2\sqrt{2})$

	<p>کانون‌های یک بیضی نقاط <math>(۱, ۳)</math> و <math>(۱, -۵)</math> است.  الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.  ب) اگر <math>a = ۶</math> باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>الف) <math>O \left  \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right.</math> مرکز <math>FF' =  3 - (-5)  = 8 = 2c \Rightarrow c = 4</math> پاسخ: ۱</p> <p>فاصله کانونی برابر ۸ است.</p> <p>ب) <math>b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}, e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}</math></p>	۱۳۰
	<p>وضعیت دایره‌ی <math>(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4</math> و خط <math>y = -1</math> را نسبت به هم مشخص کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p><math>O(2, -3), r = 2, d = \frac{ -3+1 }{\sqrt{0+1}} = 2</math> پاسخ: ۱</p> <p>خط و دایره بر هم مماس هستند.</p>	۱۳۱
	<p>وضعیت خط <math>3x + y = 0</math> را نسبت به دایره <math>x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0</math> مشخص کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p><math>(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \rightarrow O(2, 2), r = 1</math> پاسخ: ۱</p> <p><math>d = \frac{ 3(2) + 2 }{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \rightarrow d &gt; r</math> خط و دایره نقطه برخورد ندارند.</p>	۱۳۲
	<p>نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p><math>c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4</math> پاسخ: ۱</p> <p><math>MF + MF' = 2a = 10 \rightarrow MF' = 10 - MF</math></p> <p><math>(MF)^2 + (MF')^2 = (FF')^2 \rightarrow (MF)^2 + (10 - MF)^2 = 8^2 \rightarrow MF = 5 \pm \sqrt{7}</math></p>	۱۳۳
	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن <math>O(2, -2)</math> بوده و بر دایره به معادله <math>x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4</math> مماس خارج باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p><math>(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \rightarrow O' = (-1, 2), r' = 3</math> پاسخ: ۱</p> <p><math>OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \rightarrow r + r' = 5 \rightarrow r = 2</math></p> <p><math>(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4</math></p>	۱۳۴

۱۳۵	<p>اگر در یک بیضی داشته باشیم <math>a = ۵</math> و <math>b = ۳</math> در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $c^2 = a^2 - b^2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow 2c = ۸$	
۱۳۶	<p>نقاط <math>A</math>، <math>B</math> و <math>C</math> در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله و از <math>C</math> به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>مکان هندسی نقاطی که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره خط <math>AB</math> و مکان هندسی نقاطی که از نقطه <math>C</math> به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز <math>C</math> و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف <math>(d)</math> و دایره جواب مسئله است. (نقاط <math>E</math> و <math>D</math>) اگر خط عمودمنصف <math>(d)</math> و دایره یک‌دیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد و اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد و در صورتی که یک‌دیگر را قطع کنند مسئله جواب ندارد.</p> 	
۱۳۷	<p>وضعیت خط <math>x + y = ۳</math> را نسبت به دایره <math>x^2 + y^2 - ۲x - ۳ = ۰</math> مشخص کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $O(۱, ۰), r = ۲$ $d = \frac{ ۱(۱) + ۱(۰) - ۳ }{\sqrt{۱^2 + 1^2}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} < ۲ \Rightarrow \text{مقاطعند}$	
۱۳۸	<p>بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\begin{cases} 2a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \\ 2b = ۶ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = ۴, \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$	
۱۳۹	<p>اگر نقطه <math>A(۲, ۳)</math> رأس سهمی و <math>y = ۷</math> معادله خط هادی سهمی باشد. الف) معادله سهمی را بنویسید. ب) مختصات کانون سهمی را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، دهانه سهمی رو به پایین است و <math>a = ۴</math> پس معادله سهمی به صورت:</p> $(x - ۲)^2 = -۱۶(y - ۳)$ <p>ب) مختصات کانون سهمی برابر <math>F = (۲, -۱)</math></p>	

وضعیت خط  $x + y = 2$  و دایره  $x^2 + y^2 = 2$  را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

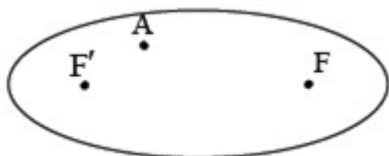
$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(0, 0), r = \sqrt{2} \xrightarrow{x+y-2=0} d = \frac{|1(0) + 1(0) - 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} = r$$

پاسخ: ۱

خط بر دایره مماس است.

۱۴۰

در شکل مقابل نقطه A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F و F' کوچک‌تر از قطر بزرگ بیضی است.

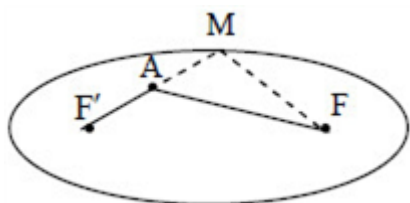


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاره خط F'A را ادامه می‌دهیم تا بیضی را در نقطه M قطع کند M را به F وصل می‌کنیم نقطه M روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی داریم:

پاسخ: ۱

۱۴۱



$$MF' + MF = 2a$$

$$AF < MA + MF$$

در مثلث  $\triangle MAF$  بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم:  
به طرفین نامساوی مقدار  $AF'$  را اضافه می‌کنیم.

$$AF + AF' < (MA + AF') + MF = MF' + MF = 2a$$

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه‌ی  $O(-2, 3)$  مرکز آن و  $M(1, -1)$  یک نقطه از آن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$r = OM = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

پاسخ: ۱

۱۴۲

وضعیت دو دایره به معادلات  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ دو دایره متخارج هستند. ۰/۲۵

$$\underbrace{O_1 = (-1, 2), r_1 = 1}_{\cdot/5}, \underbrace{O_2 \left| \begin{array}{l} -a \\ 2 \\ b \\ -2 \end{array} \right. = 1, r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2}_{\cdot/75}$$

$$\underbrace{d = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2}}_{\cdot/5} = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{20} > 1+2=3$$

۱۴۳

در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.  
هرچه خروج از مرکز بیضی ..... (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ کوچکتر ۰/۲۵

۱۴۴

نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

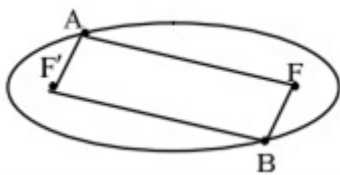
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است، این دایره را رسم می‌کنیم محل برخورد دایره و خط d جواب مساله است.  
بحث: اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد.  
اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله ۱ جواب دارد.  
اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

۱۴۵

دو نقطه  $A$  و  $B$  مطابق شکل روی بیضی و نقاط  $F$  و  $F'$  کانونهای بیضی اند.

اگر  $AF' = BF$  باشد ثابت کنید دو پاره خط  $AF$  و  $BF'$  موازی اند.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ نقاط  $A$  و  $B$  را به کانونهای بیضی وصل می‌کنیم

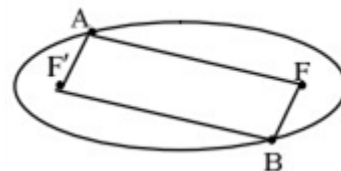
نقطه  $A$  روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی (۱)  $AF + AF' = 2a$  (۰/۲۵)

نقطه  $B$  روی بیضی قرار دارد (۲)  $BF + BF' = 2a$  (۰/۲۵)

از (۱) و (۲) و فرض  $(AF' = BF)$  نتیجه می‌شود  $AF = BF'$  (۰/۲۵)

بنابراین چهارضلعی  $AFBF'$  یک متوازی‌الاضلاع است (۰/۲۵) در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند.

$AF \parallel BF'$  (۰/۲۵)



۱۴۶

سهمی  $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$  مفروض است.

الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به‌دست آورید.

ب) نمودار آن را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

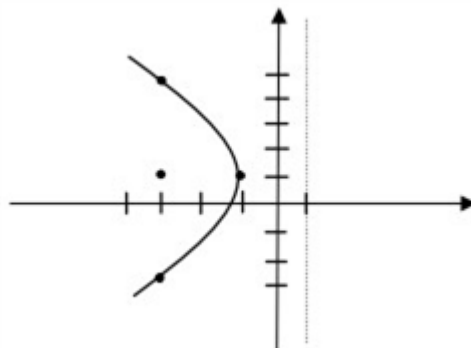
پاسخ: ۱ الف)

$$(y - 1)^2 = -8(x + 1) \quad (0/25) \rightarrow A(-1, 1) \quad (0/25)$$

دهانه سهمی به چپ و  $a = 2$ ، خط هادی  $x = 1$  و کانون سهمی  $F(-3, 1)$  (۰/۲۵)

ب) نقاط کمکی:  $B = (-3, 5)$ ,  $B' = (-3, -3)$  (۰/۵)

رسم شکل (۰/۵)



۱۴۷

معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x + 3y = -5$  بر آن مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (} 0/25 \text{)} \\ y = -1 \text{ (} 0/25 \text{)} \end{cases}, r = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ (} 0/25 \text{)}$$

پاسخ: ۱

۱۴۸

مرکز دایره  $O(2, -1)$  و شعاع آن برابر  $r = 2$  است. معادله دایره برابر با:  
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 \text{ (} 0/25 \text{)}$  است.

در نقطه  $A(2, 3)$  روی دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$O(1, 1) \xrightarrow{0/25} m_{oa} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \xrightarrow{0/25} m' = -\frac{1}{2} \xrightarrow{0/25} y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \text{ (} 0/25 \text{)}$$

پاسخ: ۱

۱۴۹

اگر خروج از مرکز بیضی برابر  $\frac{3}{5}$  و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}a, b = 8 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = 64 + \frac{9}{25}a^2 \rightarrow a = 10, c = 6 \text{ (} 0/5 \text{)}$$

پاسخ: ۱

۱۵۰

طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله کانونی ۱۲  $\text{(} 0/25 \text{)}$

$$(x = 4 \Rightarrow y = 2) \Rightarrow A(3, 2)$$

خط بازتاب از کانون می‌گذرد.  $(4a = 8 \Rightarrow a = 2) \Rightarrow F(0, 2), y = 2$

$$S = (1, -3), a = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = -4(y + 3)$$

$$\frac{S_{\text{FBF}}}{S_{\text{BA} \cdot O}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2c \times b}{\frac{1}{2} \times a \times b} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{8}$$

$$BB' = 2b = 2 \Rightarrow b = 3, 2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \Rightarrow AA' = 2a = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow O(2, -1) \Rightarrow OH = \frac{1}{\sqrt{2}}, r^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{5}{2}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$$

$$O(3, -2), R = 5$$

$$O'(0, 0), R' = 3$$

$OO' = 3\sqrt{5}, |R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow$  دو دایره متقاطع هستند

۱

۲

۳

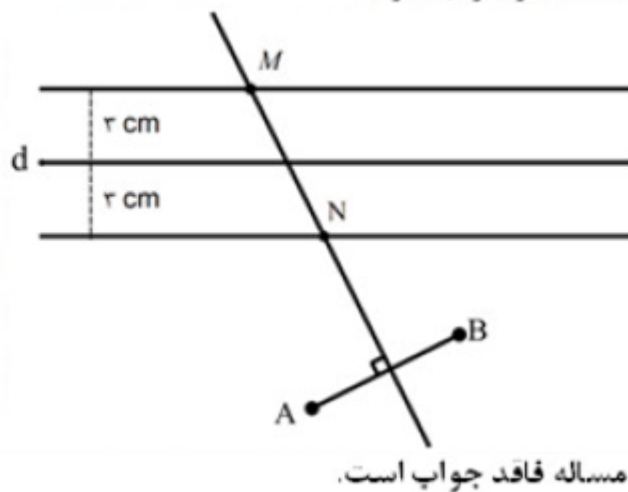
۴

۵

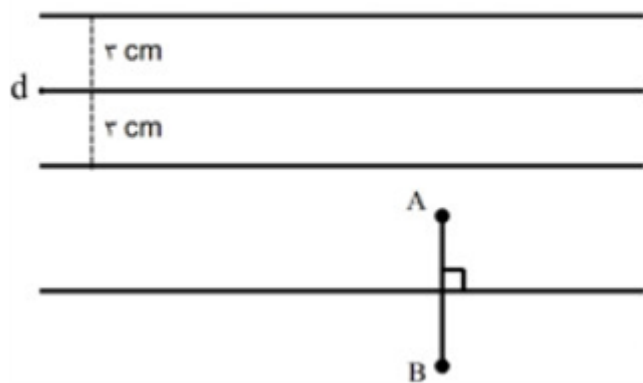
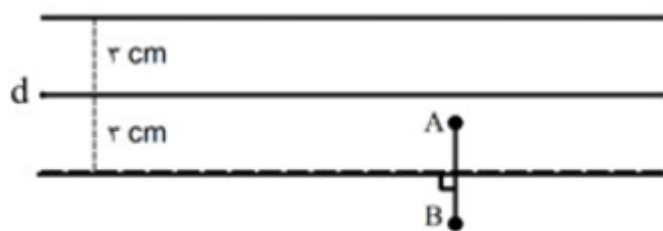
۶

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ cm باشد، دو خط موازی ی به فاصله ۳ cm از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد عمودمنصف AB و دو خط موازی d، جواب مسئله است.

مسئله دو جواب دارد.



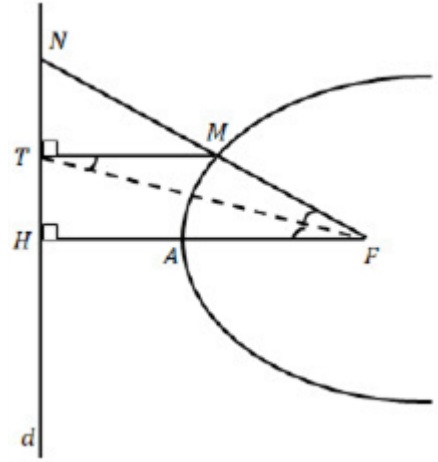
مسئله بی شمار جواب دارد.



$$x = ۱$$

بنا به تعریف سهمی  $MT = MF$  و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است پس  $\widehat{MFT} = \widehat{MFT}$  از طرفی  $MT \parallel FH$  و خط مورب می باشد پس بنابر قضیه خطوط موازی و مورب  $\widehat{MTF} = \widehat{TFH}$  از دو رابطه اخیر نتیجه می شود که  $TF$  نیمساز زاویه  $\widehat{NFH}$  می باشد.  
با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NH}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{\frac{1}{2}FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$



$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{\Delta OBF'}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{\frac{1}{2}OB \times OF'}{\frac{1}{2}OB \times OA} = \frac{\frac{1}{2}bc}{\frac{1}{2}ba} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x \quad \text{روش اول:} \quad (\text{ص ۴۵})$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (3 - x)^2 - 2(3 - x) - 3 = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

دلتای معادله اخیر مثبت است بنابراین دو ریشه متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع اند.  
روش دوم:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - y - 3 = 0 &\Rightarrow O(0, 1), r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 12} = 2 \\ OH = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{2} < 2 \Rightarrow OH < r$$

پس خط و دایره متقاطعند.

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \Rightarrow O'(2, 3), r' = 4 \quad (\text{ص ۴۴})$$

$$d = OO' = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{8}$$

$$|r - r'| = d \Rightarrow |r - 4| = \sqrt{8} \Rightarrow r = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = (4 \pm 2\sqrt{2})^2$$

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را در نظر می‌گیریم. اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت. اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد. اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت. (ص ۳۹)

الف) نادرست (ص ۲۲)

ب) درست (ص ۳۹)

پ) درست (ص ۷۵)

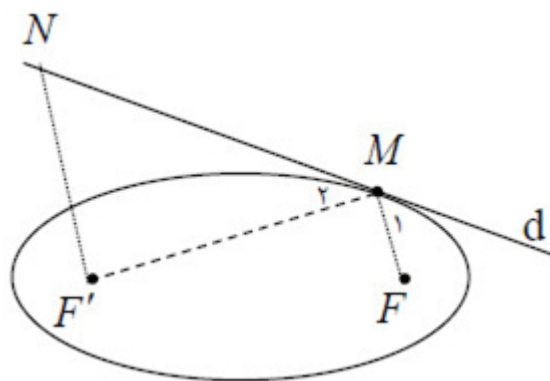
مجموع  $MF + MF'$  کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های  $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

از طرفی:  $NF' \parallel MF$  و d مورب، در نتیجه  $\widehat{N} = \widehat{M}_1$

نتیجه می‌شود  $\widehat{N} = \widehat{M}_2$

مثلث  $MNF'$  متساوی‌الساقین است.

یعنی  $MF' = NF'$ . (ص ۵۷)



$$F(\alpha + a, \beta) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad (\text{ص } 52 \text{ و } 58)$$

$$\left. \begin{matrix} x = \alpha - a \\ x = -3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha - a = -3 \xrightarrow{\alpha + a = 1} \begin{cases} a = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$(y - 2)^2 = 8(x + 1)$$

روش دوم: برای حل مسئله با استفاده از شکل، نمره لحاظ گردد.

$$BB' = \frac{1}{2}AA' \Rightarrow 2b = \frac{1}{2}(2a) \Rightarrow a = 2b$$

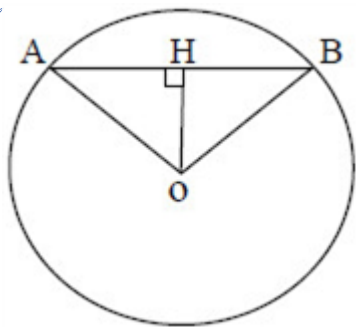
$$\cos \widehat{F'BO} = \frac{BO}{BF'} = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{F'BO} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{F'BF} = 120^\circ$$

روش دوم: برای حل مسئله با استفاده از تانژانت زاویه  $\widehat{F'BO}$  نمره لحاظ گردد. (ص ۵۸)

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow O(1, -2), R = 1$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow O'(-3, -1), R' = 2, d = OO' = \sqrt{17}$$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند.  $3 < \sqrt{17} < 5$  (ص ۴۶)



$$OH = \frac{|3(0) + 4(1) + 6|}{\sqrt{9+16}} = 2$$

$$AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow AH = \sqrt{5} \Rightarrow R = 3$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \Rightarrow (0, 4) \\ y = -2 \Rightarrow (0, -2) \end{cases} \text{ (ص ۴۴)}$$

۲۰ مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره خط AB است.

مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره خط CD است.

محل برخورد دو عمودمنصف، جواب مسأله است.

حالات‌های ممکن: یک جواب، بدون جواب، بی‌شمار جواب. (ص ۳۹)

۲۱ درست (ص ۵۶)

۲۲ بیضی (ص ۳۵)

$$\frac{a'}{a} = \frac{\frac{b^2}{4(2h)}}{\frac{b^2}{4h}} = \frac{1}{2}$$

۲۳ نصف می‌شود. (ص ۵۹)

۲۴ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی قائم و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد.

فاصله کانونی سهمی برابر با  $a = AF = 4$  است.

معادله آن برابر است با:  $(x - 1)^2 = -16(y - 2)$

معادله خط هادی سهمی  $y = 6$  است. (ص ۵۸)

۲۵ نقطه M روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

$$MF + MF' = 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{7} \xrightarrow{a=7} c = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 4\sqrt{3} \text{ (ص ۵۸)}$$

۲۶ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:

$$AF + AF' = 2a = BF + BF' \xrightarrow{AF' = BF'} AF = BF'$$

دو مثلث  $AFB$  و  $BFF'$  بنا به حالت  $(AF = BF', AF' = BF, FF' = FF')$  برابری سه ضلع همنهشت هستند،

نتیجه دو زاویه  $\widehat{AFF'} = \widehat{BFF'}$ ، مثلث  $MFF'$  متساوی‌الساقین است و  $MF = MF'$  یعنی M روی عمودمنصف

پاره خط  $AFF'$  (قطر کوچک بیضی) است.

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow O'(-1, 1), r' = \sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 - c \Rightarrow O(1, -1), r = \sqrt{2 - c}$$

$$OO' = 2\sqrt{2}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2 - c} \Rightarrow c = 0 \text{ (ص ۴۳)}$$

$$OH = \frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 3, OH = R, (x-1)^2 + y^2 = 16$$

روش اول:

روش دوم: با استفاده از رسم شکل و پیدا کردن شعاع و نوشتن معادله دایره (ص ۴۳)

۲۹ نادرست (ص ۵۱)

۳۰ نیمساز (ص ۳۹)

$$\begin{cases} y^2 + 4x + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (-4x - 5) = 25 \Rightarrow x^2 - 4x - 30 = 0$$

$$x = -3, x = 10 \text{ (ص ۵۸)}$$

$$\begin{cases} x = -3 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow (-3, 4), (-3, -4) \\ x = 10 \Rightarrow y^2 = -45 \end{cases}$$

۳۲ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

مختصات رأس سهمی  $A(-1, 2)$ ، در این سهمی  $a = AF = 2$

$$(y-2)^2 = -8(x+1)$$

معادله آن برابر است با:

(ص ۵۸)

$$DF + DF' = 2a$$

نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورت داریم:

$$DF^2 + FF'^2 = DF'^2 \Rightarrow DF^2 + (2c)^2 = (2a - DF)^2$$

$$DF = \frac{a^2 - c^2}{a} \xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2} DF = \frac{b^2}{a}$$

$$PF + PF' = 2a \Rightarrow \sqrt{9 + m^2} + \sqrt{9 + m^2} = 10 \Rightarrow m = \pm 4 \text{ (ص ۴۸)}$$

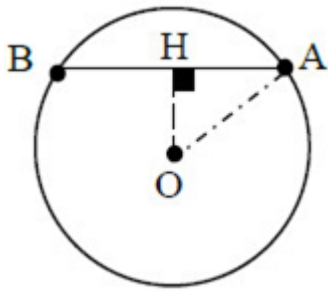
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

(ص ۴۱)

از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.

۳۶



$$AH = \frac{1}{2}AB = 3$$

$$OH = \frac{|3(2) - 4(-1) + 10|}{\sqrt{9+16}} = 4$$

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow r^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25, (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$$

۳۷ ۵ (ص ۳۹)

۳۸ نادرست (ص ۳۹)

۳۹ الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

در این سهمی  $a = 1$  و معادله آن برابر است با:

$$F(-a + h, k) = (-1 + 2, 3) = (1, 3)$$

پ) مختصات محل برخورد با محور طول‌ها برابر است با:

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}, \left( \frac{-1}{4}, 0 \right) \text{ (ص ۵۸ و ۵۴)}$$

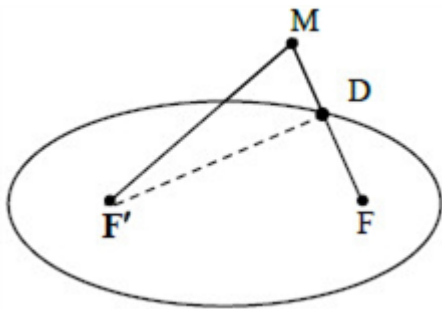
$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4} \xrightarrow{a=1} c = 3 \Rightarrow AF = a - c = 2 \text{ (ص ۴۹)}$$

۴۰

۴۱ از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد بنا بر تعریف

$$DF + DF' = 2a$$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF}$$

$$DF + MD + MF' > DF + DF' \\ \Rightarrow MF + MF' > 2a$$

(ص ۴۷)

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4, O = (1, 1), r = 2, d = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴۲

$$d < r$$

خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 16 + 36 > 4a \Rightarrow a < 13 \text{ (ص ۴۶)}$$

۴۳

مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند عمود منصف پاره خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و A می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط  $d'$ ,  $d''$  می‌باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط  $d'$ ,  $d''$  با خط A جواب مساله است.

الف - اگر خط A دو خط  $d'$ ,  $d''$  را قطع کند مسئله دو جواب دارد.

ب - اگر خط A بر یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ - اگر خط A هیچ‌یک از دو خط  $d'$ ,  $d''$  را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

رسم یک مورد شکل برای مساله الزامی است. (ص ۳۸)

۴۵ درست (ص ۵۱)

۴۶ بیضی (ص ۳۵)

$$\text{الف)} \quad O\left(-\frac{a}{r}, -\frac{b}{r}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{r}\sqrt{a^2 + b^2} - 4c = 3$$

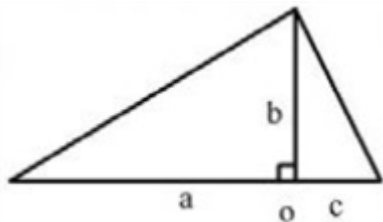
ب) خیر زیرا:  $(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \Rightarrow FF' = 8$$

$$r = \frac{|3 \times 1 + 4(4) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$$

$$\text{الف)} \quad \begin{matrix} a=5 \\ b=4 \end{matrix} \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow A'F = 8$$

(ب)



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}(5+3) \times 4 = 16$$

۵۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$O \Big|_{-2}^1, R = \sqrt{1+4-1} = \sqrt{4} = 2$$

$$A \Big|_{-2}^1 \Rightarrow OA = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2} = 2 \Rightarrow OA = R$$

۵۲  $\frac{3}{4}$

بنا به تعریف سهمی  $MF = MT$  مثلث MFT متساوی الساقین است.

$$\widehat{MTF} = \widehat{TFM} (۱)$$

از طرفی بنا به خطوط موازی  $MT \parallel FH$  و مورب FT نتیجه می شود

$$\widehat{MTF} = \widehat{TFH} (۲)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH} \quad (\text{ص } ۵۸)$$

روش دوم:

MT  $\parallel$  FH با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left. \begin{aligned} \frac{NM}{MF} &= \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} &= \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

الف) معادله متعارف سهمی  $(x-۱)^۲ = ۸(y-۱)$  و فاصله کانونی  $a = ۲$

ب) رأس سهمی  $(۱, ۱)$  معادله خط هادی  $x = -۱$  و مختصات کانون آن  $(۳, ۱)$  (ص ۵۵)

$$\text{الف) } \begin{cases} ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \\ ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۲$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۲}{۵}$$

$$\text{ب) } A(۵, ۰), A'(-۵, ۰)$$

$$F(۴, ۰), F'(-۴, ۰)$$

$$B(۰, ۳), B'(۰, -۳)$$

پ) رسم بیضی (ص ۱۴۹)

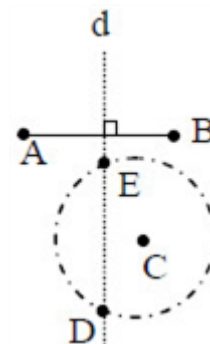
$$d = \frac{|۳(۱) - ۴(-۱) + ۳|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴ \quad (\text{ص } ۱۴۳)$$

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف d و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E)

الف) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد. (ص ۳۹)  
ب) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.

پ) در صورتی‌که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



۵۸ نادرست،  $\alpha = \beta = 65^\circ$  (ص ۵۰)

۵۹ درست (ص ۳۵)

۶۰ داخل (ص ۴۶)

۶۱ دایره (ص ۴۹)

$$r = \frac{|3 \times 0 - 4 \times 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$y^2 = 2x + 4y \Rightarrow (y - 2)^2 = 2(x + 2)$$

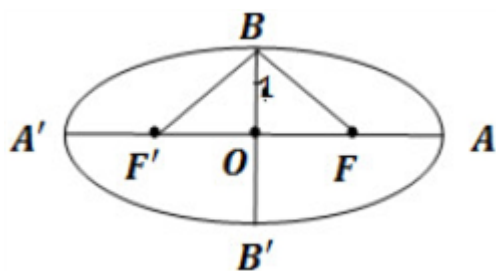
نوع افقی رو به راست رأس سهمی نقطه  $(-2, 2)$  پارامتر سهمی  $a = \frac{1}{2}$  مختصات کانون سهمی برابر با  $(-\frac{3}{2}, 2)$

معادله خط هادی برابر است با  $x = \frac{-5}{2}$  است و مختصات نقاط برخورد با محور yها برابر است با  $(0, 4)$  و  $(0, 0)$  و محور xها  $(0, 0)$

۶۴ نقطه B روی بیضی است  $BF + BF' = 2a$

از طرفی نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد  $BF = BF'$  بنابراین  $BF = BF' = a$   
در مثلث قائم‌الزاویه OFB داریم:

$$OB^2 + OF^2 = BF^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$



$$a = 2b \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 \\ \Rightarrow c = \sqrt{3}b$$

$$\operatorname{tg} B_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow B_1 = 60^\circ$$

$$\widehat{BFB'} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow O = (1, 1)$$

$$m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \text{ شیب خط مماس } m' = \frac{1}{m} = \frac{-1}{2} \text{ است، پس معادله خط مماس به صورت}$$

$$y-1 = \frac{-1}{2}(x-3) \text{ است.}$$

$$R = OM = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

الف) ماتریس

ب) مشترک

پ) خارج

ت) صفر

الف) درست

ب) درست

پ) نادرست

ت) نادرست

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 + 12} = 2, O(1, 0)$$

$$OH = \frac{|1 \times 1 + 0 \times 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow OH < R$$

خط و دایره متقاطع‌اند.

$$\text{الف) } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2\sqrt{5}$$

$$\text{ب) } A(4+3, 5), A'(4-3, 5)$$

$$\text{الف) } y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1 \Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1) \Rightarrow A = (-1, 1), a = 2$$

$$F(-3, 1), x = 1$$

ب) رسم سهمی (ص ۵۵)

در مثلث BOF داریم:

$$\cos \widehat{OBF} = \frac{BO}{BF} \xrightarrow{BF=a, BO=b} \cos \widehat{OBF} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OBF} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow F'\widehat{BF} = 2\widehat{OBF} = 60^\circ \text{ (ص ۵۸)}$$

نقطه A, A' روی بیضی قرار دارند بنا به تعریف بیضی داریم A'F' + A'F = 2a و AF' + AF = 2a. نتیجه

می‌گیریم: (ص ۴۸)

$$A'F' + A'F = AF' + AF \Rightarrow A'F' + (A'F' + FF') = AF + (AF + FF') \Rightarrow AF = A'F'$$

مرکز دایره برابر است با  $O(1, 1)$  شیب خط عمود بر دایره در نقطه  $A(2, 3)$  برابر است با:

$$m_{AO} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

شیب خط مماس بر دایره در نقطه  $A(2, 3)$  قرینه و برعکس شیب خط عمود است:

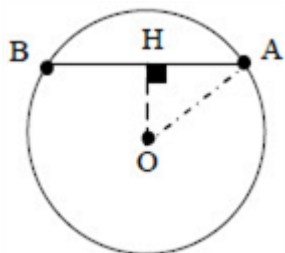
$$m' = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 2)$$

معادله خط مماس بر دایره برابر است با:

(ص ۴۵)

از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند. (ص ۴۳)



$$OH = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OA^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{10}{4} = R^2$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = \frac{10}{4} \quad \text{معادله دایره}$$

(ت)

(پ) نادرست (ص ۴۲)

(ب) نادرست (ص ۳۹)

(الف) نادرست (ص ۲۱)

درست (ص ۸۱)

اگر قطر دهانه دیش را با  $2r$  و گودی را با  $h$  نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر  $a = \frac{r^2}{16h}$  است.

$$a = \frac{(2r)(2r)}{16h} = \frac{60 \times 60}{16(9)} = 25$$

$2r = 60, h = 9$  با جایگذاری در رابطه فوق داریم:

$$\text{اگر رابطه فوق به صورت } a = \frac{r^2}{4h} = \frac{(30)^2}{4(9)} = 25 \text{ نوشته شود درست است.}$$

(ت)

(پ) پاره‌خط (ص ۴۹)

(ب) مشترک (ص ۳۶)

(الف) قطری (ص ۱۲)

yoz (ص ۷۳)

$$a = 4$$

(الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

$$(x-2)^2 = -4(4)(y-3)$$

دهانه سهمی رو به پایین است و معادله آن برابر است با:

$$F = (2, -1)$$

(ب) مختصات کانون سهمی برابر است با:

الف) ۸۱

$$\begin{cases} 2a = 10 \rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

در مثلث MFF' میانه وارد بر یک ضلع  $MO = \frac{1}{2}FF' = 4$  نصف ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب)

$$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' = 10 - MF$$

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 8^2 \Rightarrow MF = 5 - \sqrt{7}$$

$$BF = BF' \quad (1)$$

نقطه B روی عمود منصف پاره خط FF' قرار دارد در نتیجه:

فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF + BF' = 2a \xrightarrow{(1)} BF = BF' = a$$

$$OF^2 + OB^2 = BF^2 \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2$$

بنا به رابطه فیثاغورت در مثلث BOF داریم:

$$r = \frac{|3(2) + 4(1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

معادله دایره‌ای برابر است با:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \text{مرکز و شعاع دایره}$$

$$O' = (2, 1), r' = 1$$

فاصله دو مرکز برابر  $d = OO' = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$  و  $d > r + r' = 2$  دو دایره بیرون یک‌دیگرند (متخارجند).

ت) ۶

پ) دایره

ب) خط

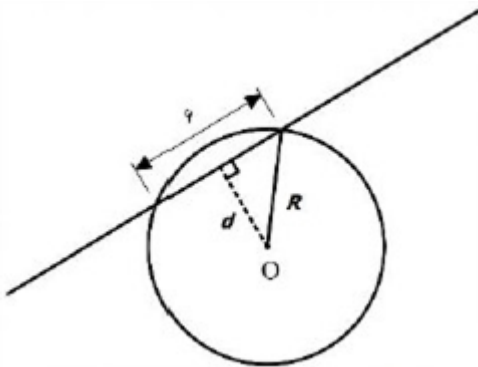
الف) ۸۵

ت) نادرست

پ) درست

ب) نادرست

الف) ۸۶ درست



$$d = \frac{|3 \times 2 - 4(-2) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$$

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$\text{الف) } O \left| \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right. \text{ مرکز } FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2C \Rightarrow C = 4$$

$$\text{ب) } b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$$

۲ ۸۹

۹۱ با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

سهمی رو به پایین و  $a = ۴$

$$(x - ۱)^2 = -۱۶(y - ۲) \quad \text{معادله سهمی:}$$

$$y = ۶ \quad \text{معادله خط هادی:}$$

۹۲ نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم. نقطه A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی

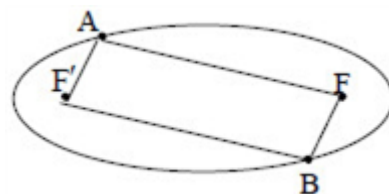
$$AF + AF' = ۲a \quad (۱)$$

نقطه B روی بیضی قرار دارد.

$$BF + BF' = ۲a \quad (۲)$$

از ۱ و ۲ و فرض  $(AF' = BF')$  نتیجه می‌شود.  $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی  $AFBF'$  یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند.  $AF \parallel BF'$



۹۳ مرکز و شعاع دایره  $x^2 + (y - ۱)^2 = ۱$  برابر است با:  $O(۱, ۰), r = ۱$

و مرکز و شعاع دایره  $x^2 + (y - ۱)^2 = ۱$  برابر  $O'(۰, ۱), r' = ۱$

فاصله دو مرکز برابر  $OO' = \sqrt{۲}$  و  $r + r' = ۲$  و  $r - r' = ۰$

$$|r - r'| < OO' < r + r'$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases}, r = \frac{|۴(۲) + ۳(-۱) + ۵|}{\sqrt{۴^2 + ۳^2}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

مرکز دایره  $O(۲, -۱)$  و شعاع آن برابر  $r = ۲$  است. معادله دایره برابر با:  $(x - ۲)^2 + (y + ۱)^2 = ۴$  است.

۹۵ مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است این دایره را

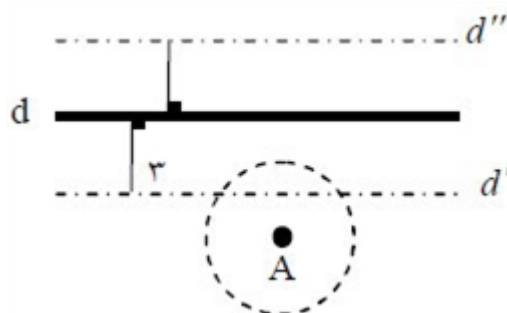
رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد دو خط  $d', d''$  در طرفین خط d و به موازات d است این

دو خط را رسم می‌کنیم محل برخورد دو خط  $d', d''$  با دایره مطابق شکل جواب مسأله است.

اگر یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  دایره را قطع کند مساله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط  $d'$  یا  $d''$  بر دایره مماس باشد مساله ۱ جواب دارد.

اگر هیچ‌یک از دو خط  $d'$  یا  $d''$  دایره را قطع نکند مساله جواب ندارد.



الف)  $O(-۱, ۰), R = ۲$ ب)  $(۱, ۰), (-۳, ۰)$ الف)  $c = \frac{۴}{۵}a \Rightarrow ۹ + \frac{۱۶}{۲۵}a^۲ = a^۲ \Rightarrow a = ۵, c = ۴ \Rightarrow FF' = ۸, AA' = ۱۰$ ب)  $A(۱, -۱), A'(-۹, -۱)$ 

دایره ۹۸

$$R = \frac{|۳ \times ۱ + ۴ \times ۲ - ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = ۲, (x - ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۴$$

$$O(۲, ۱), c = ۴ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۱۶ \Rightarrow ۲b = ۶$$

۱۰۰

بیضی

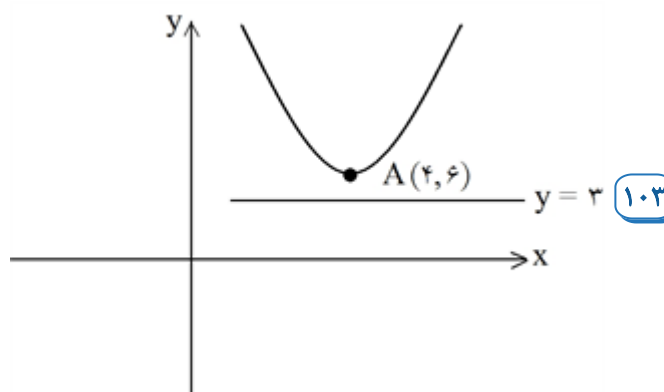
۱۰۱

$$(x - ۴)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O'(۴, -۲), r' = ۲$$

$$OO' = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

$$|r - r'| = OO' \Rightarrow |r - ۲| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} r = ۷ \\ r = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۴۹ \\ \text{غ ق ق غ} \end{cases}$$

۱۰۲



۱۰۳

با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه سهمی رو به بالا است و  $a = ۳$ 

$$(x - h)^۲ = ۴a(y - k) \Rightarrow (x - ۴)^۲ = ۱۲(y - ۶)$$

فرم استاندارد سهمی به صورت:

فرم استاندارد سهمی به صورت  $(y - ۳)^۲ = -۱۶(x + ۱)$  است. سهمی افقی و دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. ۱۰۴راس سهمی نقطه  $A(-۱, ۳)$  است. و  $a = ۴$  مختصات کانون آن نقطه  $F(-۵, ۳)$  است. معادله خطهادی سهمی به صورت  $x = a + h = -۱$  است.

1.5



$\gamma \cdot \gamma$

چون فاصله 0 تا خط برابر شعاع دایره است پس خط بر دایره مماس است.

人

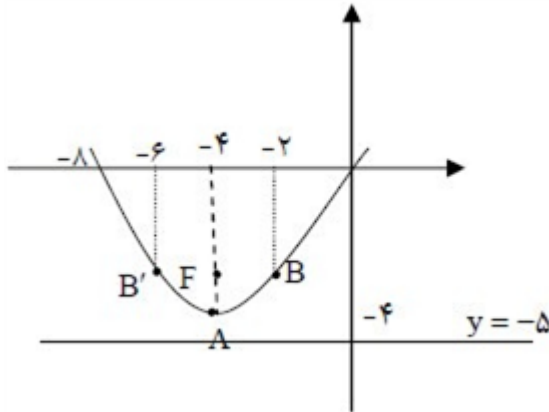
$m = 1$  (الف) ١١٠



112



الف) فرم استاندارد سهمی به صورت  $(x+4)^2 = 4(y+4)$  است. سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می‌شود. راس سهمی نقطه  $A(-4, -4)$  است و  $a=1$  است. مختصات کانون آن نقطه  $F(-4, -3) = (-4, -4+1)$  است. معادله خط هادی سهمی به صورت  $y = -4 - 1 = -5$  است.  
 ب) نقاط کمکی  $B(-2, -3)$  و  $B'(-6, -3)$

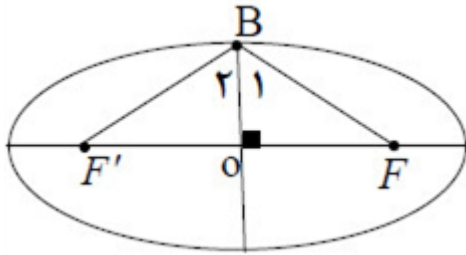


رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی

در بیضی فاصله کانون تا مرکز آن برابر  $c$  است. پس  $c=5$  و داریم:

$$2b = 24, b = 12, c = 5 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow a = 13, \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

در بیضی  $OB = b$  و  $OF = c$  و  $BF = a$  است. بنابر فرض سؤال داریم:



$$\begin{aligned} 2a &= \sqrt{2}(2b) \Rightarrow a = b\sqrt{2} \Rightarrow \cos B = \frac{OB}{BF} \\ &= \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B = 45^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{BFF'} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ \text{ پس}$$

$$OM = OA = a$$

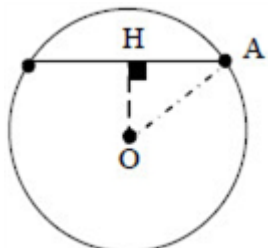
$$\triangle OMF : OF^2 + MF^2 = OM^2 \Rightarrow c^2 + MF^2 = a^2 \Rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow o(1, -1), r = \sqrt{2}$$

$$OA = 1 \Rightarrow OA < r$$

نقطه داخل دایره قرار دارد.



$$OH = \frac{|2(-1) + 1(-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\triangle AOH (H = 90^\circ) : OH^2 + AH^2 = OA^2$$

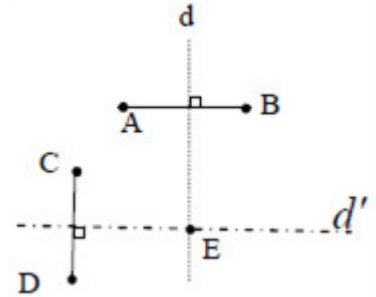
$$\Rightarrow (\sqrt{5})^2 + 2^2 = r^2 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را d' می‌نامیم. بنابراین نقطه برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه E)

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.



۱۲۰ الف) نادرست

ب) درست

پ) درست

ت) نادرست

۱۲۱ الف) ۶-

ب) اسکالر

پ) بیرون

ت) کانون سهمی

۱۲۲ درست (۰/۲۵)

۱۲۳ دایره (۰/۲۵)

۱۲۴ ویژگی مشترک (۰/۲۵)

۱۲۵ درست

۱۲۶ نادرست

۱۲۷ درست

۱۲۸ سهمی

۱۲۹

$$y^2 = 4(x - 1) \rightarrow S(1, 0), a = 1, F(2, 0)$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9, \begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \rightarrow x = \pm 3$$

$$M(3, 2\sqrt{2}), M'(3, -2\sqrt{2})$$

$$\text{الف) } O \left| \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right. \text{ مرکز } FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

۱۳۰

فاصله کانونی برابر ۸ است.

$$\text{ب) } b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}, e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

$$O(2, -3), r = 2, d = \frac{|-3 + 1|}{\sqrt{0 + 1}} = 2$$

۱۳۱

خط و دایره بر هم مماس هستند.

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \rightarrow O(2, 2), r = 1$$

۱۳۲

$$d = \frac{|2(2) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \rightarrow d > r \text{ خط و دایره نقطه برخورد ندارند.}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4$$

۱۳۳

$$MF + MF' = 2a = 10 \rightarrow MF' = 10 - MF$$

$$(MF)^2 + (MF')^2 = (FF')^2 \rightarrow (MF)^2 + (10 - MF)^2 = 8^2 \rightarrow MF = 5 \pm \sqrt{7}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \rightarrow O' = (-1, 2), r' = 3$$

۱۳۴

$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \rightarrow r + r' = 5 \rightarrow r = 2$$

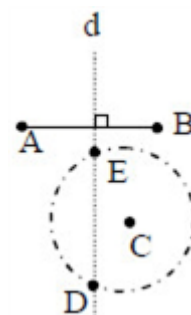
$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow 2c = 8$$

۱۳۵

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف (d) و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یک‌دیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد و اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد و در صورتی که یک‌دیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.

۱۳۶



$$O(1, 0), r = 2$$

۱۳۷

$$d = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \text{مقاطعند}$$

$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases}, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4, \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

۱۳۸

الف) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، دهانه سهمی رو به پایین است و  $a = 4$  پس معادله سهمی به صورت:

۱۳۹

$$(x - 2)^2 = -16(y - 3)$$

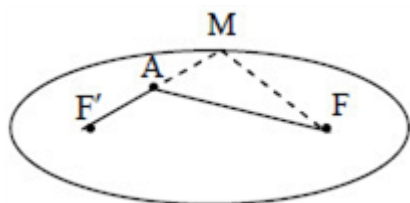
ب) مختصات کانون سهمی برابر  $F = (2, -1)$

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(0, 0), r = \sqrt{2} \xrightarrow{x+y-2=0} d = \frac{|1(0) + 1(0) - 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} = r$$

۱۴۰

خط بر دایره مماس است.

۱۴۱ پاره خط F'A را ادامه می‌دهیم تا بیضی را در نقطه M قطع کند M را به F وصل می‌کنیم نقطه M روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی داریم:



$$MF' + MF = 2a$$

$$AF < MA + MF$$

در مثلث  $\triangle MAF$  بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم:  
به طرفین نامساوی مقدار  $AF'$  را اضافه می‌کنیم.

$$AF + AF' < (MA + AF') + MF = MF' + MF = 2a$$

$$r = OM = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

۱۴۲

۱۴۳ دو دایره متخارج هستند. ۰/۲۵

$$\underbrace{O_1 = (-1, 2), r_1 = 1}_{\cdot/5}, \underbrace{O_2 \begin{cases} \frac{-a}{r} = 1 \\ \frac{b}{-r} = -2 \end{cases}, r_2 = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 2c} = 2}_{\cdot/75}$$

$$\underbrace{d = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}}_{\cdot/5} \Rightarrow \sqrt{20} > 1+2=3$$

۱۴۴ کوچکتر ۰/۲۵

۱۴۵ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است، این دایره را رسم می‌کنیم محل برخورد دایره و خط d جواب مساله است.  
بحث: اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد.  
اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله ۱ جواب دارد.  
اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

نقطه  $A$  روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی (۱)  $AF + AF' = 2a$  (۰/۲۵)

نقطه  $B$  روی بیضی قرار دارد (۲)  $BF + BF' = 2a$  (۰/۲۵)

از (۱) و (۲) و فرض  $(AF' = BF')$  نتیجه می‌شود  $(AF = BF)$  (۰/۲۵)

بنابراین چهارضلعی  $AFBF'$  یک متوازی‌الاضلاع است (۰/۲۵) در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند.

$$(0/25) AF \parallel BF'$$



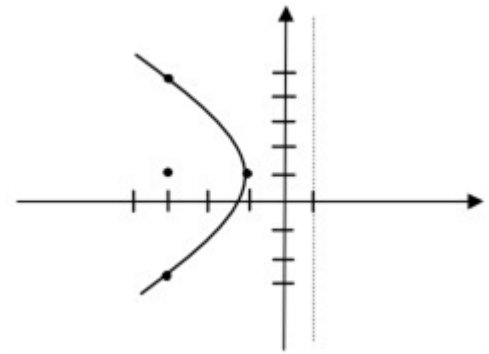
(الف) ۱۴۷

$$(y-1)^2 = -8(x+1) \quad (0/25) \rightarrow A(-1, 1) \quad (0/25)$$

دهانه سهمی به چپ و  $a=2$ ، خط هادی  $x=-1$  (۰/۲۵) و کانون سهمی  $F(-3, 1)$  (۰/۲۵)

(ب) نقاط کمکی:  $B'(-3, -3)$ ,  $B(-3, 5)$  (۰/۵)

رسم شکل (۰/۵)



$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \quad (0/25) \\ y=-1 \quad (0/25) \end{cases}, r = \frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (0/25)$$

(۰/۵)

۱۴۸

مرکز دایره  $O(2, -1)$  و شعاع آن برابر  $r=2$  است. معادله دایره برابر با:  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$  (۰/۲۵) است.

$$O(1, 1) \xrightarrow{0/25} m_{oa} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \xrightarrow{0/25} m' = -\frac{1}{2} \xrightarrow{0/25} y-3 = -\frac{1}{2}(x-2) \quad (0/25)$$

۱۴۹

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}a, \quad b=8 \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} a^2 = 64 + \frac{9}{25}a^2 \rightarrow a=10, c=6 \quad (0/5)$$

(۰/۲۵)      (۰/۲۵)

۱۵۰

طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله کانونی ۱۲ (۰/۲۵)





