



p30konkor.com

زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

تاریخ برگزاری :

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

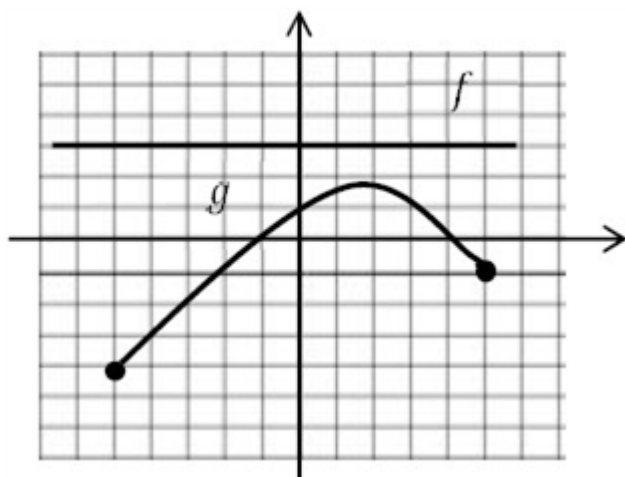
نام دبیر :

عنوان آزمون : حسابان ۱۱ فصل ۲

بارم	لطفاً پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	ردیف
	<p>اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \frac{5x + 4}{x - 3}$ باشند آنگاه دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p> $D_f = R$ $D_f = R - \{3\}$ $D_{\frac{f}{g}} = R - \left\{3, -\frac{4}{5}\right\}$ </p> <p>پاسخ: ۱</p> <p> $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{\frac{5x + 4}{x - 3}} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{5x + 4}$ </p>	۱
	<p>اگر وارون تابع $f(x) = ax + 4$ از نقطه $\left(5, \frac{5}{3}\right)$ بگذرد، آنگاه ضابطه وارون f را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p> $\left(\frac{5}{3}, 5\right) \in f \Rightarrow 5 = \frac{5}{3}a + 4 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$ </p> <p> $y = \frac{3}{5}x + 4 \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{5}x \Rightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{3}(x - 4)$ </p> <p>توجه: جواب $f^{-1}(x) = \frac{5x - 20}{3}$ برای وارون تابع نیز صحیح است.</p> <p>پاسخ: ۲</p>	۲
	<p>نمودار تابع $y = 1 - 2[x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید. ([] نماد جزء صحیح است).</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۳



با توجه به نمودارهای توابع f و g :
الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.
ب) مقدار $(f - 2g)(0)$ را بیابید.



۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

الف) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [-5, 5] - \{-1, 4\}$

پاسخ: ۱

$(f - 2g)(0) = f(0) - 2g(0) = 3 - 2(1) = 1$

نمودار تابع وارون، تابع خطی $f(x) = -x + m$ از نقطه $(-3, 1)$ می‌گذرد. ابتدا مقدار m را به دست آورید و سپس ضابطه تابع وارون f را بنویسید.

۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

$f^{-1}(-3) = 1 \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow -3 = -1 + m \Rightarrow m = -2$

پاسخ: ۱

$y = -x - 2 \Rightarrow x = -y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x - 2$

دامنه تابع گویای $y = \frac{5}{1 + 3x^2}$ را بنویسید.

۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ R

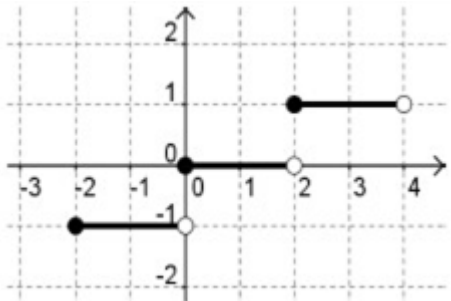
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- توابع $y = x$ و $y = \sqrt{x^2}$ مساوی هستند.

۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست



	<p>اگر $f = \{(2, -1), (3, 1), (1, 0), (4, 2)\}$, $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، آنگاه: الف) تابع‌های $f \times g$, $\frac{g}{f}$ را به صورت مجموعه‌هایی از زوج مرتب‌ها بنویسید. ب) آیا تابع g یک تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>الف) $f \times g = \{(2, -3), (3, 1), (1, 0)\}$ $\frac{g}{f} = \{(2, -3), (3, 1)\}$</p> <p>ب) خیر، در دو زوج مرتب مؤلفه دوم تکراری می‌باشند و مؤلفه‌های اول یکسان نیستند.</p>	۸
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. دامنه تابع $h(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ برابر مجموعه است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $R - \{0, -1\}$</p> <p>پاسخ به صورت بازه $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ نیز صحیح است.</p>	۹
	<p>ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{2x-1}{3}$ را بنویسید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $y = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow 3y = 2x-1 \Rightarrow 3y+1 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2}$ $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$</p>	۱۰
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. - دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>	۱۱
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. - برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>	۱۲
	<p>نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$ را در بازه $[-2, 4]$ با ارائه راه حل رسم کنید. ([] نماد جزء صحیح است).</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> 	۱۳

۳ $-1 \leq \frac{x}{2} < 0$ $0 \leq \frac{x}{2} < 1$ $1 \leq \frac{x}{2} < 2$



$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$
$f(x) = -1$	$f(x) = 1$	$f(x) = 1$

اگر $f(x) = x^3 - 1$ مقدار $f^{-1}(7)$ را به دست آورید.

۱۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

$$f^{-1}(7) = a \Rightarrow f(a) = 7 \Rightarrow a^3 - 1 = 7 \Rightarrow a = 2$$

پاسخ: ۱

اگر $f = \{(1, 5), (-1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ و $g = \{(3, 5), (4, 4), (5, 6), (2, 0)\}$ توابع زیر را به دست آورید:

الف) g^{-1} ب) $\frac{f}{g}$ ج) $f \circ g^{-1}$

۱۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

الف) $g^{-1} = \{(5, 3), (4, 4), (6, 5), (0, 2)\}$

ب) $\frac{f}{g} = \left\{ \left(3, \frac{4}{5} \right) \right\}$

ج) $f \circ g^{-1} = \{(5, 4), (0, 4)\}$

پاسخ: ۱

اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ مقدار $f^{-1}(2)$ را محاسبه کنید.

۱۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

$$2 = \sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

پاسخ: ۱

جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.
تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور ، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

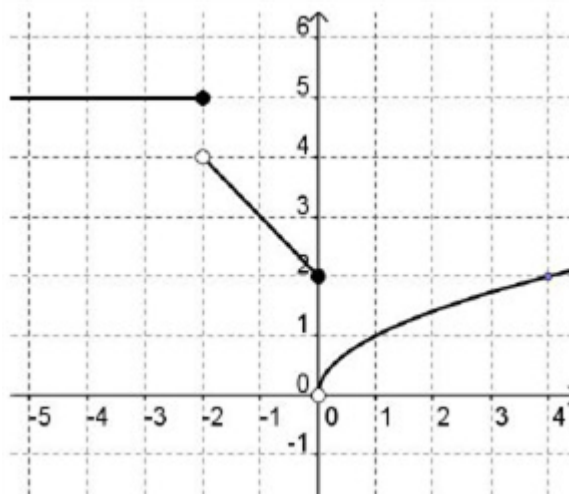
۱۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ x ها

نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:
الف) $f(0) = 2, f(-2) = 5$
ب) تابع در بازه $(-\infty, 2]$ ثابت است.
پ) تابع در بازه $[-2, 0]$ خطی است و موازی خط $y + x = 5$ است.
ت) تابع به هر عدد مثبت، جذر آن را نسبت می‌دهد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳



پاسخ: ۱

۱۸

نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:

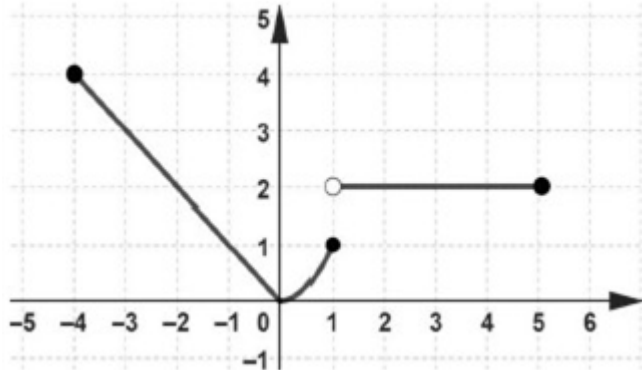
(الف) دامنه آن $[-4, 5]$ باشد

(ب) به هر عدد کمتر از صفر، قدرمطلق آن را نسبت دهد

(پ) به هر عدد در بازه $[0, 1]$ ، مربع آن را نسبت دهد

(ت) در سایر نقاط دامنه ثابت باشد و $f(5) = 2$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳



پاسخ: ۱

۱۹

اگر $g = \{(1, 0), (4, 0), (2, 3)\}$, $f = \{(1, 2), (3, 4), (2, 5)\}$

(الف) تابع $f + g$ را بنویسید.

(ب) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

(الف) $f + g = \{(1, 2), (2, 8)\}$

(ب) $D_{\frac{f}{g}} = \{2\}$

پاسخ: ۱

۲۰

فرض کنیم $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = x^2 + 3$

(الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

(ب) ضابطه تابع fog را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳

(الف) $D_g = R, D_f = (-\infty, 4] \Rightarrow D_{fog} = \{x \in R | x^2 + 3 \in (-\infty, 4]\} = [-1, 1]$

* : $x^2 + 3 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

(ب) $fog(x) = \sqrt{4 - (x^2 + 3)} = \sqrt{1 - x^2}$

پاسخ: ۱

۲۱

(الف) دو تابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$ و $g(x) = 2x - 1$ مفروض اند. دامنه تابع $f(x) + g(x)$ را بیابید.

(ب) حاصل $g(3) \times 2f(4)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ (الف)

$D_g = R$

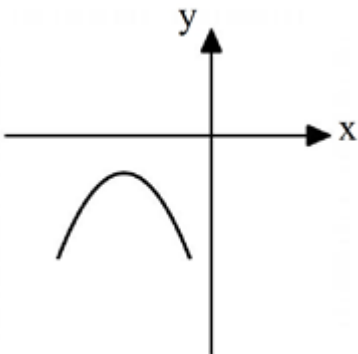
$D_f = R - \{2\}$

(ب)

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = R - \{2\}$

$g(3) \times 2f(4) = 5 \times 2(2) = 20$

۲۲

۲۳	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- توابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ با هم برابر هستند.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۲۴	<p>جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.</p> <p>دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{1 - [x]}$ برابر است با ([] نماد جزء صحیح است).</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $R - [1, 2)$ یا $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$</p>
۲۵	<p>در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.</p> <p>ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x - 1$ به صورت است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$</p>
۲۶	<p>شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. علامت ضرایب a و b و c را تعیین کنید.</p>  <p>سؤالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$</p>



اگر $f(x) = \frac{3x + a}{x - 1}$ تابعی ثابت باشد:

(الف) a را به دست آورید.

(ب) دامنه تابع f را بنویسید.

(ج) نمودار تابع f را رسم کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ (الف) تابع ثابت است، بنابراین به ازای همه مقادیر برابر است. بنابراین:

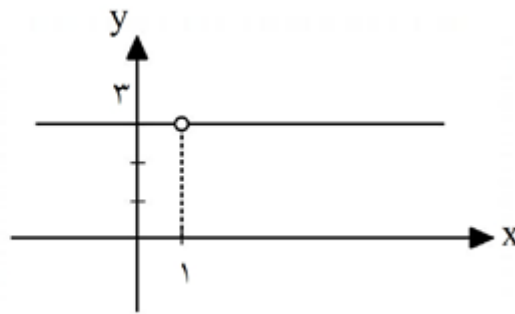
$$\begin{cases} f(0) = \frac{a}{-1} \\ f(2) = 6 + a \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{-1} = 6 + a \Rightarrow a = -6 - a \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

(ب)

$$\xrightarrow{a=-3} f(x) = \frac{3x - 3}{x - 1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

(ج)

$$f(x) = \frac{3x - 3}{x - 1} = \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$



۲۷

اگر نقطه $\left(-\frac{3}{10}, -1\right)$ روی تابع وارون تابع $f(x) = \frac{3x}{a + a|x|}$ باشد:

(الف) مقدار a را به دست آورید.

(ب) مقدار $f \circ f(2)$ را محاسبه کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ (الف)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{10}, -1\right) \in f^{-1} &\Rightarrow \left(-1, -\frac{3}{10}\right) \in f \Rightarrow \frac{-3}{a + a|-1|} = \frac{-3}{10} \\ \Rightarrow \frac{-3}{2a} &= \frac{-3}{10} \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

(ب)

$$f(x) = \frac{3x}{5 + 5|x|} \Rightarrow f(2) = \frac{6}{5 + 10} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$f(f(2)) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3\left(\frac{2}{5}\right)}{5 + 5\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{6}{5}}{7} = \frac{6}{35}$$

۲۸



اگر نقطه $\left(-\frac{1}{3}, -2\right)$ روی تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x}{a + a|x|}$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۲۹

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

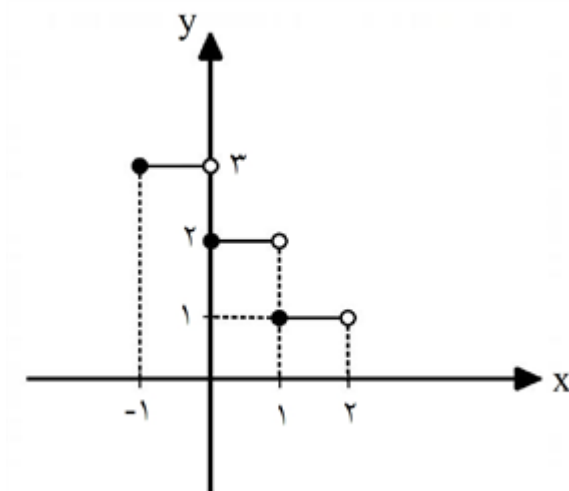
پاسخ: ۱ $\left(-\frac{1}{3}, -2\right) \in f^{-1} \Rightarrow \left(-2, -\frac{1}{3}\right) \in f \Rightarrow \frac{-2}{a + a|-2|} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-2}{3a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 2$

نمودار تابع $y = 2 - [x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید. (نماد جزء صحیح است.)

۳۰

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ $-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = 2 - (-1) = 3$
 $0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 2 - 0 = 2$
 $1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1$



اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ k+3 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = x + 1$ برابر باشند، k را به دست آورید.

۳۱

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ $D_f = D_g = R$
 $x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = g(x)$
 $x = 1 \Rightarrow f(1) = g(1) \Rightarrow k+3 = 1+1 \Rightarrow k = -1$



نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد را به دست آورید. (نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & -1 \leq x \leq 3 \\ 2 - [x] & -3 \leq x < -1 \end{cases}$$

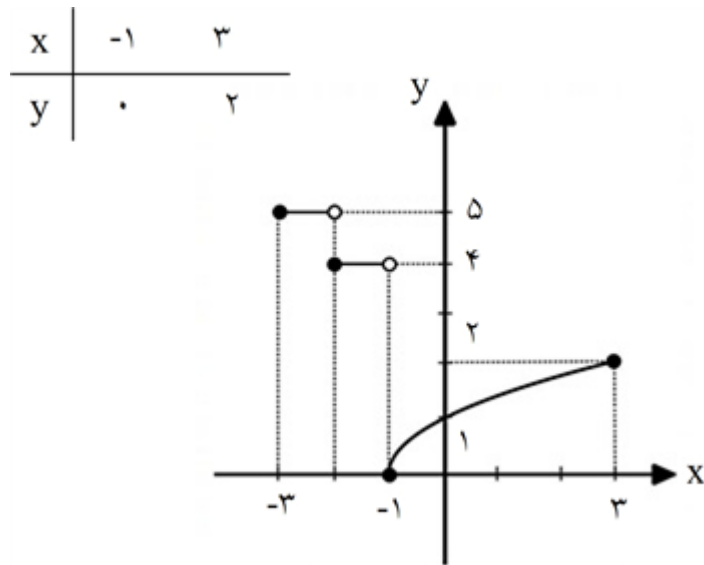
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & -1 \leq x \leq 3 \\ 2 - [x] & -3 \leq x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < -2 \Rightarrow y = 2 - (-3) = 5 \\ -2 \leq x < -1 \Rightarrow y = 2 - (-2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_f = [-3, 3] \\ R_f = [0, 2] \cup \{4, 5\} \end{cases}$$

پاسخ: ۱



۳۲

اگر نقطه $A(-7, 5)$ روی تابع وارون $f(x) = ax + 3$ قرار داشته باشد:
الف) ضابطه وارون f را به دست آورید.
ب) مقدار $(f + f^{-1})(1)$ را تعیین کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ الف)

$$(-7, 5) \in f^{-1} \Rightarrow (5, -7) \in f \Rightarrow -7 = a(5) + 3 \Rightarrow 5a = -10 \Rightarrow a = -2$$

$$\xrightarrow{a=-2} f(x) = -2x + 3 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow 2x = 3 - y \Rightarrow x = \frac{3-y}{2}$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{3-x}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}$$

ب)

$$(f + f^{-1})(1) = f(1) + f^{-1}(1) = -2(1) + 3 + \frac{3-1}{2} = -2 + 3 + 1 = 2$$

۳۳



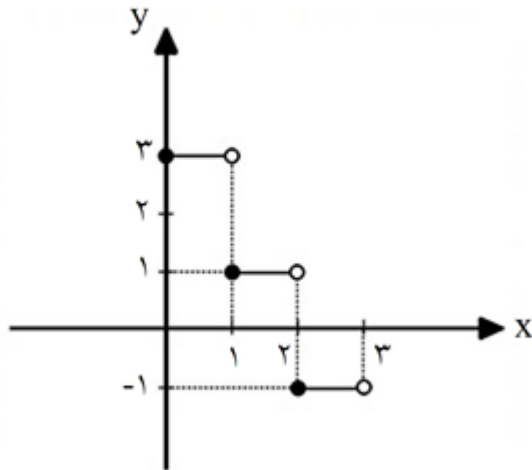
نمودار تابع $y = 3 - 2[x]$ را در بازه $[0, 3]$ رسم کنید. (نماد جزء صحیح است).

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 3 - 2(0) = 3$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 3 - 2(1) = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = 3 - 2(2) = -1$$



پاسخ: ۱

۳۴

اگر $f(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$ باشد، دامنه تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم

$$D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$$

$$\sqrt{x - 3} \geq 0 \xrightarrow{+2} 2 + \sqrt{x - 3} \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow R_f = [2, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ f^{-1}} = [2, +\infty)$$

پاسخ: ۱

۳۵

اگر $f(x) = 3 + \sqrt{7 - x}$ و $g = \{(1, 4), (7, 2), (3, -2), (-2, 1)\}$ باشد، مقدار $(3f - g)(-2)$ را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم

$$(3f - g)(-2) = 3f(-2) - g(-2) = 3(3 + \sqrt{7 + 2}) - 1 = 18 - 1 = 17$$

پاسخ: ۱

۳۶

اگر $f(x) = 5 + \sqrt{x + 1}$ و $g = \{(1, 7), (-1, 4), (2, 3), (3, 9)\}$ باشد، مقدار $(2f - g)(3)$ را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-یازدهم

$$(2f - g)(3) = 2f(3) - g(3) = 2(5 + \sqrt{3 + 1}) - 9 = 2(7) - 9 = 5$$

پاسخ: ۱

۳۷



اگر $f(x) = 5 - |x|$ و $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+5}}$ باشد:

الف) حاصل $\frac{f \circ g}{g \circ f}$ را به دست آورید.

ب) دامنه تابع $g \circ f$ را به کمک تعریف به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

$$\frac{f \circ g}{g \circ f} = \frac{f(g(\cdot))}{g(f(\cdot))} = \frac{f\left(\frac{1}{\cdot}\right)}{g(5)} = \frac{5 - \frac{1}{\cdot}}{\frac{5+1}{\sqrt{5+5}}} = \frac{\frac{5\cdot - 1}{\cdot}}{\frac{6}{\sqrt{10}}} = \frac{5\cdot - 1}{\cdot} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{5\sqrt{10}}{6\cdot} = \frac{5\sqrt{10}}{6}$$

پاسخ: ۱ الف)

۳۸

$$D_f = R \quad \text{ب)}$$

$$D_g : x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5 \Rightarrow D_g = (-5, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid 5 - |x| > -5\}$$

(۱)

↓

$$-|x| > -9 \Rightarrow |x| < 9 \Rightarrow -9 < x < 9 \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲)} D_{g \circ f} = (-9, 9)$$

اگر ورودی ماشین برابر ۷ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟

$$x \rightarrow 2x + 1 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \text{خروجی}$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(7) = 2(7) + 1 = 15$$

پاسخ: ۱

۳۹

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow g(15) = \frac{15}{\sqrt{15+1}} = \frac{15}{\sqrt{16}} = \frac{15}{4} = 3.75$$

بنابراین خروجی ماشین برابر ۳.۷۵ است.

دو تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $g(x) = x + 10$ مفروض اند:

الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

ب) حاصل $f(-2) - g^{-1}(12)$ را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-یازدهم

پاسخ: ۱ الف)

۴۰

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow D_f = R - \{-1\}$$

$$D_g = R$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = R - \{-1\} \cap R - \{-10\} = R - \{-1, -10\}$$

ب)

$$g(x) = x + 10 \Rightarrow y = x + 10 \Rightarrow x = y - 10 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 10$$

$$2g^{-1}(12) - f(-2) = 2(12 - 10) - \left(\frac{-2}{-2+1}\right) = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$$

	<p>اگر $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ و $g(x) = 5x - 2$ باشد، آنگاه $(f - 2g^{-1})(8)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $g(x) = 5x - 2 \Rightarrow y + 2 = 5x \Rightarrow x = \frac{y+2}{5} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$ $(f - 2g^{-1})(8) = f(8) - 2g^{-1}(8) = \sqrt{8+1} - 1 - 2\left(\frac{8+2}{5}\right) = 3 - 1 - 2(2) = 3 - 1 - 4 = -2$	۴۱
	<p>اگر $f(x) = \frac{2}{x} + 1$ و $g(x) = x + 1$ باشد، آنگاه $f(2) - g^{-1}(7)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $g(x) = x + 1 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 1$ $f(2) - g^{-1}(7) = \left(\frac{2}{2} + 1\right) - (7 - 1) = 2 - 6 = -4$	۴۲
	<p>جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>الف) برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به رسم کنیم.</p> <p>ب) به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع می‌گویند.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) نیمساز ربع اول و سوم یا $y = x$</p> <p>ب) یک به یک</p>	۴۳
	<p>اگر $f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 4), (4, 10)\}$ و $g = \{(1, 0), (2, 2), (4, 5), (7, 9)\}$ باشد، $\frac{f}{g}$ را بنویسید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{f}{g} = \left\{ \left(2, \frac{7}{2}\right), (4, 2) \right\}$	۴۴
	<p>معادله زیر را حل کنید. ($[]$ نماد جزء صحیح است).</p> $[x + 2] + [x + 3] + [x + 4] = 9$ <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $[x + 2] + [x + 3] + [x + 4] = 9 \Rightarrow [x] + 2 + [x] + 3 + [x] + 4 = 9$ $\Rightarrow 3[x] + 9 = 9 \Rightarrow 3[x] = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$	۴۵
	<p>آیا دو تابع زیر برابر هستند؟ دلیل خود را توضیح دهید.</p> $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{x^2}{x^3} \end{cases}$ <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - یازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>دو تابع برابر هستند، زیرا:</p> $\begin{cases} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R - \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$ $g(x) = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = f(x)$	۴۶



اگر $f(x) = \frac{1}{\lambda}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقدار زیر را به دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دوازدهم-ریاضی (۳) تجربی

الف) $(fog)^{-1}(5) = \sqrt[3]{\lambda \times 5 + 24} = \sqrt[3]{64} = 4$

$(fog)(x) = f(x^3) = \frac{1}{\lambda}x^3 - 3 \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{\lambda}x^3 \Rightarrow x^3 = \lambda y + 24 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\lambda y + 24}$

$(fog)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\lambda x + 24}$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6) = f^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(6)}_{\lambda(6+3)=24}\right) = f^{-1}(6) = \lambda(24+3) = 60$

پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(5)}_{\lambda(5+3)=24}\right) = g^{-1}(24) = \sqrt[3]{24} = 4$

پاسخ: ۱

۴۷

ضابطه‌ی تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-\lambda x + 3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x - 1}$

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دوازدهم-ریاضی (۳) تجربی

$f(x) = \frac{-\lambda x + 3}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \frac{-\lambda y + 3}{2} \Rightarrow -\lambda y = 2x - 3 \Rightarrow y = \frac{-2x + 3}{\lambda} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x + 3}{\lambda}$

پاسخ: ۱

$g(x) = -5 - \sqrt{3x - 1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -5 - \sqrt{3y - 1} \Rightarrow -\sqrt{3y - 1} = x + 5$

$\Rightarrow 3y - 1 = (x + 5)^2 \Rightarrow 3y = (x + 5)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{(x + 5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x + 5)^2 - 1}{3}$

۴۸



با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

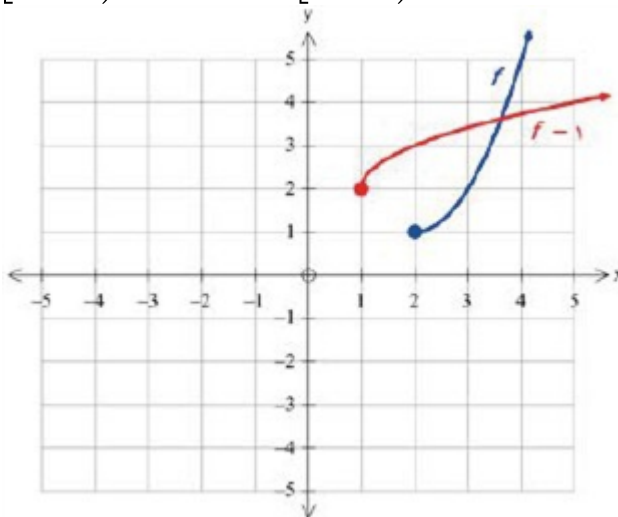
مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دوازدهم-ریاضی (۳) تجربی

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \quad D_f = [2, +\infty) \quad R_f = [1, +\infty)$$

پاسخ: ۱

$$y = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = (x - 2)^2 \Rightarrow x - 2 = \pm \sqrt{y - 1} \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - 1} + 2$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} + 2 \quad D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$



۴۹

مشخص کنید کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

(الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$.

(ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

(پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آن گاه $(f \circ g)(4) = 5$.

(ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دوازدهم-ریاضی (۳) تجربی

پاسخ: ۱ الف) نادرست

۵۰

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = g(5)^2 - 4 = (\sqrt{5^2 - 4})^2 - 4 = (\sqrt{21})^2 - 4$$

$$= 21 - 4 = 17$$

(ب) نادرست

$$\begin{cases} f(x) = 3x \\ g(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(2x) = 6x \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(3x) = 6x \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = g \circ f(x)$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(8) = 24$$

(پ) درست

$$\begin{cases} (f \circ g)(5) = f(g(5)) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3 \\ g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3 \end{cases}$$

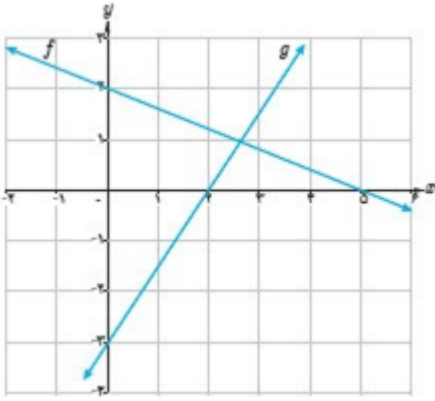
(ت) درست



	<p>با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات موردنظر را تشکیل داده و آن‌ها را حل کنید.</p> <p>الف) $f(x) = 2x - 5, g(x) = x^2 - 3x + 8 : (f \circ g)(x) = 7$</p> <p>ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1, g(x) = 1 - 2x : (g \circ f)(x) = -5$</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دوازدهم-ریاضی (۳) تجربی</p> <p>الف) $f(x) = 2x - 5, g(x) = x^2 - 3x + 8 \Rightarrow \begin{cases} f(g(x)) = 7 \\ 2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 7 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 6x + 11 = 7$ پاسخ: ۱</p> <p>$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$</p> <p>ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1, g(x) = 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = -5 \\ 1 - 2(3x^2 + x - 1) = -5 \end{cases} \Rightarrow -6x^2 - 2x + 3 = -5$</p> <p>$\Rightarrow -6x^2 - 2x + 8 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$</p>	۵۱
	<p>اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه دوازدهم-ریاضی (۳) تجربی</p> <p>$f \circ g = \{(5, 8), (3, 3), (7, 8), (9, 4)\}$ $g \circ f = \{(5, 5)\}$ پاسخ: ۱</p>	۵۲
	<p>نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان (۱)</p> <p>$y = ax + b \quad \frac{y-b}{a} = x \quad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ پاسخ: ۱</p>	۵۳



نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f + g$ ، $f - g$ و fg را محاسبه کنید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

۵۴

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-2}{5} \quad y - 2 = -\frac{2}{5}x \quad y = -\frac{2}{5}x + 2 \quad f \text{ ضابطه}$$

پاسخ: ۱

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{matrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad y = \frac{3}{2}(x - 2) \quad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad g \text{ ضابطه}$$

$$(f + g)(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{11}{10}x - 1$$

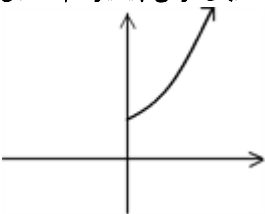
$$(f - g)(x) = \frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = \frac{-11}{10}x + 5$$

$$(f \times g)(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right)$$

نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

۵۵



$$f : [0, \infty) \rightarrow R$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

پاسخ: ۱

تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

۵۶

ارتباط بین معلم و شاگردان، تمام شاگردان یک کلاس یک معلم ریاضی دارند. پاسخ: ۱



نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

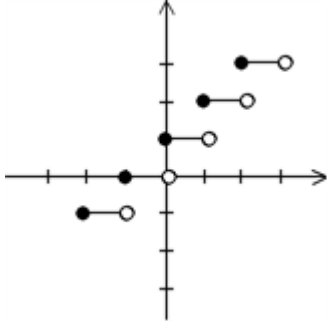
الف) $f(x) = [x] + 1, -2 \leq x < 3$

ب) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right], -4 \leq x < 4$

مسائل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی پایه یازدهم-حسابان(۱)

الف) $f(x) = [x] + 1, -2 \leq x < 3$

پاسخ: ۱



$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -1$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 0$$

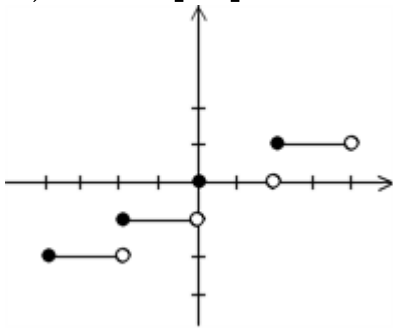
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 3$$

۵۷

ب) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right], -4 \leq x < 4$



$$-4 \leq x < -2 \quad -2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \Rightarrow f(x) = -2$$

$$-2 \leq x < 0 \quad -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$0 \leq x < 2 \quad 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$2 \leq x < 4 \quad 1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$$

اگر نقطه $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{ax}{1 + |x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۲ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

-۳ (۱)

۵۸

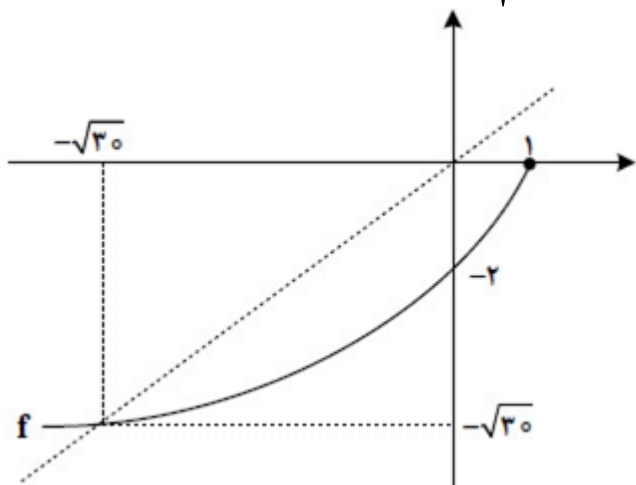
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{a(-1)}{1 + |-1|} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$



شکل مقابل، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{-x + f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۵ (۴)

۴ (۳)

۷ بیش از ۲

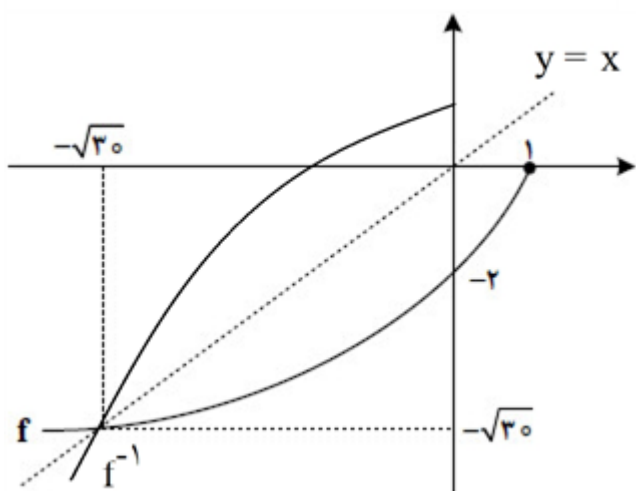
۷ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

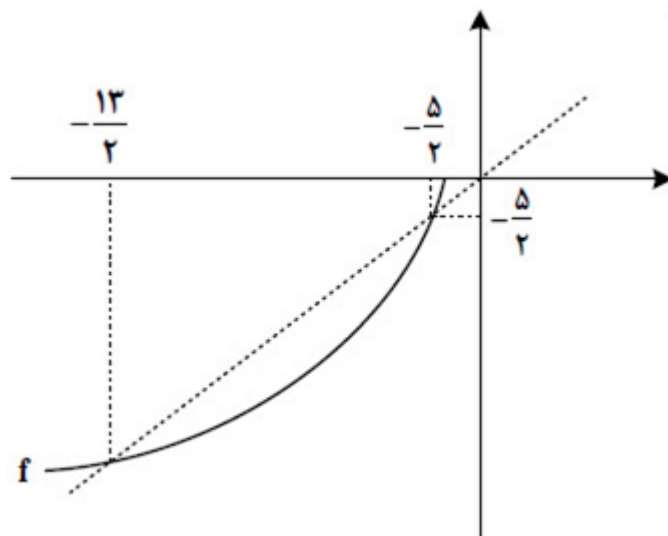
۵۹ پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{\frac{-}{-x + f^{-1}(x)}} \geq 0 \Rightarrow -x + f^{-1}(x) < 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) < x \Rightarrow x < -\sqrt{3} \Rightarrow \text{بیش از ۷}$$



شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

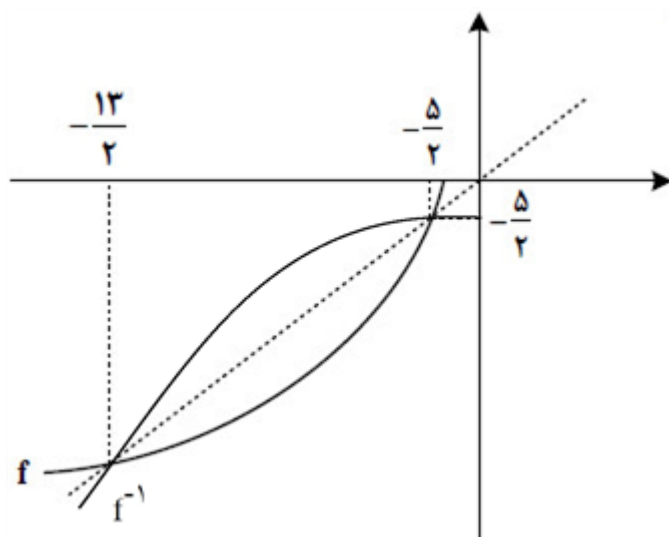
۳ (۳)

۴ (۴)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶۰



$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f^{-1}(x) < 0}{x - f^{-1}(x) < 0} \Rightarrow x - f^{-1}(x) < 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) > x \Rightarrow x \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -6, -5, -4, -3$$



اگر نقطه $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5}\right)$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

$\frac{5}{27}$ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5}\right) \in f^{-1} \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{8}\right) \in f \Rightarrow \frac{-\frac{3}{5}}{a + \frac{3}{5}a} = -\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{3}{8a} = -\frac{1}{8} \Rightarrow a = 3$$

۶۱

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}$ ، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می‌کند؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_f : x \geq -1, 1 - \sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 1 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_f = [-1, 0]$$

$$\sqrt{x+1} \text{ اکیدا صعودی} \Rightarrow 1 - \sqrt{1+x} \text{ اکیدا نزولی} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow f(-1) = 1, f(0) = 0 \Rightarrow R_f = [0, 1]$$

نمودار تابع فقط در ناحیه دوم است پس نمودار تابع وارون در ناحیه چهارم واقع می‌شود و تنها نقطه‌ی مشترک همان $(0, 0)$ است.

۶۲

اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, x \geq 0$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۹ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} \xrightarrow{x=3} f(3) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4} = 3 \Rightarrow a = 4$$

تذکر: در اصل سؤال، شرط $x \geq 0$ نبود که در این صورت تابع وارون‌پذیر نمی‌باشد و منظور طراح، بخشی از تابع است که وارون‌پذیر است. در کل داریم:

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x + 4\sqrt{x}, x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x - 4\sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

۶۳



	<p>اگر $f = \left\{ \left(\frac{1}{9}, -1 \right), \left(\frac{1}{3}, 1 \right), \left(-\frac{1}{4}, 3 \right), \left(\frac{1}{4}, -3 \right) \right\}$ و $g(x) = - x \sqrt{x}$ و $\log^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام است؟</p> <p>۱ <input type="radio"/> $-\frac{1}{9}$ ۲ <input type="radio"/> $\frac{1}{9}$ ۳ <input type="radio"/> $-\frac{1}{8}$ ۴ <input type="radio"/> $\frac{1}{8}$</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.</p> <p>$\left. \begin{aligned} \log^{-1}(a) = -3 &\Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = a = -\frac{1}{8}$</p>	۶۴
	<p>به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟</p> <p>۱ <input type="radio"/> ۱۵ ۲ <input type="radio"/> ۱۲ ۳ <input type="radio"/> ۹ ۴ <input type="radio"/> ۵</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط از نقطه $(1, 20)$ می‌گذرد، پس وارون تابع هم از این نقطه می‌گذرد، در نتیجه تابع f از نقطه $(1, 20)$ عبور می‌کند.</p> <p>$\Rightarrow f(1) = a + 8 = 20 \Rightarrow a = 12$</p>	۶۵
	<p>اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(\text{af}(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟</p> <p>۱ <input type="radio"/> $\frac{1}{3}$ ۲ <input type="radio"/> $-\frac{1}{3}$ ۳ <input type="radio"/> $\frac{1}{5}$ ۴ <input type="radio"/> $-\frac{1}{5}$</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>$f(\sqrt{5}) = 5 - [\sqrt{5}] = 3 \Rightarrow f(\text{af}(\sqrt{5})) = f(3a) = 9a^2 - [3a] = 2$</p> <p>با توجه به گزینه‌ها، $a = -\frac{1}{3}$ جواب است. جواب‌های دیگر معادله $a = \frac{2}{3}$ و $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است.</p>	۶۶



تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & 2x - 5 \geq 0 \\ -2x^2 + ax - 21 & 2x - 5 < 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای بزرگ‌ترین مقدار صحیح a باشد، مقدار $f^{-1}(-3)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ -2x^2 + ax - 21 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4} \\ x < \frac{5}{2} \Rightarrow y < g\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow y < \frac{5}{2}a - \frac{67}{2} \end{cases}$$

ابتدا خود سهمی در فاصله $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ باید وارون‌پذیر باشد پس:

$$\frac{5}{2} \leq x_s \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \frac{-a}{-4} \Rightarrow a \geq 10$$

از طرفی برد هر دو ضابطه نباید اشتراکی داشته باشند. بنابراین:

$$\frac{5}{2}a - \frac{67}{2} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow 10a - 134 \leq -1$$

$$10a \leq 133 \Rightarrow a \leq 13/3$$

$$10 \leq a \leq 13/3 \quad \text{شرط وارون‌پذیر تابع } f:$$

پس بزرگ‌ترین مقدار صحیح $a = 13$

$$f^{-1}(-3) : -2x^2 + 13x - 21 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \checkmark \\ \text{یا} \\ x = \frac{9}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases} \quad \text{چون } x < \frac{5}{2}$$

۶۷

اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = f([x - f(x)])$ باشد، $\text{fog}\left(-\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ (۲) ۲ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{fog}\left(-\frac{1}{3}\right) &= f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4 \\ g\left(-\frac{1}{3}\right) &= f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right]\right) = f(1) = 2 \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

۶۸

	<p>جملات x, y, z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و مجموع آنها برابر ۲۱ است. اگر $x + ۶, y + ۴, z + ۲$ یک دنباله هندسی باشد، مقدار $\left[\frac{xy}{z}\right]$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است).</p> <p>۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.</p> <p>کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی</p> $\begin{cases} x + y + z = ۲۱ \\ ۲y = x + z \end{cases} \Rightarrow y = ۷, x + z = ۱۴$ <p>دنباله هندسی $۷ - d, ۷, ۷ + d \rightarrow ۱۳ - d, ۱۱, ۹ + d$</p> $۱۱^۲ = (۱۳ - d)(۹ + d) \Rightarrow d^۲ - ۴d + ۴ = ۰ \Rightarrow d = ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۷ - ۲ = ۵ \\ y = ۷ \\ z = ۷ + ۲ = ۹ \end{cases}$ $\left[\frac{xy}{z}\right] = \left[\frac{۵ \times ۷}{۹}\right] = \left[\frac{۳۵}{۹}\right] = ۳$
	<p>جمله ششم دنباله بازگشتی $a_1 = a_۲ = ۱, a_n = a_{n-1} + ۲a_{n-2}$ کدام است؟ ($[]$ علامت جزء صحیح است).</p> <p>۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) ۱</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی</p> $n = ۴ \Rightarrow a_۳ = a_۲ + ۲a_۱ \Rightarrow a_۳ = -۱$ $n = ۵ \Rightarrow a_۴ = a_۳ + ۲a_۲ \Rightarrow a_۴ = ۱$ $n = ۶ \Rightarrow a_۵ = a_۴ + ۲a_۳ = -۱ + ۲(۱) = ۱$ $n = ۷ \Rightarrow a_۶ = a_۵ + ۲a_۴ = ۱ + ۲(۱) = ۳$
	<p>وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx - ۱}$ در دامنه محدود، خط $۵y - ۱۰x = ۱۲$ را در نقطه‌ای به عرض $۷/۲$ قطع می‌کند. مقدار $f\left(\frac{۴}{m}\right)$ کدام است؟</p> <p>۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۱۵}$ ۴) $۲\sqrt{۱۵}$</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی</p> $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx - ۱}$ $۵y - ۱۰x = ۱۲ \xrightarrow{y=۷/۲} x = ۲/۴ \Rightarrow (۲/۴, ۷/۲) \in f^{-1}$ $(۷/۲, ۲/۴) \in f$ $\Rightarrow ۲/۴ = \sqrt{۷/۲} \sqrt{۷/۲m - ۱}$ $۲/۴ \times ۲/۴ = ۷/۲(۷/۲m - ۱)$ $۰/۸ = ۷/۲m - ۱ \Rightarrow m = \frac{۱}{۴} \Rightarrow f(۱۶) = ۴\sqrt{۳}$



	<p>جمله نهم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{n-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ کدام است؟ ()، علامت جزء صحیح است.)</p> <p>۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>سراسری-انسانی-۱۴۰۲ تیرماه</p> <p> $n = 2 \Rightarrow a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$ $n = 3 \Rightarrow a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$ $n = 4 \Rightarrow a_5 = a_{4-2} + a_3 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$ $n = 5 \Rightarrow a_6 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$ $n = 6 \Rightarrow a_7 = a_4 + a_5 = 3 + 3 = 6$ $n = 7 \Rightarrow a_8 = a_5 + a_6 = 3 + 6 = 9$ $n = 8 \Rightarrow a_9 = a_6 + a_7 = 6 + 6 = 12$ </p>	۷۲
	<p>تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & 2x+3 \leq 0 \\ 2+2mx-x^2 & 2x+3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟</p> <p>۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) صفر</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.</p> <p>سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه</p> <p> $R_1 = \left[\frac{13}{2}, +\infty \right)$ ضابطه اول $-x^2 + 2mx + 2 = -(x-m)^2 + m^2 + 2$ ضابطه دوم باید رأس سهمی ($x = m$) داخل بازه $x > -\frac{3}{2}$ نباشد، پس: $m \leq -\frac{3}{2} \xrightarrow{m^2+2 \leq \frac{13}{2}} m = -2 \Rightarrow y_2 = -(x+2)^2 + 6$ $f^{-1}(-19) \Rightarrow -(x+2)^2 + 6 = -19 \Rightarrow (x+2)^2 = 25 \xrightarrow{x > -\frac{3}{2}} x = 3$ </p>	۷۳
	<p>ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4} \right]$ کدام است؟ () نماد جزء صحیح است.)</p> <p>-۴ (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.</p> <p>سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه</p> <p> $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-a}{2a} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$ $\Rightarrow \alpha', \beta' = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha, \beta = -\frac{3}{2}, 2 \Rightarrow \frac{b}{2} = \alpha\beta = -3 \Rightarrow b = -6$ $\left[\frac{ab}{4} \right] = \left[-\frac{6}{4} \right] = -2$ </p>	۷۴



اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $\text{gof}\left(-\frac{5}{3}\right)$ کدام است؟

۴ ۶

۳ -۶

۲ -۴

۱ ۴

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

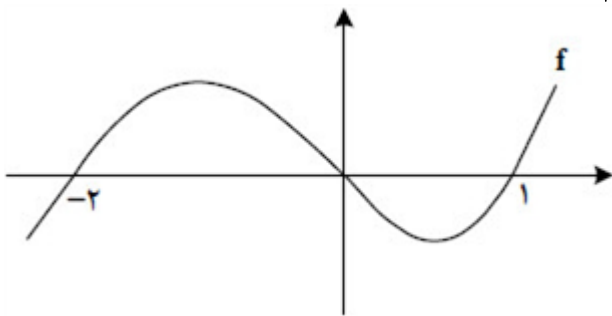
۷۵

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left[-\frac{5}{3}\right] - \left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$f\left(-\frac{7}{3}\right) = 2\left[-\frac{7}{3}\right] - \left(-\frac{7}{3}\right) = -6 + \frac{7}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$f\left(-\frac{11}{3}\right) = g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{7}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{7}{3} + f\left(-\frac{7}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{7}{3} - 6 + \frac{7}{3}\right]\right) = f(-6) = -6$$

نمودار مقابل، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۴ ۵

۳ ۴

۲ ۶

۱ ۳

۷۶

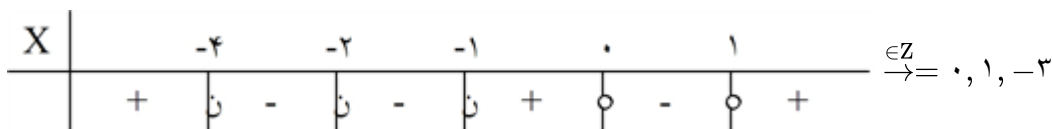
سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(2+x)} \leq 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 1$$

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = -2, 0, 1 \Rightarrow x = -4, -2, -1$$



وارون تابع $f(x) = \sqrt{x - 2}\sqrt{mx - 1}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m + 4)$ کدام است؟

۱ ☐ ۴

۲ ☐ ۳

$\frac{1}{4}$ ☐ ۲

$\frac{1}{2}$ ☐ ۱

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۷۷ پاسخ: ☒ ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

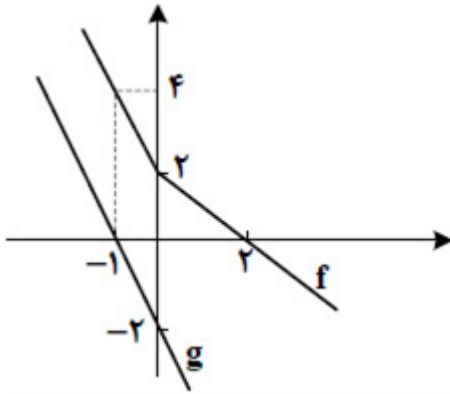
$$10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10) \in f^{-1} \Leftrightarrow (10, 2) \in f$$

$$y = 12 - x \xrightarrow{\text{وارون}} y = 12 - x \Rightarrow 12 - x = \sqrt{x - 2}\sqrt{mx - 1} \xrightarrow{x=10}$$

$$2 = \sqrt{10 - 2}\sqrt{10m - 1} \Rightarrow 4 = 10 - 2\sqrt{10m - 1} \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2}\sqrt{x - 1} \Rightarrow f(m + 4) = f(5) = 1$$

با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، حاصل $\text{gof}^{-1}(-2) + \text{fof}(-2)$ چقدر است؟



-۱۰ ☐ ۴

-۱۲ ☐ ۳

-۱۴ ☐ ۲

-۱۶ ☐ ۱

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۸ پاسخ: ☒ ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & ; x \leq 0 \\ -x + 2 & ; x \geq 0 \end{cases}, g(x) = -2x - 2; f(f(-2)) = f(4) = -4$$

$$x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + 2; g(f^{-1}(-2)) = g(4) = -10; g(f^{-1}(-2)) + f(f(-2)) = -14$$



اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، حاصل $g\left(-\frac{3}{7}\right) + g\left(\frac{5}{9}\right)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \quad \text{۴}$$

$$-\frac{11}{28} \quad \text{۳}$$

$$\frac{19}{20} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۱}$$

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۹ پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+|x|} = -\frac{3}{7} \xrightarrow{x<0} \frac{x}{1-x} = -\frac{3}{7} &\Rightarrow 7x = -3 + 3x \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \Rightarrow g\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{3}{4} \\ \frac{x}{1+|x|} = \frac{5}{9} \xrightarrow{x>0} \frac{x}{x+1} = \frac{5}{9} &\Rightarrow 9x = 5x + 5 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow g\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow \text{مجموع} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اگر $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ باشد، حاصل $f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1}(4)$ کدام است؟

$$\frac{123}{41} \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$1 \quad \text{۲}$$

$$\frac{6}{7} \quad \text{۱}$$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۸۰ پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} y = \frac{x+2}{2x-1} &\Rightarrow 2yx - y = x + 2 \Rightarrow x(2y-1) = y+2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{2y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x-1} = f(x) \\ f^{-1}(x) &= f(x) \Leftrightarrow \text{fof}(x) = x \\ f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1}(x) &= \text{fo}(\text{fof})(x) = f(x) \xrightarrow{x=4} f(4) = \frac{4+2}{8-1} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{x-3}{2}$ را در راستای محور y ها، ۶ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر A نقطه تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصله A از مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad \text{۴}$$

$$2\sqrt{2} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{5} \quad \text{۲}$$

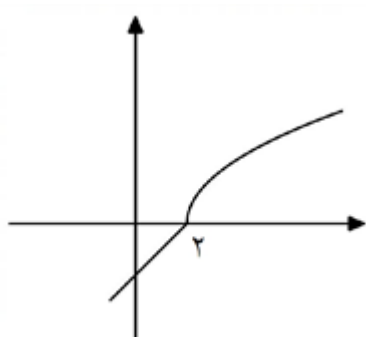
$$2\sqrt{5} \quad \text{۱}$$

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۸۱ پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} y = \frac{x-3}{2} &\Rightarrow x-3 = 2y \Rightarrow x = 2y+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x+3 \xrightarrow{-6} g(x) = 2x-3 \\ \begin{cases} y = \frac{x-3}{2} \\ y = 2x-3 \end{cases} &\Rightarrow 2x-3 = \frac{x-3}{2} \Rightarrow A: \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{2} \end{aligned}$$



	<p>تابع $f(x) = 2x - 2$ و $g(x) = [x]$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ است. اگر مجموعه A بُرد تابع $g \cdot f$ باشد، کدام عدد عضو A است؟</p> <p>۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۳ (۵)</p> <p>پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f و g را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:</p> <p> $-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -(2x - 2), g(x) = -1$ $0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = -(2x - 2), g(x) = 0$ $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = \begin{cases} 2x - 2, & -1 \leq x < 0 \Rightarrow -2 \leq 2x < 0 \Rightarrow -4 \leq 2x - 2 < -2 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ $R_f = [-4, -2) \cup \{0\}$ </p> <p>پس: $-2 \in R_f$</p>
<p>۸۲</p>	<p>اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}, x \geq 1$ باشد، $(g \circ g)(1)$ کدام است؟</p> <p>۱ (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴) صفر (۵)</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.</p> <p> $y = (\sqrt{x} - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1$ $g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$ $g(g(1)) = g(4) = 9$ </p>
<p>۸۴</p>	<p>اگر $f(x) = \left \frac{1}{2}x - 1 \right$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x + 2))) = 0$ چند ریشه دارد؟</p>  <p>۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)</p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p>با توجه به نمودار</p> $g(f(g(x + 2))) = 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(g(x + 2)) = 2$ $\Rightarrow \left \frac{1}{2}g(x + 2) - 1 \right = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}g(x + 2) - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} g(x + 2) = -2 \\ \text{یا} \\ g(x + 2) = 6 \end{cases}$ <p>انتقال افقی، تعداد ریشه‌ها را تغییر نمی‌دهد و با توجه به نمودار که تابع g با دامنه R اکیداً صعودی است. هر کدام از معادلات بالا یک جواب دارد.</p>



اگر $f(x) = \left[1 - \frac{x}{3}\right]$ باشد، مقدار $f(\cdot/\gamma) + 2f(\pi)$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است).

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

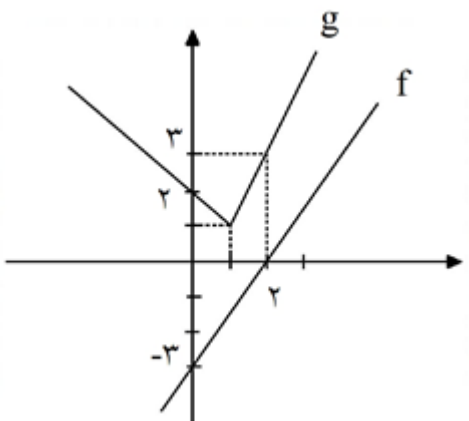
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

۸۵

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{3}\right] = 1 + \left[-\frac{x}{3}\right] \Rightarrow f(\cdot/\gamma) + 2f(\pi) = 1 + \left[-\frac{\cdot/\gamma}{3}\right] + 2\left(1 + \left[-\frac{\pi}{3}\right]\right) \\ = 1 + (-1) + 2(1 + (-2)) = 0 - 2 = -2$$

با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، حاصل $\text{gog}(\cdot) \times \text{gof}^{-1}(-2)$ کدام است؟



-۶ (۴)

-۴ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۸۶

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

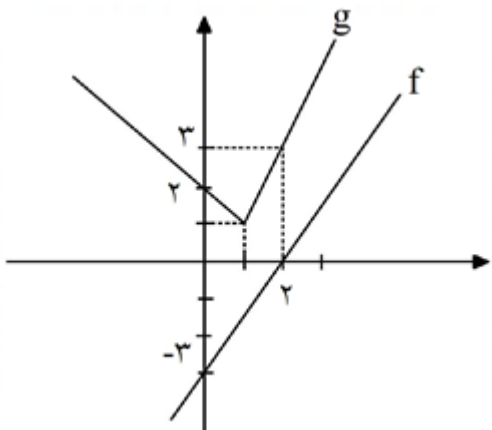
$$\text{gog}(\cdot) = g(2) = 3$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 3$$

$$f^{-1}(-2) = ? \Rightarrow f(?) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - 3 = -2 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = ?$$

$$x < 1 \Rightarrow g(x) = -x + 2 \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{حکم} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$



وارون تابع $y = -x^2 + 2x - 11$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

$(-12, -1)$ ☐

$(-1, 10)$ ☐

$(2, -31)$ ☐

$(9, -2)$ ☒

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

پاسخ: ☒ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y(-2) = 2^2 - 2 - 11 = 9 \Rightarrow (-2, 9) \in f \Rightarrow (9, -2) \in f^{-1}$$



پاسخنامه تشریحی

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \left\{3, -\frac{4}{5}\right\}$$

۱

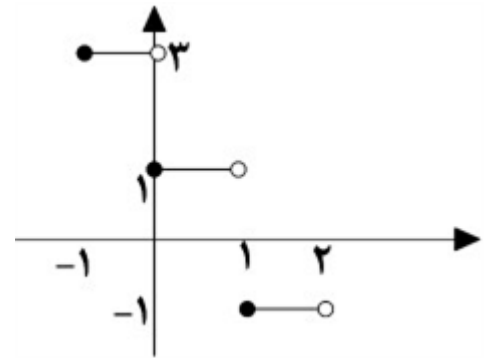
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{\frac{5x+4}{x-3}} = \frac{(x+1)(x-3)}{5x+4}$$

$$\left(\frac{5}{3}, 5\right) \in f \Rightarrow 5 = \frac{5}{3}a + 4 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

۲

$$y = \frac{3}{5}x + 4 \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{5}x \Rightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{3}(x - 4)$$

توجه: جواب $f^{-1}(x) = \frac{5x - 20}{3}$ برای وارون تابع نیز صحیح است.



۳

الف) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [-5, 5] - \{-1, 4\}$

۴

$$(f - 2g)(0) = f(0) - 2g(0) = 3 - 2(1) = 1$$

$$f^{-1}(-3) = 1 \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow -3 = -1 + m \Rightarrow m = -2$$

۵

$$y = -x - 2 \Rightarrow x = -y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x - 2$$

۶ R

۷ نادرست

الف) $f \times g = \{(2, -3), (3, 1), (1, 0)\}$

$$\frac{g}{f} = \{(2, -3), (3, 1)\}$$

۸

ب) خیر، در دو زوج مرتب مؤلفه دوم تکراری می‌باشند و مؤلفه‌های اول یکسان نیستند.

$$\mathbb{R} - \{0, -1\}$$

۹

پاسخ به صورت بازه $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ نیز صحیح است.

$$y = \frac{x-1}{3} \Rightarrow 3y = x-1 \Rightarrow 3y+1 = x \Rightarrow x = \frac{y+1}{3}$$

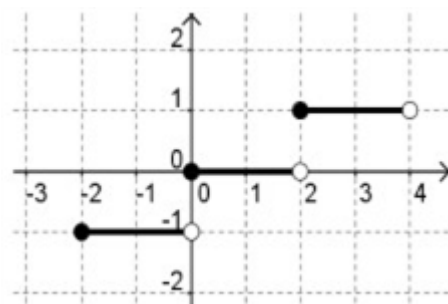
$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

۱۰

۱۱ نادرست

۱۲ درست

$-1 \leq \frac{x}{3} < 0$	$0 \leq \frac{x}{3} < 1$	$1 \leq \frac{x}{3} < 2$
$-3 \leq x < 0$	$0 \leq x < 3$	$3 \leq x < 6$
$f(x) = -1$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$



۱۳

$$f^{-1}(y) = a \Rightarrow f(a) = y \Rightarrow a^2 - 1 = y \Rightarrow a = 2$$

۱۴

$$\text{الف) } g^{-1} = \{(5, 3), (4, 4), (6, 5), (0, 2)\}$$

۱۵

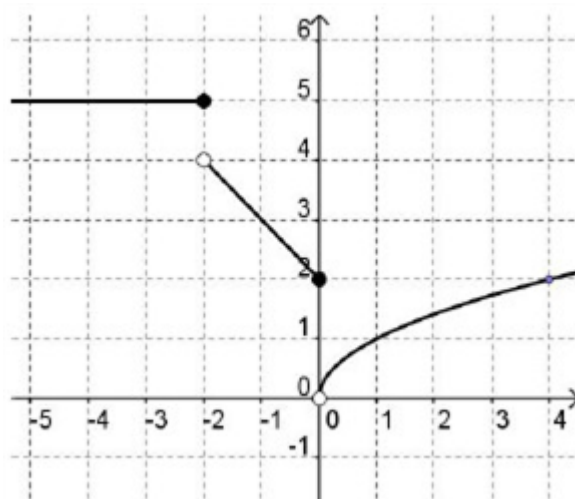
$$\text{ب) } \frac{f}{g} = \left\{ \left(3, \frac{4}{5} \right) \right\}$$

$$\text{ج) } f \circ g^{-1} = \{(5, 4), (0, 4)\}$$

$$2 = \sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

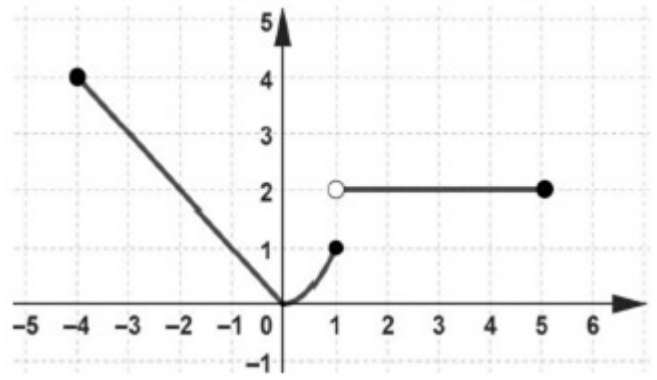
۱۶

۱۷ ها



۱۸





۱۹

الف) $f + g = \{(1, 2), (2, 8)\}$

ب) $D_{\frac{f}{g}} = \{2\}$

۲۰

الف) $D_g = \mathbb{R}, D_f = (-\infty, 4] \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 3 \in (-\infty, 4]\} = [-1, 1]$

*: $x^2 + 3 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

ب) $f \circ g(x) = \sqrt{4 - (x^2 + 3)} = \sqrt{1 - x^2}$

۲۱

الف ۲۲

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

ب)

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$g(3) \times 2f(4) = 5 \times 2(2) = 20$$

نادرست ۲۳

$(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ یا $\mathbb{R} - [1, 2)$ ۲۴

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

۲۵

$$\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

۲۶



الف) تابع ثابت است، بنابراین به ازای همه مقادیر برابر است. بنابراین: ۲۷

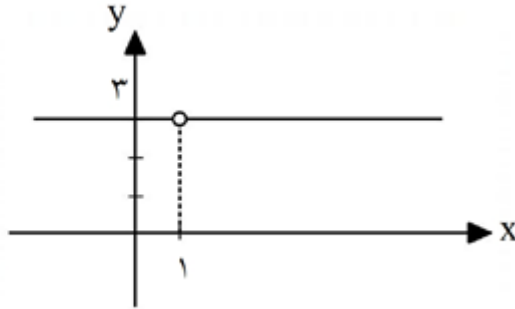
$$\begin{cases} f(0) = \frac{a}{-1} \\ f(2) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{-1} = 2 + a \Rightarrow a = -2 - a \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

(ب)

$$\xrightarrow{a=-1} f(x) = \frac{2x - 2}{x - 1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

(ج)

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$



الف) ۲۸

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{10}, -1\right) \in f^{-1} &\Rightarrow \left(-1, -\frac{2}{10}\right) \in f \Rightarrow \frac{-2}{a + a|-1|} = -\frac{2}{10} \\ \Rightarrow \frac{-2}{2a} &= -\frac{2}{10} \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

(ب)

$$f(x) = \frac{2x}{5 + 5|x|} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{5 + 10} = \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$$

$$f(f(2)) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)}{5 + 5\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{4}{5}}{7} = \frac{4}{35}$$

$$\left(-\frac{1}{3}, -2\right) \in f^{-1} \Rightarrow \left(-2, -\frac{1}{3}\right) \in f \Rightarrow \frac{-2}{a + a|-2|} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-2}{3a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 2$$

۲۹

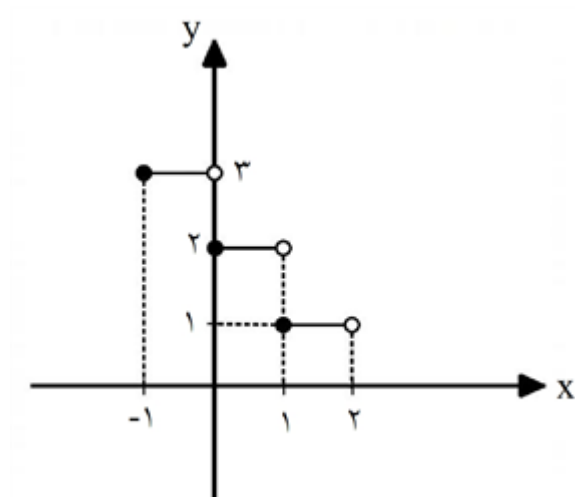


$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = 2 - (-1) = 3$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 2 - 0 = 2$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1$$

۳۰



$$D_f = D_g = R$$

$$x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 = g(x)$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = g(1) \Rightarrow k + 2 = 1 + 1 \Rightarrow k = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & -1 \leq x \leq 3 \\ 2 - [x] & -3 \leq x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < -2 \Rightarrow y = 2 - (-3) = 5 \\ -2 \leq x < -1 \Rightarrow y = 2 - (-2) = 4 \end{cases}$$

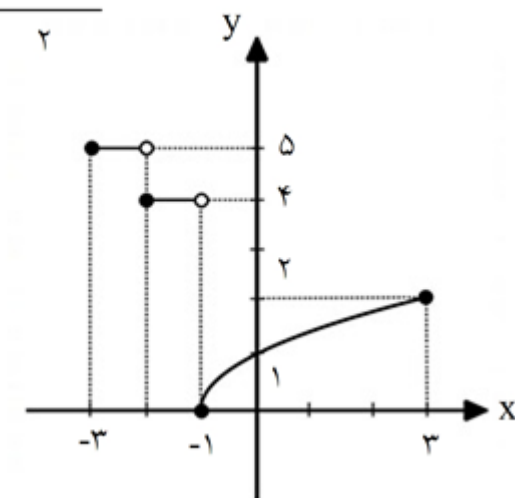
$$\begin{cases} D_f = [-3, 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_f = [-1, 2] \cup \{4, 5\} \end{cases}$$

۳۱

۳۲

x	-1	3
y	0	2



$$(-\gamma, \delta) \in f^{-1} \Rightarrow (\delta, -\gamma) \in f \Rightarrow -\gamma = a(\delta) + \gamma \Rightarrow \delta a = -\gamma \Rightarrow a = -\frac{\gamma}{\delta}$$

$$\xrightarrow{a=-\frac{\gamma}{\delta}} f(x) = -\frac{\gamma}{\delta}x + \gamma \Rightarrow y = -\frac{\gamma}{\delta}x + \gamma \Rightarrow \frac{\gamma}{\delta}x = \gamma - y \Rightarrow x = \frac{\gamma - y}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{\gamma - x}{\frac{\gamma}{\delta}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\gamma - x}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

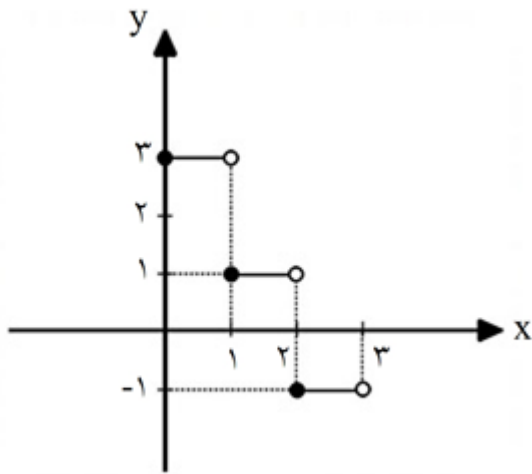
(ب)

$$(f + f^{-1})(1) = f(1) + f^{-1}(1) = -\frac{\gamma}{\delta}(1) + \gamma + \frac{\gamma - 1}{\frac{\gamma}{\delta}} = -\frac{\gamma}{\delta} + \gamma + 1 = \frac{\gamma}{\delta}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = \gamma - \frac{\gamma}{\delta}(x) = \gamma$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \gamma - \frac{\gamma}{\delta}(1) = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = \gamma - \frac{\gamma}{\delta}(2) = -1$$



$$D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$$

$$\sqrt{x - \gamma} \geq 0 \xrightarrow{+ \gamma} \gamma + \sqrt{x - \gamma} \geq \gamma \Rightarrow y \geq \gamma \Rightarrow R_f = [\gamma, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ f^{-1}} = [\gamma, +\infty)$$

$$(\gamma f - g)(-\gamma) = \gamma f(-\gamma) - g(-\gamma) = \gamma(\gamma + \sqrt{\gamma + \gamma}) - 1 = 18 - 1 = 17$$

$$(\gamma f - g)(\gamma) = \gamma f(\gamma) - g(\gamma) = \gamma(\delta + \sqrt{\gamma + 1}) - 9 = \gamma(\gamma) - 9 = \delta$$

$$\frac{f \circ g(\cdot)}{g \circ f(\cdot)} = \frac{f(g(\cdot))}{g(f(\cdot))} = \frac{f\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{g(\delta)} = \frac{\delta - \frac{1}{\gamma}}{\frac{\delta + 1}{\sqrt{\gamma + \delta}}} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\gamma}} = \frac{\gamma \gamma}{12} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

$$D_f = R$$

(ب)

$$D_g : \gamma + x > 0 \Rightarrow x > -\gamma \Rightarrow D_g = (-\gamma, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \delta - |x| > -\gamma\}$$

(١)

↓

$$-|x| > -\gamma \Rightarrow |x| < \gamma \Rightarrow -\gamma < x < \gamma \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{g \circ f} = (-\gamma, \gamma)$$



$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(7) = 2(7) + 1 = 15$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} \Rightarrow g(15) = \frac{15}{\sqrt[3]{15+1}} = \frac{15}{\sqrt[3]{16}} = \frac{15}{2} = 7.5$$

بنابراین خروجی ماشین برابر ۷/۵ است.

۴۰ الف

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow D_f = R - \{-1\}$$

$$D_g = R$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = R - \{-1\} \cap R - \{-10\} = R - \{-1, -10\}$$

ب

$$g(x) = x + 10 \Rightarrow y = x + 10 \Rightarrow x = y - 10 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 10$$

$$2g^{-1}(12) - f(-2) = 2(12 - 10) - \left(\frac{-2}{-2+1}\right) = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$g(x) = 5x - 2 \Rightarrow y + 2 = 5x \Rightarrow x = \frac{y+2}{5} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$$

$$(f - 2g^{-1})(8) = f(8) - 2g^{-1}(8) = \sqrt{8+1} - 1 - 2\left(\frac{8+2}{5}\right) = 3 - 1 - 2(2) = 3 - 1 - 4 = -2$$

$$g(x) = x + 1 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 1$$

$$4f(2) - g^{-1}(7) = 4\left(\frac{2}{2} + 1\right) - (7 - 1) = 8 - 6 = 2$$

۴۳ الف) نیمساز ربع اول و سوم یا $y = x$

ب) یک به یک

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(2, \frac{5}{2}\right), (4, 2) \right\}$$

$$[x+2] + [x+3] + [x+4] = 9 \Rightarrow [x] + 2 + [x] + 3 + [x] + 4 = 9 \Rightarrow 3[x] + 9 = 9 \Rightarrow 3[x] = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

۴۶ دو تابع برابر هستند، زیرا:

$$\begin{cases} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R - \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = f(x)$$

$$\text{الف) } (\text{fog})^{-1}(\delta) = \sqrt[3]{\lambda \times \delta + 24} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$(\text{fog})(x) = f(x^3) = \frac{1}{\lambda}x^3 - 2 \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{\lambda}x^3 \Rightarrow x^3 = \lambda y + 24 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\lambda y + 24}$$

$$(\text{fog})^{-1}(x) = \sqrt[3]{\lambda x + 24}$$

$$\text{ب) } (f^{-1} \circ f^{-1})(\phi) = f^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(\phi)}_{\lambda(\phi+2)=12}\right) = f^{-1}(\phi) = \lambda(12+2) = 14$$

$$\text{پ) } (g^{-1} \circ f^{-1})(\delta) = g^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(\delta)}_{\lambda(\delta+2)=64}\right) = g^{-1}(\phi 4) = \sqrt[3]{\phi 4} = 4$$

$$f(x) = \frac{-\lambda x + 2}{3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \frac{-\lambda y + 2}{3} \Rightarrow -\lambda y = 3x - 2 \Rightarrow y = \frac{-3x + 2}{\lambda} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x + 2}{\lambda}$$

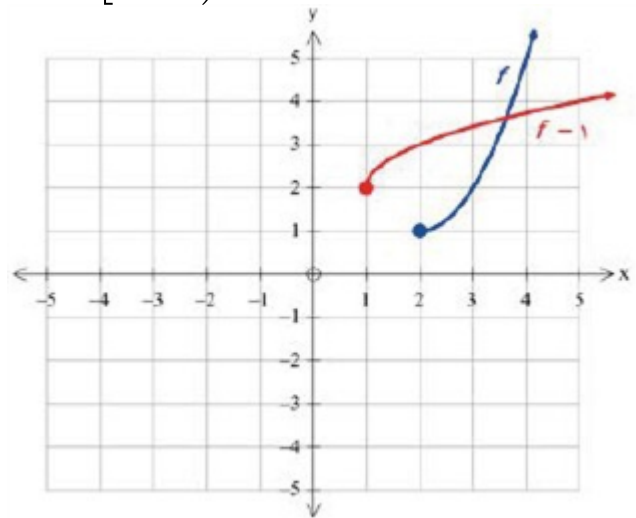
$$g(x) = -\delta - \sqrt{3x+1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -\delta - \sqrt{3y+1} \Rightarrow -\sqrt{3y+1} = x + \delta$$

$$\Rightarrow 3y+1 = (x+\delta)^2 \Rightarrow 3y = (x+\delta)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{(x+\delta)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x+\delta)^2 - 1}{3}$$

$$f(x) = x^3 - 4x + \delta = (x-2)^3 + 1 \quad D_f = [2, +\infty) \quad R_f = [1, +\infty)$$

$$y = (x-2)^3 + 1 \Rightarrow y-1 = (x-2)^3 \Rightarrow x-2 = \pm \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x = \pm \sqrt[3]{y-1} + 2$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2 \quad D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$



۵۰ الف) نادرست

$$\begin{aligned} (\text{fog})_{(\delta)} &= f(g(\delta)) = g(\delta)^3 - 4 = (\sqrt{x^3 - 4})^3 - 4 = (\sqrt{\delta^3 - 4})^3 - 4 \\ &= 21 - 4 = 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = 3x \\ g(x) = 2x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{fog}(x) = f(g(x)) = 3(2x) = 6x \\ \text{gof}(x) = g(f(x)) = 2(3x) = 6x \end{cases} \Rightarrow \text{fog}(x) = \text{gof}(x) \\ (\text{fog})(4) &= f(g(4)) = f(8) = 24 \\ \begin{cases} (\text{fog})(\delta) = f(g(\delta)) = \sqrt{2 \times \delta - 1} = \sqrt{9} = 3 \\ g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

ب) نادرست

پ) درست

ت) درست

$$\text{الف) } f(x) = 2x - 5, g(x) = x^2 - 3x + 8 \Rightarrow \begin{cases} f(g(x)) = 7 \\ 2(x^2 - 3x + 8) - 5 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 11 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = 3x^2 + x - 1, g(x) = 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} g(f(x)) = -5 \\ 1 - 2(3x^2 + x - 1) \Rightarrow -6x^2 - 2x + 3 = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6x^2 - 2x + 8 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{fog} = \{(\Delta, \Lambda), (3, 3), (7, \Lambda), (9, 4)\} \quad \text{gof} = \{(\Delta, \Delta)\}$$

$$y = ax + b \quad \frac{y-b}{a} = x \quad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

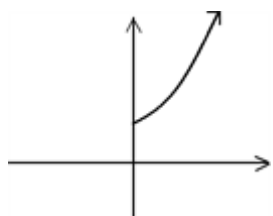
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-2}{5} \quad y - 2 = -\frac{2}{5}x \quad y = -\frac{2}{5}x + 2 \quad \text{ضابطه f}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad y = \frac{3}{2}(x - 2) \quad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad \text{ضابطه g}$$

$$(f+g)(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{11}{10}x - 1$$

$$(f-g)(x) = \frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = \frac{-11}{10}x + 5$$

$$(f \times g)(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right) \left(\frac{3}{2}x - 3\right)$$



$$f: [0, \infty) \rightarrow R$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

ارتباط بین معلم و شاگردان، تمام شاگردان یک کلاس یک معلم ریاضی دارند.

۵۱

۵۲

۵۳

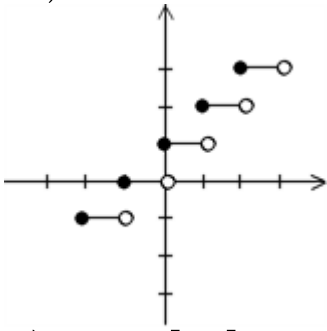
۵۴

۵۵

۵۶



الف) $f(x) = [x] + 1, -2 \leq x < 3$



$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -1$$

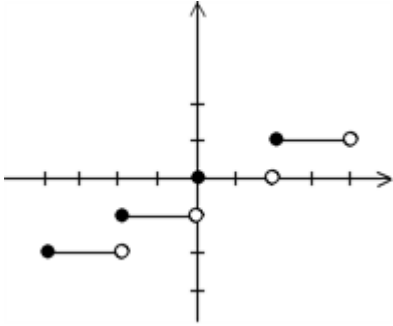
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 3$$

ب) $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{4}x \right\rfloor, -4 \leq x < 4$



$$-4 \leq x < -2 \quad -2 \leq \frac{1}{4}x < -1 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$-2 \leq x < 0 \quad -1 \leq \frac{1}{4}x < 0 \Rightarrow f(x) = -1$$

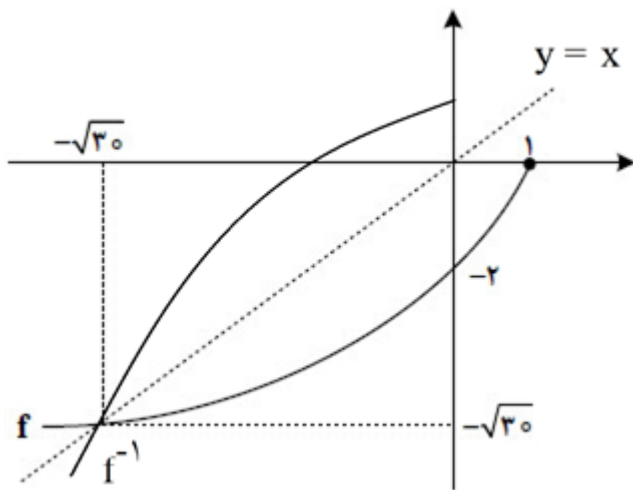
$$0 \leq x < 2 \quad 0 \leq \frac{1}{4}x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$2 \leq x < 4 \quad 1 \leq \frac{1}{4}x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۸

$$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{a(-1)}{1 + |-1|} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

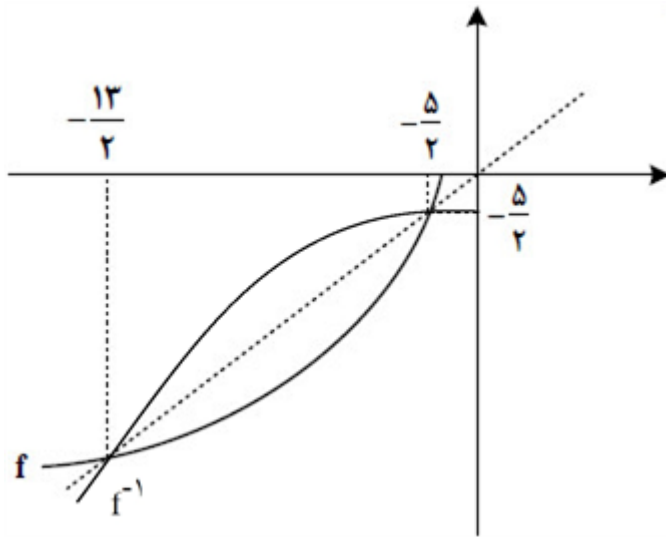
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۹



$$\sqrt{\frac{-}{-x + f^{-1}(x)}} \geq 0 \Rightarrow -x + f^{-1}(x) < 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) < x \Rightarrow x < -\sqrt{3} \Rightarrow \text{بیش از ۷}$$





$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \xrightarrow{f^{-1}(x) < 0} x - f^{-1}(x) < 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) > x \Rightarrow x \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -6, -5, -4, -3$$

$$\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5}\right) \in f^{-1} \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{8}\right) \in f \Rightarrow \frac{-\frac{3}{5}}{a + \frac{3}{5}a} = -\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{3}{8a} = -\frac{1}{8} \Rightarrow a = 3$$

$$D_f : x \geq -1, 1 - \sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \leq 1 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_f = [-1, 0]$$

$$\sqrt{x+1} \text{ صعودی} \Rightarrow 1 - \sqrt{1+x} \text{ نزولی} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow f(-1) = 1, f(0) = 0 \Rightarrow R_f = [0, 1]$$

نمودار تابع فقط در ناحیه دوم است پس نمودار تابع وارون در ناحیه چهارم واقع می‌شود و تنها نقطه‌ی مشترک همان (۰, ۰) است.

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} \xrightarrow{x=3} f(3) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4} = 3 \Rightarrow a = 4$$

تذکر: در اصل سؤال، شرط $x \geq 0$ نبود که در این صورت تابع وارون‌پذیر نمی‌باشد و منظور طراح، بخشی از تابع است که وارون‌پذیر است. در کل داریم:

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x + 4\sqrt{x}, x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x - 4\sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۴

$$\left. \begin{aligned} f \circ g^{-1}(a) = -3 &\Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = a = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط از نقطه $(1, 20)$ می‌گذرد، پس وارون تابع هم از این نقطه می‌گذرد، در نتیجه تابع f از نقطه $(1, 20)$ عبور می‌کند. $\Rightarrow f(1) = a + 8 = 20 \Rightarrow a = 12$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$f(\sqrt{5}) = 5 - [\sqrt{5}] = 3 \Rightarrow f(f(\sqrt{5})) = f(3) = 9a^2 - [3a] = 2$$

با توجه به گزینه‌ها، $a = -\frac{1}{3}$ جواب است. جواب‌های دیگر معادله $a = \frac{2}{3}$ و $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۷

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ -2x^2 + ax - 21 \end{cases} \quad \begin{aligned} x \geq \frac{5}{2} &\Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4} \\ x < \frac{5}{2} &\Rightarrow y < g\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow y < \frac{5}{2}a - \frac{67}{2} \end{aligned}$$

$\underbrace{\quad}_{g(x)}$

ابتدا خود سهمی در فاصله $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ باید وارون‌پذیر باشد پس:

$$\frac{5}{2} \leq x_S \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \frac{-a}{-4} \Rightarrow a \geq 10$$

از طرفی برد هر دو ضابطه نباید اشتراکی داشته باشند. بنابراین:

$$\frac{5}{2}a - \frac{67}{2} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow 10a - 134 \leq -1$$

$$10a \leq 133 \Rightarrow a \leq 13\frac{1}{10}$$

$$10 \leq a \leq 13\frac{1}{10} \quad \text{شرط وارون‌پذیر تابع } f:$$

پس بزرگترین مقدار صحیح $a = 13$

$$f^{-1}(-3) : -2x^2 + 13x - 21 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \checkmark \\ \text{یا} \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{چون } x < \frac{5}{2}$$

غ ق ق

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۸

$$\begin{aligned} f \circ g\left(-\frac{1}{3}\right) &= f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4 \\ g\left(-\frac{1}{3}\right) &= f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right]\right) = f(1) = 2 \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ 2y = x + z \end{cases} \Rightarrow y = 7, x + z = 14$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۹

دنباله هندسی $7 - d, 7, 7 + d \rightarrow 13 - d, 11, 9 + d$ دنباله حسابی

$$11^2 = (13 - d)(9 + d) \Rightarrow d^2 - 4d + 4 = 0 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 2 = 5 \\ y = 7 \\ z = 7 + 2 = 9 \end{cases}$$

$$\left[\frac{xy}{z} \right] = \left[\frac{5 \times 7}{9} \right] = \left[\frac{35}{9} \right] = 3$$

$$n = 4 \Rightarrow a_3 = a_1 + 2a_2 \Rightarrow a_3 = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۰

$$n = 5 \Rightarrow a_4 = a_1 + 2a_2 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$n = 6 \Rightarrow a_5 = a_1 + 2a_2 = -1 + 2(1) = 1$$

$$n = 7 \Rightarrow a_6 = a_1 + 2a_2 = 1 + 2(1) = 3$$

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx - 1}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۱

$$5y - 10x = 12 \xrightarrow{y=7/2} x = 2/4 \Rightarrow (2/4, 7/2) \in f^{-1}$$

$$(7/2, 2/4) \in f$$

$$\Rightarrow 2/4 = \sqrt{7/2} \sqrt{7/2 m - 1}$$

$$2/4 \times 2/4 = 7/2 (7/2 m - 1)$$

$$0/8 = 7/2 m - 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \Rightarrow f(16) = 4\sqrt{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_1 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۲

$$n = 3 \Rightarrow a_2 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$n = 4 \Rightarrow a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$n = 5 \Rightarrow a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 2 = 4$$

$$n = 6 \Rightarrow a_5 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 2 = 4$$

$$n = 7 \Rightarrow a_6 = a_1 + a_2 + a_3 = 5$$

$$n = 8 \Rightarrow a_7 = a_1 + a_2 + a_3 = 6$$

$$R_1 = \left[\frac{13}{2}, +\infty \right)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۳

$$\text{ضابطه دوم: } -x^2 + 2mx + 2 = -(x - m)^2 + m^2 + 2$$

باید رأس سهمی ($x = m$) داخل بازه $x > -\frac{3}{2}$ نباشد، پس:

$$m \leq -\frac{3}{2} \xrightarrow{m^2 + 2 \leq \frac{13}{2}} m = -2 \Rightarrow y_2 = -(x + 2)^2 + 6$$

$$f^{-1}(-19) \Rightarrow -(x + 2)^2 + 6 = -19 \Rightarrow (x + 2)^2 = 25 \xrightarrow{x > -\frac{3}{2}} x = 3$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۴

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-a}{2a} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha', \beta' = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha, \beta = -\frac{3}{2}, 2 \Rightarrow \frac{b}{2} = \alpha\beta = -3 \Rightarrow b = -6$$

$$\left[\frac{ab}{4} \right] = \left[-\frac{6}{4} \right] = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۵

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left[-\frac{5}{3}\right] - \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\left[-\frac{1}{3}\right] - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{gof}\left(-\frac{5}{3}\right) = g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right]\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۶

$$-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(2+x)} \leq 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 1$$

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = -2, 0, 1 \Rightarrow x = -4, -2, -1$$

X	-4	-2	-1	0	1
	+	-	-	+	-

$\xrightarrow{\in \mathbb{Z}} = 0, 1, -3$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۷

$$10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10) \in f^{-1} \Leftrightarrow (10, 2) \in f$$

$$y = 12 - x \xrightarrow{\text{وارون}} y = 12 - x \Rightarrow 12 - x = \sqrt{x - 2} \sqrt{mx - 1} \xrightarrow{x=10}$$

$$2 = \sqrt{10 - 2} \sqrt{10m - 1} \Rightarrow 4 = 10 - 2 \sqrt{10m - 1} \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2} \sqrt{x - 1} \Rightarrow f(m + 4) = f(5) = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۸

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & ; x \leq 0 \\ -x + 2 & ; x \geq 0 \end{cases}, g(x) = -2x - 2; f(f(-2)) = f(2) = -4$$

$$x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + 2; g(f^{-1}(-2)) = g(4) = -10; g(f^{-1}(-2)) + f(f(-2)) = -14$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۹

$$\frac{x}{1+|x|} = -\frac{3}{4} \xrightarrow{x < 0} \frac{x}{1-x} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4x = -3 + 3x \Rightarrow x = -3$$

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{5}{9} \xrightarrow{x > 0} \frac{x}{x+1} = \frac{5}{9} \Rightarrow 9x = 5x + 5 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = \frac{1}{4}$$



۸۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x+2}{2x-1} \Rightarrow 2yx - y = x + 2 \Rightarrow x(2y-1) = y+2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{2y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x-1} = f(x)$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow \text{fof}(x) = x$$

$$f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1}(x) = \text{fo}(\text{fof})(x) = f(x) \xrightarrow{x=4} f(4) = \frac{4+2}{8-1} = \frac{6}{7}$$

۸۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x-3}{2} \Rightarrow x-3 = 2y \Rightarrow x = 2y+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x+3 \xrightarrow{-6} g(x) = 2x-3$$

$$\begin{cases} y = \frac{x-3}{2} \\ y = 2x-3 \end{cases} \Rightarrow 2x-3 = \frac{x-3}{2} \Rightarrow A: \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{2}$$

۸۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f و g را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -(2x-2), g(x) = -1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = -(2x-2), g(x) = 0$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=1 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = \begin{cases} 2x-2, & -1 \leq x < 0 \Rightarrow -2 \leq 2x < 0 \Rightarrow -4 \leq 2x-2 < -2 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

$$R_f = [-4, -2) \cup \{0\}$$

پس: $-3 \in R_f$

۸۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = (\sqrt{x}-1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x}-1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}+1$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x}+1)^2$$

$$g(g(1)) = g(4) = 9$$

۸۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(f(g(x+2))) = 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(g(x+2)) = 2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}g(x+2) - 1 \right| = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}g(x+2) - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} g(x+2) = -2 \\ \text{یا} \\ g(x+2) = 6 \end{cases}$$

انتقال افقی، تعداد ریشه‌ها را تغییر نمی‌دهد و با توجه به نمودار که تابع g با دامنه R اکیداً صعودی است. هر کدام از معادلات بالا یک جواب دارد.

۸۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{3} \right] = 1 + \left[-\frac{x}{3} \right] \Rightarrow f(0/7) + 2f(\pi) = 1 + \left[-\frac{0/7}{3} \right] + 2 \left(1 + \left[-\frac{\pi}{3} \right] \right)$$

$$= 1 + (-1) + 2(1 + (-2)) = 0 - 2 = -2$$



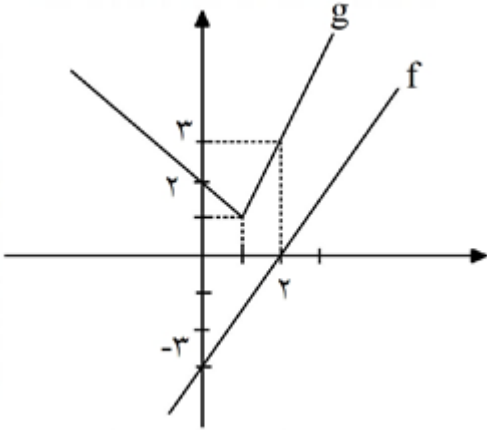
$$\text{gog}(\cdot) = g(2) = 3$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 3$$

$$f^{-1}(-2) = ? \Rightarrow f(?) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - 3 = -2 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = ?$$

$$x < 1 \Rightarrow g(x) = -x + 2 \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{حکم} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$



$$y(-2) = 2^4 - 4 - 11 = 9 \Rightarrow (-2, 9) \in f \Rightarrow (9, -2) \in f^{-1}$$



پاسخنامه کلیدی

۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴

