



p30konkor.com

زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

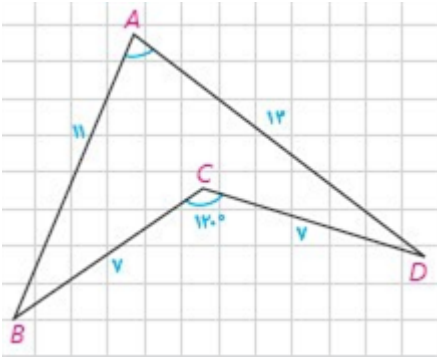
تاریخ برگزاری :

نام و نام خانوادگی :

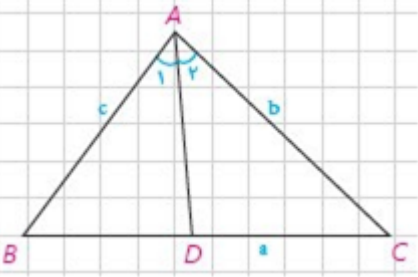
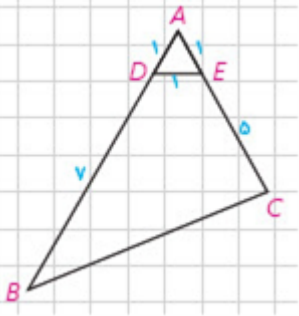
پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون : هندسه ۱۱ فصل ۳

ردیف	لطفاً پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>حاده (تند) ، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه‌ی A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید.</p> <p>الف) $BC = 9, AC = 6, AB = 10$</p> <p>ب) $BC = 9, AC = 4, AB = 8$</p> <p>پ) $BC = 17, AC = 15, AB = 8$</p>	۲
۲	<p>به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC:</p> <p>الف) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$</p> <p>ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$</p> <p>پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$</p>	۲
۳	<p>ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.</p>	۲
۴	<p>در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.</p> <p>ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.</p> 	۲
۵	<p>در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟</p>	۲



	<p>در شکل زیر AD نیمساز زاویه \hat{A} است. با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی A به دست آورید.</p>  $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ $= \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2}$ $\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (\dots + \dots)$ $\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2 AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} \Rightarrow AD = \dots$ $\Rightarrow (A \text{ نیمساز راس}) d_a = \frac{2 bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$ <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)</p>	۶
	<p>در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.</p>  <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)</p>	۷
	<p>در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)</p>	۸



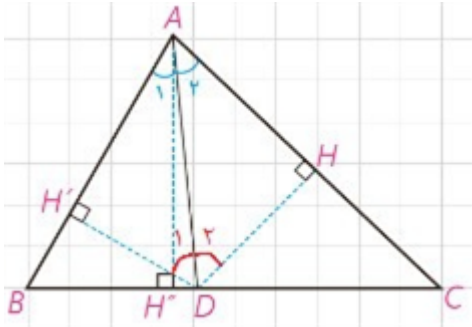
با پر کردن جاهای خالی با فرض این که در شکل مقابل AD نیمساز زاویه \hat{A} است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:
الف) چرا $DH = DH'$ ؟

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times \dots}{\frac{1}{2}DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times \dots}{\frac{1}{2}CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۲) \quad \text{ب)}$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

۹



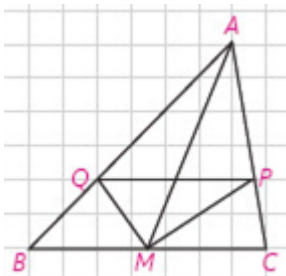
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

در مثلث ABC ، $AB = ۷$ و $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.

۱۰

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



۱۱

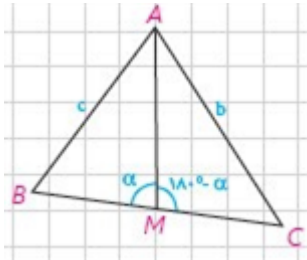
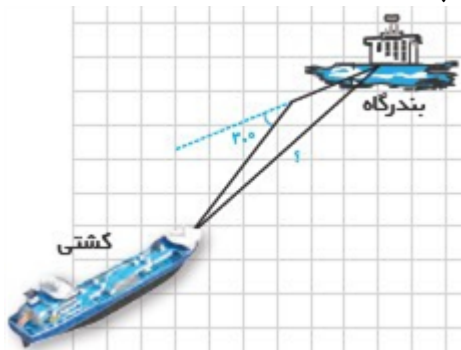
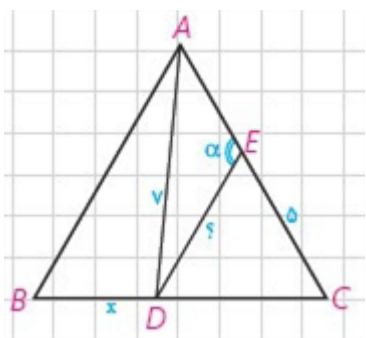
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D ، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ ($CD > BD$)

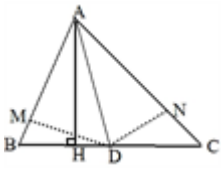
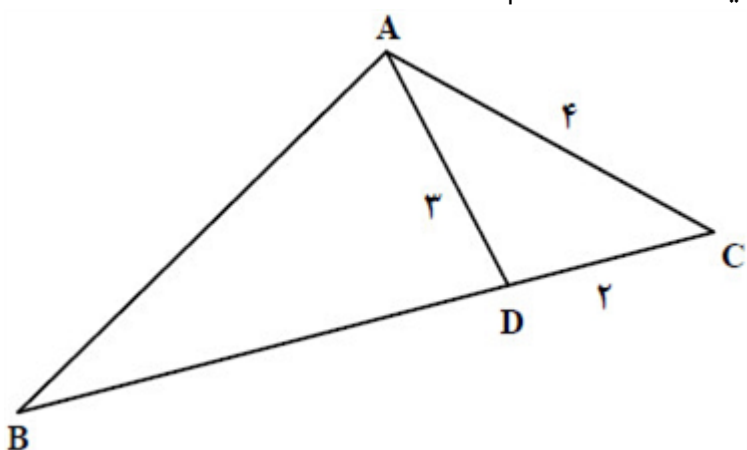
۱۲

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

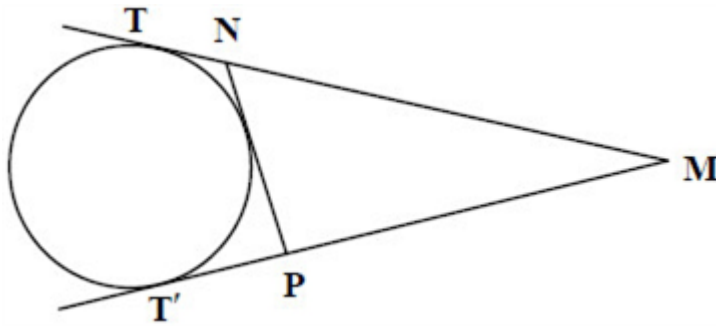


	<p>در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم $\left(MB = MC = \frac{a}{2}\right)$. با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:</p> $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$ <p>در حالت خاص $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 8$، طول میانه AM را به دست آورید.</p> 	۱۳
	<p>یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟</p> 	۱۴
	<p>در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$ نقطه‌ی E، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟</p> 	۱۵
	<p>نقطه‌ی A به فاصله‌ی $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه‌ی A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه‌ی A' می‌نامیم. نقطه‌ی A را حول نقطه‌ی A' به اندازه‌ی 120° درجه دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' را محاسبه کنید.</p>	۱۶



	<p>در مثلث ABC ، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم.</p> <p>الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌ی این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.</p> <p>ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید. DN و DM چه رابطه‌ای با هم دارند؟</p> <p>پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلثهای ABD و ADC ، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.</p> <p>از مقایسه‌ی نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟</p>  <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه ۲</p>	۱۷
	<p>در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه ۲</p>	۱۸
	<p>سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲، ۱۵ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.</p> <p>مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه ۲</p>	۱۹
	<p>در مثلث ABC، $BC = ۱۰$، نقطه D وسط BC و DE و DF به ترتیب نیمساز زوایای \widehat{ADC} و \widehat{ADB} هستند. اگر $AF = ۱۲\sqrt{۲}$ و $BF = ۳\sqrt{۲}$ باشد، طول نیمساز DE کدام است؟</p> <p>۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $۲\sqrt{۷}$</p> <p>سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳</p>	۲۰
	<p>در شکل مقابل، اگر $\widehat{BAD} = ۳\widehat{DAC}$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟</p>  <p>۱) ۲۴ ۲) $۲۵/۵$ ۳) ۲۷ ۴) $۲۸/۵$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۲۱

در شکل زیر، از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر $MT = ۱۸$ ، $MN = ۱۵$ و $MP = ۱۲$ باشد،



شعاع دایره کدام است؟

۲۲

۴ $\sqrt{۵}$ (۴)

۳ $\sqrt{۵}$ (۳)

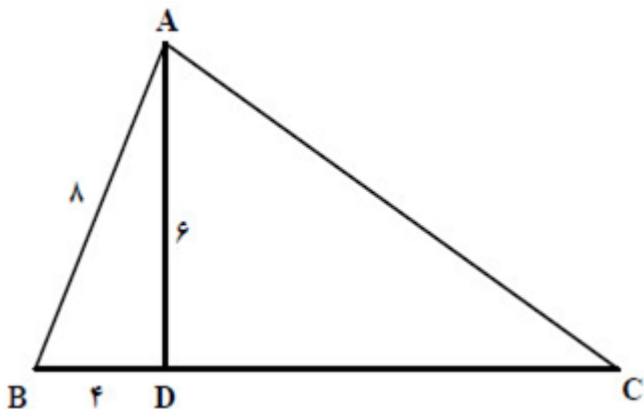
۲ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

در شکل مقابل، اگر $\widehat{B\hat{A}D} = ۳\widehat{D\hat{A}C}$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟

۲۳



۴ $\frac{۱۵}{۴}$ (۴)

۶ $\frac{۱۸}{۶}$ (۳)

۸ $\frac{۱۶}{۸}$ (۲)

۲ $\frac{۱۹}{۲}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

اضلاع مثلثی با اعداد ۴، ۵ و ۶ متناسب است. نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

۲۴

۳ (۴)

$\frac{۵}{۲}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{۳}{۲}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

نیمساز زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را در نقطه D قطع کرده و آن را به پاره‌خط‌های $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۷}{۴}$ واحدی تقسیم کرده است. اگر $\widehat{B} = ۶۰^\circ$ باشد، طول AD چقدر است؟

۲۵

$\frac{۵}{۴}\sqrt{۲}$ (۴)

$\frac{۵}{۸}\sqrt{۲}$ (۳)

$\frac{۵}{۸}\sqrt{۷}$ (۲)

$\frac{۵}{۴}\sqrt{۷}$ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

زاویه‌ی \widehat{xOy} و نقطه‌ی M داخل زاویه با شرط $\widehat{M\hat{O}y} = ۲\widehat{x\hat{O}M}$ باشد، مفروض است. از نقطه‌ی M عمودهای MN و MP را به ترتیب برنیم خط‌های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$ ، کدام است؟

۲۶

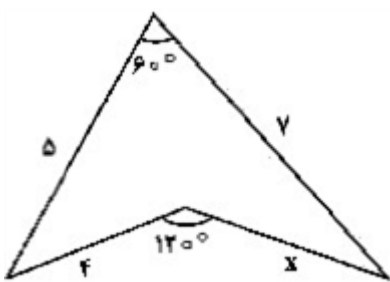
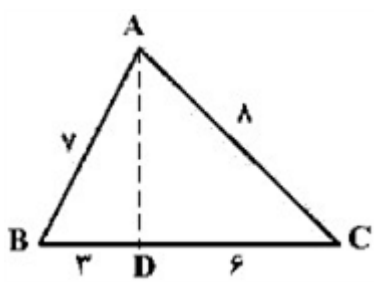
(۴)

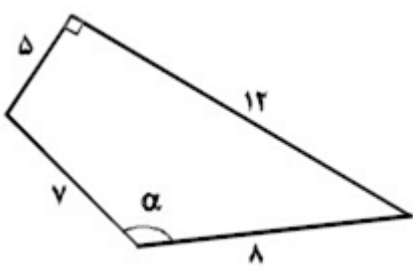
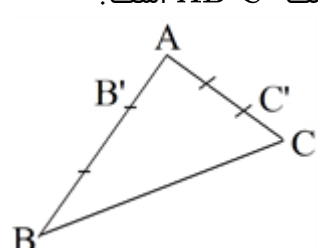
(۳)

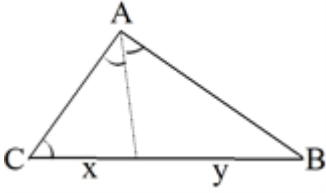
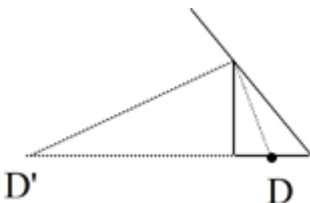
(۲)

$\frac{OP}{ON}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۷	<p>نیمساز داخلی زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را به پاره‌خط‌های $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ واحدی تقسیم کرده است. اگر اندازه زاویه C برابر ۶۰ درجه باشد، ضلع کوچک‌تر مثلث چند واحد است؟</p> <p>۱) $\frac{3}{75}$ ۲) $\frac{4}{25}$ ۳) $\frac{4}{75}$ ۴) $\frac{5}{25}$</p> <p>سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱</p>
۲۸	<p>مثلثی با طول ضلع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ مفروض است. اندازه‌ی طول ضلع شش‌ضلعی محاط شده در این مثلث، کدام است؟</p> <p>۱) ۸ ۲) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$</p> <p>سراسری-ریاضی-۱۴۰۰</p>
۲۹	<p>در شکل زیر، مقدار $(x + 2)$، کدام است؟</p>  <p>۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{5}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>
۳۰	<p>در شکل زیر، اندازه‌ی پاره‌خط AD، کدام است؟</p>  <p>۱) $\sqrt{37}$ ۲) ۶ ۳) $2\sqrt{7}$ ۴) $2\sqrt{10}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>
۳۱	<p>در مثلث ABC داریم $AB = AC = 17$ و $BC = 16$، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم شود، در نقطه‌ی D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط BD، کدام است؟</p> <p>۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{8}{4}$ ۳) $\frac{9}{6}$ ۴) $\frac{10}{2}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>
۳۲	<p>در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، زاویه‌ی $A = 90^\circ$ و اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیمساز AD رسم شده است. اندازه‌ی DH، کدام است؟</p> <p>۱) $\frac{8}{35}$ ۲) $\frac{9}{35}$ ۳) $\frac{12}{35}$ ۴) $\frac{16}{35}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>

	<p>در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند، $\sin \alpha$ کدام است؟</p>  <p> <input type="radio"/> ۱ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ <input type="radio"/> ۲ $\frac{3}{5}$ <input type="radio"/> ۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ <input type="radio"/> ۴ $\frac{4}{5}$ </p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۳۳
	<p>در مثلث ABC داریم $AB = 3AC$ و $BC = 12$، نقاط D و D' پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A است. مقدار $AD^2 + AD'^2$، کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ ۶۴ <input type="radio"/> ۲ ۷۲ <input type="radio"/> ۳ ۸۱ <input type="radio"/> ۴ ۱۰۰ </p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۳۴
	<p>در مثلثی به طول اضلاع ۱۵ و ۱۳ و ۷ واحد، نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای درونی، نیمساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ $\frac{3}{5}$ <input type="radio"/> ۲ $\frac{2}{3}$ <input type="radio"/> ۳ $\frac{3}{4}$ <input type="radio"/> ۴ $\frac{5}{6}$ </p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۳۵
	<p>در شکل $BB' = 2AB'$ و $AC' = 2CC'$. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $AB'C'$ است؟</p>  <p> <input type="radio"/> ۱ ۹ <input type="radio"/> ۲ ۶ <input type="radio"/> ۳ $\frac{9}{4}$ <input type="radio"/> ۴ $\frac{9}{2}$ </p> <p>کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی</p>	۳۶
	<p>مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{1}{8}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه این مثلث، چند درجه است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ ۱۵ <input type="radio"/> ۲ $17/5$ <input type="radio"/> ۳ $22/5$ <input type="radio"/> ۴ ۳۰ </p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی</p>	۳۷
	<p>در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چه قدر است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ $0/3$ <input type="radio"/> ۲ $0/4$ <input type="radio"/> ۳ $0/5$ <input type="radio"/> ۴ $0/6$ </p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۳۸

	<p>در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در M و N قطع می‌کند، اندازه‌ی MN چه قدر است؟</p> <p>۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{5}{7}$ ۳ $\frac{5}{6}$ ۴ $\frac{5}{3}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۳۹
	<p>اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟</p> <p>۱ $\frac{2}{9}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{2}{5}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۴۰
	<p>در مثلث ABC داریم: $AB = 9$, $AC = 7$ و $\widehat{A} = 2\widehat{C}$، اندازه‌ی BC کدام است؟</p>  <p>۱ 12 ۲ $12/5$ ۳ 13 ۴ 14</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۴۱
	<p>مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه‌ی ضلع متوسط a کدام است؟</p> <p>۱ $\sqrt{39}$ ۲ $\sqrt{41}$ ۳ $3\sqrt{5}$ ۴ $5\sqrt{2}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی</p>	۴۲
	<p>در مثلثی به اضلاع ۸، ۶ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چه قدر است؟</p>  <p>۱ $\frac{195}{14}$ ۲ $\frac{102}{7}$ ۳ $\frac{120}{7}$ ۴ $\frac{124}{7}$</p> <p>کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی</p>	۴۳



الف) $a = 9, b = 6, c = 10$

$$a^2 = 81, b^2 + c^2 = 136 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

ب) $a = 9, b = 4, c = 8$

$$a^2 = 81, b^2 + c^2 = 80 \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

پ) $a = 17, b = 15, c = 8$

$$a^2 = 289, b^2 + c^2 = 289 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

الف) $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A < 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A > 0$

$$\xrightarrow[\div (b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A > b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

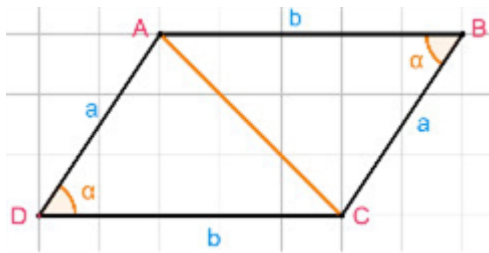
ب) $\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A > 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A < 0$

$$\xrightarrow[\div (b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

پ) $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos A = 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A = 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A = 0$

$$\xrightarrow[\div (b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

با توجه به خواص متوازی الاضلاع داریم:



$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = a \cdot b \sin \alpha$$

مثلث BCD متساوی الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام 30° خواهد بود. در این

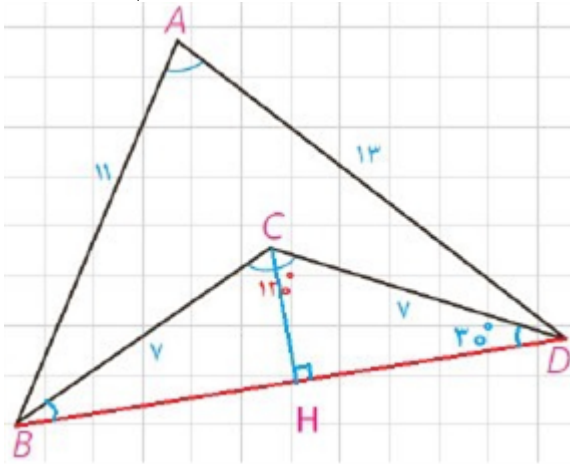
مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = 30^\circ$ در نتیجه: $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left. \begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times BD = \frac{\sqrt{3}}{4} BD \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BD = 49\sqrt{3}$$

$$P_{ABD} = \frac{11 + 13 + 49\sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 49\sqrt{3}\right) \left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 11\right) \left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 13\right)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(12 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}$$



$$S_{ABD} = \sqrt{\left(144 - \frac{147}{4}\right) \left(\frac{147}{4} - 1\right)} = \frac{143}{4} \sqrt{3} \quad (1)$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{143}{2} \sin A = \frac{143}{4} \sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{143}{4} \sqrt{3} - \frac{49}{4} \sqrt{3} = \frac{94}{4} \sqrt{3}$$

راه حل دوم: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle BCD : BD^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2 - 2(\sqrt{3})(\sqrt{3}) \cos 120^\circ$$

$$\xrightarrow{\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}} BD^2 = 49 + 49 + 49 = 3 \times 49 \Rightarrow BD = 49\sqrt{3}$$

$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos A$$

$$\Rightarrow 3 \times 49 = 11^2 + 13^2 - 2(11)(13) \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{1}{2}(11)(13) \sin 60^\circ - \frac{1}{2}(\sqrt{3})(\sqrt{3}) \sin 120^\circ = \frac{143\sqrt{3}}{4} - \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{94\sqrt{3}}{4}$$



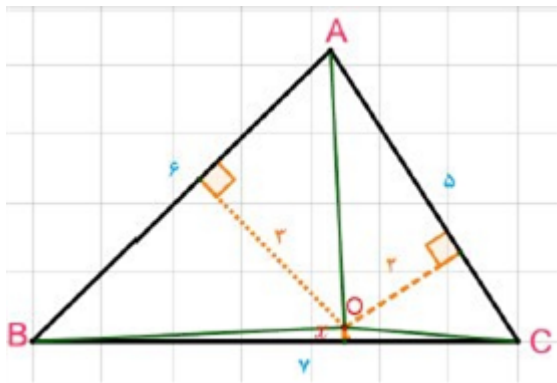
$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$



$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

$$6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6} - 14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.7$$

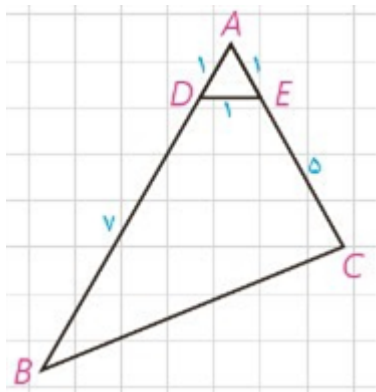
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC) \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2 AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}} \Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (A \text{ نیمساز راس } A) d_a = \frac{2 bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

۶ با توجه به این‌که مثلث ADE متساوی‌الساقین است پس $\widehat{DAE} = 60^\circ$ در نتیجه:



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

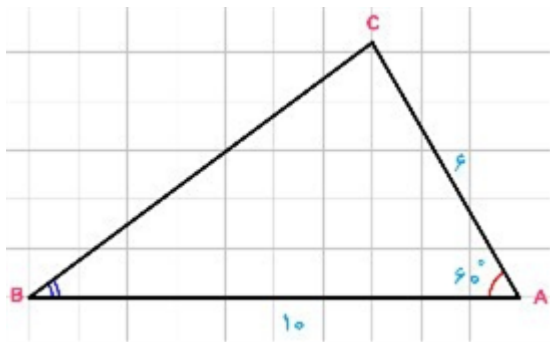
$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$





الف) $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A$

$$BC^2 = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{1}{2} = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76}$$

۸

ب) $\frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

پ) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{76}} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{\sqrt{76}} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{57}}{76}$

الف) راه اول:

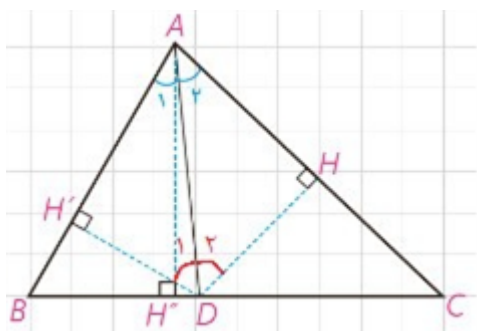
۹

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 &= 90^\circ \\ \widehat{A}_2 + \widehat{D}_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{D}_2 \xrightarrow{\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2} \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$$

پس دو مثلث قائم الزاویه ADH و ADH' به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند بنابراین DH = DH'

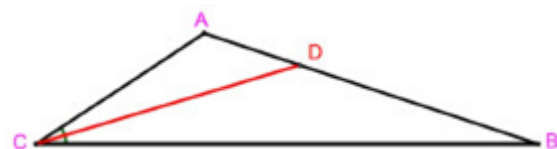
راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس DH = DH'

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AB}{\frac{1}{2} DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1) \quad \text{ب)}$$



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AH''}{\frac{1}{2} CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

از مقایسه ی ۱ و ۲ نتیجه می شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BC$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10+6}{6} = \frac{BD+DA}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{6} = \frac{7}{DA} \Rightarrow DA = \frac{28}{16} = 2 \Rightarrow BD = 7 - 2 = 5$$

$$CD^2 = 6 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

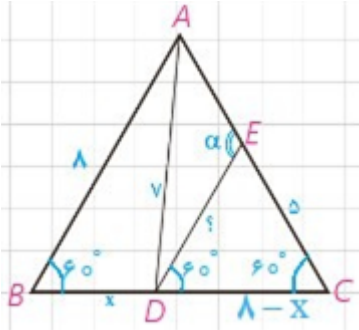
۱۰

در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه \widehat{AMB} و در مثلث AMC پاره خط MP نیمساز زاویه \widehat{AMC} است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

عکس ق تالس

$\longrightarrow PQ \parallel BC$



$$AB = AC = BC = 10, AD = 5, DB = x$$

$$DC = 10 - x, DB < DC$$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\Rightarrow 100(10 - x) + 100x = 25 \times 10 + 10x(10 - x)$$

$$\Rightarrow 100 \times 10 - 100x + 100x = 250 + 10x(10 - x)$$

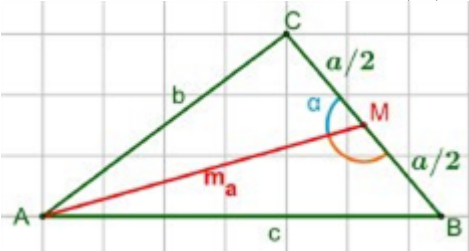
$$\xrightarrow{\div 10} 100 = 25 + 10x - x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 75 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 5$$

$$\xrightarrow{DB < DC} x = DB = 3, DC = 5$$

$$\triangle ACM : b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times AM \times \cos \alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle ABM : c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times AM \times \cos (180^\circ - \alpha)$$



$$c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha + \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

$$AB = c = 4, AC = b = 6, BC = a = 10$$

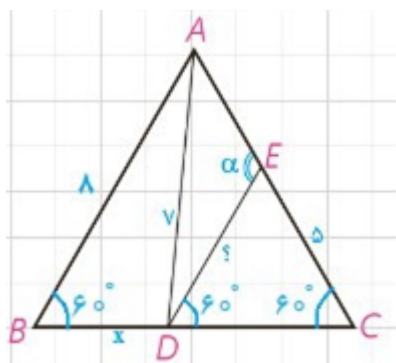
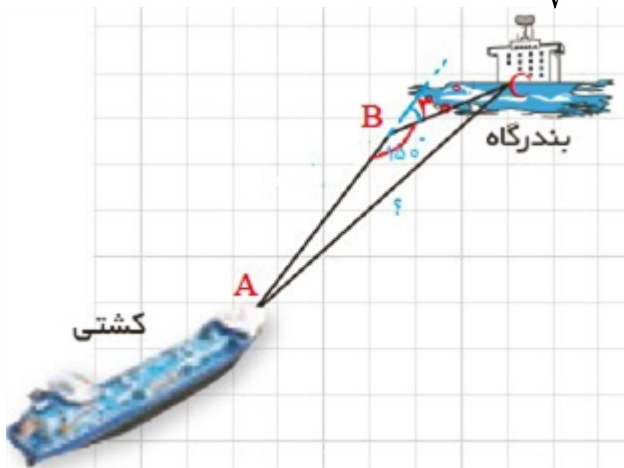
$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 \Rightarrow AM = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{2(16 + 36) - 100}{4} \Rightarrow AM = 10$$



14

$$= 36.. + 4.. - 2 \times 12_{00} \times \left(-\frac{\sqrt{r}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow AC = 2 \cdot \sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$$



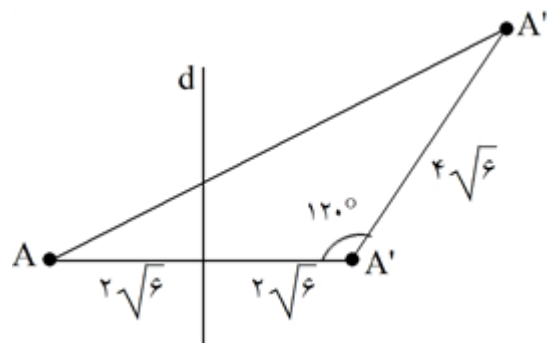
$$\xrightarrow{\text{BD} < \text{DC}} \text{BD} = \beth, \text{DC} = \mathfrak{d}$$

15

یعنی $\delta = DE$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:

$$\alpha = 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ$$

١٩



$$AA^{\text{r}} = (\text{r}\sqrt{\text{r}})^{\text{r}} + (\text{r}\sqrt{\text{r}})^{\text{r}} - \text{r} \times \text{r}\sqrt{\text{r}} \times \text{r}\sqrt{\text{r}} \times \text{Cos } 120^{\circ} \Rightarrow AA^{\text{r}} = \sqrt{2\text{r}\text{r}}$$



$$\text{الف) } \frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times DC} = \frac{BD}{DC}$$

۱۷

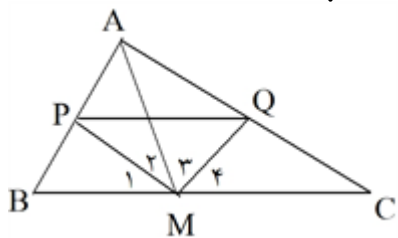
ب) DM, DN مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است.

$$\text{پ) } \frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}DM \times AB}{\frac{1}{2}DN \times AC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB : \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{MB} \\ \triangle AMC : \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{array} \right\} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$

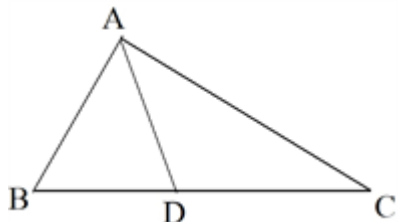
۱۸



۱۹ فرض کنید $AB = ۸$ و $AC = ۱۲$ و $BC = ۱۵$ و نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند.

$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{۸}{۱۲} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{۸}{۸ + ۱۲} \Rightarrow \frac{BD}{۱۵} = \frac{۸}{۲۰} \Rightarrow BD = ۶$$

$$DC = BC - BD \quad DC = ۱۵ - ۶ = ۹$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی، EF موازی BC است. پس:

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{10} = \frac{12\sqrt{2}}{15\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow EF = 8$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\text{DF نیمساز} : \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{AD}{5} \Rightarrow AD = 20$$

$$\text{DF نیمساز} \Rightarrow DF^2 = AD \times BD - AF \times BF \Rightarrow DF^2 = 20 \times 5 - 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 100 - 72$$

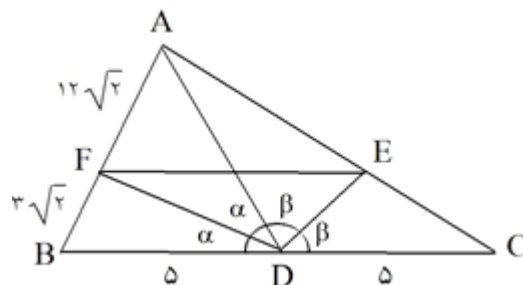
$$\Rightarrow DF^2 = 28 \Rightarrow DF = \sqrt{28}$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

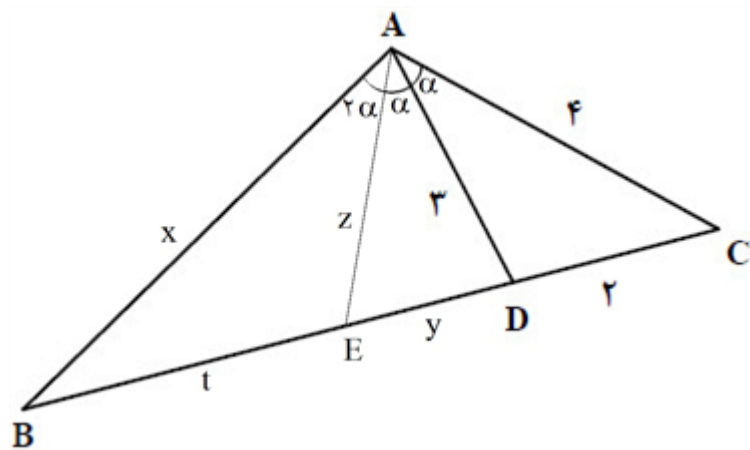
در ضمن DE و DF نیمساز زاویه‌های $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$ هستند پس:

در نتیجه: $\alpha + \beta = 90^\circ$ پس مثلث DEF قائم‌الزاویه است.

$$\triangle DEF : DE^2 = EF^2 - DF^2 = 8^2 - \sqrt{28}^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow DE = 6$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\triangle ABC : \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{t}{3/5} \Rightarrow t = \frac{5}{8}x$$

$$AE^2 = AB \times AC - BE \cdot EC$$

$$3^2 = 4x - 3/5 \xrightarrow{t = \frac{5}{8}x} 9 = \frac{15}{16}x \Rightarrow x = 9/6$$

$$\text{محیط} = 9/6 + 4 + 3 + 3/5 + 8/4 = 25/5$$

$$\triangle AEC : \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{4}{z} = \frac{2}{y} \Rightarrow z = 2y$$

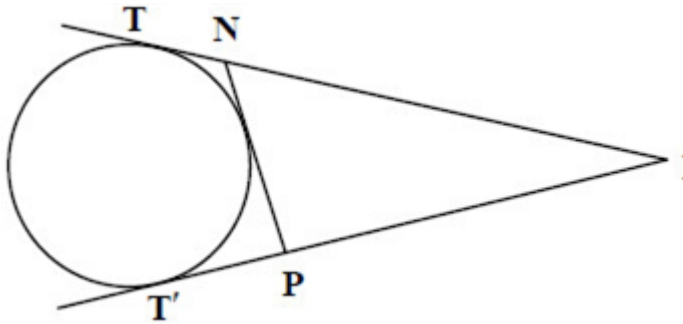
$$AD^2 = AC \cdot AE - CE \cdot ED \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$3^2 = 4 \times z - 2y \Rightarrow 9 = 6y$$

$$z = 3 \text{ و } EC = 3/5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $MT = MT' = P$ پس $P = ۱۸$ در نتیجه محیط مثلث MNP برابر ۳۶ است

پس:



$$MN + MP + NP = ۳۶$$

$$۱۵ + ۱۲ + NP = ۳۶ \Rightarrow NP = ۹$$

از طرف دیگر اگر شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع NP باشد داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} \xrightarrow{a=NP=9} r_a = \frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P-a} = \frac{\sqrt{18(18-15)(18-12)(18-9)}}{18-9}$$

$$= \frac{\sqrt{18 \times 3 \times 6 \times 9}}{9} = \frac{18 \times 3}{9} = 6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه \hat{A} در مثلث ABC یعنی AE را رسم می‌کنیم. در این صورت AD نیمساز مثلث ABE است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle ABE: \text{AD نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{۴}{x} = \frac{۸}{y}$$

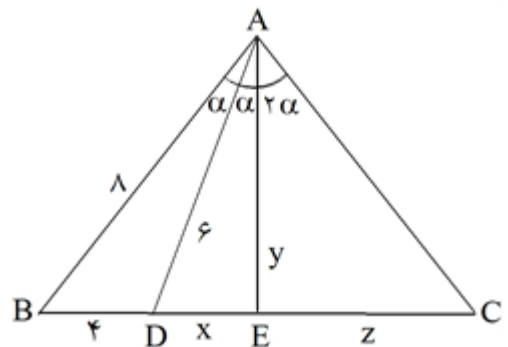
$$\Rightarrow y = 2x \quad (۱)$$

$$\triangle ABE: \text{AD نیمساز} \Rightarrow AD^2 = AB \times AE - BD \times DE$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۸y - ۴x \xrightarrow{\text{از (۱)}} ۳۶ = ۱۶x - ۴x \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{\text{از (۱)}} y = ۶$$

$$\triangle ABC: \text{AE نیمساز} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۴+x}{z} = \frac{۸}{AC} \xrightarrow{x=۳} \frac{۷}{z} = \frac{۸}{AC} \Rightarrow z = \frac{۷}{۸}AC$$

$$\triangle ABC: \text{AE نیمساز} \Rightarrow AE^2 = AB \times AC - BE \times EC \Rightarrow y^2 = ۸AC - (۴+x)(z) \xrightarrow{\substack{\text{از (۲)} \\ y=۶}} ۳۶ = ۸AC - ۷ \times \frac{۷}{۸}AC \Rightarrow ۳۶ = \left(۸ - \frac{۴۹}{۸}\right)AC \Rightarrow AC = \frac{۳۶}{\frac{۱۵}{۸}} \Rightarrow AC = \frac{۸ \times ۳۶}{۱۵} = \frac{۹۶}{۵} = ۱۹ \frac{۲}{۵}$$



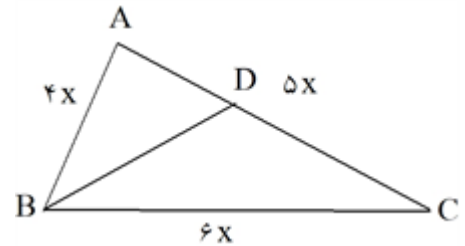
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC فرض کنیم $AB = ۴x$ و $AC = ۵x$ و $BC = ۶x$. در این صورت زاویه B زاویه متوسط است. فرض کنیم BD نیمساز زاویه B باشد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند پس نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} BD \text{ نیمساز} &\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC} \\ &\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۴x+۶x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۱۰x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۲}{۵} \quad (۲) \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین:} \quad \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{۵}{۲}$$

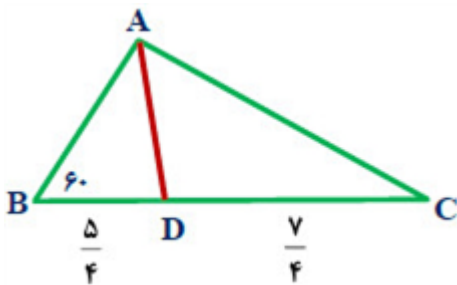


گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{قضیه نیمساز: } \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۵}{۴}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow AC = \frac{۷}{۵}AB$$

$$\text{قضیه کسینوس‌ها: } AC^2 = AB^2 + BC^2 - ۲AB \times BC \times \cos B$$

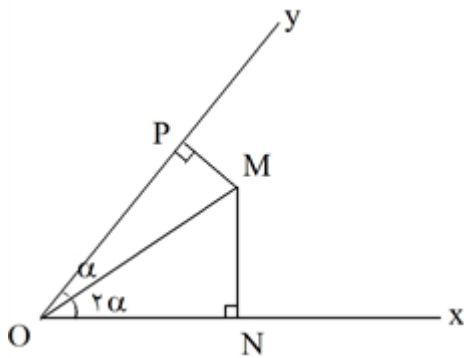
$$\Rightarrow \frac{۴۹}{۲۵}AB^2 = AB^2 + ۳^2 - ۲AB \times ۳ \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲۴}{۲۵}AB^2 + ۳AB - ۹ = ۰ \quad \begin{cases} \text{غ ق ق ۵} \\ \text{AB} = -۵ \\ \text{AB} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow AC = \frac{۲۱}{۸} \end{cases}$$



$$AD^2 = AC \times AB - DC \times BD$$

$$AD^2 = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۱۵}{۸} - \frac{۵}{۴} \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۵ \times ۷}{۶۴} \Rightarrow AD = \frac{۵}{۸}\sqrt{۷}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMN و OMP مساوی $R = \frac{OM}{2}$ است. پس با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم.



$$\left. \begin{aligned} \triangle OMN : \frac{MN}{\sin 2\alpha} &= 2R \\ \triangle OMP : \frac{MP}{\sin \alpha} &= 2R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{MN}{\sin 2\alpha} = \frac{MP}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = 2 \cos \alpha \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} \quad (2)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OMP می‌نویسیم:

$$(2) \text{ از } (1) \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2 OP}{OM}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم.

$$\text{نیمساز } AD = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3/5}{2/5} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{35}{25} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{AB}{AC}$$

با توجه به تناسب بدست آمده فرض می‌کنیم $AB = 7x$ و $AC = 5x$ اکنون از قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

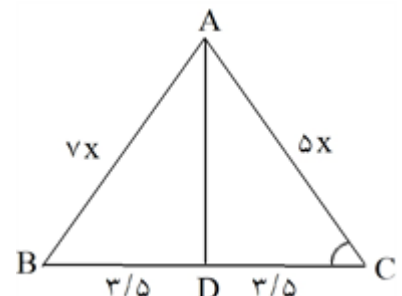
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \times BC \cos 60^\circ \xrightarrow{BC=6} 49x^2 = 25x^2 + 36 - 2(5x)(6)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 49x^2 = 25x^2 + 36 - 30x \Rightarrow 24x^2 + 30x - 36 = 0 \xrightarrow{\div 6} 4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow x = \frac{-5 + 11}{8} \Rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین ضلع کوچکتر این مثلث یعنی AC برابر $5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ است. (توجه کنید اگر $BD = 2/5$ و

$DC = 3/5$ آنگاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB > AC$)



مطابق شکل شش ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایره محاطی داخلی این مثلث، محیط است. بنابراین کافی است شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

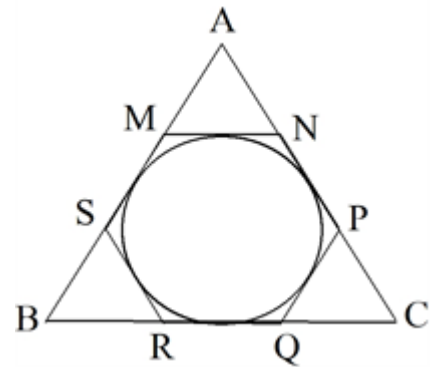
$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$$

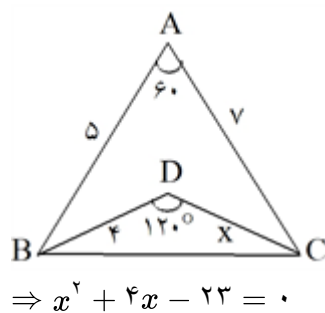
$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$$

$$MN = 2r \tan \frac{180^\circ}{6} = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

توجه کنید شش ضلعی منتظم در مثلث ABC محاط شده است پس مثلث ABC متساوی الاضلاع باید باشد که خلاف فرض سؤال است و اگر منتظم در نظر گرفته نشود هر ضلع آن هر اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از B به C وصل کرده با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌نویسیم.



$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2 = 25 + 49 - 2(5)(7)\left(\frac{1}{2}\right) = 39$$

$$\triangle BDC : BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2 BD \times DC \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow 39 = 16 + x^2 - 2(4)(x)\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 39 = 16 + x^2 + 4x$$

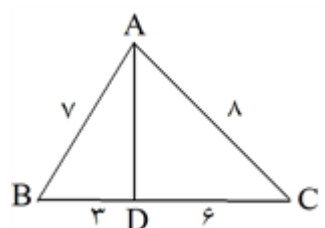
$$\Rightarrow x^2 + 4x - 23 = 0$$

این معادله را با فرمول b' حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 23}}{1} = -2 \pm \sqrt{27}$$

$$\text{مسئلاً } x = -2 - \sqrt{27} \text{ قابل قبول نیست پس } x = -2 + \sqrt{27} \text{ بنابراین } x + 2 = \sqrt{27}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت داریم.



$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$\Rightarrow 49 \times 9 + 81 \times 3 = AD^2 \times 12 + 3 \times 9 \times 12 \xrightarrow{\div 3} 49 \times 3 + 81 \times 1 = AD^2 \times 4 + 3 \times 36$$

$$= AD^2 \times 4 + 108 \Rightarrow 162 = 4AD^2 + 108 \Rightarrow 4AD^2 = 54 \Rightarrow AD^2 = \frac{27}{2} \Rightarrow AD = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین ارتفاع AH، میانه نظیر ضلع BC نیز هست و داریم:

$$\triangle AHB : AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

اگر پای ارتفاع وارد از نقطه C بر پاره خط BD را K بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} CK \times BD \\ S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} DH' \times BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times 25 = 15 \times 16 \Rightarrow CK = \frac{240}{25} = 9\frac{6}{5}$$

دقت کنید که DH' و AH فاصله دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.

روش دوم:

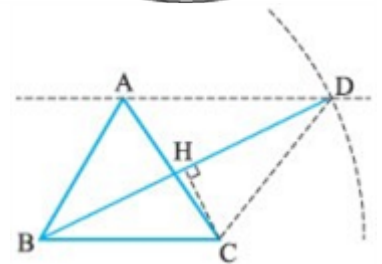
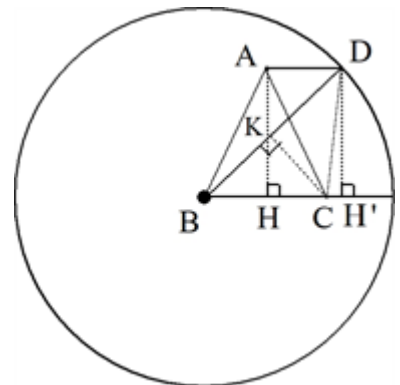
دو مثلث ABC و BCD در قاعده BC مشترک و ارتفاع برابر دارند، پس مساحت آنها برابر است. طبق قضیه هرون داریم:

$$P = \frac{17 + 17 + 16}{2} = 25$$

$$S_{ABC} = \sqrt{25(25-17)(25-17)(25-16)} \\ = \sqrt{25 \times 8 \times 8 \times 9} = 5 \times 8 \times 3 = 120$$

پس $S_{BCD} = 120$ ، اگر CH بر BD عمود باشد، داریم:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \times CH \Rightarrow 120 = \frac{1}{2} \times 25 \times CH \Rightarrow CH = \frac{240}{25} = 9\frac{6}{5}$$



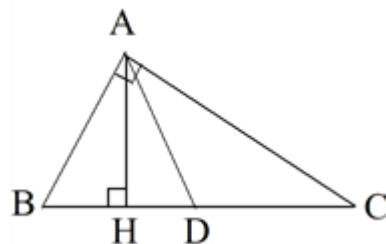
$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

از طرفی طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{3}{4 + 3} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر AC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ADC می‌نویسیم:

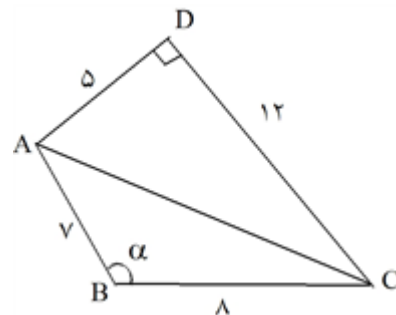
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AC = 13$$

حال با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \times BC \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 13^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5) \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } \alpha = 120^\circ \text{ در نتیجه } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۳۴

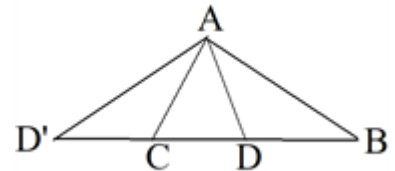
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه داخلی و خارجی یک رأس مثلث بر هم عمودند پس مثلث ADD' قائم‌الزاویه است.

$$AD \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{DC}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow DC = 3$$

$$AD' \Rightarrow \frac{D'C}{D'B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل}} \frac{D'C}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow D'C = 6$$

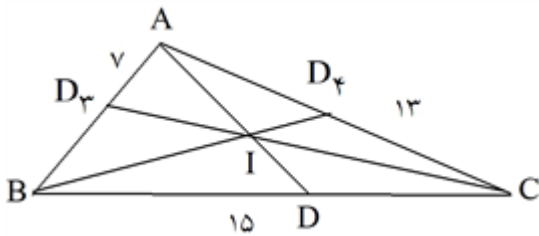
$$\Rightarrow DD' = DC + D'C = 9$$

$$\triangle ADD' : AD^2 + AD'^2 = DD'^2 = 9^2 = 81$$



۳۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{BD}{DC} = \frac{7}{13} \Rightarrow DC = \frac{13}{20} \times 15 = \frac{39}{4}$$

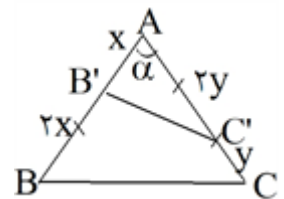
$$\frac{DI}{IA} = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{39}{4}}{13} = \frac{3}{4}$$

نکته: این نسبت در مثلثی به اضلاع a, b, c که c ضلع بزرگتر باشد برابر است با: $\frac{c}{a+b}$. در این مسئله $\frac{15}{7+13} = \frac{3}{4}$

۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آنها، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{\frac{1}{2}(3x)(2y) \sin \alpha}{\frac{1}{2}x(2y) \sin \alpha} = \frac{9}{2}$$



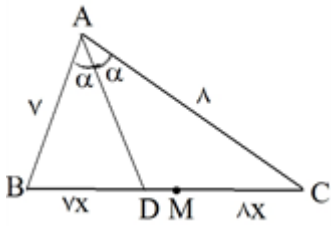
۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع وارد بر وتر h و طول وتر a در نظر می‌گیریم داریم:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}a$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{2}a$ و وتر باشد زوایای حاده‌ی آنها 15° یا 75° می‌باشند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. توجه کنید که زاویه‌ی بزرگ‌تر، مقابل به ضلع بزرگ‌تر است. حال با توجه به این‌که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $BD = ۷x$ و $DC = ۸x$ می‌باشد و در نتیجه:



$$7x + 8x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{28}{5} \\ DC = \frac{32}{5} \end{cases}$$

$$MD = BM - BD = 6 - \frac{28}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

و از طرفی $BM = MC = 6$ می‌باشد، پس:

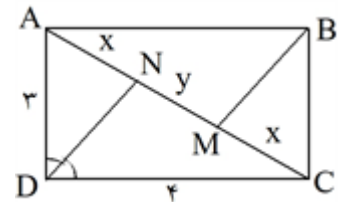
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. DN نیمساز زاویه‌ی D در مثلث ADC است و در نتیجه ضلع AC را به نسبت اضلاع زاویه‌ی D تقسیم می‌کند، یعنی داریم:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{DA}{DC} \rightarrow \frac{x}{y+x} = \frac{3}{4} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در ۴}} \frac{x}{y+x+x} = \frac{3}{4+3}$$

$$\xrightarrow{y+2x=AC=5} \frac{x}{5} = \frac{3}{7} \rightarrow x = \frac{15}{7}$$

$$MN = y = AC - 2x = 5 - 2\left(\frac{15}{7}\right) \rightarrow MN = \frac{5}{7}$$

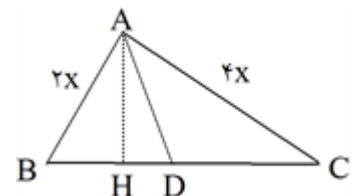
$$(AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ توجه کنید که})$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند،

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2BD$$

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times BC} = \frac{BD}{BD + DC} = \frac{BD}{BD + 2BD} = \frac{1}{3}$$

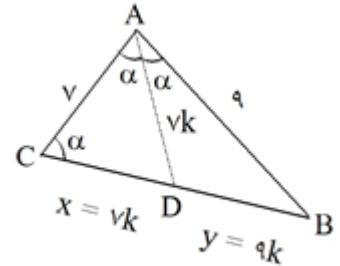


۴۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر نیمساز زاویه ی A را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع BC به ترتیب x و y باشند، آن گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می کند، خواهیم داشت $x = ۷k$ و $y = ۹k$. از طرفی چون مثلث ADC متساوی الساقین است، پس $AD = CD$ خواهد شد. همچنین می دانیم اگر AD نیمساز زاویه ی A در مثلث ABC باشد، آن گاه:

$$AD^2 = AC \cdot AB - CD \cdot DB \rightarrow (۷k)^2 = ۷ \times ۹ - (۷k)(۹k) \rightarrow ۴۹k^2 + ۶۳k^2 = ۶۳$$

$$\rightarrow ۱۱۲k^2 = ۶۳ \rightarrow k^2 = \frac{۹}{۱۶} \rightarrow k = \frac{۳}{۴} \rightarrow BC = x + y = ۱۶k = ۱۶ \left(\frac{۳}{۴} \right) = ۱۲$$



۴۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \rightarrow ۱۶ = \frac{1}{2} \times ۸ \times ۵ \times \sin A \rightarrow \sin A = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \cos A = \frac{۳}{۵}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow a^2 = ۶۴ + ۲۵ - ۲(۸)(۵) \left(\frac{۳}{۵} \right) = ۴۱ \rightarrow a = \sqrt{۴۱}$$

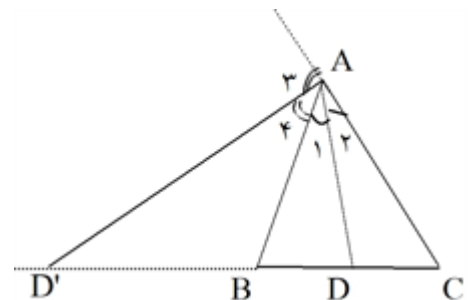
۴۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ($AB = ۶, AC = ۸, BC = ۵$)

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{۵ - DB} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow DB = \frac{۱۵}{۷}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_3 \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{D'B}{۵ - D'B} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow D'B = ۱۵$$

$$DD' = D'B + BD = ۱۵ + \frac{۱۵}{۷} = \frac{۱۲۰}{۷}$$



پاسخنامه کلیدی

۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴

