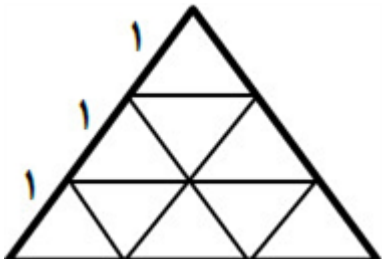
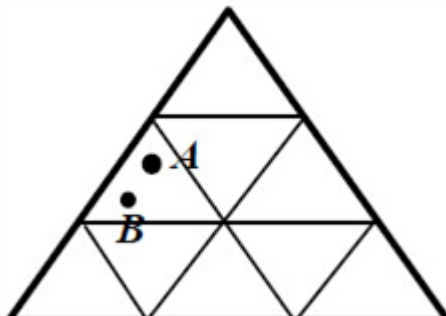


ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>به چند طریق می‌توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\},$ $A_j = \{f : A \rightarrow B f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}, 1 \leq j \leq 3$ $ S = 3^4 = 81, A_j = 2^4 = 16$ $ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1, A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \text{ (ص ۷۷)}$	
۲	<p>یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آن‌ها از یکدیگر کمتر از یک باشد.</p>  <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>۱۰ نقطه را کبوتر و هریک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می‌کنیم. طبق اصل کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $AB < 1$. (ص ۸۰)</p> 	
۳	<p>با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{7!}{2! \times 3!} \text{ (ص ۵۸)}$	

۴	<p>نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ به هر کدام از x_1, x_2, \dots, x_k عدد ۱- را اضافه می‌کنیم.</p> <p>معادله جدید $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$</p> <p>لذا تعداد حالات جواب از رابطه $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ به دست می‌آید. (ص ۶۱)</p>																											
۵	<p>مربع لاتینی بنویسید که با مربع لاتین زیر متعامد باشد و متعامد بودن آن را با ذکر دلیل بیان کنید.</p> <table><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ در مربع لاتین دوم عدد دو رقمی تکراری نداریم. بنابراین مربع لاتین ارائه شده با مربع لاتین مورد سؤال متعامد هستند.</p> <table><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table> <table><tr><td>۱۱</td><td>۳۳</td><td>۲۲</td></tr><tr><td>۲۳</td><td>۱۲</td><td>۳۱</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td></tr></table> <p>(توجه: به سایر مربع‌های لاتینی که شرایط مسأله را برقرار کنند، نمره داده شود.) (ص ۷۲)</p>	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱۱	۳۳	۲۲	۲۳	۱۲	۳۱	۳۲	۲۱	۱۳
۱	۳	۲																										
۲	۱	۳																										
۳	۲	۱																										
۱	۳	۲																										
۲	۱	۳																										
۳	۲	۱																										
۱۱	۳۳	۲۲																										
۲۳	۱۲	۳۱																										
۳۲	۲۱	۱۳																										
۶	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>تعداد توابع یک به یک از مجموعه دو عضوی به مجموعه ۴ عضوی برابر می‌باشد.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ ۱۲ (ص ۷۹)</p>																											
۷	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>دو مربع لاتین 2×2 وجود و مربع لاتین 1×1 وجود دارد.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ ندارد - یک (ص ۶۶)</p>																											
۸	<p>یک نجار در هفته ۴ مدل مختلف صندلی در ۳ رنگ متفاوت می‌سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم. حداقل ۳ صندلی هم رنگ و هم مدل ساخته است؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ (ص ۸۲) $kn + 1 = 12 \times 2 + 1 = 25 \Rightarrow n = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow k = 2, k + 1 = 3$</p>																											

۹	<p>در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($1 \leq n \leq 500$) چند عدد وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $ A = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100, B = \left\lfloor \frac{500}{4} \right\rfloor = 125, A \cap B = \left\lfloor \frac{500}{20} \right\rfloor = 25$ $ \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = 500 - (100 + 125 - 25) = 300 \text{ (ص ۷۵)}$																		
۱۰	<p>ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ نوشتن شرط متعامد بودن</p> <table><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table> <table><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table> <p>هر کدام از مربع‌های لاتین (ص ۶۴ و ۶۵)</p>	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳
۲	۳	۱																	
۳	۱	۲																	
۱	۲	۳																	
۳	۱	۲																	
۲	۳	۱																	
۱	۲	۳																	
۱۱	<p>معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_2 = 4$ و $x_4 \geq 3$ باشد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۶۱) $x_1 + x_3 + x_4 = 8$</p> $x_4 - 3 = y_4 \Rightarrow x_1 + x_3 + y_4 = 5 \Rightarrow \binom{5}{2} = 21$																		
۱۲	<p>با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند کد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۵۸) $\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!}$</p>																		
۱۳	<p>چهار برادر و سه خواهر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادرها کنار هم قرار بگیرند، آن‌گاه این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۷۲) $3! \times 4! \times 2! = 288$</p>																		
۱۴	<p>حداقل افراد شرکت‌کننده در یک همایش چند نفر باشند، تا با اطمینان بتوان گفت که ۵ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند و رقم یکان کد ملی آن‌ها زوج است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$n = 12 \times 5 = 60 \Rightarrow$ تعداد حالات یکان زوج کد ملی \times تعداد ماه‌ها = تعداد لانه‌ها</p> $k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \text{تعداد کبوترها} = nk + 1 \xrightarrow[k=4]{n=60} 60 \times 4 + 1 = 241$ <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری حداقل ۲۴۱ نفر مورد نیاز است. (ص ۸۳)</p>																		

چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟
(نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی‌باشد)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

(ص ۷۵) $|S| = 5^4$: تعداد کل رمزها

$|A| = 4^4$: تعداد رمزهای فاقد ۳

$|B| = 4^4$: تعداد رمزهای فاقد ۲

$|A \cap B| = 3^4$: تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳

$|\overline{A \cap B}| = |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$

پاسخ: ۱

۱۵

قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

۹

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

\Rightarrow

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

(ص ۷۲)

پاسخ: ۱

۱۶

اگر مربع‌های لاتین متعامد صحیح دیگری نیز بتوانید به دست آورید، درست است.

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\begin{cases} x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{12}{2} = 66 \\ x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow \binom{11}{2} = 55 \end{cases} \Rightarrow 66 + 55 = 121 \text{ (ص ۷۱)}$$

پاسخ: ۱

۱۷

اگر داشته باشیم $A = \{7, 8, 9\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

(ص ۷۱) $\binom{3}{2} \times \binom{6}{4} \times 6!$

پاسخ: ۱

۱۸

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
الف) در یک گراف از مرتبه p ، اگر $\gamma(G) = 1$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یالها برابر است.
ب) در یک مربع لاتین چرخشی 4×4 مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر است.
ج) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

(ج) $\frac{5!}{2!} = 60$ (ص ۷۸)

(ب) ۴ (ص ۶۳)

الف) $p - 1$ (ص ۵۳)

پاسخ: ۱

۱۹

	<p>هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها کمتر از $\sqrt{۸}$ است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ ابتدا مستطیل موردنظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر درنظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری دست‌کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است با توجه به قضیه فیثاغورس داریم: (ص ۸۴)</p> $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$	۲۰									
	<p>چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq ۶۳۰\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشپذیرند؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ $\overline{A \cup B} = s - A \cup B = s - A - B + A \cap B$</p> <p>(ص ۸۳) $s = ۶۳۰, A = ۲۱۰, B = ۱۲۶, A \cap B = ۴۲ \Rightarrow \overline{A \cup B} = ۳۳۶$</p>	۲۱									
	<p>قرار است سه مدرس $T_۱, T_۲, T_۳$ در سه جلسه متوالی در سه کلاس $C_۱, C_۲, C_۳$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه‌ریزی کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ فرض کنیم هر سطر نشان‌دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین ۳×۳ زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (ص ۶۲)</p> <table border="1" data-bbox="1134 1070 1326 1272"> <tr> <td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr> <td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr> <td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۲۲
۱	۲	۳									
۳	۱	۲									
۲	۳	۱									
	<p>به چند روش می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوری‌که، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست‌کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۶$</p> <p>$x_۳ = ۳$</p> <p>$x_۴ \geq ۳, x_۵ \geq ۵ \xrightarrow{x_۳=۴, x_۴=y_۳+۳, x_۵=y_۵+۵} x_۱ + x_۲ + ۳ + y_۴ + ۳ + y_۵ = ۵$</p> <p>$x_i \geq ۰, y_i \geq ۰ \Rightarrow \binom{۵+۴-۱}{۴-۱} = ۵۶$ (ص ۷۱)</p>	۲۳									
	<p>می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشینند، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ $۴! \times ۲^۴ = ۳۸۴$ (ص ۷۱)</p>	۲۴									

۲۵	<p>حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آن‌ها فاصله‌شان کمتر از ۱ است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱) ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری ($4 < 5$) حداقل یک لانه (مثلث وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می‌گیرد. (ص ۸۲)</p>																		
۲۶	<p>تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود).</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱) اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_7\}$، برای تعریف f روی هر عضو A، ۷ انتخاب داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل تابع‌های یک به یک برابر است با</p> $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{2!} = \frac{7!}{2!} \quad (ص ۷۸)$																		
۲۷	<p>دو مربع لاتین متعامد 3×3 را بنویسید. (دلیل متعادل بودن آن‌ها را بیان کنید).</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱) متعامدند چون در مربع ترکیبی عدد تکراری در انطباق آن‌ها نداریم. (ص ۶۴)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"><table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></table><table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table></div>	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳
۱	۲	۳																	
۲	۳	۱																	
۳	۱	۲																	
۳	۱	۲																	
۲	۳	۱																	
۱	۲	۳																	
۲۸	<p>تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به دست آورید.</p> $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \quad (x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4, x_5 = 2)$ <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱) $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$</p> $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{9}{2} = 36 \Rightarrow 36 + 10 = 46$ $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \quad (ص ۷۱)$																		
۲۹	<p>برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱) ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم را به چند طریق می‌توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به طوری که همواره دانش‌آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند. (با توجه به باز پاسخ بودن سؤال، به پاسخ‌های صحیح دیگر نمره داده شود). (ص ۷۱)</p>																		

۳۰	<p>به چند طریق می‌توان ۴۵ دانش‌آموز را در چهار کلاس ۸ نفره، ۱۰ نفره، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار داد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ $\left(\begin{smallmatrix} 45 \\ 8 \end{smallmatrix} \right) \times \left(\begin{smallmatrix} 37 \\ 10 \end{smallmatrix} \right) \times \left(\begin{smallmatrix} 27 \\ 12 \end{smallmatrix} \right) \times \left(\begin{smallmatrix} 15 \\ 15 \end{smallmatrix} \right)$ در صورتی‌که جواب را به فرم $\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!}$ هم نوشتند نمره داده شود. (ص ۵۹)</p>
۳۱	<p>ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، حداقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ تعداد کبوترها = ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته \times تعداد ماه‌های سال. $n = 7 \times 12 = 84$</p> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:</p> $kn + 1 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$ <p>در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (ص ۸۳)</p>
۳۲	<p>به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری‌که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضو می‌توان نوشت. (ص ۷۸)</p> $3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 93 = 150$

الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت
 $1 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 2$
 $3 \rightarrow 4$
 $4 \rightarrow 1$
 مربع لاتین B را به دست آورید.

A =

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

B =

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

پاسخ: ۱ الف)

۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۴)

۳۳

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$x_3 = 4, x_5 \geq 3 \Rightarrow x_5 = y_5 + 3$$

(ص ۷۱)

$$x_1 + x_2 + 4 + x_4 + 3 + y_5 + x_6 = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \Rightarrow ج = \binom{9}{4}$$

پاسخ: ۱

۳۴

با ارقام ۱, ۱, ۱, ۳, ۳, ۵, ۶, ۷, ۹ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\frac{9!}{3! \times 2!} \quad (\text{ص } ۵۸)$$

پاسخ: ۱

۳۵

۳۶	<p>۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $6! \times 5!$ ب) $5! \times 6!$ (ص ۵۷)</p>												
۳۷	<p>حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۸۲) $k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19, kn + 1 = 19 \times 7 + 1 = 134$</p>												
۳۸	<p>در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $A = \{1 \leq n \leq 200 n = 4k\} \Rightarrow A = \left[\frac{200}{4} \right] = 50, B = \{1 \leq n \leq 200 n = 7k\}$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 n = 28k\} \Rightarrow A \cap B = \left[\frac{200}{28} \right] = 7$ <p>(ص ۸۳) $A \cap B' = A - A \cap B = 50 - 7 = 43$</p>												
۳۹	<p>الف) تمام مربع‌های لاتین 2×2 را بنویسید. ب) آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) دو نوع مربع لاتین مرتبه ۲ داریم.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> </div> <p>ب)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; margin: 10px auto;"> <tr><td>۱۲</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۲</td></tr> </table> <p>متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۶)</p>	۱	۲	۲	۱	۲	۱	۱	۲	۱۲	۲۱	۲۱	۱۲
۱	۲												
۲	۱												
۲	۱												
۱	۲												
۱۲	۲۱												
۲۱	۱۲												
۴۰	<p>معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1 > 2$ و $x_4 \geq 4$ باشد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$y_1 = x_1 - 3, y_1 \geq 0, y_4 = x_4 - 4, y_4 \geq 0$</p> <p>$y_1 + 3 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 = 15 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8$</p> <p>$\Rightarrow \mathcal{J} = \binom{12}{4}$ (ص ۷۱)</p>												

	<p>کوتاه پاسخ دهید. علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می‌توان در یک صف کنار هم قرار داد، به طوری‌که: الف) علی و حسین کنار هم باشند. ب) ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $\left. \begin{array}{l} ۲! = x \rightarrow \text{علی و حسین} \\ \xrightarrow{\text{جایگشت}} ۶! \text{ نفر } x = ۶ \text{ نفر و } ۵ \text{ نفر دیگر} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} ۲! \times ۶!$ </div> <div style="text-align: right;"> پاسخ: ۱ الف) </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{c} ۵! \\ \uparrow \\ \text{۵ نفر دیگر} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{۲!} \\ \text{علی} \quad \text{حسین} \end{array}$ </div> <div style="text-align: right;"> پاسخ: ۲ ب) </div> </div>
	<p>می‌خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $\frac{۲۰!}{۵! \times ۵! \times ۵! \times ۵!}$ </div> <div style="text-align: right;"> پاسخ: ۱ (در صورتی‌که جواب را به فرم $\binom{۲۰}{۵} \binom{۱۵}{۵} \binom{۱۰}{۵} \binom{۵}{۵}$ است) (ص ۵۹) </div> </div>
	<p>ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ برای این‌که مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد. (ص ۸۳)</p>
	<p>از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(۱ \leq n \leq ۳۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $A = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 4k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow A = \left\lfloor \frac{300}{4} \right\rfloor = 75$ $B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 5k (k \in \mathbb{N})\}$ $A \cap B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 20k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow A \cap B = \left\lfloor \frac{300}{20} \right\rfloor = 15$ $A \cap B' = A - A \cap B = 75 - 15 = 60 \text{ (ص ۸۳)}$ </div> <div style="text-align: right;"> پاسخ: ۱ </div> </div>

در مربع لاتین A (شکل مقابل) جای سطر اول و سوم را با هم جابه‌جا کنید تا مربع لاتین B ایجاد شود. سپس با ذکر دلیل بررسی کنید آیا A و B دو مربع لاتین متعامد هستند؟

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱۲ & ۲۳ & ۳۱ \\ \hline ۳۳ & ۱۱ & ۲۲ \\ \hline ۲۱ & ۳۲ & ۱۳ \\ \hline \end{array}$$

پاسخ: ۱

متعامدند. زیرا در مربع آخر هیچ عدد ۲ رقمی تکراری وجود ندارد. (ص ۷۲)

۴۵

به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

$$x_3 \geq 4 \Rightarrow y_3 = x_3 - 4, y_3 \geq 0$$

$$x_6 > 2 \Rightarrow y_6 = x_6 - 3, y_6 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 + y_6 + 3 = 10$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 + y_6 = 3 \Rightarrow ج = \binom{8}{5} \text{ (ص ۷۱)}$$

پاسخ: ۱

۴۶

با حروف کلمه جیرجیرک چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!}$$

پاسخ: ۱

۴۷

می‌خواهیم با حروف ش، الف و ث و ۵ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است، تعداد کل رمزهایی که در هریک از آن‌ها حروف کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$3! = x \rightarrow \text{۳ تا حرف}$$

$$x \text{ با ۵ عدد : ۶ تا}$$

$$\text{جواب} \rightarrow 6! \times 3! \text{ (ص ۵۶)}$$

پاسخ: ۱

۴۸

در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$|F| = 15, |V| = 11, |B| = 9, |F \cap V| = 5, |B \cap V| = 6, |F \cap B| = 3$$

پاسخ: ۱

$$\Rightarrow |F \cap B \cap V| = 3$$

$$\text{فقط فوتبال بازی کنند} = |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

$$\text{فقط والیبال بازی کنند} = |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = 11 - 5 - 6 + 3 = 3$$

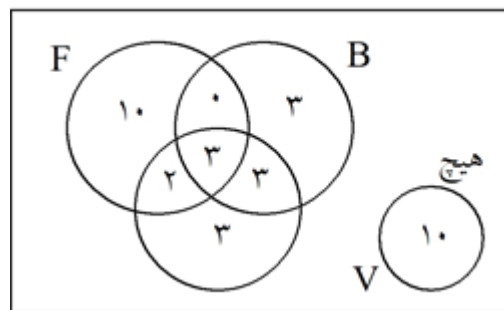
$$\text{فقط بسکتبال بازی کنند} = |B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = 9 - 3 - 6 + 3 = 3$$

$$\Rightarrow \text{ج} = 10 + 3 + 3 = 16 \text{ (ص ۸۳)}$$

روش دوم:

از نمودار ون کمک می‌گیریم. کافی است از اشتراک ۳ تایی شروع کنیم و به سمت اشتراک ۲ تایی و اعضای کلی مجموعه‌ها برسیم.

$$M = 34$$



فقط یکی

$$\longrightarrow 10 + 3 + 3 = 16$$

۴۹

مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

۵۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 21 & 33 & 12 \\ \hline 12 & 21 & 33 \\ \hline 33 & 12 & 21 \\ \hline \end{array}$$

پاسخ: ۱

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۷۲)

	<p>به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12, x_1 \geq 1, x_6 > 3, x_6 = 1$ $y_1 = x_1 - 1, y_1 \geq 0, y_4 = x_4 - 4, y_4 \geq 0$ $y_1 + 1 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_6 + 1 = 12 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 6$ $\Rightarrow \text{ج} = \binom{10}{4} \text{ (ص ۷۱)}$	۵۱
	<p>می‌خواهیم با حروف ب و ج و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:</p> <p>الف) تعداد رمزهایی که هریک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد.</p> <p>ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $6! \times 2!$</p> <p>ب) $2! \times 7!$ (ص ۵۶)</p>	۵۲
	<p>حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام‌خانوادگی آن‌ها مانند هم و غیرتکراری است؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $n = 32 \times 31 = 992, k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$ $\text{تعداد کبوترها} = 2 \times 992 + 1 = 1985 \text{ (ص ۸۲)}$	۵۳
	<p>مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $A = \{n \in S n = 5k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$ $B = \{n \in S n = 7k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(B) = \left\lfloor \frac{400}{7} \right\rfloor = 57$ $A \cap B = \{n \in S n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{400}{35} \right\rfloor = 11$ $ \overline{A \cup B} = S - A \cup B = 400 - (80 + 57 - 11) = 274 \text{ (ص ۷۵)}$	۵۴

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

مربع لاتین A را در نظر بگیرید.

الف) با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A، مربع لاتین B را تولید کنید.
ب) متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

$$B =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ: ۱ الف)

$$\begin{bmatrix} 21 & 13 & 32 \\ 32 & 21 & 13 \\ 13 & 32 & 21 \end{bmatrix}$$

ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۵)

۵۵

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن که $x_5 = 2$ و $x_2 > 2$ باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$y_2 = x_2 - 3, y_2 \geq 0, x_5 = 2$$

$$x_1 + y_2 + 3 + x_3 + x_4 + 2 + x_6 = 17 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 12$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{16}{4} \quad (\text{ص ۶۱})$$

پاسخ: ۱

۵۶

با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که:
الف) اعداد زوج کنار هم باشند.
ب) اعداد فرد کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

$$\left. \begin{aligned} 6, 8, 4 = x &\rightarrow 3! \\ 5, 2, x &\xrightarrow[\text{جایگشت}]{\text{شی ۳}} 3! \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} 3! \times 3!$$

پاسخ: ۱ الف)

۵۷

$$\left. \begin{aligned} 3, 7 = x &\rightarrow 2! \\ 8, 6, 4, x &\xrightarrow[\text{جایگشت}]{\text{شی ۴}} 4! \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} 2! \times 4!$$

ب)

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.
تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر ۶ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

$$f = \{(1, -)(2, -)\} \xrightarrow{\text{یک به یک}} 3 \text{ لا } 2 = 6$$

پاسخ: ۱ ت) درست (ص ۷۸)

۵۸

۵۹	<p>جای خالی را پر کنید. هرگاه $(kn + 1)$ کبوتر یا بیش‌تر در لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل کبوتر در آن قرار گرفته است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ تعریف اصل لانه کبوتر: هرگاه m کبوتر در n لانه قرار گیرند، در پخش‌ترین حالت لانه‌ای داریم که بیش از $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ کبوتر دارد یعنی حداقل $1 + \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ پس اگر $m = kn + 1$ باشد، داریم:</p> $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{kn + 1}{n} \right\rceil = k \xrightarrow{\text{حداقل}} k + 1$
۶۰	<p>نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ فصل تولد = لانه = ۴ و افراد خانواده = کبوتر = ۵. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند). (ص ۸۰)</p>
۶۱	<p>۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود).</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ $8^4 = 8 \times 8 \times 8 \times 8$</p> <p style="text-align: center;"> $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$ مرحله چهارم مرحله سوم مرحله دوم مرحله اول </p>
۶۲	<p>تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ $A = \{a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$</p> <p>اگر مجموعه ۳ عضوی را $\{1, 2, 3\}$ در نظر بگیریم، در برد، ۳ جای خالی داریم که باید ۶ عدد پر کنیم، پس:</p> $f = \{(1, -)(2, -)(3, -)\} \Rightarrow 6 \text{ لا } 5 \text{ لا } 4 = 6 \times 5 \times 4 = 120$
۶۳	<p>در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آن‌که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ $\overline{F \cup V} = S - F \cup V = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$ (ص ۷۴)</p>

متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.	<table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr></table> <table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۶۴
۱	۲	۳																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۲	۳	۱																		
۳	۱	۲																		
پاسخ: ۱ در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند. (ص)	<table><tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr><tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr></table> <p>(۶۶)</p>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲										
۱۱	۲۲	۳۳																		
۳۲	۱۳	۲۱																		
۲۳	۳۱	۱۲																		
یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	<p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table> <p>(ص ۶۳)</p>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۶۵		
۱	۲	۳	۴																	
۴	۱	۲	۳																	
۳	۴	۱	۲																	
۲	۳	۴	۱																	
معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_3 \geq 3$ باشند؟	<p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1, y_3 = x_3 - 3 \geq 0 \Rightarrow x_3 = 3 + y_3$ $\Rightarrow 1 + y_1 + x_2 + 3 + y_3 + x_4 + x_5 = 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 9$ $\Rightarrow \text{جواب} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} \text{ (ص ۶۱)}$	۶۶																		
هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	<p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۵۹) $\binom{8}{4} \binom{4}{3} \binom{1}{1}$</p>	۶۷																		

قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کننده الیاف است. (سوال ۱۴ ص ۷۲)

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

= A

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

= B

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر در آیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع الیاف است.

۶۸

در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ در این مسئله $k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6$ و تعداد لانه‌ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $6 \times 12 + 1 = 73$ باشد. (مثال ص ۸۲)

۶۹

در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{100}{6} \right] = 16 \quad (\text{مشابه کار در کلاس ص ۷۶})$$

پاسخ: ۱

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{100}{10} \right] = 10$$

$$A \cap B = \{n | 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{100}{30} \right] = 3$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

۷۰

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ‌کس بیش‌تر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۷۱ پاسخ: ۱ ابتدا ۴ نفر انتخاب می‌کنیم و سپس ۴ خودکار متمایز را بین آن‌ها جایگشت

$$\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$$

می‌دهیم:

(مثال پایین ص ۷۸)

۴ دانش‌آموز پایه دهم و ۳ دانش‌آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری‌که: الف) هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب) همواره دانش‌آموزان پایه دهم کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $4! \times 3!$

ب) $4! \times 4!$ (مشابه مثال ص ۵۷)

۷۲ پاسخ: ۱

در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

(ب)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

(الف)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

۷۳ پاسخ: ۱ الف)

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

(ب)

متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (مثال ص ۶۵)

مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴، ۳، ۲، ۱ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

پاسخ: ۱ با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ مربع لاتین به صورت زیر داریم. (مشابه

تمرین ۱۲ ص ۷۲)

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۷۴

به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

(قسمت پ تمرین ۸ ص ۷۱) $x_1 + \dots + x_5 = 11, x_2 \geq 2, x_5 \geq 4$

$$x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

پاسخ: ۱

۷۵

با ارقام عدد ۴، ۳، ۲، ۲، ۱، ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$\frac{7!}{2! \times 3!} = 420 \quad (\text{مشابه مثال پایین ص ۵۸})$$

پاسخ: ۱

۷۶

مجموعه اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از S دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

پاسخ: ۱ تعداد کبوترها = ۴۳ و تعداد لانه‌ها = ۴۲ و به صورت زیر هستند.

۱,۸۴	۲,۸۳	۳,۸۲	۴۲,۴۳
------	------	------	-------

چنانچه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است. (ص ۸۳)

۷۷

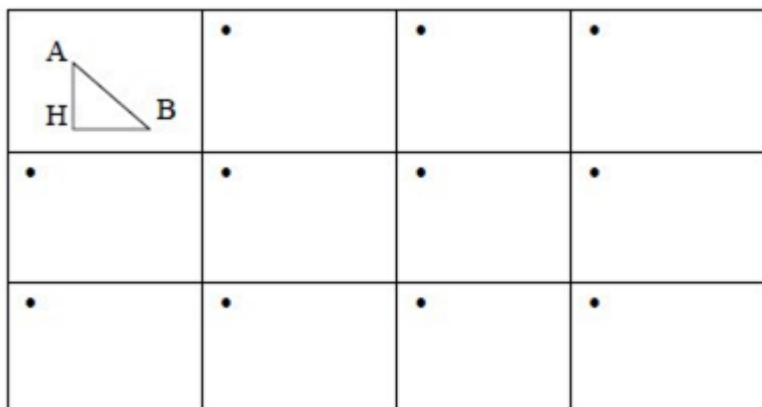
	<p>با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضو به یک مجموعه ۳ عضوی را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j \quad 1 \leq i \leq 4\}$ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$ $ S = 3^4, A_i = 2^4, A_i \cap A_j = 1^4, A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ $ \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \text{ (ص ۷۷)}$	۷۸																											
	<p>بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه‌رو متعامدند؟</p> <table border="1" data-bbox="178 488 368 663"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" data-bbox="427 488 617 663"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>متعامدند. زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم. (ص ۶۶)</p> <table border="1" data-bbox="1110 786 1321 947"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۷۹
۱	۲	۳																											
۳	۱	۲																											
۲	۳	۱																											
۱	۲	۳																											
۲	۳	۱																											
۳	۱	۲																											
۱۱	۲۲	۳۳																											
۳۲	۱۳	۲۱																											
۲۳	۳۱	۱۲																											
	<p>معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن‌که $x_3 > 3, x_1 > 2$ باشند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $y_1 + 3 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 = 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$ $\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{4} \text{ (ص ۶۱)}$	۸۰																											
	<p>۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد، به طوری‌که:</p> <p>الف) کتاب‌ها یکی در میان قرار گیرند.</p> <p>ب) کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $6! \times 5!$</p> <p>ب) $6! \times 5! \times 2!$ (ص ۵۷)</p>	۸۱																											
	<p>با حروف کلمه «می‌سی‌سی‌پی» چند جایگشت ۸ حرفی بامعنا یا بی‌معنا می‌توان نوشت؟</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 840 \text{ (ص ۵۸)}$	۸۲																											

۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند؛ نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

تعداد کبوترها: ۱۳ نقطه

پاسخ: ۱ تعداد لانه‌ها: ۱۲ مربع به مانند شکل



طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند. پس:

$$\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

(ص ۸۵)

۸۳

قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_2	T_3	T_1	T_4
C_4	T_3	T_4	T_4	T_1

(ص ۷۳)

پاسخ: ۱

۸۴

چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| &= |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \\ &= 350 - \left\lfloor \frac{350}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{350}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{350}{12} \right\rfloor = 234 \end{aligned}$$

(ص ۸۴)

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

پاسخ: ۱

۸۵

	<p>تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_1 > 2, x_5 \geq 4$ را محاسبه کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12$ $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \xrightarrow{\binom{n+k-1}{k-1}} \binom{5+6-1}{6-1} \text{ (ص ۷۲)}$	۸۶
	<p>۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که:</p> <p>الف) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.</p> <p>ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.</p> <p>ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $4! \times 6!$</p> <p>ب) $5! \times 4!$</p> <p>ج) $3! \times 7!$ (ص ۷۲)</p>	۸۷
	<p>در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>۱۵، چون اعداد ۱ تا ۵ در هر سطر می‌چینیم پس مجموع درایه‌ها برابر است با:</p> $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	۸۸
	<p>در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۲ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>در این مسأله $k + 1 = 7$ یعنی $k = 6$ است و تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n = 12$ است. (۰/۵)</p> <p>طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش‌آموزان حداقل باید (۰/۲۵)</p> $kn + 1 = (12 \times 6) + 1 = 73$ <p>(۰/۵) باشد</p> <p>(صفحه: ۸۳)</p>	۸۹
	<p>چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \leq n \leq 200$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴، بخش‌پذیر نباشند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل</p> <p>پاسخ: ۱</p> $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ (۰/۲۵)}$ $n(A \cup B) = \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{3} \right] - \left[\frac{200}{12} \right] \text{ (۰/۷۵)}$ $n(A \cup B) = 100 \text{ (۰/۲۵)}$ $1 - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100 \text{ (۰/۲۵)}$ <p>(صفحات: ۷۵ و ۷۶)</p>	۹۰

دو مربع متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخ: ۱ هر کدام (۰/۷۵)

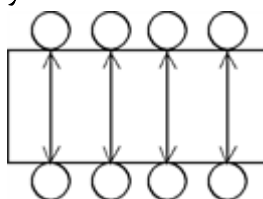
۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۹۱

می‌خواهیم ۱ نفر را که دو به دو برادر یک‌دیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل



پاسخ: ۱ (صفحه: ۷۲)

$$4! \times 2^4 (0/75) = 384 (0/25)$$

۹۲

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر با شرط‌های داده‌شده را به دست آورید.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12 \quad x_1 > 2, x_5 \geq 4$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

پاسخ: ۱ (صفحه: ۷۲)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \xrightarrow[0/5]{x_1=y_1+3 \quad x_5=y_5+4}$$

$$\underbrace{y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4}_{(0/25)} = 12 \xrightarrow[(0/25)]{\binom{n+k-1}{k-1}} \binom{5+5-1}{5-1} (0/5)$$

۹۳

۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره، واقع در یک هتل اسکان یابند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-تیرماه ۹۸ ویژه مناطق آسیب دیده از سیل

$$\underbrace{\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4}}_{(0/75)} = 1260 (0/25)$$

پاسخ: ۱

۹۴

ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

تعداد کیوترها: ۵۵ دانش‌آموز (۰/۲۵)

پاسخ: ۱ تعداد لانه‌ها: $۸۴ = ۷ \times ۱۲$ (۰/۲۵)

$$\begin{array}{r} ۵۰۵ \\ -۵۰۴ \\ \hline ۱ \end{array}$$

$$۶ + ۱ = ۷ \quad (۰/۵)$$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵)

۹۵

در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ: ۱

۹۶

$$n(A \cup B) = \left[\frac{۹۰}{۲} \right] + \left[\frac{۹۰}{۳} \right] - \left[\frac{۹۰}{۶} \right] \quad (۰/۷۵)$$

$$n(A \cup B) = ۶۰ \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه: ۸۴)

اگر سه دوست هم سائیز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

	دوگانه	یکگانه	شبه
A	۳	۲	۱
B	۲	۱	۳
C	۱	۳	۲

(۰/۵)

	دوگانه	یکگانه	شبه
A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳

(۰/۵)



	دوگانه	یکگانه	شبه
A	۲۳	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۳۲	۲۳

(۰/۵) (صفحه: ۶۹)

پاسخ: ۱

۹۷

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = ۱۰$ با شرط $x_i > ۰, i = ۲, ۳, ۴, ۵$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۱۰ \rightarrow x_1 + y_2 + ۱ + y_3 + ۱ + y_4 + ۱ + y_5 + ۱ = ۱۰$$

پاسخ: ۱

۹۸

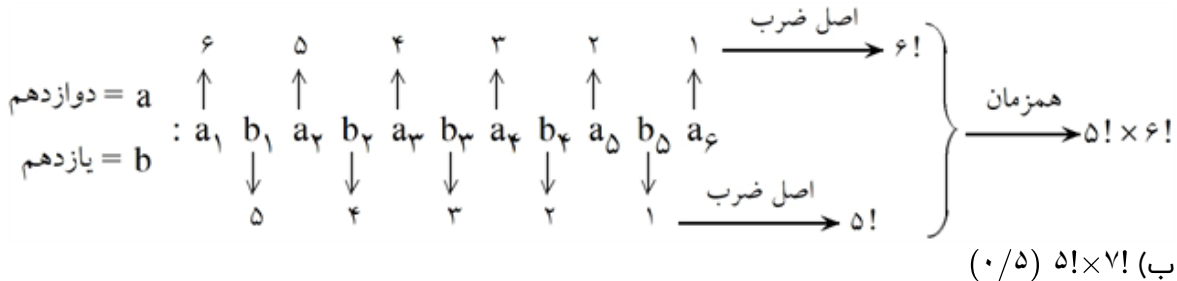
$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = ۶ \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{(۰/۲۵)} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\begin{array}{c} ۶+۵-۱ \\ ۵-۱ \end{array} \right) \quad (۰/۵)$$

(صفحه: ۷۲)

۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که:
 الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند.
 ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند.
 ج) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ الف) $6! \times 5! (0/5)$



جایگشت داخلی $(5!) = X \Rightarrow$ تا یازدهم ۵
 جواب $\rightarrow (5!) \times 7!$

$7! \Rightarrow$ نفر ۷ با تا دوازدهم ۶

ج) $2! \times 10! (0/5)$

جایگشت داخلی $(2!) = Y \Rightarrow$ تا یازدهم ۵
 جواب $\rightarrow 2! \times 10!$
 $10! \Rightarrow Y$ با بقیه = نفر ۱۰

با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۱، ۱، ۹ عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$P = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2! (0/75)} \rightarrow P = 3 \times 7! (0/25)$$

پاسخ: ۱ (صفحه: ۵۸)

۱

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\},$$

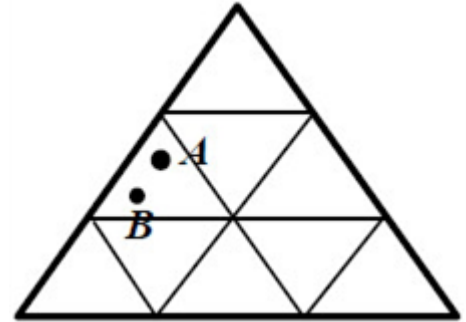
$$A_j = \{f: A \rightarrow B | f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}, 1 \leq j \leq 3$$

$$|S| = 3^4 = 81, |A_j| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \text{ (ص ۷۷)}$$

۱۰ نقطه را کبوتر و هریک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می‌کنیم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $|AB| < 1$. (ص ۸۰)



۳

$$\frac{7!}{2! \times 3!} \text{ (ص ۵۸)}$$

۴

به هر کدام از x_1, x_2, \dots, x_k عدد ۱- را اضافه می‌کنیم.

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$$
 معادله جدید

$$\text{لذا تعداد حالات جواب از رابطه } \binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} \text{ به دست می‌آید. (ص ۶۱)}$$

۵

در مربع لاتین دوم عدد دو رقمی تکراری نداریم. بنابراین مربع لاتین ارائه شده با مربع لاتین مورد سؤال متعامد هستند.

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

 \rightarrow

۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱
۳۲	۲۱	۱۳

(توجه: به سایر مربع‌های لاتینی که شرایط مسأله را برقرار کنند، نمره داده شود.) (ص ۷۲)

۶

۱۲ (ص ۷۹)

۷

ندارد - یک (ص ۶۶)

۸

$$k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2, n = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow kn + 1 = 12 \times 2 + 1 = 25 \text{ (ص ۸۲)}$$

$$|A| = \left[\frac{500}{5} \right] = 100, |B| = \left[\frac{500}{4} \right] = 125, |A \cap B| = \left[\frac{500}{20} \right] = 25$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = 500 - (100 + 125 - 25) = 300 \text{ (ص ۷۵)}$$

۹

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

هر کدام از مربع‌های لاتین (ص ۶۴ و ۶۵)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \text{ (ص ۶۱)}$$

$$x_4 - 3 = y_4 \Rightarrow x_1 + x_2 + y_4 = 5 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$$

$$\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!} \text{ (ص ۵۸)}$$

$$3! \times 4! \times 2! = 288 \text{ (ص ۷۲)}$$

$$n = 12 \times 5 = 60 \Rightarrow \text{تعداد حالات یکان زوج کدملی} \times \text{تعداد ماه‌ها} = \text{تعداد لانه‌ها}$$

$$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \text{تعداد کبوترها} = nk + 1 \xrightarrow[k=4]{n=60} 60 \times 4 + 1 = 241$$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری حداقل ۲۴۱ نفر موردنیاز است. (ص ۸۳)

$$|S| = 5^4 \text{ (ص ۷۵) : تعداد کل رمزها}$$

$$|A| = 4^4 \text{ : تعداد رمزهای فاقد ۳}$$

$$|B| = 4^4 \text{ : تعداد رمزهای فاقد ۲}$$

$$|A \cap B| = 3^4 \text{ : تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳}$$

$$|\overline{A \cap B}| = |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$$

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

9

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

 \Rightarrow

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

(ص ۷۲)

اگر مربع‌های لاتین متعامد صحیح دیگری نیز بتوانید به دست آورید، درست است.

$$\begin{cases} x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{12}{2} = 66 \\ x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \binom{10}{2} = 45 \end{cases} \Rightarrow 66 + 45 = 111 \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\binom{3}{2} \times \binom{6}{6} \times 6! \text{ (ص ۷۱)}$$

۱۹ الف) $1 - p$ (ص ۵۳)

ب) ۴ (ص ۶۳)

ج) $\frac{5!}{2!} = 60$ (ص ۷۸)

۲۰ ابتدا مستطیل موردنظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر درنظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری دست‌کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است با توجه به قضیه فیثاغورس داریم: (ص ۸۴)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

$$|\overline{A \cup B}| = |s| - |A \cup B| = |s| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$|s| = 630, |A| = 210, |B| = 126, |A \cap B| = 42 \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 336 \text{ (ص ۸۳)}$$

۲۲ فرض کنیم هر سطر نشان‌دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرسه‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرسه در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (ص ۶۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 \geq 3, x_5 \geq 5 \xrightarrow{x_4=4, x_4=y_4+3, x_5=y_5+5} x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 = 5$$

$$x_i \geq 0, y_5 \geq 0 \Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = 56 \text{ (ص ۷۱)}$$

$$4! \times 2^4 = 384 \text{ (ص ۷۱)}$$

۲۵ ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه درنظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری ($4 < 5$) حداقل یک لانه (مثلث وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می‌گیرد. (ص ۸۲)

۲۶ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_7\}$ ، برای تعریف f روی هر عضو A ، 7 انتخاب

داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل تابع‌های یک به یک برابر است با $\frac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ (اگر دانش‌آموزی از

فرمول $\frac{7!}{2!} = 7$ پاسخ دهد نمره کامل داده شود.) (ص ۷۸)

۲۷ متعامدند چون در مربع ترکیبی عدد تکراری در انطباق آنها نداریم. (ص ۶۴)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{9}{2} = 36 \Rightarrow 36 + 10 = 46$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \text{ (ص ۷۱)}$$

۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم را به چند طریق می‌توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به طوری که همواره دانش‌آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند. (با توجه به باز پاسخ بودن سؤال، به پاسخ‌های صحیح دیگر نمره داده شود.) (ص ۷۱)

$$\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!} \text{ در صورتی که جواب را به فرم } \binom{45}{8} \times \binom{37}{10} \times \binom{27}{12} \times \binom{15}{15} \text{ (ص ۵۹)}$$

تعداد کبوترها = ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته \times تعداد ماه‌های سال. $n = 7 \times 12 = 84$ طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$505 = kn + 1 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (ص ۸۳)

این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضو می‌توان نوشت. (ص ۷۸)

$$3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 93 = 150$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

(الف) ۳۳

$$(ب) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 34 & 41 & 13 & 22 \\ \hline 22 & 13 & 41 & 34 \\ \hline 13 & 22 & 34 & 41 \\ \hline 41 & 34 & 22 & 13 \\ \hline \end{array}$$

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۴)

$$x_3 = 4, x_5 \geq 3 \Rightarrow x_5 = y_5 + 3$$

$$x_1 + x_2 + 4 + x_4 + 3 + y_5 + x_6 = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \Rightarrow ج = \binom{9}{4} \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\frac{9!}{3! \times 2!} \text{ (ص ۵۸)}$$

الف) $6! \times 6!$ ب) $6! \times 5!$ (ص ۵۷)

$$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19, kn + 1 = 19 \times 7 + 1 = 134 \text{ (ص ۸۲)}$$

$$A = \{1 \leq n \leq 200 | n = 4k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 7k\}$$

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 28k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43 \text{ (ص ۸۳)}$$

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

الف) دو نوع مربع لاتین مرتبه ۲ داریم.

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۶)

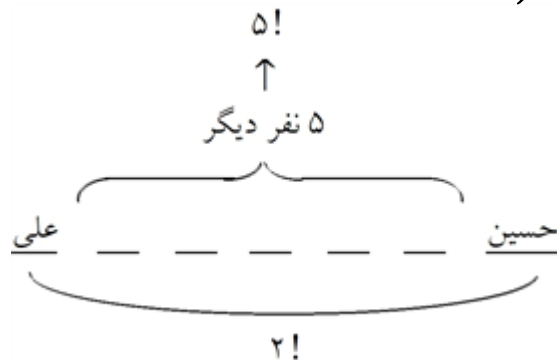
$$y_1 = x_1 - 3, y_1 \geq 0, y_4 = x_4 - 4, y_4 \geq 0$$

$$y_1 + 3 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 = 15 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8$$

$$\Rightarrow j = \binom{12}{4} \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 2! = \text{علی و حسین} \\ \xrightarrow{\text{جایگشت}} 6! = \text{۶ نفر } x \text{ و ۵ نفر دیگر} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} 2! \times 6!$$

الف) ۴۱



$$\xrightarrow{\text{جواب}} 2! \times 5!$$

ب)

$$\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!} \text{ (در صورتی که جواب را به فرم } \binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5} \text{ در صورتی که جواب را به فرم هم نوشتند، درست است) (ص ۵۹)}$$

برای این که مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کیوترها ۳ است. طبق اصل لانه کیوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کیوتر در آن قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد. (ص ۸۳)

$$A = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 4k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{300}{4} \right] = 75$$

$$B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 5k (k \in \mathbb{N})\}$$

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 20k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{300}{20} \right] = 15$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 75 - 15 = 60 \text{ (ص ۸۳)}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 23 & 31 \\ \hline 33 & 11 & 22 \\ \hline 21 & 32 & 13 \\ \hline \end{array}$$

متعامدند. زیرا در مربع آخر هیچ عدد ۲ رقمی تکراری وجود ندارد. (ص ۷۲)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

$$x_3 \geq 4 \Rightarrow y_3 = x_3 - 4, y_3 \geq 0$$

$$x_6 > 2 \Rightarrow y_6 = x_6 - 3, y_6 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 + y_6 + 3 = 10$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 + y_6 = 3 \Rightarrow \mathcal{C} = \binom{8}{5} \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!}$$

$$3 = x \rightarrow 3! \text{ تا حرف}$$

$$x \text{ با } 5 \text{ عدد: } 6 \text{ تا}$$

$$\text{جواب} \rightarrow 6! \times 3! \text{ (ص ۵۶)}$$

۴۴

۴۵

۴۶

۴۷

۴۸

$$|F| = ۱۵, |V| = ۱۱, |B| = ۹, |F \cap V| = ۵, |B \cap V| = ۶, |F \cap B| = ۳$$

$$\Rightarrow |F \cap B \cap V| = ۳$$

$$\text{فقط فوتبال بازی کنند} = |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰$$

$$\text{فقط والیبال بازی کنند} = |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۱۱ - ۵ - ۶ + ۳ = ۳$$

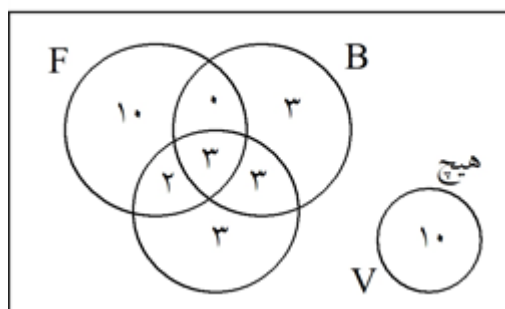
$$\text{فقط بسکتبال بازی کنند} = |B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۹ - ۳ - ۶ + ۳ = ۳$$

$$\Rightarrow \text{ج} = ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶ \text{ (ص ۸۳)}$$

روش دوم:

از نمودار ون کمک می‌گیریم. کافی است از اشتراک ۳ تایی شروع کنیم و به سمت اشتراک ۲ تایی و اعضای کلی مجموعه‌ها برسیم.

$$M = ۳۴$$



فقط یکی

$$\longrightarrow ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶$$

۱	۲	۳		۱	۳	۲		۲۱	۳۳	۱۲
۲	۳	۱		۲	۱	۳		۱۲	۲۱	۳۳
۳	۱	۲		۳	۲	۱		۳۳	۱۲	۲۱

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۷۲)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = ۱۲, x_1 \geq ۱, x_4 > ۳, x_6 = ۱$$

$$y_1 = x_1 - ۱, y_1 \geq ۰, y_4 = x_4 - ۴, y_4 \geq ۰$$

$$y_1 + ۱ + x_2 + x_3 + y_4 + ۴ + x_5 + ۱ = ۱۲ \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = ۶$$

$$\Rightarrow \text{ج} = \binom{۱۰}{۴} \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\text{الف) } ۶! \times ۲!$$

$$\text{ب) } ۲! \times ۷! \text{ (ص ۵۶)}$$

$$\text{تعداد لانه‌ها} = n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲, k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲$$

$$\text{تعداد کبوترها} = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵ \text{ (ص ۸۲)}$$

$$A = \{n \in S | n = 5k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

$$B = \{n \in S | n = 7k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(B) = \left\lfloor \frac{400}{7} \right\rfloor = 57$$

$$A \cap B = \{n \in S | n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{400}{35} \right\rfloor = 11$$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 400 - (80 + 57 - 11) = 274 \text{ (ص ۷۵)}$$

۵۴

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

B =

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

الف) ۵۵

۲۱	۱۳	۳۲
۳۲	۲۱	۱۳
۱۳	۳۲	۲۱

ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۵)

$$y_2 = x_2 - 3, y_2 \geq 0, x_2 = 2$$

$$x_1 + y_2 + 3 + x_3 + x_4 + 2 + x_5 = 17 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{16}{4} \text{ (ص ۶۱)}$$

۵۶

$$\left. \begin{aligned} 6, 8, 4 = x \rightarrow 3! \\ 5, 2, x \xrightarrow[\text{جایگشت}]{\text{شی ۳}} 3! \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} 3! \times 3!$$

الف) ۵۷

$$\left. \begin{aligned} 3, 7 = x \rightarrow 2! \\ 8, 6, 4, x \xrightarrow[\text{جایگشت}]{\text{شی ۴}} 4! \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} 2! \times 4!$$

ب)

$$f = \{(1, -)(2, -)\} \xrightarrow{\text{یک به یک}} ۶ \text{ لا } ۲۳$$

۵۸) ت) درست (ص ۷۸)

۵۹) تعریف اصل لانه کبوتر: هرگاه m کبوتر در n لانه قرار گیرند، در پخش‌ترین حالت لانه‌ای داریم که بیش از $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ کبوتر

دارد یعنی حداقل $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil + 1$ پس اگر $m = kn + 1$ باشد، داریم:

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{kn + 1}{n} \right\rceil = k \xrightarrow{\text{حداقل}} k + 1$$

۶۰) فصل تولد = لانه = ۴ و افراد خانواده = کبوتر = ۵. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر

(دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند). (ص ۸۰)

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 حالت ۸ × حالت ۸ × حالت ۸ × حالت ۸ = $۸^۴$
 مرحله چهارم مرحله سوم مرحله دوم مرحله اول

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$$

اگر مجموعه ۳ عضوی را $\{1, 2, 3\}$ در نظر بگیریم، در برد، ۳ جای خالی داریم که باید ۶ عدد پر کنیم، پس:

$$f = \{(1, -)(2, -)(3, -)\} \Rightarrow ۶ لا ۵ لا ۴ لا = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$

$$|\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = ۲۵ - (۱۵ + ۱۴ - ۹) = ۵ \text{ (ص ۷۴)}$$

در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند. (ص ۶۶)

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(ص ۶۳)

$$y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1, y_2 = x_2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_2 = 4 + y_2$$

$$\Rightarrow 1 + y_1 + x_2 + 4 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۱۴ \Rightarrow y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۹$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{۹+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۱۳}{۴} \text{ (ص ۶۱)}$$

$$\begin{pmatrix} ۸ \\ ۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۴ \\ ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \text{ (ص ۵۹)}$$

برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کننده الیاف است.
(سوال ۱۴ ص ۷۲)

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

 $= A$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

 $= B \Rightarrow$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر در آیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع الیاف است.

در این مسأله $k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6$ و تعداد لانه‌ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $6 \times 12 + 1 = 73$ باشد. (مثال ص ۸۲)

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16 \text{ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$

$$A \cap B = \{n | 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

ابتدا ۴ نفر انتخاب می‌کنیم و سپس ۴ خودکار متمایز را بین آنها جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{4}{4} \times 4! = \frac{4!}{4!}$$

(مثال پایین ص ۷۸)

الف) $4! \times 3!$

ب) $4! \times 4!$ (مشابه مثال ص ۵۷)

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. (الف) ۷۳

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (مثال ص ۶۵) (ب) ۷۴

با استفاده از جایگشت $۱ \rightarrow ۲, ۲ \rightarrow ۳, ۳ \rightarrow ۴, ۴ \rightarrow ۱$ مربع لاتین به صورت زیر داریم. (مشابه تمرین ۱۲ ص ۷۲)

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(قسمت پ تمرین ۸ ص ۷۱) $x_1 + \dots + x_5 = 11, x_2 \geq 2, x_5 \geq 4$

$$x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

$$\frac{7!}{2! \times 3!} = 420 \text{ (مشابه مثال پایین ص ۵۸)}$$

تعداد کبوترها = ۴۳ و تعداد لانه‌ها = ۴۲ و به صورت زیر هستند. (۷۷)

۱,۸۴	۲,۸۳	۳,۸۲	۴۲,۴۳
------	------	------	-------

چنانچه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعه‌شان ۸۵ است. (ص ۸۳)

$$1 \leq j \leq 3 \quad A_j = \{f: A \rightarrow B | f(a_i) \neq b_j \quad 1 \leq i \leq 4\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$|S| = 3^4, |A_i| = 2^4, |A_i \cap A_j| = 1^4, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \text{ (ص ۷۷)}$$

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

متعامدند. زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم. (ص ۶۶) ۷۹

$$y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$$

$$\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{4} \text{ (ص ۶۱)}$$


الف) $6! \times 5!$

ب) $6! \times 5! \times 2!$ (ص ۵۷)

$$\frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 840 \text{ (ص ۵۸)}$$

تعداد لانه‌ها: ۱۲ مربع به مانند شکل

تعداد کبوترها: ۱۳ نقطه

	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•

طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند. پس:

$$\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8} \text{ (ص ۸۵)}$$

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

(ص ۷۳)

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| &= |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \\ &= 350 - \left\lfloor \frac{350}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{350}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{350}{12} \right\rfloor = 234 \text{ (ص ۸۴)} \end{aligned}$$

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 + x_7 = 12$$

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \xrightarrow{\binom{n+k-1}{k-1}} \binom{5+6-1}{6-1} \text{ (ص ۷۲)}$$

الف) $4! \times 6!$

ب) $5! \times 4!$

ج) $3! \times 7!$ (ص ۷۲)

۸۸، چون اعداد ۱ تا ۵ در هر سطر می‌چینیم پس مجموع درایه‌ها برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

در این مسئله $k + 1 = 7$ یعنی $k = 6$ است و تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n = 12$ است. (۰/۵)

طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش‌آموزان حداقل باید (۰/۲۵)

$$kn + 1 = (12 \times 6) + 1 = 73$$

(صفحه: ۸۳)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$$

$$n(A \cup B) = \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{3} \right] - \left[\frac{200}{12} \right] \quad (۰/۷۵)$$

$$n(A \cup B) = 100 \quad (۰/۲۵)$$

$$1 - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100 \quad (۰/۲۵)$$

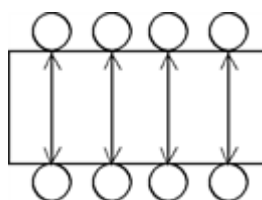
(صفحات: ۷۵ و ۷۶)

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۹۱ هر کدام (۰/۷۵)

$$4! \times 2^4 \quad (۰/۷۵) = 384 \quad (۰/۲۵)$$



۹۲ (صفحه: ۷۲)

۹۳ (صفحه: ۷۲)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \xrightarrow[۰/۵]{x_1=y_1+2 \quad x_5=y_5+4}$$

$$\underbrace{y_1 + 2 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4}_{(۰/۲۵)} = 12 \cdot \frac{\binom{n+k-1}{k-1}}{(۰/۲۵)} \begin{pmatrix} 5+5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$\underbrace{\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4}}_{(۰/۷۵)} = 1260 \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{array}{r} 505 \\ -504 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$6 + 1 = 7 \quad (0/5)$$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (0/25)$$

$$n(A \cup B) = \left\lfloor \frac{90}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{90}{6} \right\rfloor \quad (0/25)$$

$$n(A \cup B) = 60 \quad (0/25)$$

(صفحه: ۸۴)

	دوئل	یکتبل	شبه
A	۳	۲	۱
B	۲	۱	۳
C	۱	۳	۲

(۰/۵)

	دوئل	یکتبل	شبه
A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳

(۰/۵)

	دوئل	یکتبل	شبه
A	۲۲	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۲۲	۲۳

(صفحه: ۶۹) (۰/۵)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \quad (0/25) \xrightarrow{(0/25)} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\begin{array}{c} 6+5-1 \\ 5-1 \end{array} \right) \quad (0/5)$$

(صفحه: ۷۲)

الف) $5! \times 6!$ (۰/۵) ۹۹

$$\left. \begin{array}{l} \text{دوازدهم} = a \\ \text{یازدهم} = b \end{array} \right\} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & 6 & & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & a_4 & b_4 & a_5 & b_5 & a_6 & b_6 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array} \\ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 6! \\ \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5! \end{array} \end{array} \xrightarrow{\text{همزمان}} 5! \times 6!$$

ب) $5! \times 7!$ (۰/۵)

$$\begin{array}{l} \text{جواب} \\ \text{جایگشت داخلی} = (5!) \Rightarrow X = 5! \times 7! \\ \text{با تا دوازدهم} \Rightarrow 7! \end{array}$$

ج) $10! \times 2!$ (۰/۵)

$$\begin{array}{l} \text{جواب} \\ \text{جایگشت داخلی} = (2!) \Rightarrow Y = 2! \times 10! \\ \text{با بقیه} = 10! \end{array}$$

$$P = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2! (0/25)} \rightarrow P = 3 \times 7! \quad (0/25)$$

(صفحه: ۵۸) ۱۰۰

