نام و نام خانوادگی :　　زمان آزمون :

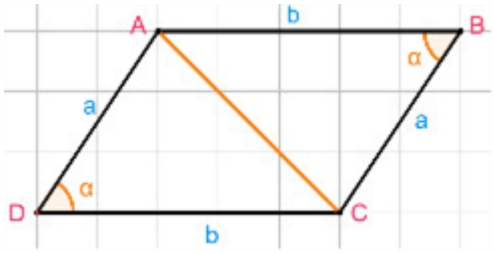
پایه تحصیلی :　　نام درس :

نام دبیر :　　نام آموزشگاه :

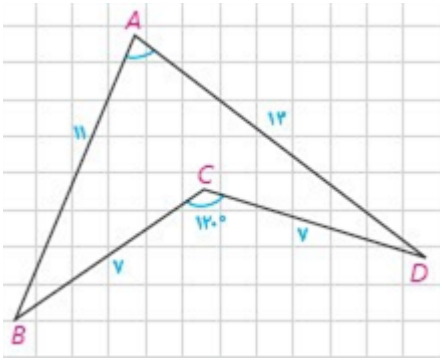
عنوان آزمون : هندسه ۱۱ فصل ۳　　تاریخ برگزاری

p30konkor.com

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	حاده (تند) ، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه‌ی A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید. الف) $BC = ۹ , AC = ۶ , AB = ۱۰$ ب) $BC = ۹ , AC = ۴ , AB = ۸$ پ) $BC = ۱۷ , AC = ۱۵ , AB = ۸$ مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲) پاسخ: ۱ الف) $a = ۹ , b = ۶ , c = ۱۰$ $a^۲ = ۸۱ , b^۲ + c^۲ = ۱۳۶ \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} < ۹۰^\circ$ ب) $a = ۹ , b = ۴ , c = ۸$ $a^۲ = ۸۱ , b^۲ + c^۲ = ۸۰ \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} > ۹۰^\circ$ پ) $a = ۱۷ , b = ۱۵ , c = ۸$ $a^۲ = ۲۸۹ , b^۲ + c^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ$	
۲	به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC: الف) $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$ ب) $\widehat{A} < ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$ پ) $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$ مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲) پاسخ: ۱ الف) $\widehat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \text{Cos}\, A < ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\text{Cos}\, A < ۰ \Leftrightarrow -bc.\text{Cos}\, A > ۰$ $\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\text{Cos}\, A > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$ ب) $\widehat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow \text{Cos}\, A > ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\text{Cos}\, A > ۰ \Leftrightarrow -bc.\text{Cos}\, A < ۰$ $\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\text{Cos}\, a < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$ پ) $\widehat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow \text{Cos}\, A = ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\longrightarrow}} bc.\text{Cos}\, A = ۰ \Leftrightarrow -bc.\text{Cos}\, A = ۰$ $\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\text{Cos}\, A = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$	

۳	ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع. مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲) **پاسخ:** ۱ با توجه به خواص متوازی‌الاضلاع داریم:  $S_{\text{ABCD}} = ۲S_{\text{ABC}} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \text{Sin}\,\alpha$ $\Rightarrow S_{\text{ABCD}} = a.\,b\,\text{Sin}\,\alpha$	

در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.
ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ مثلث BCD متساوی‌الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام ۳۰° خواهد بود. در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = ۳۰^\circ$ در نتیجه:

$$CH = \frac{۷}{۲}$$

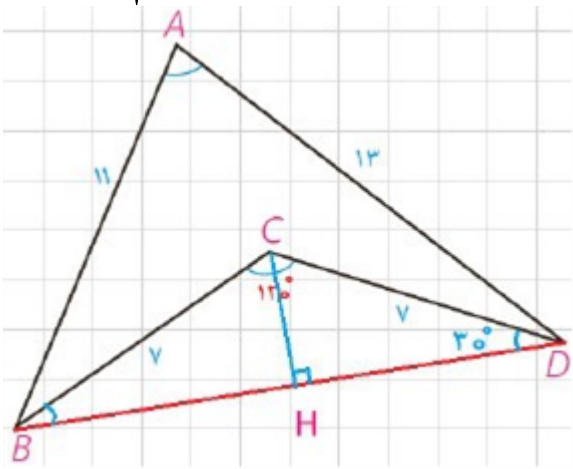
$$\left.\begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times BD = \frac{۷}{۴}BD \\ S_{BCD} &= \frac{۱}{۲}\times ۷\times ۷\times \operatorname{Sin} ۱۲۰^\circ = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۷}{۴}BD = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$P_{ABD} = \frac{۱۱ + ۱۳ + ۷\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۷\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۱\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۳\right)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ - \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} + ۱\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱\right)}$$

۴



$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۴۴ - \frac{۱۷۴}{۴}\right)\left(\frac{۱۴۷}{۴} - ۱\right)} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳}\ (۱)$$

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲}\times ۱۱\times ۱۳\times \operatorname{Sin} A = \frac{۱۴۳}{۲}\operatorname{Sin} A\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱۴۳}{۲}\operatorname{Sin} A = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} \Rightarrow \operatorname{Sin} A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = ۶۰$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} - \frac{۴۹}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۹۴}{۴}\sqrt{۳}$$

راه حل دوم: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{BCD} : BD^۲ = ۷^۲ + ۷^۲ - ۲(۷)(۷)\operatorname{Cos} ۱۲۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Cos} ۱۲۰^\circ = \frac{-۱}{۲}} BD^۲ = ۴۹ + ۴۹ + ۴۹ = ۳\times ۴۹ \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲\,AB\times AD\operatorname{Cos} A$$

$$\Rightarrow ۳\times ۴۹ = ۱۱^۲ + ۱۳^۲ - ۲(۱۱)(۱۳)\operatorname{Cos} A \Rightarrow \operatorname{Cos} A = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = ۶۰^\circ$$

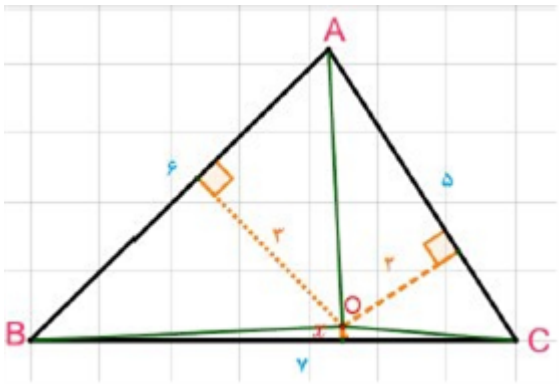
$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{۱}{۲}(۱۱)(۱۳)\operatorname{Sin} ۶۰ - \frac{۱}{۲}(۷)(۷)\operatorname{Sin} ۱۲۰ = \frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}$$

۳

در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ فاصله‌ی O تا ضلع بزرگتر را x در نظر می‌گیریم. داریم:



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{۵+۶+۷}{۲} = ۹$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{۹\times۲\times۳\times۴} = ۶\sqrt{۶}$$

$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲}\times۶\times۳ = ۹$$

$$S_{AOC} = \frac{۱}{۲}\times۵\times۲ = ۵$$

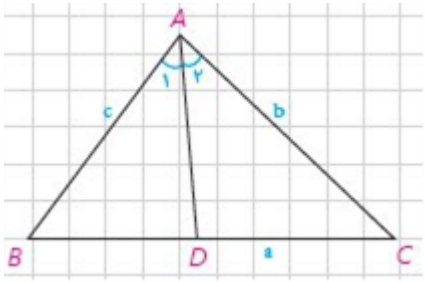
$$S_{BOC} = \frac{۱}{۲}\times۷\times x = \frac{۷}{۲}x$$

$$۶\sqrt{۶} = ۹ + ۵ + \frac{۷}{۲}x \Rightarrow ۶\sqrt{۶} - ۱۴ = \frac{۷}{۲}x \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}(۶\sqrt{۶} - ۱۴) \approx ۰/۲$$

۵

در شکل زیر AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی A به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A$$

$$= \frac{۱}{۲}\ldots\times\ldots\times\text{Sin}\,\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}\ldots\times\ldots\times\text{Sin}\,\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A = AD.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}(\ldots+\ldots)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A}{(\ldots+\ldots)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}} = \frac{۲\,AB.\,AC.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{(\ldots+\ldots)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = \ldots$$

$$\Rightarrow (d_a \text{ نیمساز راس } A) = \frac{۲\,bc.\,\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{b+c}$$

۶

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱

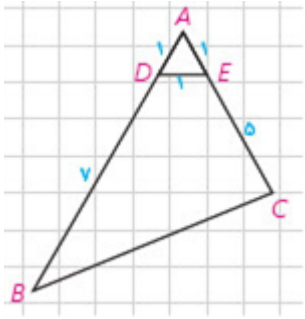
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{۱}{۲}AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A = \frac{۱}{۲}AB\times AD\times\text{Sin}\,\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}AC\times AD\times\text{Sin}\,\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A = AD.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}(AB+AC) \Rightarrow AD = \frac{AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A}{(AB+AC)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}}$$

$$= \frac{۲\,AB.\,AC.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{(AB+AC)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (d_a \text{ نیمساز راس } A) = \frac{۲\,bc.\,\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{b+c}$$

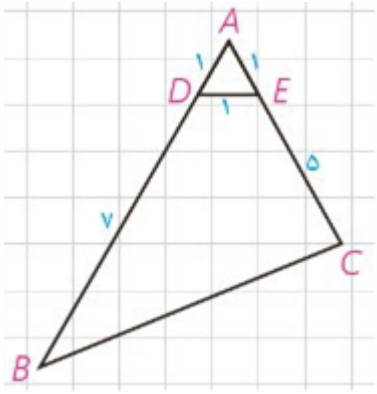
در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱ با توجه به این‌که مثلث ADE متساوی‌الساقین است پس $\widehat{DAE} = ۶۰^\circ$ در نتیجه:

۷



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲\,AC.\,AB.\,\text{Cos}\,A$$

$$BC^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۲\times۶\times۸\times\frac{۱}{۲} = ۵۲$$

$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.\,AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^۲ = S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{BCED} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\widehat{A} = ۶۰^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\text{Sin}\,B$ را پیدا کنید.

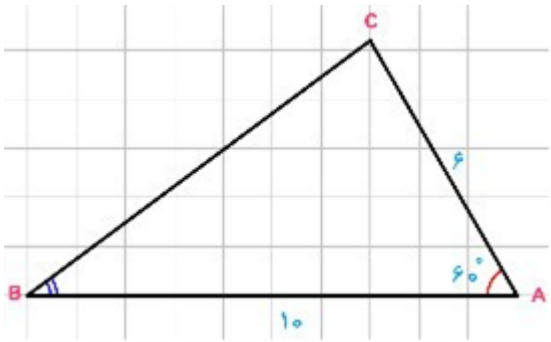
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

پاسخ: ۱

۸

الف) $BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲\,AC.\,AB.\,\text{Cos}\,A$

$$BC^۲ = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲\times۶\times۱۰\times\frac{۱}{۲} = ۷۶ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$$



ب) $\frac{۱}{۲}AC.\,AB.\,\text{Sin}\,A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\times۶\times۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$

پ) $\frac{\text{Sin}\,B}{b} = \frac{\text{Sin}\,A}{a} \Rightarrow \frac{\text{Sin}\,B}{۶} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \text{Sin}\,B = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \Rightarrow \text{Sin}\,B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

با پر کردن جاهای خالی با فرض این‌که در شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

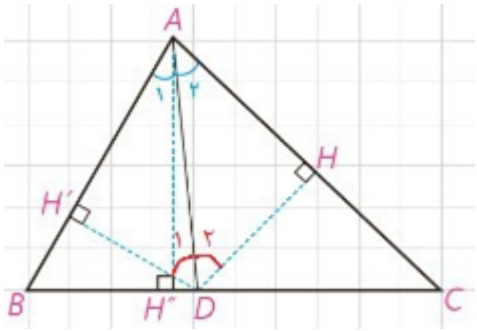
الف) چرا $DH = DH'$؟

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times \ldots}{\frac{۱}{۲}DH \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} \quad (۱)$$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times \ldots}{\frac{۱}{۲}CD \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۹ **پاسخ:** ۱ الف) راه اول:

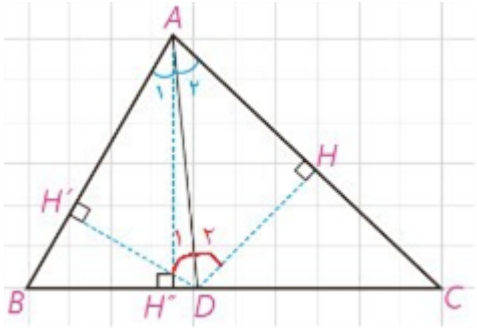
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲} \widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADH و ADH' به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند بنابراین $DH = DH'$

راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH = DH'$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AB}{\frac{۱}{۲}DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (۱)$$

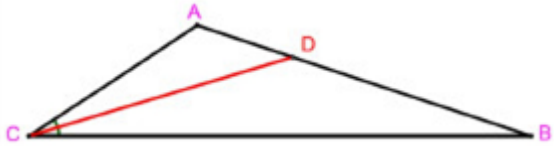


$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times AH''}{\frac{۱}{۲}CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

۱۰ در مثلث ABC، $AB = ۷$ و $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



پاسخ: ۱

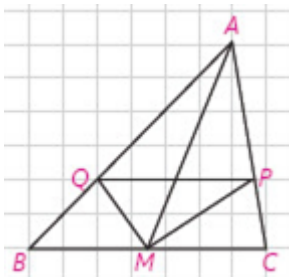
$$CD^۲ = AC.BC - AD.BC$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰+۴}{۴} = \frac{BD+DA}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۴}{۴} = \frac{۷}{DA} \Rightarrow DA = \frac{۲۸}{۱۴} = ۲ \Rightarrow BD = ۷ - ۲ = ۵$$

$$CD^۲ = ۴\times۱۰ - ۲\times۵ = ۳۰ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$$

۱۱ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

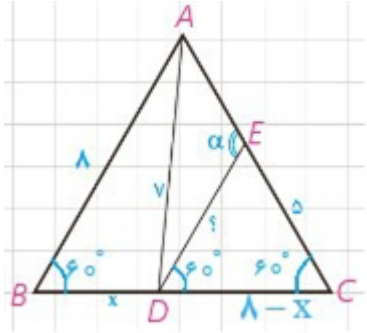
پاسخ: ۱ در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$

۱۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)



پاسخ: ۱

$$AB = AC = BC = ۸,\ AD = ۷,\ DB = x$$

$$DC = x - ۸,\ DB < DC$$

$$AB^۲.DC + AC^۲.DB = AD^۲.BC + DB.DC.BC$$

$$\Rightarrow ۶۴(۸ - x) + ۶۴x = ۴۹\times۸ + ۸x(۸ - x)$$

$$\Rightarrow ۶۴\times۸ - \cancel{۶۴x} + \cancel{۶۴x} = ۴۹\times۸ + ۸x(۸ - x)$$

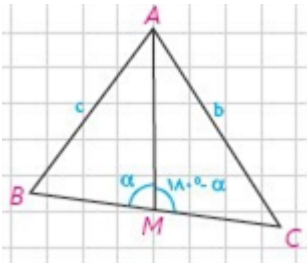
$$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴ = ۴۹ + ۸x - x^۲ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۳, x = ۵$$

$$\xrightarrow{DB<DC} x = DB = ۳, DC = ۵$$

در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم $\left(MB = MC = \frac{a}{۲}\right)$. با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیه‌ی میانه‌ها)

در حالت خاص $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۸$، طول میانه AM را به دست آورید.



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

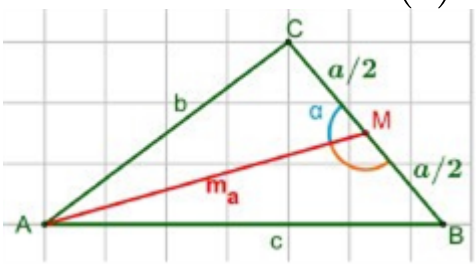
۱۳

پاسخ: ۱

$$\overset{\triangle}{ACM} : b^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲\times\frac{a}{۲}\times AM \times \cos\alpha$$

$$b^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.\cos\alpha \ (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ABM} : c^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲\times\frac{c}{۲}\times AM \times \cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$$



$$c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.\cos\alpha \ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.\cos\alpha + \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.\cos\alpha$$

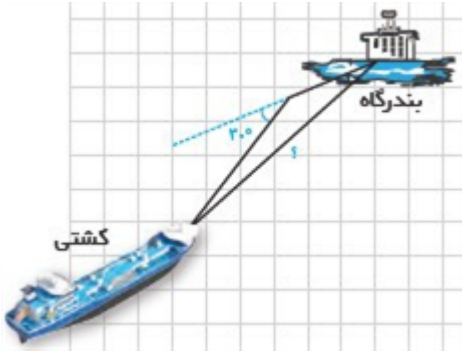
$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM^۲$$

$$AB = c = ۴ , AC = b = ۶ , BC = a = ۸$$

$$b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM \Rightarrow AM = \frac{۲(b^۲ + c^۲) - a^۲}{۴} \Rightarrow AM = \frac{۲(۳۶ + ۱۶) - ۶۴}{۴} \Rightarrow AM = ۱۰$$

۱۴

یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

$$AB = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\ km\ ,\ BC = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰\ km$$

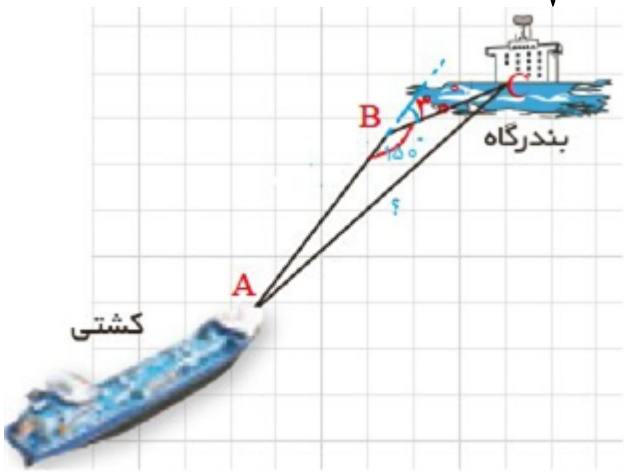
$$AC^۲ = ۶۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲ \times ۶۰ \times ۲۰ \times \cos ۱۵۰^\circ$$

$$= ۳۶۰۰ + ۴۰۰ - ۲ \times ۱۲۰۰ \times \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

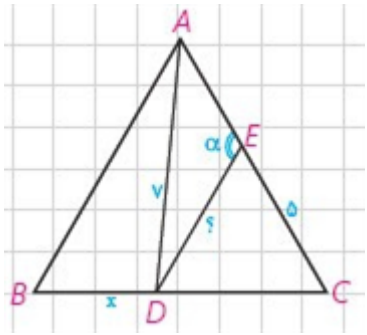
$$\Rightarrow AC^۲ = ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} = ۴۰۰(۱۰ + ۳\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AC = ۲۰\sqrt{۱۰ + ۳\sqrt{۳}}$$

پاسخ: ۱



در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(\mathrm{CD} > \mathrm{BD})$ نقطه‌ی E، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟



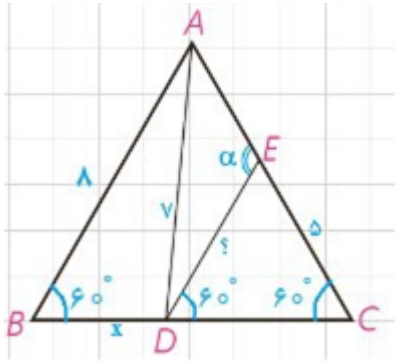
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۵ **پاسخ:** ۱

$$۷^۲ = x^۲ + ۸^۲ - ۲\times x\times ۸\times \mathrm{Cos}\, ۶۰^\circ \Rightarrow ۴۹ = x^۲ + ۶۴ - ۸x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۵\,,\ x = ۳$$

$$\xrightarrow{\mathrm{BD<DC}} \mathrm{BD} = ۳\,,\ \mathrm{DC} = ۵$$



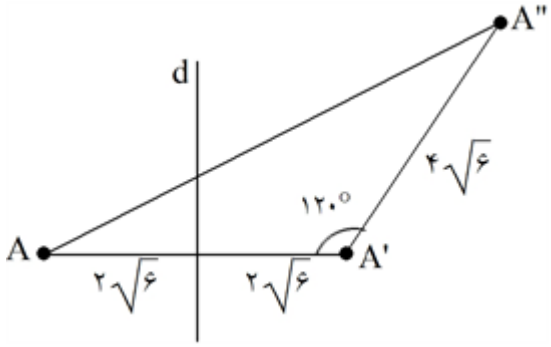
$\mathrm{DC} = \mathrm{CE} = ۵$ در نتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه ۶۰° دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی $\mathrm{DE} = ۵$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:

$$\alpha = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ$$

نقطه‌ی A به فاصله‌ی $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه‌ی A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه‌ی A' می‌نامیم. نقطه‌ی A را حول نقطه‌ی A' به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' را محاسبه کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-هندسه(۲)

۱۶ **پاسخ:** ۱ بنا بر فرض سؤال، شکل زیر را داریم و برای آن قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$\mathrm{AA}''^۲ = (۴\sqrt{۶})^۲ + (۴\sqrt{۶})^۲ - ۲\times ۴\sqrt{۶}\times ۴\sqrt{۶}\times \mathrm{Cos}\, ۱۲۰ \Rightarrow \mathrm{AA}'' = \sqrt{۲۸۸}$$

۱۷

در مثلث ABC ، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم.

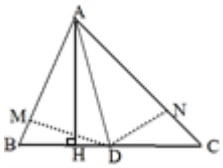
الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌ی این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید.

DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلثهای ABD و ADC ، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

از مقایسه‌ی نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱

الف) $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BD}{\frac{۱}{۲}AH\times DC}=\frac{BD}{DC}$

ب) DM, DN مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است.

پ) $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}DM\times AB}{\frac{۱}{۲}DN\times AC}=\frac{AB}{AC}$

از مقایسه رابطه الف و پ $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

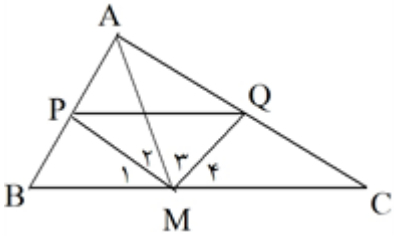
۱۸

در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AMB}: \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP}=\frac{AM}{MB}\\ \overset{\triangle}{AMC}: \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{MC}\end{array}\right\}\xrightarrow{MB=MC}\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}}PQ \parallel BC$$



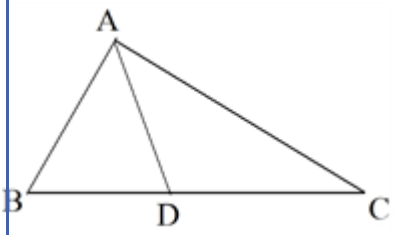
سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲، ۱۵ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-سال سوم-هندسه۲

پاسخ: ۱ فرض کنید $AB = ۸$ و $AC = ۱۲$ و $BC = ۱۵$ و نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند.

$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{۸}{۱۲} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{۸}{۸+۱۲} \Rightarrow \frac{BD}{۱۵} = \frac{۸}{۲۰} \Rightarrow BD = ۶$$

$$DC = BC - BD \quad DC = ۱۵ - ۶ = ۹$$



۱۹

در مثلث ABC، $BC = ۱۰$، نقطه D وسط BC و DE و DF به‌ترتیب نیمساز زوایای $\widehat{ADC}$ و $\widehat{ADB}$ هستند. اگر $AF = ۱۲\sqrt{۲}$ و $BF = ۳\sqrt{۲}$ باشد، طول نیمساز DE کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $۲\sqrt{۷}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی، EF موازی BC است. پس:

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{۱۰} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۱۵\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow EF = ۸$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز } DF : \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{AD}{۵} \Rightarrow AD = ۲۰$$

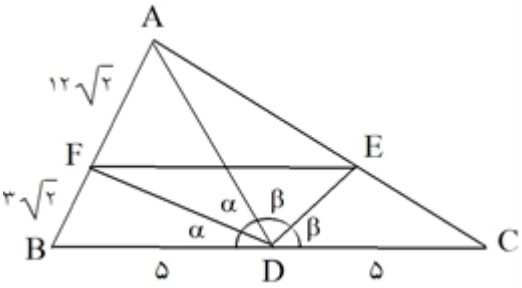
$$\text{نیمساز } DF \Rightarrow DF^۲ = AD \times BD - AF \times BF \Rightarrow DF^۲ = ۲۰ \times ۵ - ۱۲\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۱۰۰ - ۷۲$$

$$\Rightarrow DF^۲ = ۲۸ \Rightarrow DF = \sqrt{۲۸}$$

در ضمن DE و DF نیمساز زاویه‌های $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{ADB}$ هستند پس: $۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$

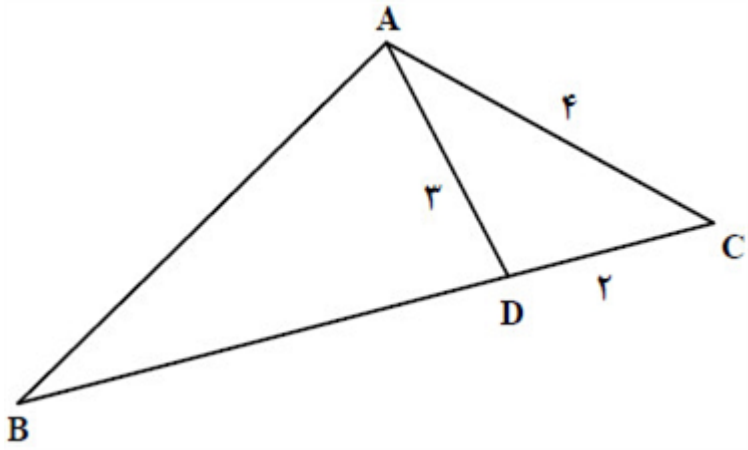
در نتیجه: $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$ پس مثلث DEF قائم‌الزاویه است.

$$\overset{\triangle}{DEF} : DE^۲ = EF^۲ - DF^۲ = ۸^۲ - \sqrt{۲۸}^۲ = ۶۴ - ۲۸ = ۳۶ \Rightarrow DE = ۶$$



۲۰

در شکل مقابل، اگر $B\hat{A}D = ۳D\hat{A}C$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۲۴ ۲) ۲۵/۵ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

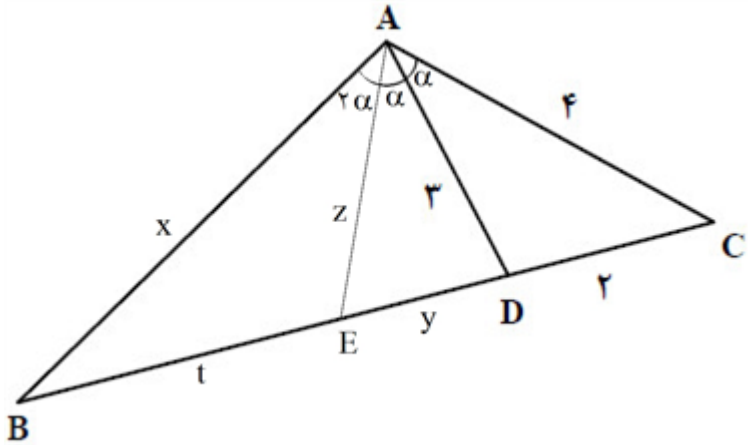
پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۱

$$\overset{\triangle}{AEC}: \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{۴}{z} = \frac{۲}{y} \Rightarrow z = ۲y$$

$$\left.\begin{array}{l} AD^۲ = AC.AE - CDED \\ ۳^۲ = ۴\times z - ۲y \Rightarrow ۹ = ۶y \end{array}\right. \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}$$

$$z = ۳ \text{ و } EC = ۳/۵$$



$$\overset{\triangle}{ABC}: \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{۴} = \frac{t}{۳/۵} \Rightarrow t = \frac{۷}{۸}x$$

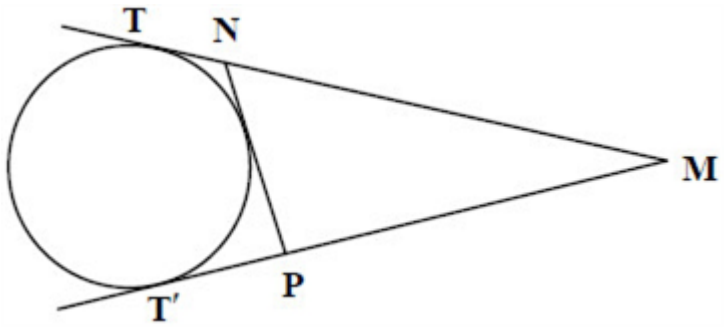
$$AE^۲ = AB \times AC - BE.EC$$

$$۳^۲ = ۴x - ۳/۵ \xrightarrow{t=\frac{۷}{۸}x} ۹ = \frac{۱۵}{۱۶}x \Rightarrow x = ۹/۶$$

$$\text{محیط} = ۹/۶ + ۴ + ۳ + ۳/۵ + ۸/۴ = ۲۵/۵$$

۲۲

در شکل زیر، از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر $MT = ۱۸$، $MN = ۱۵$ و $MP = ۱۲$ باشد،

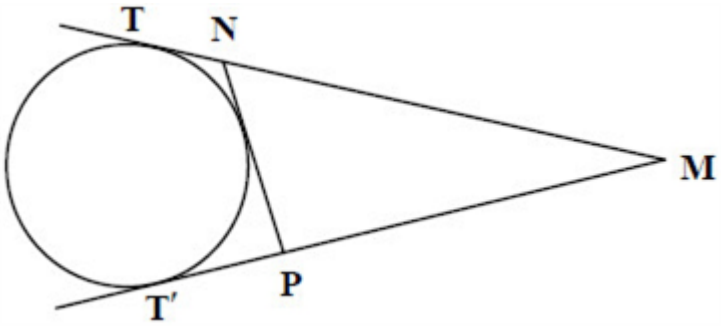


شعاع دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۶\sqrt{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $MT = MT' = P$ پس $P = ۱۸$ در نتیجه محیط مثلث MNP برابر ۳۶ است پس:



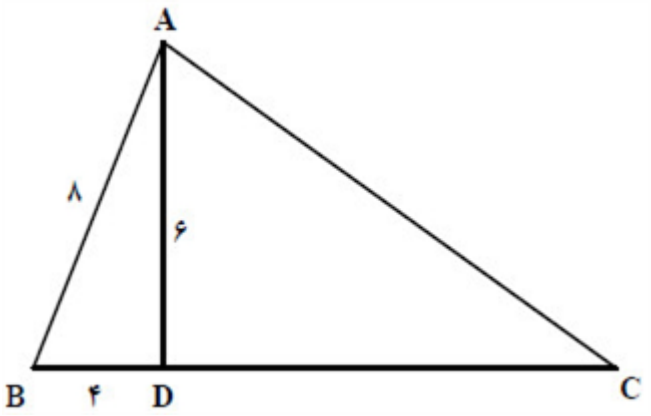
$$MN + MP + NP = ۳۶$$
$$۱۵ + ۱۲ + NP = ۳۶ \Rightarrow NP = ۹$$

از طرف دیگر اگر r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع NP باشد داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} \xrightarrow{a=NP=۹} r_a = \frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P-a} = \frac{\sqrt{۱۸(۱۸-۱۵)(۱۸-۱۲)(۱۸-۹)}}{۱۸-۹}$$

$$= \frac{\sqrt{۱۸\times۳\times۶\times۹}}{۹} = \frac{۱۸\times۳}{۹} = ۶$$

در شکل مقابل، اگر $D\widehat{A}C = ۳B\widehat{A}D$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۱۹/۲ ۲) ۱۶/۸ ۳) ۱۸/۶ ۴) ۱۵/۴

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویهٔ $\widehat{A}$ در مثلث ABC یعنی AE را رسم می‌کنیم. در این صورت AD نیمساز مثلث ABE است. با استفاده از قضیهٔ نیمساز می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{ABE}: \text{نیمساز AD} \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{۴}{x} = \frac{۸}{y}$$

$$\Rightarrow y = ۲x \ (۱)$$

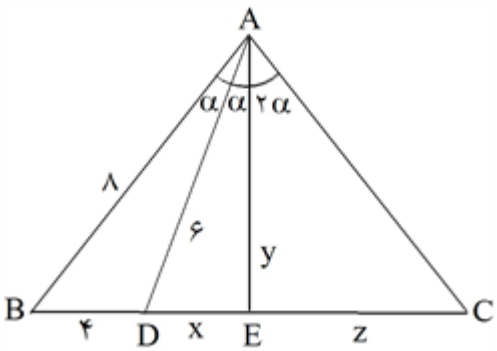
$$\overset{\triangle}{ABE}: \text{نیمساز AD} \Rightarrow AD^۲ = AB \times AE - BD \times DE$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۸y - ۴x \xrightarrow{\text{از } (۱)} ۳۶ = ۱۶x - ۴x \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{\text{از } (۱)} y = ۶$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \text{نیمساز AE} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۴+x}{z} = \frac{۸}{AC} \xrightarrow{x=۳} \frac{۷}{z} = \frac{۸}{AC} \Rightarrow z = \frac{۷}{۸}AC$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \text{نیمساز AE} \Rightarrow AE^۲ = AB \times AC - BE \times EC \Rightarrow y^۲ = ۸AC - (۴+x)(z) \xrightarrow[y=۶]{\text{از } (۲)}$$

$$۳۶ = ۸AC - ۷ \times \frac{۷}{۸}AC \Rightarrow ۳۶ = \left(۸ - \frac{۴۹}{۸}\right)AC \Rightarrow AC = \frac{۳۶}{\frac{۱۵}{۸}} \Rightarrow AC = \frac{۸ \times ۳۶}{۱۵} = \frac{۹۶}{۵} = ۱۹/۲$$



۲۳

۲۴

اضلاع مثلثی با اعداد ۴، ۵ و ۶ متناسب است. نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC فرض کنیم $AB = ۴x$ و $AC = ۵x$ و $BC = ۶x$. در این صورت زاویهٔ B زاویهٔ متوسط است. فرض کنیم BD نیمساز زاویهٔ B باشد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (۱)$$

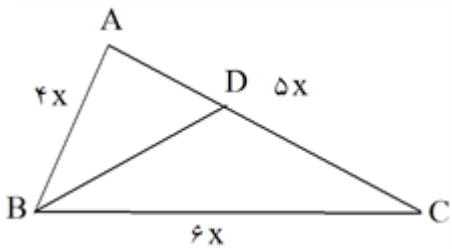
از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز } BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۴x+۶x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۱۰x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۲}{۵} \quad (۲)$$

بنابراین:

$$(۲),(۱) \text{ از} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{۵}{۲}$$



۲۵

نیمساز زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را در نقطه D قطع کرده و آن‌را به پاره‌خط های $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۷}{۴}$ واحدی تقسیم کرده است. اگر $\widehat{B} = ۶۰^\circ$ باشد، طول AD چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۸}\sqrt{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۸}\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۲}$

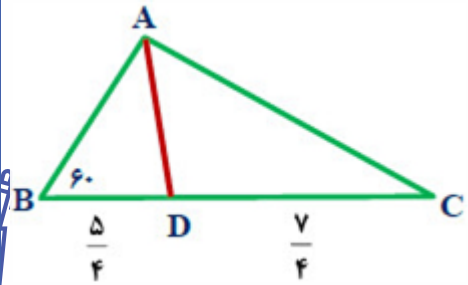
سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{قضیه نیمساز}: \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۵}{۴}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow AC = \frac{۷}{۵}AB$$

$$\text{قضیه کسینوس‌ها}: AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲\,AB \times BC \times \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{۴۹}{۲۵}AB^۲ = AB^۲ + ۳^۲ - ۲\,AB \times ۳ \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲۴}{۲۵}AB^۲ + ۳AB - ۹ = ۰ \begin{cases} AB = -۵ \text{ غ ق ق} \\ AB = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow AC = \frac{۲۱}{۸} \end{cases}$$



$$AD^۲ = AC \times AB - DC \times BD$$

$$AD^۲ = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۱۵}{۸} - \frac{۵}{۴} \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۵ \times ۷}{۶۴} \Rightarrow AD = \frac{۵}{۸}\sqrt{۷}$$

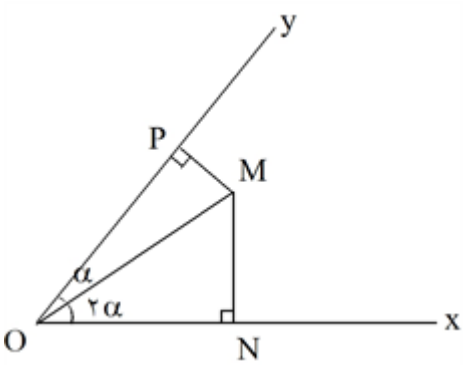
۲۶

زاویه‌ی $x\widehat{O}y$ و نقطه‌ی M داخل زاویه با شرط $۲M\widehat{O}y = x\widehat{O}M$ باشد، مفروض است. از نقطه‌ی M عمودهای MN و MP را به ترتیب برنیم‌خط های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$، کدام است؟

۱) $\frac{OP}{ON}$ ۲) ۳) ۴)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMN و OMP مساوی $\frac{OM}{۲} = R$ است. پس با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OMN} : \frac{MN}{\sin ۲\alpha} = ۲R \\ \overset{\triangle}{OMP} : \frac{MP}{\sin \alpha} = ۲R \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{\sin ۲\alpha} = \frac{MP}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\sin ۲\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{۲ \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲ \cos \alpha \ (۱)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OMP می‌نویسیم:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{۲\,OP}{OM}$

۲۷

نیمساز داخلی زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را به پاره‌خط های ۳/۵ و ۲/۵ واحدی تقسیم کرده است. اگر اندازه زاویه C برابر ۶۰ درجه باشد، ضلع کوچک‌تر مثلث چند واحد است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۴/۷۵ ۴) ۵/۲۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم.

$$\text{نیمساز } AD = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۳/۵}{۲/۵} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{۳۵}{۲۵} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۷}{۵} = \frac{AB}{AC}$$

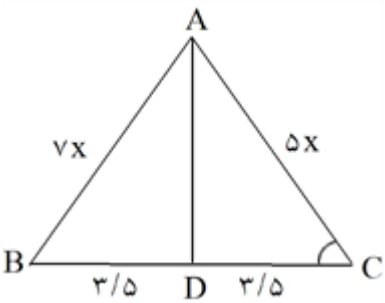
با توجه به تناسب بدست آمده فرض می‌کنیم $AB = ۷x$ و $AC = ۵x$ اکنون از قضیه‌ی کسینوسها داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲\,AC \times BC\,\text{Cos}\,۶۰^\circ \xrightarrow{BC=۶} ۴۹x^۲ = ۲۵x^۲ + ۳۶ - ۲(۵x)(۶)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow ۴۹x^۲ = ۲۵x^۲ + ۳۶ - ۳۰x \Rightarrow ۲۴x^۲ + ۳۰x - ۳۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۶} ۴x^۲ + ۵x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۹۶}}{۸} = \frac{-۵ \pm \sqrt{۱۲۱}}{۸} = \frac{-۵ \pm ۱۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{-۵ + ۱۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین ضلع کوچکتر این مثلث یعنی AC برابر $۵x = ۵ \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$ است. (توجه کنید اگر $BD = ۲/۵$ و $DC = ۳/۵$ آنگاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB > AC$)



۲۸

مثلثی با طول ضلع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ مفروض است. اندازه‌ی طول ضلع شش‌ضلعی محاط شده در این مثلث، کدام است؟

۱) ۸

۲) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۴

۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل شش‌ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث، محیط است. بنابراین کافی است شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

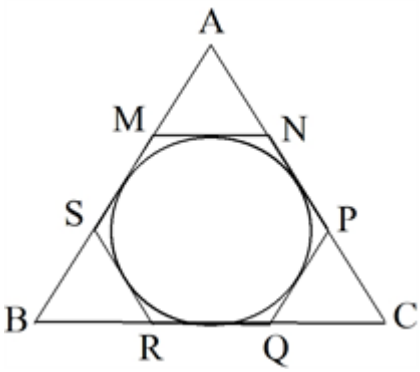
$$p = \frac{۱۳ + ۱۴ + ۱۵}{۲} = ۲۱$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۲۱ \times ۸ \times ۷ \times ۶} = ۸۴$$

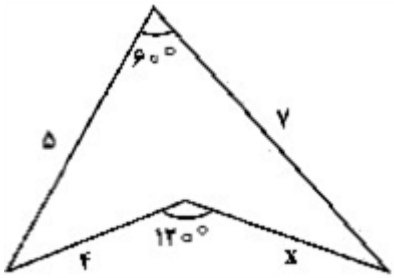
$$r = \frac{S}{p} = \frac{۸۴}{۲۱} = ۴$$

$$\mathrm{MN} = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۶} = ۲ \times ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

توجه کنید شش‌ضلعی منتظم در مثلث ABC محاط شده است پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باید باشد که خلاف فرض سؤال است و اگر منتظم در نظر گرفته نشود هر ضلع آن هر اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد.



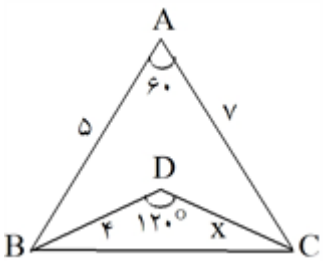
در شکل زیر، مقدار $(x+۲)$، کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۹ **پاسخ:** ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از B به C وصل کرده با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌نویسیم.



$$\overset{\triangle}{ABC}: BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲\,AB \times AC\,\text{Cos}\,۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۲۵ + ۴۹ - ۲(۵)(۷)\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۳۹$$

$$\overset{\triangle}{BDC}: BC^۲ = BD^۲ + DC^۲ - ۲\,BD \times DC\,\text{Cos}\,۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳۹ = ۱۶ + x^۲ - ۲(۴)(x)\left(-\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow ۳۹ = ۱۶ + x^۲ + ۴x$$

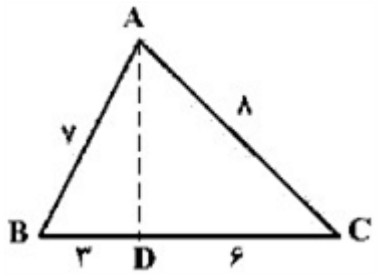
$$\Rightarrow x^۲ + ۴x - ۲۳ = ۰$$

این معادله را با فرمول 'b حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۲۳}}{۱} = -۲ \pm \sqrt{۲۷}$$

مسلماً $x = -۲ - \sqrt{۲۷}$ قابل قبول نیست پس $x = -۲ + \sqrt{۲۷}$ بنابراین $x + ۲ = \sqrt{۲۷}$.

در شکل زیر، اندازه‌ی پاره‌خط AD، کدام است؟



۱) $\sqrt{۳۷}$ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۷}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

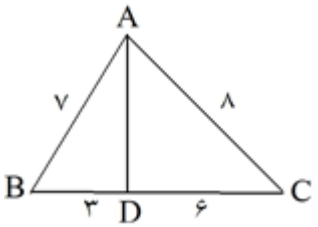
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰ **پاسخ:** ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت داریم.

$$AB^۲ \times DC + AC^۲ \times BD = AD^۲ \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$\Rightarrow ۴۹ \times ۶ + ۶۴ \times ۳ = AD^۲ \times ۹ + ۳ \times ۶ \times ۹ \xrightarrow{\div ۳} ۴۹ \times ۲ + ۶۴$$

$$= AD^۲ \times ۳ + ۶ \times ۹ \Rightarrow ۱۶۲ = ۳AD^۲ + ۵۴ \Rightarrow AD^۲ = ۳۶ \Rightarrow AD = ۶$$



در مثلث ABC داریم $AB = AC = ۱۷$ و $BC = ۱۶$، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم شود، در نقطه‌ی D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط BD، کدام است؟

۱) ۷/۲ ۲) ۸/۴ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰/۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع AH، میانهٔ نظیر ضلع BC نیز هست و داریم:

$$\overset{\triangle}{AHB} : AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = ۱۷^۲ - ۸^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow AH = ۱۵$$

اگر پای ارتفاع وارد از نقطهٔ C بر پاره‌خط BD را K بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}CK \times BD \\ S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}DH' \times BC \end{array}\right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times ۲۵ = ۱۵ \times ۱۶ \Rightarrow CK = \frac{۲۴۰}{۲۵} = ۹/۶$$

دقت کنید که DH' و AH فاصلهٔ دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.

روش دوم:

دو مثلث ABC و BCD در قاعدهٔ BC مشترک و ارتفاع برابر دارند، پس مساحت آن‌ها برابر است. طبق قضیهٔ هرون داریم:

۳۱

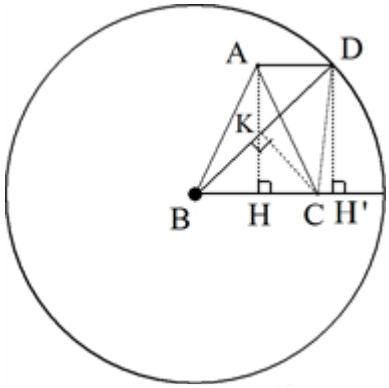
$$P = \frac{۱۷ + ۱۷ + ۱۶}{۲} = ۲۵$$

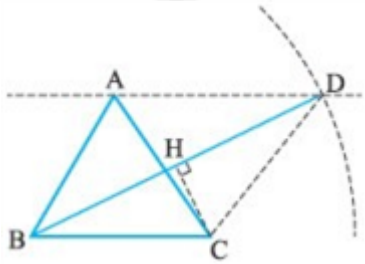
$$S_{ABC} = \sqrt{۲۵(۲۵ - ۱۷)(۲۵ - ۱۷)(۲۵ - ۱۶)}$$

$$= \sqrt{۲۵ \times ۸ \times ۸ \times ۹} = ۵ \times ۸ \times ۳ = ۱۲۰$$

پس $S_{BCD} = ۱۲۰$، اگر CH بر BD عمود باشد، داریم:

$$S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BD \times CH \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{۱}{۲} \times ۲۵ \times CH \Rightarrow CH = \frac{۲۴۰}{۲۵} = ۹/۶$$





۳۲

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، زاویه‌ی $A = ۹۰^\circ$ و اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیم‌ساز AD رسم شده است. اندازه‌ی DH، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳۵}$ ۲) $\frac{۹}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

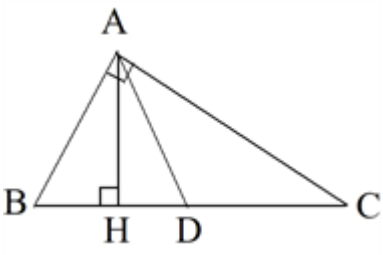
$$\overset{\triangle}{ABC} : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۹ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = \frac{۹}{۵}$$

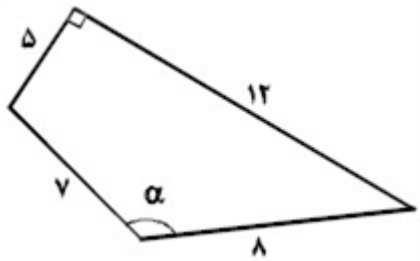
از طرفی طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{۳}{۴ + ۳} \Rightarrow \frac{BD}{۵} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow BD = \frac{۱۵}{۷}$$

$$DH = BD - BH = \frac{۱۵}{۷} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷۵ - ۶۳}{۳۵} = \frac{۱۲}{۳۵}$$



در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند، $\text{Sin}\,\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر AC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADC می‌نویسیم:

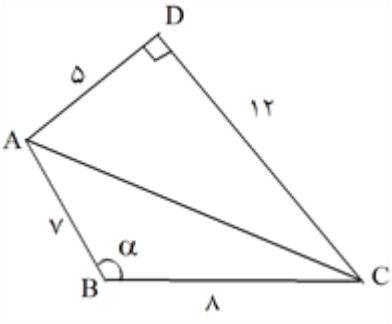
$$AC^{۲} = AD^{۲} + DC^{۲} = ۵^{۲} + ۱۲^{۲} = ۱۶۹ \Rightarrow AC = ۱۳$$

حال با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت.

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} - ۲\,AB \times BC\,\text{Cos}\,\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۳^{۲} = ۷^{۲} + ۸^{۲} - ۲(۷)(۸)\,\text{Cos}\,\alpha \Rightarrow \text{Cos}\,\alpha = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\alpha = ۱۲۰^{\circ}$ در نتیجه $\text{Sin}\,۱۲۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.



۳۴

در مثلث ABC داریم $AB = ۳AC$ و $BC = ۱۲$ ، نقاط D و D' پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A است. مقدار $AD^۲ + AD'^۲$ ، کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

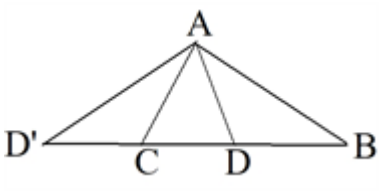
پاسخ: ۳ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه داخلی و خارجی یک رأس مثلث بر هم عمودند پس مثلث ADD' قائم‌الزاویه است.

$$\text{نیمساز داخلی } AD \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{DC}{۱۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow DC = ۳$$

$$\text{نیمساز خارجی } AD' \Rightarrow \frac{D'C}{D'B} = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل}} \frac{D'C}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow D'C = ۶$$

$$\Rightarrow DD' = DC + D'C = ۹$$

$$\overset{\triangle}{ADD'} : AD^۲ + AD'^۲ = DD'^۲ = ۹^۲ = ۸۱$$



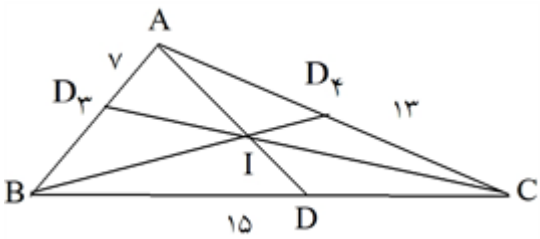
۳۵

در مثلثی به طول اضلاع ۱۵ و ۱۳ و ۷ واحد، نقطه‌ی تلاقی نیم‌سازهای درونی، نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



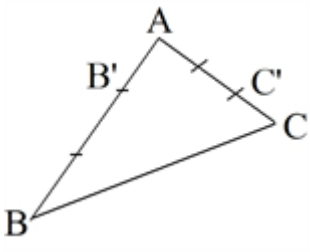
$$\frac{BD}{DC} = \frac{۷}{۱۳} \Rightarrow DC = \frac{۱۳}{۲۰} \times ۱۵ = \frac{۳۹}{۴}$$

$$\frac{DI}{IA} = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{۳۹}{۴}}{۱۳} = \frac{۳}{۴}$$

نکته: این نسبت در مثلثی به اضلاع a, b, c که c ضلع بزرگ‌تر باشد برابر است با: $\frac{c}{a+b}$. در این مسئله $\frac{۱۵}{۷+۱۳} = \frac{۳}{۴}$

۳۶

در شکل $BB' = ۲AB'$ و $AC' = ۲CC'$. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $AB'C'$ است؟

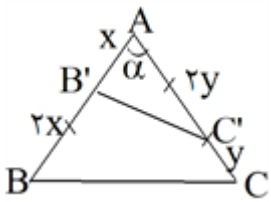


۱) ۹ ۲) ۶ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

پاسخ: ۴ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۳x)(۳y)\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{\frac{۱}{۲}x(۲y)\,\mathrm{Sin}\,\alpha} = \frac{۹}{۲}$$



۳۷

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه این مثلث، چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۳۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع وارد بر وتر را h و طول وتر را a در نظر می‌گیریم داریم:

$$S = \frac{۱}{۸}a^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}ah = \frac{۱}{۸}a^۲ \Rightarrow h = \frac{۱}{۴}a$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر باشد زوایای حاده‌ی آن‌ها ۱۵° یا ۷۵° می‌باشند.

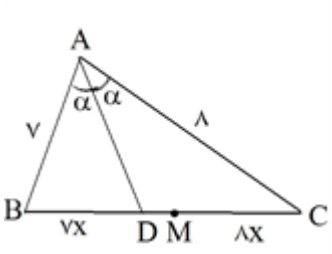
۳۸

در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. توجه کنید که زاویه‌ی بزرگ‌تر، مقابل به ضلع بزرگ‌تر است. حال با توجه به این‌که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $BD = ۷x$ و $DC = ۸x$ می‌باشد و در نتیجه:



$$۷x + ۸x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{۲۸}{۵} \\ DC = \frac{۳۲}{۵} \end{cases}$$

و از طرفی $BM = MC = ۶$ می باشد، پس:

$$MD = BM - BD = ۶ - \frac{۲۸}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۳۹

در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کند، اندازه‌ی MN چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

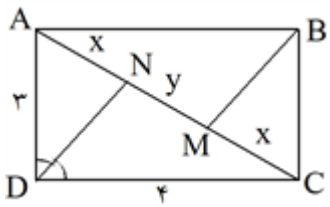
پاسخ: ۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. DN نیمساز زاویه‌ی D در مثلث ADC است و در نتیجه ضلع AC را به نسبت اضلاع زاویه‌ی D تقسیم می‌کند، یعنی داریم:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{DA}{DC} \rightarrow \frac{x}{y+x} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{x}{y+x+x} = \frac{۳}{۴+۳}$$

$$\xrightarrow{y+۲x=AC=۵} \frac{x}{۵} = \frac{۳}{۷} \rightarrow x = \frac{۱۵}{۷}$$

$$MN = y = AC - ۲x = ۵ - ۲\left(\frac{۱۵}{۷}\right) \rightarrow MN = \frac{۵}{۷}$$

(توجه کنید که $AC = \sqrt{AD^۲ + DC^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$)



۴۰

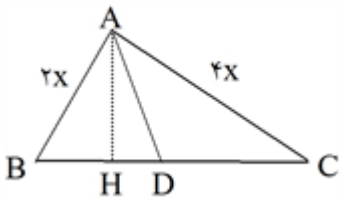
اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

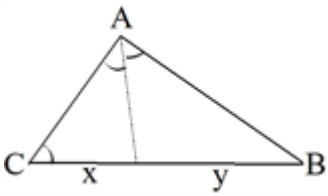
پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند، بنابراین: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲x}{۴x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow DC=۲BD$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}AH}\times BD}{\cancel{\frac{۱}{۲}AH}\times BC}=\frac{BD}{BD+DC}=\frac{BD}{BD+۲BD}=\frac{۱}{۳}$$



۴۱

در مثلث ABC داریم: $AB=۹$, $AC=۷$ و $\widehat{A}=۲\widehat{C}$، اندازه‌ی BC کدام است؟



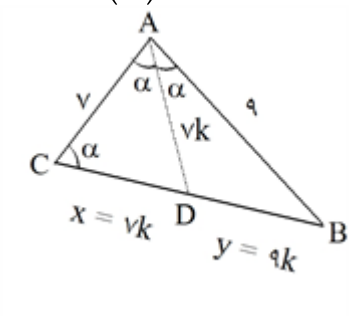
۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر نیمساز زاویه‌ی A را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع BC به ترتیب x و y باشند، آن‌گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند، خواهیم داشت $x=۷k$ و $y=۹k$. از طرفی چون مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس $AD=CD$ خواهد شد. همچنین می‌دانیم اگر AD نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$AD^۲=AC.AB-CD.DB\rightarrow(۷k)^۲=۷\times۹-(۷k)(۹k)\rightarrow ۴۹k^۲+۶۳k^۲=۶۳$$

$$\rightarrow ۱۱۲k^۲=۶۳\rightarrow k^۲=\frac{۹}{۱۶}\rightarrow k=\frac{۳}{۴}\rightarrow BC=x+y=۱۶k=۱۶\left(\frac{۳}{۴}\right)=۱۲$$



۴۲

مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = ۸$ و $c = ۵$ باشد، اندازه‌ی ضلع متوسط a کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۹}$ ۲) $\sqrt{۴۱}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

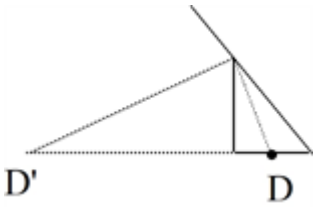
پاسخ: ۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{۱}{۲}\,\mathrm{bc}\,\mathrm{Sin}\,A \to ۱۶ = \frac{۱}{۲}\times ۸\times ۵\times \mathrm{Sin}\,A \to \mathrm{Sin}\,A = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \mathrm{Cos}\,A = \frac{۳}{۵}$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲\mathrm{bc}\,\mathrm{Cos}\,A \to a^۲ = ۶۴ + ۲۵ - ۲(۸)(۵)\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۴۱ \to a = \sqrt{۴۱}$$

۴۳

در مثلثی به اضلاع ۸، ۶ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل را در D و 'D قطع می‌کنند. اندازه‌ی 'DD چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۱۹۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲}{۷}$ ۳) $\frac{۱۲۰}{۷}$ ۴) $\frac{۱۲۴}{۷}$

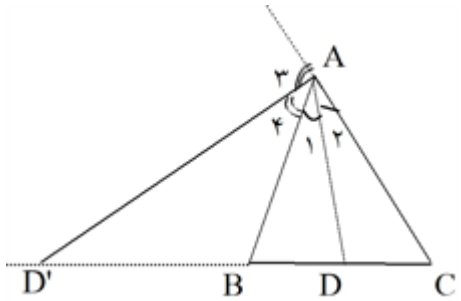
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $(\mathrm{AB} = ۶, \mathrm{AC} = ۸, \mathrm{BC} = ۵)$

$$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \Rightarrow \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \Rightarrow \frac{\mathrm{DB}}{۵ - \mathrm{DB}} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow \mathrm{DB} = \frac{۱۵}{۷}$$

$$\widehat{A}_۳ = \widehat{A}_۴ \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \Rightarrow \frac{D'B}{۵ - D'B} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow D'B = ۱۵$$

$$\mathrm{DD}' = D'B + \mathrm{BD} = ۱۵ + \frac{۱۵}{۷} = \frac{۱۲۰}{۷}$$



۱

الف) $a=۹\,,b=۶\,,c=۱۰$

$a^۲=۸۱\,,b^۲+c^۲=۱۳۶\Rightarrow a^۲<b^۲+c^۲\Rightarrow \widehat{A}<۹۰^\circ$

ب) $a=۹\,,b=۴\,,c=۸$

$a^۲=۸۱\,,b^۲+c^۲=۸۰\Rightarrow a^۲>b^۲+c^۲\Rightarrow \widehat{A}>۹۰^\circ$

پ) $a=۱۷\,,b=۱۵\,,c=۸$

$a^۲=۲۸۹\,,b^۲+c^۲=۲۸۹\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow \widehat{A}=۹۰^\circ$

۲

الف) $\widehat{A}>۹۰^\circ\Leftrightarrow \text{Cos}\,A<۰\underset{\div\,\text{bc}}{\overset{\times\,\text{bc}}{\rightleftarrows}}\text{bc}.\text{Cos}\,A<۰\Leftrightarrow -\text{bc}.\text{Cos}\,A>۰$

$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲+c^۲-\text{bc}.\text{Cos}\,A>b^۲+c^۲\Leftrightarrow a^۲>b^۲+c^۲$

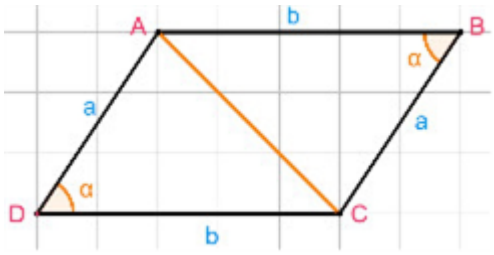
ب) $\widehat{A}<۹۰^\circ\Leftrightarrow \text{Cos}\,A>۰\underset{\div\,\text{bc}}{\overset{\times\,\text{bc}}{\rightleftarrows}}\text{bc}.\text{Cos}\,A>۰\Leftrightarrow -\text{bc}.\text{Cos}\,A<۰$

$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲+c^۲-\text{bc}.\text{Cos}\,a<b^۲+c^۲\Leftrightarrow a^۲<b^۲+c^۲$

پ) $\widehat{A}=۹۰^\circ\Leftrightarrow \text{Cos}\,A=۰\xrightarrow[\div\,\text{bc}]{\times\,\text{bc}}\text{bc}.\text{Cos}\,A=۰\Leftrightarrow -\text{bc}.\text{Cos}\,A=۰$

$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲+c^۲-\text{bc}.\text{Cos}\,A=b^۲+c^۲\Leftrightarrow a^۲=b^۲+c^۲$

۳ با توجه به خواص متوازی‌الاضلاع داریم:



$$S_{\text{ABCD}}=۲S_{\text{ABC}}=۲\times\frac{۱}{۲}\times a\times b\times \text{Sin}\,\alpha$$

$$\Rightarrow S_{\text{ABCD}}=a.\,b\,\text{Sin}\,\alpha$$

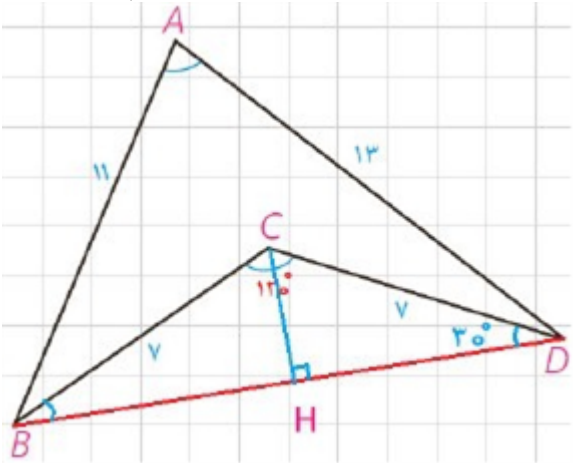
۴ مثلث BCD متساوی‌الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام ۳۰° خواهد بود. در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = ۳۰^\circ$ در نتیجه: $CH = \frac{۷}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{BCD} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times BD = \frac{۷}{۴}BD \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲}\times ۷\times ۷\times \operatorname{Sin} ۱۲۰^\circ = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۷}{۴}BD = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$P_{ABD} = \frac{۱۱ + ۱۳ + ۷\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۷\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۱\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۳\right)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ - \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} + ۱\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱\right)}$$



$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۴۴ - \frac{۱۷۴}{۴}\right)\left(\frac{۱۴۷}{۴} - ۱\right)} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳}\ (۱)$$

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲}\times ۱۱\times ۱۳\times \operatorname{Sin} A = \frac{۱۴۳}{۲}\operatorname{Sin} A\ \ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱۴۳}{۲}\operatorname{Sin} A = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} \Rightarrow \operatorname{Sin} A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = ۶۰$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} - \frac{۴۹}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۹۴}{۴}\sqrt{۳}$$

راه حل دوم: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{BCD} : BD^۲ = ۷^۲ + ۷^۲ - ۲(۷)(۷)\operatorname{Cos} ۱۲۰^\circ$$

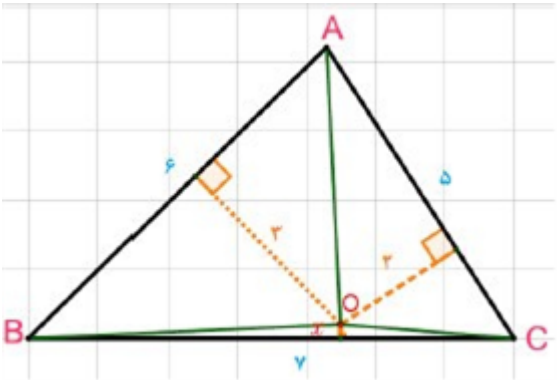
$$\xrightarrow{\operatorname{Cos} ۱۲۰^\circ = \frac{-۱}{۲}} BD^۲ = ۴۹ + ۴۹ + ۴۹ = ۳\times ۴۹ \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲\,AB\times AD\operatorname{Cos} A$$

$$\Rightarrow ۳\times ۴۹ = ۱۱^۲ + ۱۳^۲ - ۲(۱۱)(۱۳)\operatorname{Cos} A \Rightarrow \operatorname{Cos} A = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = ۶۰^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{۱}{۲}(۱۱)(۱۳)\operatorname{Sin} ۶۰ - \frac{۱}{۲}(۷)(۷)\operatorname{Sin} ۱۲۰ = \frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}$$

۵ فاصله‌ی O تا ضلع بزرگتر را x در نظر می‌گیریم. داریم:



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$
$$P_{ABC} = \frac{۵+۶+۷}{۲} = ۹$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{۹\times۲\times۳\times۴} = ۶\sqrt{۶}$$
$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲}\times۶\times۳ = ۹$$

$$S_{AOC} = \frac{۱}{۲}\times۵\times۲ = ۵$$

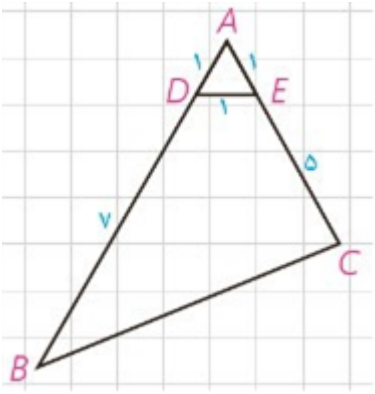
$$S_{BOC} = \frac{۱}{۲}\times۷\times x = \frac{۷}{۲}x$$

$$۶\sqrt{۶} = ۹ + ۵ + \frac{۷}{۲}x \Rightarrow ۶\sqrt{۶} - ۱۴ = \frac{۷}{۲}x \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}(۶\sqrt{۶} - ۱۴) \approx ۰/۲$$

۶

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$
$$\frac{۱}{۲}AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A = \frac{۱}{۲}AB \times AD \times \text{Sin}\,\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}AC \times AD \times \text{Sin}\,\frac{A}{۲}$$
$$\Rightarrow AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A = AD.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}(AB + AC) \Rightarrow AD = \frac{AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A}{(AB + AC)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}}$$
$$= \frac{۲\,AB.\,AC.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{(AB + AC)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (A\ \text{نیمساز راس})d_a = \frac{۲\,bc.\,\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{b + c}$$

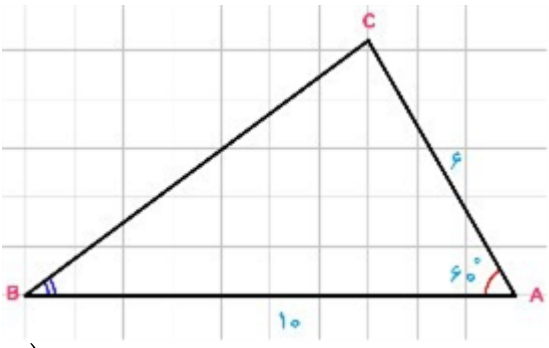
۷ با توجه به این‌که مثلث ADE متساوی‌الساقین است پس $\widehat{DAE} = ۶۰^\circ$ در نتیجه:



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲\,AC.\,AB.\,\text{Cos}\,A$$
$$BC^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۲\times۶\times۸\times\frac{۱}{۲} = ۵۲$$
$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$
$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.\,AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$
$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^۲ = S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$
$$S_{BCED} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۸



الف) $BC^{۲} = AC^{۲} + AB^{۲} - ۲\,AC.\,AB.\,\text{Cos}\,A$

$BC^{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲\times۶\times۱۰\times\frac{۱}{۲} = ۷۶ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$

ب) $\frac{۱}{۲}AC.\,AB.\,\text{Sin}\,A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\times۶\times۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$

پ) $\frac{\text{Sin}\,B}{b} = \frac{\text{Sin}\,A}{a} \Rightarrow \frac{\text{Sin}\,B}{۶} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \text{Sin}\,B = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \Rightarrow \text{Sin}\,B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

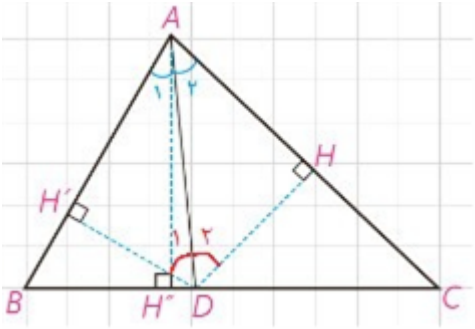
۹

الف) راه اول:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲} \widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADH و ADH ' به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند بنابراین $DH = DH'$

راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH = DH'$

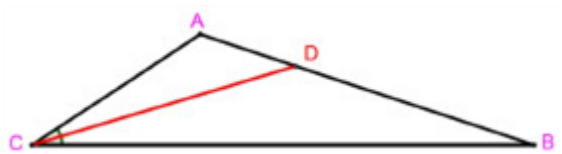


ب) $$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH'\times AB}{\frac{۱}{۲}DH\times AC} = \frac{AB}{AC}\ (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD\times AH''}{\frac{۱}{۲}CD\times AH''} = \frac{BD}{CD}\ (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

۱۰



$CD^{۲} = AC.\,BC - AD.\,BC$

$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰+۴}{۴} = \frac{BD+DA}{DA}$

$\Rightarrow \frac{۱۴}{۴} = \frac{۷}{DA} \Rightarrow DA = \frac{۲۸}{۱۴} = ۲ \Rightarrow BD = ۷ - ۲ = ۵$

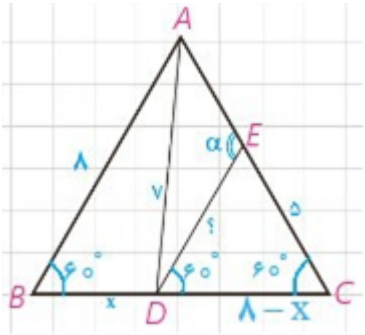
$CD^{۲} = ۴\times۱۰ - ۲\times۵ = ۳۰ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$

۱۱ در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB}\xrightarrow{MB=MC}\frac{AM}{MC}=\frac{AQ}{QB}\\ \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AQ}{QB}=\frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$

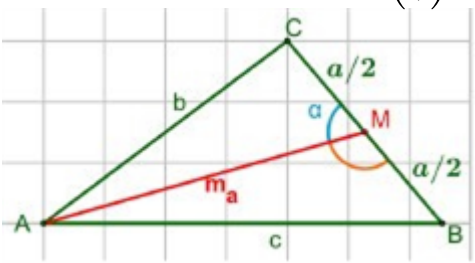
۱۲



$$AB=AC=BC=۸\,,\ AD=۷\,,\ DB=x$$
$$DC=x-۸\,,\ DB<DC$$
$$AB^۲.DC+AC^۲.DB=AD^۲.BC+DB.DC.BC$$
$$\Rightarrow ۶۴(۸-x)+۶۴x=۴۹\times۸+۸x(۸-x)$$
$$\Rightarrow ۶۴\times۸-\cancel{۶۴x}+\cancel{۶۴x}=۴۹\times۸+۸x(۸-x)$$
$$\xrightarrow{\div۸}۶۴=۴۹+۸x-x^۲\Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰\Rightarrow(x-۳)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۳,x=۵$$
$$\xrightarrow{DB<DC}x=DB=۳,DC=۵$$

۱۳

$$\overset{\triangle}{ACM}:b^۲=\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+AM^۲-۲\times\frac{a}{۲}\times AM\times\cos\alpha$$
$$b^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲-a.AM.\cos\alpha\ (۱)$$
$$\overset{\triangle}{ABM}:c^۲=\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+AM^۲-۲\times\frac{c}{۲}\times AM\times\cos(۱۸۰^\circ-\alpha)$$



$$c^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲+a.AM.\cos\alpha\ \ (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱)+(۲)}b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲-a.AM.\cos\alpha+\frac{a^۲}{۴}+AM^۲+a.AM.\cos\alpha$$
$$\Rightarrow b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۲}+۲AM^۲$$
$$AB=c=۴\,,AC=b=۶\,,BC=a=۸$$
$$b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۲}+۲AM\Rightarrow AM=\frac{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}{۴}\Rightarrow AM=\frac{۲(۳۶+۱۶)-۶۴}{۴}\Rightarrow AM=۱۰$$

۱۴

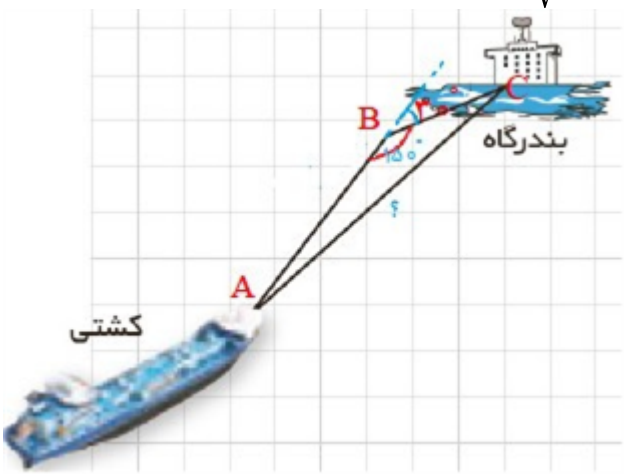
$$AB = ۶۰\times ۱ = ۶۰\ km\ ,\ BC = ۴۰\times ۰/۵ = ۲۰\ km$$

$$AC^{۲} = ۶۰^{۲} + ۲۰^{۲} - ۲\times ۶۰\times ۲۰\times \cos ۱۵۰^{\circ}$$

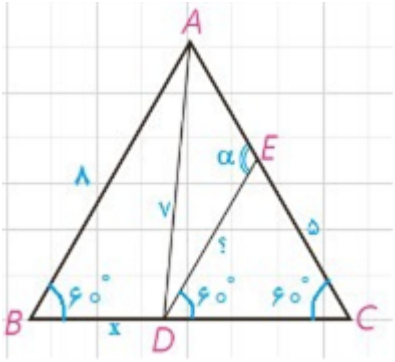
$$= ۳۶۰۰ + ۴۰۰ - ۲\times ۱۲۰۰\times \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow AC^{۲} = ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} = ۴۰۰(۱۰ + ۳\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AC = ۲۰\sqrt{۱۰ + ۳\sqrt{۳}}$$



۱۵



$$۷^{۲} = x^{۲} + ۸^{۲} - ۲\times x\times ۸\times \cos ۶۰^{\circ} \Rightarrow ۴۹ = x^{۲} + ۶۴ - ۸x$$

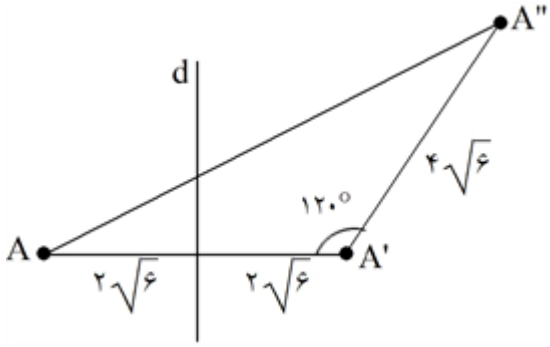
$$\Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۵\ ,\ x = ۳$$

$$\xrightarrow{BD<DC} BD = ۳\ ,\ DC = ۵$$

$DC = CE = ۵$ در نتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه ۶۰° دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی $DE = ۵$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:

$$\alpha = ۶۰^{\circ} + ۶۰^{\circ} \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^{\circ}$$

۱۶ بنا بر فرض سؤال، شکل زیر را داریم و برای آن قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$AA''^{۲} = (۴\sqrt{۶})^{۲} + (۴\sqrt{۶})^{۲} - ۲\times ۴\sqrt{۶}\times ۴\sqrt{۶}\times \cos ۱۲۰ \Rightarrow AA'' = \sqrt{۲۸۸}$$

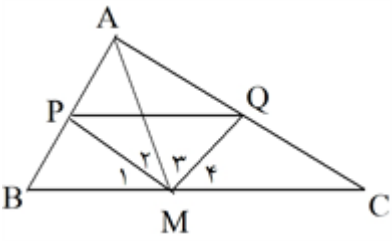
۱۷ الف) $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BD}{\frac{۱}{۲}AH\times DC}=\frac{BD}{DC}$

ب) DM, DN مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است.

پ) $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}DM\times AB}{\frac{۱}{۲}DN\times AC}=\frac{AB}{AC}$

از مقایسه رابطه الف و پ $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

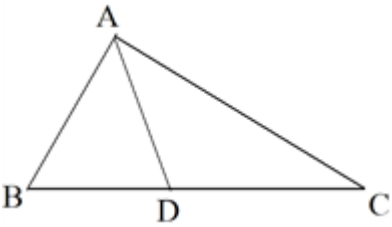
۱۸
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AMB}: \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP}=\frac{AM}{MB}\\ \overset{\triangle}{AMC}: \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{MC}\end{array}\right\}\xrightarrow{MB=MC}\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}}PQ \parallel BC$$



۱۹ فرض کنید $AB=۸$ و $AC=۱۲$ و $BC=۱۵$ و نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند.

نیمساز $AD \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{۸}{۱۲}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{BD}{BD+DC}=\frac{۸}{۸+۱۲}\Rightarrow \frac{BD}{۱۵}=\frac{۸}{۲۰}\Rightarrow BD=۶$

$DC=BC-BD \quad DC=۱۵-۶=۹$



۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی، EF موازی BC است. پس:

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{۱۰} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۱۵\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow EF = ۸$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز } DF : \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{AD}{۵} \Rightarrow AD = ۲۰$$

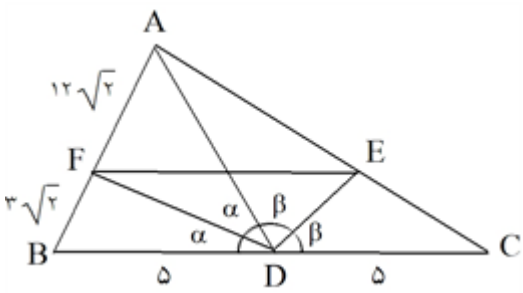
$$\text{نیمساز } DF \Rightarrow DF^۲ = AD \times BD - AF \times BF \Rightarrow DF^۲ = ۲۰ \times ۵ - ۱۲\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۱۰۰ - ۷۲$$

$$\Rightarrow DF^۲ = ۲۸ \Rightarrow DF = \sqrt{۲۸}$$

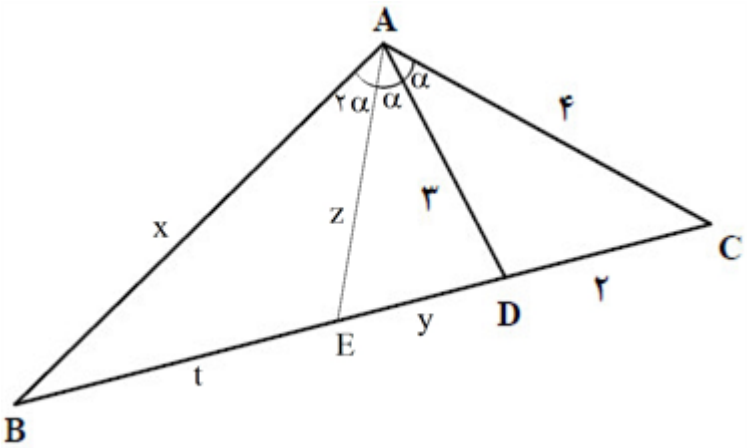
در ضمن DE و DF نیمساز زاویه‌های $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{ADB}$ هستند پس: $۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$

در نتیجه: $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$ پس مثلث DEF قائم‌الزاویه است.

$$\overset{\triangle}{DEF} : DE^۲ = EF^۲ - DF^۲ = ۸^۲ - \sqrt{۲۸}^۲ = ۶۴ - ۲۸ = ۳۶ \Rightarrow DE = ۶$$



۲۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\overset{\triangle}{AEC} : \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{۴}{z} = \frac{۲}{y} \Rightarrow z = ۲y$$

$$AD^۲ = AC.AE - CDED$$

$$۳^۲ = ۴ \times z - ۲y \Rightarrow ۹ = ۶y \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}$$

$$z = ۳ \text{ و } EC = ۳/۵$$

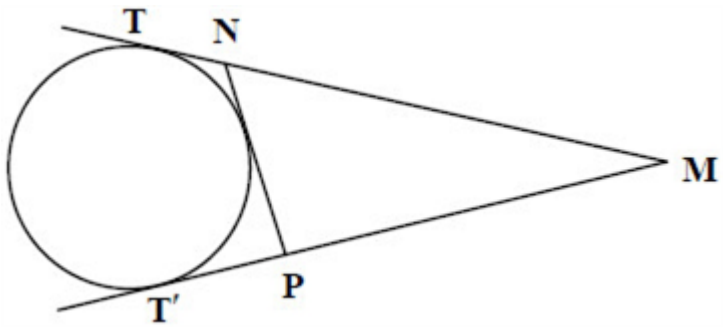
$$\overset{\triangle}{ABC} : \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{۴} = \frac{t}{۳/۵} \Rightarrow t = \frac{۷}{۸}x$$

$$AE^۲ = AB \times AC - BE.EC$$

$$۳^۲ = ۴x - ۳/۵ \xrightarrow{t = \frac{۷}{۸}x} ۹ = \frac{۱۵}{۱۶}x \Rightarrow x = ۹/۶$$

$$\text{محیط} = ۹/۶ + ۴ + ۳ + ۳/۵ + ۸/۴ = ۲۵/۵$$

۲۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $MT = MT' = P$ پس $P = ۱۸$ در نتیجه محیط مثلث MNP برابر ۳۶ است پس:



$$MN + MP + NP = ۳۶$$
$$۱۵ + ۱۲ + NP = ۳۶ \Rightarrow NP = ۹$$

از طرف دیگر اگر r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع NP باشد داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} \xrightarrow{a=NP=۹} r_a = \frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P-a} = \frac{\sqrt{۱۸(۱۸-۱۵)(۱۸-۱۲)(۱۸-۹)}}{۱۸-۹}$$

$$= \frac{\sqrt{۱۸\times۳\times۶\times۹}}{۹} = \frac{۱۸\times۳}{۹} = ۶$$

۲۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویهٔ $\widehat{A}$ در مثلث ABC یعنی AE را رسم می‌کنیم. در این صورت AD نیمساز مثلث ABE است. با استفاده از قضیهٔ نیمساز می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{ABE}: \text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{۴}{x} = \frac{۸}{y}$$
$$\Rightarrow y = ۲x \ (۱)$$

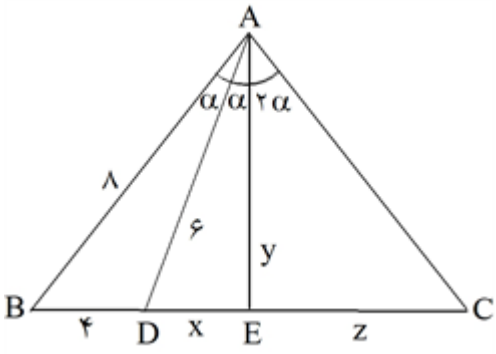
$$\overset{\triangle}{ABE}: \text{نیمساز } AD \Rightarrow AD^۲ = AB \times AE - BD \times DE$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۸y - ۴x \xrightarrow{\text{از } (۱)} ۳۶ = ۱۶x - ۴x \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{\text{از } (۱)} y = ۶$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \text{نیمساز } AE \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۴+x}{z} = \frac{۸}{AC} \xrightarrow{x=۳} \frac{۷}{z} = \frac{۸}{AC} \Rightarrow z = \frac{۷}{۸}AC$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \text{نیمساز } AE \Rightarrow AE^۲ = AB \times AC - BE \times EC \Rightarrow y^۲ = ۸AC - (۴+x)(z) \xrightarrow[y=۶]{\text{از } (۲)}$$

$$۳۶ = ۸AC - ۷\times\frac{۷}{۸}AC \Rightarrow ۳۶ = \left(۸ - \frac{۴۹}{۸}\right)AC \Rightarrow AC = \frac{۳۶}{\frac{۱۵}{۸}} \Rightarrow AC = \frac{۸\times۳۶}{۱۵} = \frac{۹۶}{۵} = ۱۹/۲$$



۲۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC فرض کنیم $AB = ۴x$ و $AC = ۵x$ و $BC = ۶x$. در این صورت زاویهٔ B زاویهٔ متوسط است. فرض کنیم BD نیمساز زاویهٔ B باشد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (۱)$$

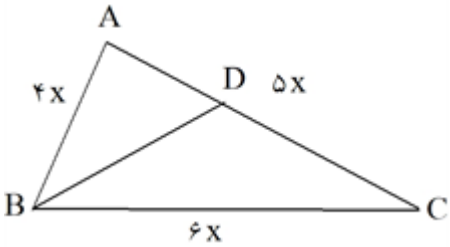
از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز } BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۴x+۶x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۱۰x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۲}{۵} \quad (۲)$$

بنابراین:

$$(۲),(۱) \text{ از} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{۵}{۲}$$

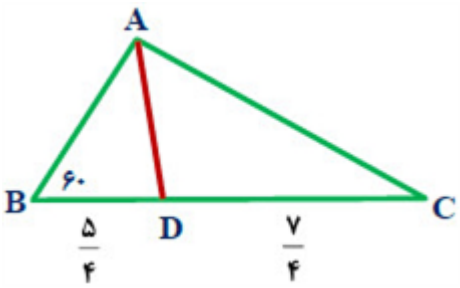


۲۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{قضیه نیمساز}: \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۵}{۴}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow AC = \frac{۷}{۵}AB$$

$$\text{قضیه کسینوس‌ها}: AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲\,AB \times BC \times \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{۴۹}{۲۵}AB^۲ = AB^۲ + ۳^۲ - ۲\,AB \times ۳ \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲۴}{۲۵}AB^۲ + ۳AB - ۹ = ۰ \begin{cases} AB = -۵ \text{ غ ق ق} \\ AB = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow AC = \frac{۲۱}{۸} \end{cases}$$

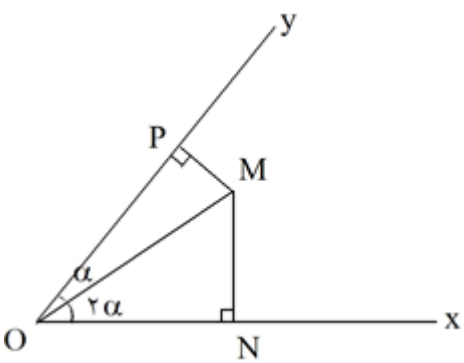


$$AD^۲ = AC \times AB - DC \times BD$$

$$AD^۲ = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۱۵}{۸} - \frac{۵}{۴} \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۵ \times ۷}{۶۴} \Rightarrow AD = \frac{۵}{۸}\sqrt{۷}$$

۲۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMN و OMP مساوی $\frac{OM}{۲} = R$ است.

پس با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OMN}: \frac{MN}{\sin ۲\alpha} = ۲R \\ \overset{\triangle}{OMP}: \frac{MP}{\sin \alpha} = ۲R \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{\sin ۲\alpha} = \frac{MP}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\sin ۲\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{۲ \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲ \cos \alpha \quad (۱)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OMP می‌نویسیم:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{۲\,OP}{OM}$

۲۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم.

نیمساز $AD = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۳/۵}{۲/۵} = \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{۳۵}{۲۵} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۷}{۵} = \frac{AB}{AC}$$

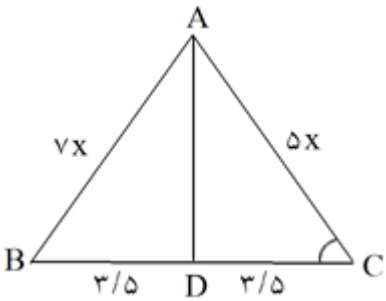
با توجه به تناسب بدست آمده فرض می‌کنیم $AB = ۷x$ و $AC = ۵x$ اکنون از قضیه‌ی کسینوسها داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲\,AC \times BC \cos ۶۰^\circ \xrightarrow{BC=۶} ۴۹x^۲ = ۲۵x^۲ + ۳۶ - ۲(۵x)(۶)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow ۴۹x^۲ = ۲۵x^۲ + ۳۶ - ۳۰x \Rightarrow ۲۴x^۲ + ۳۰x - ۳۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۶} ۴x^۲ + ۵x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۹۶}}{۸} = \frac{-۵ \pm \sqrt{۱۲۱}}{۸} = \frac{-۵ \pm ۱۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{-۵ + ۱۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین ضلع کوچکتر این مثلث یعنی AC برابر $۵x = ۵ \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$ است. (توجه کنید اگر $BD = ۲/۵$ و $DC = ۳/۵$ آنگاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB > AC$)



۲۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل شش‌ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث، محیط است. بنابراین کافی است شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

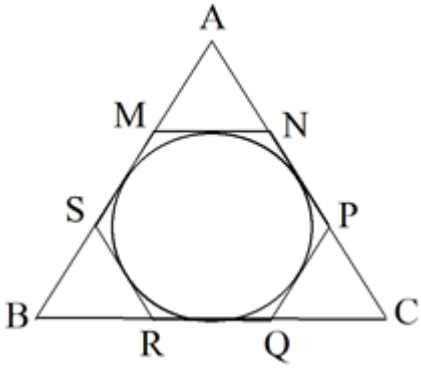
$$p = \frac{۱۳ + ۱۴ + ۱۵}{۲} = ۲۱$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۲۱ \times ۸ \times ۷ \times ۶} = ۸۴$$

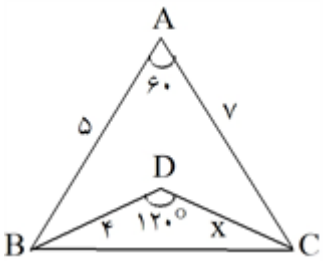
$$r = \frac{S}{p} = \frac{۸۴}{۲۱} = ۴$$

$$\mathrm{MN} = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۶} = ۲ \times ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

توجه کنید شش‌ضلعی منتظم در مثلث ABC محاط شده است پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باید باشد که خلاف فرض سؤال است و اگر منتظم در نظر گرفته نشود هر ضلع آن هر اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد.



۲۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از B به C وصل کرده با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌نویسیم.



$$\overset{\triangle}{ABC} : \mathrm{BC}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{AC}^۲ - ۲\,\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}\,\mathrm{Cos}\,۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \mathrm{BC}^۲ = ۲۵ + ۴۹ - ۲(۵)(۷)\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۳۹$$

$$\overset{\triangle}{BDC} : \mathrm{BC}^۲ = \mathrm{BD}^۲ + \mathrm{DC}^۲ - ۲\,\mathrm{BD} \times \mathrm{DC}\,\mathrm{Cos}\,۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳۹ = ۱۶ + x^۲ - ۲(۴)(x)\left(-\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow ۳۹ = ۱۶ + x^۲ + ۴x$$

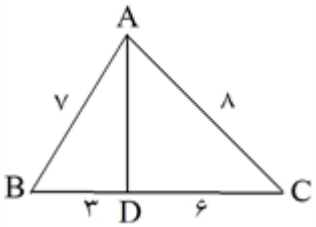
$$\Rightarrow x^۲ + ۴x - ۲۳ = ۰$$

این معادله را با فرمول 'b حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - \mathrm{ac}}}{a} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۲۳}}{۱} = -۲ \pm \sqrt{۲۷}$$

مسلماً $x = -۲ - \sqrt{۲۷}$ قابل قبول نیست پس $x = -۲ + \sqrt{۲۷}$ بنابراین $x + ۲ = \sqrt{۲۷}$.

۳۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت داریم.



$$\mathrm{AB}^۲ \times \mathrm{DC} + \mathrm{AC}^۲ \times \mathrm{BD} = \mathrm{AD}^۲ \times \mathrm{BC} + \mathrm{BD} \times \mathrm{DC} \times \mathrm{BC}$$

$$\Rightarrow ۴۹ \times ۶ + ۶۴ \times ۳ = \mathrm{AD}^۲ \times ۹ + ۳ \times ۶ \times ۹ \xrightarrow{\div ۳} ۴۹ \times ۲ + ۶۴$$

$$= \mathrm{AD}^۲ \times ۳ + ۶ \times ۹ \Rightarrow ۱۶۲ = ۳\mathrm{AD}^۲ + ۵۴ \Rightarrow \mathrm{AD}^۲ = ۳۶ \Rightarrow \mathrm{AD} = ۶$$

۳۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع AH، میانهٔ نظیر ضلع BC نیز هست و داریم:

$$\overset{\triangle}{AHB}: AH^{۲} = AB^{۲} - BH^{۲} = ۱۷^{۲} - ۸^{۲} = ۲۲۵ \Rightarrow AH = ۱۵$$

اگر پای ارتفاع وارد از نقطهٔ C بر پاره‌خط BD را K بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}CK \times BD \\ S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}DH' \times BC \end{array}\right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times ۲۵ = ۱۵ \times ۱۶ \Rightarrow CK = \frac{۲۴۰}{۲۵} = ۹/۶$$

دقت کنید که DH' و AH فاصلهٔ دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.

روش دوم:

دو مثلث ABC و BCD در قاعدهٔ BC مشترک و ارتفاع برابر دارند، پس مساحت آن‌ها برابر است. طبق قضیهٔ هرون داریم:

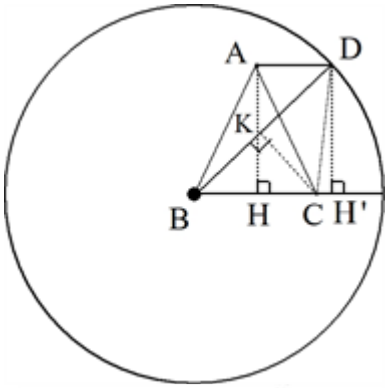
$$P = \frac{۱۷ + ۱۷ + ۱۶}{۲} = ۲۵$$

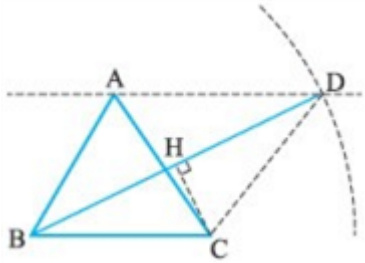
$$S_{ABC} = \sqrt{۲۵(۲۵ - ۱۷)(۲۵ - ۱۷)(۲۵ - ۱۶)}$$

$$= \sqrt{۲۵ \times ۸ \times ۸ \times ۹} = ۵ \times ۸ \times ۳ = ۱۲۰$$

پس $S_{BCD} = ۱۲۰$، اگر CH بر BD عمود باشد، داریم:

$$S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BD \times CH \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{۱}{۲} \times ۲۵ \times CH \Rightarrow CH = \frac{۲۴۰}{۲۵} = ۹/۶$$





۳۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

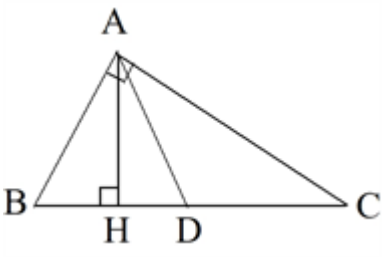
$$\overset{\triangle}{ABC} : BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۹ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = \frac{۹}{۵}$$

از طرفی طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{۳}{۴ + ۳} \Rightarrow \frac{BD}{۵} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow BD = \frac{۱۵}{۷}$$

$$DH = BD - BH = \frac{۱۵}{۷} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷۵ - ۶۳}{۳۵} = \frac{۱۲}{۳۵}$$



۳۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر AC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADC می‌نویسیم:

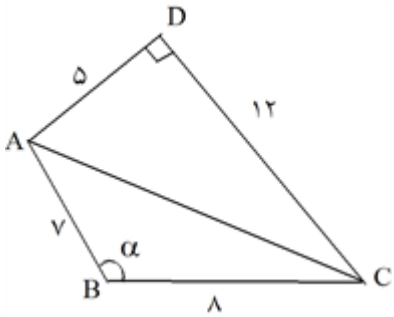
$$AC^{۲} = AD^{۲} + DC^{۲} = ۵^{۲} + ۱۲^{۲} = ۱۶۹ \Rightarrow AC = ۱۳$$

حال با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت.

$$AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} - ۲\, AB \times BC \cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۳^{۲} = ۷^{۲} + ۸^{۲} - ۲(۷)(۸) \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\alpha = ۱۲۰^{\circ}$ در نتیجه $\sin ۱۲۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.



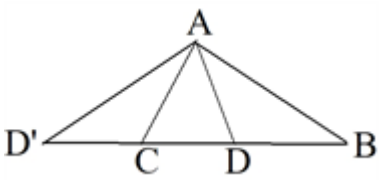
۳۴ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه داخلی و خارجی یک رأس مثلث بر هم عمودند پس مثلث ADD' قائم‌الزاویه است.

$$\text{نیمساز داخلی } AD \Rightarrow \frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{DC}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow DC=۳$$

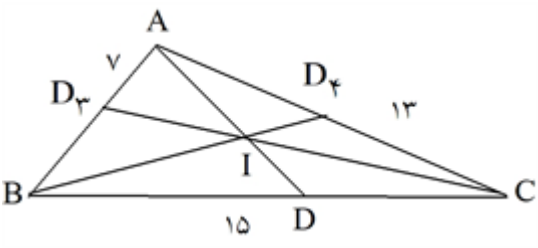
$$\text{نیمساز خارجی } AD' \Rightarrow \frac{D'C}{D'B}=\frac{AC}{AB}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل}}\frac{D'C}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow D'C=۶$$

$$\Rightarrow DD'=DC+D'C=۹$$

$$\overset{\triangle}{ADD'}: AD^۲+AD'^۲=DD'^۲=۹^۲=۸۱$$



۳۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



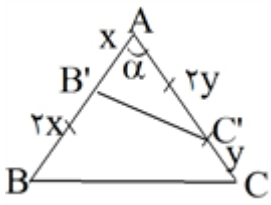
$$\frac{BD}{DC}=\frac{۷}{۱۳}\Rightarrow DC=\frac{۱۳}{۲۰}\times ۱۵=\frac{۳۹}{۴}$$

$$\frac{DI}{IA}=\frac{DC}{AC}=\frac{\frac{۳۹}{۴}}{۱۳}=\frac{۳}{۴}$$

نکته: این نسبت در مثلثی به اضلاع a,b,c که c ضلع بزرگ‌تر باشد برابر است با: $\frac{c}{a+b}$. در این مسئله $\frac{۱۵}{۷+۱۳}=\frac{۳}{۴}$

۳۶ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}}=\frac{\frac{۱}{۲}(۳x)(۳y)\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}x(۲y)\sin\alpha}=\frac{۹}{۲}$$

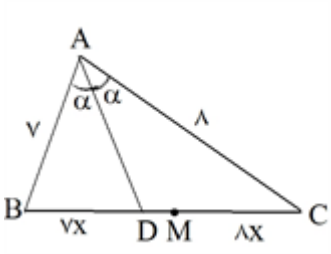


۳۷ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع وارد بر وتر را h و طول وتر را a در نظر می‌گیریم داریم:

$$S=\frac{۱}{۸}a^۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}ah=\frac{۱}{۸}a^۲\Rightarrow h=\frac{۱}{۴}a$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر باشد زوایای حاده‌ی آن‌ها ۱۵° یا ۷۵° می‌باشند.

۳۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. توجه کنید که زاویه‌ی بزرگ‌تر، مقابل به ضلع بزرگ‌تر است. حال با توجه به این‌که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $BD = ۷x$ و $DC = ۸x$ می‌باشد و در نتیجه:



$$۷x + ۸x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{۲۸}{۵} \\ DC = \frac{۳۲}{۵} \end{cases}$$

و از طرفی $BM = MC = ۶$ می باشد، پس:

$$MD = BM - BD = ۶ - \frac{۲۸}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

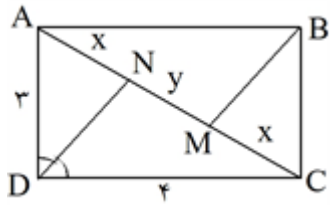
۳۹ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. DN نیمساز زاویه‌ی D در مثلث ADC است و در نتیجه ضلع AC را به نسبت اضلاع زاویه‌ی D تقسیم می‌کند، یعنی داریم:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{DA}{DC} \rightarrow \frac{x}{y+x} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{x}{y+x+x} = \frac{۳}{۴+۳}$$

$$\xrightarrow{y+۲x=AC=۵} \frac{x}{۵} = \frac{۳}{۷} \rightarrow x = \frac{۱۵}{۷}$$

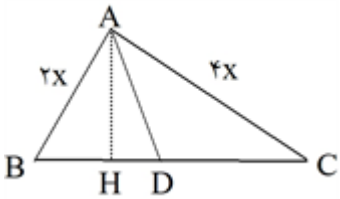
$$MN = y = AC - ۲x = ۵ - ۲\left(\frac{۱۵}{۷}\right) \rightarrow MN = \frac{۵}{۷}$$

(توجه کنید که $AC = \sqrt{AD^۲ + DC^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$)



۴۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند، بنابراین: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۲x}{۴x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow DC = ۲BD$

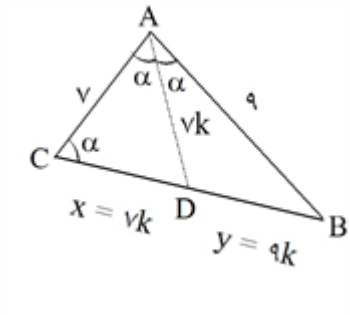
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times BD}{\cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times BC} = \frac{BD}{BD + DC} = \frac{BD}{BD + ۲BD} = \frac{۱}{۳}$$



۴۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر نیمساز زاویه‌ی A را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع BC به ترتیب x و y باشند، آن‌گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند، خواهیم داشت $x = ۷k$ و $y = ۹k$. از طرفی چون مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس $AD = CD$ خواهد شد. هم‌چنین می‌دانیم اگر AD نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$AD^۲ = AC.AB - CD.DB \rightarrow (۷k)^۲ = ۷\times۹ - (۷k)(۹k) \rightarrow ۴۹k^۲ + ۶۳k^۲ = ۶۳$$

$$\rightarrow ۱۱۲k^۲ = ۶۳ \rightarrow k^۲ = \frac{۹}{۱۶} \rightarrow k = \frac{۳}{۴} \rightarrow BC = x + y = ۱۶k = ۱۶\left(\frac{۳}{۴}\right) = ۱۲$$



۴۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{۱}{۲}bc\,\text{Sin}\,A \rightarrow ۱۶ = \frac{۱}{۲}\times۸\times۵\times\text{Sin}\,A \rightarrow \text{Sin}\,A = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \text{Cos}\,A = \frac{۳}{۵}$$

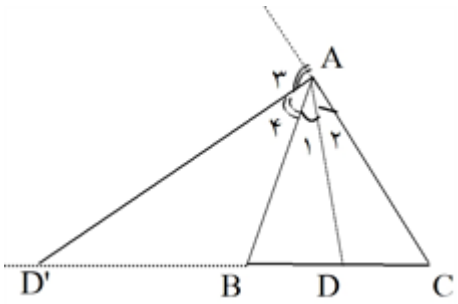
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\,\text{Cos}\,A \rightarrow a^۲ = ۶۴ + ۲۵ - ۲(۸)(۵)\left(\frac{۳}{۵}\right) = ۴۱ \rightarrow a = \sqrt{۴۱}$$

۴۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $(AB = ۶, AC = ۸, BC = ۵)$

$$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{۵ - DB} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow DB = \frac{۱۵}{۷}$$

$$\widehat{A}_۳ = \widehat{A}_۴ \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{D'B}{۵ - D'B} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow D'B = ۱۵$$

$$DD' = D'B + BD = ۱۵ + \frac{۱۵}{۷} = \frac{۱۲۰}{۷}$$



پاسخنامه کلیدی

۲۰	۱	**۲**	۳	۴
۲۱	۱	**۲**	۳	۴
۲۲	۱	**۲**	۳	۴
۲۳	**۱**	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	**۳**	۴
۲۵	۱	**۲**	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	**۴**
۲۷	**۱**	۲	۳	۴
۲۸	۱	**۲**	۳	۴
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	۱	**۲**	۳	۴
۳۱	۱	۲	**۳**	۴
۳۲	۱	۲	**۳**	۴
۳۳	۱	۲	**۳**	۴
۳۴	۱	۲	**۳**	۴
۳۵	۱	۲	**۳**	۴
۳۶	۱	۲	۳	**۴**
۳۷	**۱**	۲	۳	۴
۳۸	۱	**۲**	۳	۴
۳۹	۱	**۲**	۳	۴
۴۰	۱	۲	**۳**	۴
۴۱	**۱**	۲	۳	۴
۴۲	۱	**۲**	۳	۴
۴۳	۱	۲	**۳**	۴