



p30konkor.com

نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

نام دبیر :

عنوان آزمون : ریاضی دهم فصل ۲ - متوسط ۲ تاریخ برگزاری

| ردیف | لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید   | بارم |
|------|---|------|
| ۱    | اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر $\alpha$ را به دست آورید.                           |      |
| ۲    | با فرض با معنی بودن کسرها، درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.<br>$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$       |      |
| ۳    | درستی تساوی زیر را بررسی کنید.<br>$1 - (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2 \sin \theta \cos \theta$   |      |
| ۴    | اگر $\tan \alpha = 4$ باشد، مقدار $\frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}$ را به دست آورید.                          |      |
| ۵    | حاصل عبارت $\cot^2 \theta + \frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} - 2$ را به ساده‌ترین شکل بیابید.                              |      |
| ۶    | درستی تساوی زیر را اثبات کنید.<br>$\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} = \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha}$ |      |
| ۷    | اگر $f(x) = 5x - 1$ باشد:<br>الف) $f(1)$ را حساب کنید.<br>ب) نمایش جبری $f(x)$ را با جاگذاری مقدار $f(1)$ بنویسید.                              |      |
| ۸    | اگر $f(x) = 3x + 9 - 2f(2)$ باشد، مقدار $f(-5)$ را به دست آورید.  |      |
| ۹    | با فرض $r = 2$ نسبت‌های مثلثاتی زوایای مقابل را بدست آورید:<br>$\theta = 240^\circ$   |      |
| ۱۰   | اگر $30^\circ < \theta < 120^\circ$ باشد و $\sin \theta = \frac{1 - 3m}{5}$ باشد، حدود $m$ را حساب کنید.  |      |



|    |   |
|----|---|
| ۱۱ | با فرض $r = ۲$ نسبتهای مثلثاتی زوایای مقابل را بدست آورید:<br>$\theta = ۲۱۰^\circ$  |
| ۱۲ | در تمرین زیر نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبتهای مثلثاتی را پیدا کنید.<br>$\cot \theta = -۲$ (در ربع چهارم)                              |
| ۱۳ | در تمرین زیر نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبتهای مثلثاتی را پیدا کنید.<br>$\sin \theta = +\frac{۳}{۵}$ (در ربع دوم)                      |
| ۱۴ | درستی تساوی مقابل را نشان دهید.<br>$\cos^۴ \theta - \sin^۴ \theta = ۲ \cos^۲ \theta - ۱$  |
| ۱۵ | در مسالهی زیر مقدار $r$ و یکی از نسبتهای مثلثاتی داده شده است مختصات نقطه‌ی $P$ را به دست آورید.<br>$r = ۴, \cos \theta = \frac{۱}{۴}$ (در ربع چهارم) |



۱  $\alpha$  در ربع دوم قرار دارد. بنابراین به جز Sin مابقی نسبت‌های مثلثاتی منفی می‌شود.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{25}{144} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{169}{144} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{169} \xrightarrow{\sin \alpha > 0} \sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$1 - (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= 1 - (1 - 2 \sin \theta \cos \theta) = 1 - 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

۴ می‌دانیم که  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  ، بنابراین کل کسر را بر  $\cos \alpha$  تقسیم می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\div \cos \alpha} \frac{\frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{5 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{3 \tan \alpha + 1}{5 \tan \alpha - 2} = \frac{3(4) + 1}{5(4) - 2} = \frac{13}{18}$$

$$\frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} - 2 \cot^2 \theta = \frac{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} - 2 \cot^2 \theta$$

$$= \frac{2}{\sin^2 \theta} - 2 \cot^2 \theta = 2(1 + \cot^2 \theta) - 2 \cot^2 \theta = 2 + 2 \cot^2 \theta - 2 \cot^2 \theta = 2$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \tan \alpha - \cot \alpha = \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 5 - 1 - f(1) \Rightarrow f(1) = 2$$

$$\xrightarrow{f(1)=2} f(x) = 5x - 1 - 2 \Rightarrow f(x) = 5x - 3$$

۷ الف)

ب)

$$\xrightarrow{x=2} f(2) = 3(2) + 9 - 2f(2) \Rightarrow 3f(2) = 15 \Rightarrow f(2) = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x + 9 - 2(5) \Rightarrow f(x) = 3x - 1$$

$$f(-5) = 3(-5) - 1 = -16$$

۸

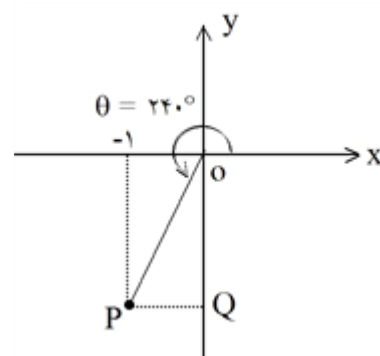
شعاع  $OP = 2$  را با زاویه  $\theta = 240^\circ$  رسم می‌کنیم در مثلث  $OPQ$ ، ضلع  $PQ$  روبروی زاویه  $30^\circ$  درجه است و طول آن

نصف وتر  $OP$  می‌باشد. پس طول نقطه  $P$  برابر با  $-1$  می‌باشد (ربع سوم)

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (-1)^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \quad (\text{ربع سوم})$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin 240^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos 240^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \quad \cos \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \cos 240^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

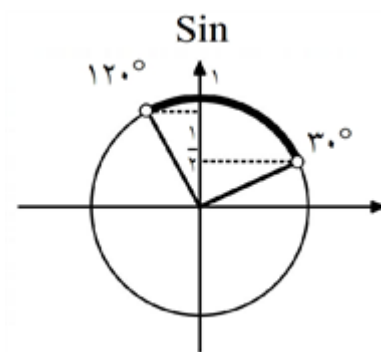


$$30^\circ < \theta < 120^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin \theta \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1-3m}{5} \leq 1$$

$$\xrightarrow{\times 5} \frac{5}{2} < 1-3m \leq 5 \xrightarrow{-1} \frac{3}{2} < -3m \leq 4$$

$$\xrightarrow{\div (-3)} -\frac{1}{2} > m \geq -\frac{4}{3}$$

۱۰



۱۱

در مثلث OPQ رأس Q قائمه و زاویه ی  $\widehat{POQ}$  برابر با  $30^\circ$  است و ضلع روبرو به آن PQ نصف وتر  $OP = 2$  است

بنابراین عرض نقطه P برابر است با  $y = -1$

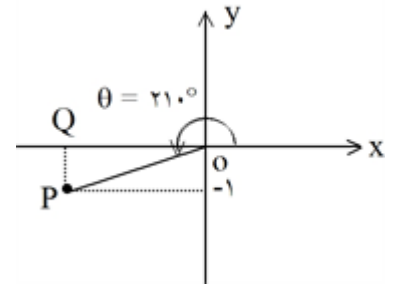
$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (-1)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \quad (\text{ربع سوم})$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin 210^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos 210^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$



۱۲

$$\cot \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow -2 = \frac{x}{y} \Rightarrow \text{نقطه } p(+2, -1) \text{ را انتخاب می‌کنیم}$$

$$\Rightarrow x = +2, y = -1, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{+2} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۱۳

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{5}} \quad (\text{ربع دوم})$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{-1} = -2 \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

۱۴

$$\text{طرف چپ تساوی} = \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$\Rightarrow$  تساوی فوق همواره درست است.

$$= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = \text{طرف راست تساوی}$$

۱۵

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \Rightarrow \sqrt{2^2 + y^2} = 4 \Rightarrow 4 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm \sqrt{12} \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

با توجه به این که  $p$  در ربع چهارم است پس باید  $y < 0$  باشد و داریم  $y = -2\sqrt{3}$  در نتیجه:

$$p(2, -2\sqrt{3})$$