



زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

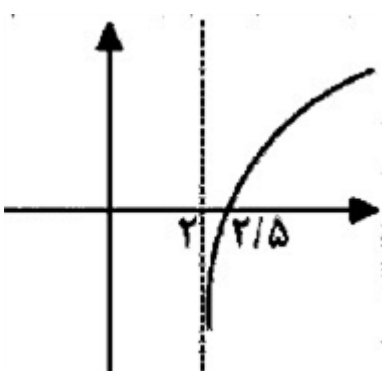
تاریخ برگزاری :

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

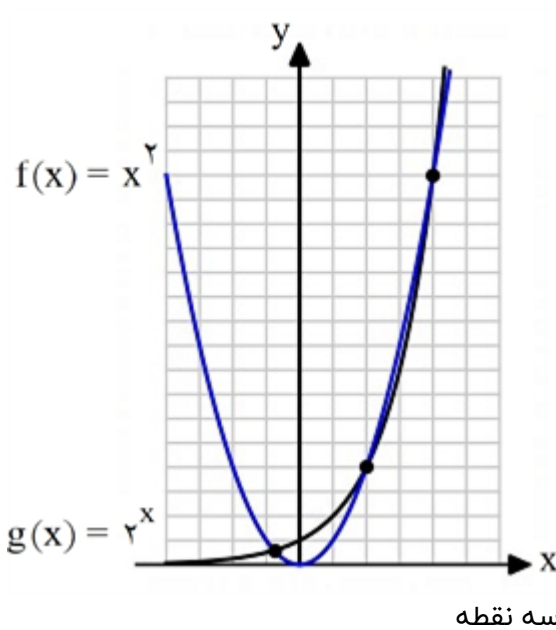
عنوان آزمون : حسابان ۱۱ فصل ۳

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	معادله لگاریتمی $\text{Log}_2(x+7) - \text{Log}_2(x-2) = 2$ را حل کنید. پاسخ: ۱ $\text{Log}_2(x+7) - \text{Log}_2(x-2) = 2 \Rightarrow \text{Log}_2\left(\frac{x+7}{x-2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x+7}{x-2} = 2^2 \Rightarrow x+7 = 4x-8 \Rightarrow x = 5$	
۲	اگر $\text{Log}_2 = a$ و $\text{Log}_3 = b$ باشد، حاصل $\text{Log}_{\sqrt{0.75}}$ را برحسب $a$ و $b$ به دست آورید. پاسخ: ۱ $\text{Log}_{\sqrt{0.75}} = \text{Log}_{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \text{Log}_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} (\text{Log}_3 - \text{Log}_4) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} (\text{Log}_3 - 2 \text{Log}_2) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} (b - 2a) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} b - a$	
۳	نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده، ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند را محاسبه کنید. پاسخ: ۱ $m(t) = m_0 \times 2^{\frac{-t}{n}} \Rightarrow m(t) = 128 \times 2^{\frac{-t}{30}} \Rightarrow m(300) = 128 \times 2^{\frac{-300}{30}} = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$	
۴	در دستگاه مختصات مقابل نمودار تابع با ضابطه $y = a + \text{Log}_2(x+b)$ رسم شده است. مقادیر $a$ و $b$ را به دست آورید.  پاسخ: ۱ $b = -2$ $(2/5, 0) \in f \Rightarrow 0 = a + \text{Log}_2(2/5 - 2) \Rightarrow a + \text{Log}_2(2^{-1}) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$	



	<p>اگر <math>\text{Log } 2 = m</math> و <math>\text{Log } 3 = n</math> باشند، آنگاه مقدار <math>\text{Log } \frac{\sqrt{27}}{16}</math> را برحسب <math>m</math> و <math>n</math> به دست آورید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{Log} \left( \frac{\sqrt{27}}{16} \right) = \text{Log} (\sqrt{27}) - \text{Log} (16) = \text{Log} \left( 3^{\frac{3}{2}} \right) - \text{Log} (2^4) = \frac{3}{2}n - 4m$	۵
	<p>معادلات زیر را حل کنید.</p> <p>الف) <math>\left( \frac{1}{16} \right)^{2x-1} = 3 \cdot 2^{1-x}</math></p> <p>ب) <math>\text{Log} \left( \frac{x^2 - 1}{3} \right) = 1 + \text{Log} \left( \frac{x+3}{3} \right)</math></p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math>2^{-8x+4} = 2^{5-5x} \Rightarrow -8x+4 = 5-5x \Rightarrow x = \frac{-1}{3}</math></p> <p>ب) روش اول:</p> $\text{Log} \left( \frac{x^2 - 1}{3} \right) - \text{Log} \left( \frac{x+3}{3} \right) = 1 \Rightarrow \text{Log} \left( \frac{x^2 - 1}{x+3} \right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x+3} = 3$ $\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$ <p>راه حل دوم:</p> $\text{Log} \left( \frac{x^2 - 1}{3} \right) = \text{Log} \left( \frac{3}{3} \right) + \text{Log} \left( \frac{x+3}{3} \right) \Rightarrow \text{Log} \left( \frac{x^2 - 1}{3} \right) = \text{Log} (3x+9)$ $\Rightarrow x^2 - 1 = 3x+9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$	۶
	<p>نمودار تابع <math>y = -\text{Log}_3 (x-2)</math> را رسم کنید. (مراحل انتقال را رسم کنید).</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p><math>y = \log_3 x</math>      <math>y = \log_3(x-2)</math>      <math>y = -\log_3(x-2)</math></p>	۷
	<p>اگر <math>\text{Log } 2 \simeq 0/3</math> و <math>\text{Log } 3 \simeq 0/5</math> باشند، مقدار <math>\text{Log } \sqrt{30}</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{Log } \sqrt{30} = \frac{1}{2} \text{Log} (2 \times 3 \times 5) = \frac{1}{2} (\text{Log} (2) + \text{Log} (3) + 1 - \text{Log} (2)) = \frac{1}{2} (1 + \text{Log} (3))$ $= \frac{1}{2} (1 + 0/5) = \frac{3}{4}$	۸



	<p>معادلات زیر را حل کنید.</p> <p>الف) <math>4^{3x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x</math></p> <p>ب) <math>\text{Log} \frac{(x+1)}{2} - \text{Log} \frac{(x-3)}{2} = 3</math></p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math>4^{3x+2} = 4^{-3x} \Rightarrow 3x+2 = -3x \Rightarrow x = \frac{-1}{3}</math></p> <p>ب) <math>\text{Log} \frac{(x+1)}{2} = 3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 8 \Rightarrow x+1 = 8x-24 \Rightarrow x = \frac{25}{7}</math> قابل قبول</p>	۹
	<p>دو تابع <math>y = x^2</math> و <math>y = 2^x</math> در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کند؟</p>  <p>پاسخ: ۱</p>	۱۰
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>محل تقاطع تابع <math>y = 6^x</math> با محور <math>y</math>ها، نقطه ..... است.</p> <p>پاسخ: ۱ (۰, ۱)</p>	۱۱
	<p>معادله لگاریتمی <math>\text{Log} \frac{x}{2} + \text{Log} \frac{(x-2)}{2} = 3</math> را حل کنید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p><math>\text{Log} \frac{x(x-2)}{2} = 3 \Rightarrow x(x-2) = 2^3 = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0</math></p> <p><math>\Rightarrow x = -2</math> (غ ق ق) یا <math>x = 4</math></p>	۱۲
	<p>اگر <math>\text{Log} 2 \simeq 0/301</math>، در این صورت مقدار تقریبی <math>\text{Log} 125</math> را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p><math>\text{Log} 125 = \text{Log} 5^3 = 3 \text{Log} 5 = 3 \left( \text{Log} \frac{10}{2} \right) = 3(\text{Log} 10 - \text{Log} 2) = 3(1 - 0/301) = 2/097</math></p>	۱۳



۱۴	<p>نمودار تابع <math>f(x) = 3^{ax-2} + b</math> از نقاط <math>(\frac{8}{9}, 0)</math> می‌گذرد. مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> به دست آورید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f(0) = -\frac{8}{9} \Rightarrow 3^{-2} + b = -\frac{8}{9} \Rightarrow b = -1$ $f(2) = 0 \Rightarrow 3^{2a-2} - 1 = 8 \Rightarrow 3^{2a-2} = 9 = 3^2 \Rightarrow 2a - 2 = 2$ $a = 2 \text{ (ص ۱۰۳ و ۱۰۴)}$
۱۵	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>ضابطه وارون تابع <math>f(x) = 2^x</math> به صورت ..... است.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f^{-1}(x) = \text{Log}_2 x$
۱۶	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>لگاریتم عدد <math>\frac{1}{81}</math> در پایه ۳ برابر ..... است.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $-4$
۱۷	<p>نیم عمر ماده‌ای ۸ روز است. اگر جرم اولیه این ماده ۲۰۰۰ گرم باشد، پس از چه مدت جرم این ماده به ۱ گرم می‌رسد؟ (<math>\text{Log}_2 = 0.3</math>)</p> <p>پاسخ: ۱</p> $1 = 2000 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \Rightarrow \text{Log } 1 = \text{Log } 2000 + \frac{t}{8} \text{Log } \frac{1}{2} \Rightarrow 0 = \text{Log } 2 + \text{Log } 1000 + \frac{t}{8}(-\text{Log } 2)$ $\Rightarrow 0 = 0.3 + 3 + \frac{t}{8}(-0.3) \Rightarrow t = 88$
۱۸	<p>معادله لگاریتمی روبه‌را حل کنید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{Log}_3(x-1) + \text{Log}_3(x+7) = 2 \text{Log}_3(x+1)$ $\text{Log}_3(x-1) + \text{Log}_3(x+7) = 2 \text{Log}_3(x+1) \Rightarrow \text{Log}_3(x-1)(x+7) = \text{Log}_3(x+1)^2$ $\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 2 \text{ ق ق}$
۱۹	<p>با فرض <math>\text{Log}_2 = 0.3</math> حاصل عبارت <math>a = \text{Log}_2 \frac{5}{4}</math> را بیابید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $A = \text{Log}_2 \frac{5}{4} = \text{Log}_2 \frac{10}{4} = \text{Log } 10 - \text{Log } 4 = 1 - 2 \text{Log } 2 = 0.4$
۲۰	<p>جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.</p> <p>دامنه تابع <math>y = \text{Log}_4(x+1)</math> بازه ..... است.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $(-1, +\infty)$



۲۱	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. اگر $(1+x, {}^3x)$ یک همسایگی عدد ۳ باشد، حدود $x$ ، بازه ..... است. پاسخ: ۱ $(1, 2)$
۲۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. عدد ${}^{\text{Log}}_2 9$ برابر است با ۸۱. پاسخ: ۱ درست
۲۳	حاصل عبارت مقابل را بیابید. $A = \text{Log} \left( \frac{{}^9_{\sqrt[4]{27}}}{3} \right) + \text{Log } 0.001$ پاسخ: ۱ $\frac{9}{\sqrt[4]{27}} = \frac{3^2}{3^{3/4}} = 3^{5/4}$ $A = \text{Log} \frac{{}^9_{\sqrt[4]{27}}}{3} + \text{Log } 0.001 = \frac{5}{4} + (-3) = -\frac{7}{4}$
۲۴	معادله $\text{Log} \left( \frac{x-1}{3} \right) + \text{Log} \left( \frac{x}{3} + 1 \right) = 2$ را حل کنید. پاسخ: ۱ $\text{Log} \left( \frac{x-1}{3} \right) + \text{Log} \left( \frac{x}{3} + 1 \right) = 2 \Rightarrow (x-1) \left( \frac{x}{3} + 1 \right) = 3^2 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} - 1 = 9$ $\Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ق ق}, x = -6 \text{ غ ق}$
۲۵	اگر نمودار تابع $f(x) = 2 + \text{Log}_a x$ از نقطه $\left( \frac{1}{3}, -2 \right)$ عبور کند، آنگاه مقدار $a$ را به دست آورید. پاسخ: ۱ $\left( \frac{1}{3}, -2 \right) \rightarrow -2 = 2 + \text{Log}_a \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Log}_a \frac{1}{3} = -4 \Rightarrow a^{-4} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \sqrt[4]{3}$
۲۶	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. اگر $0 < y < x$ ، آنگاه عدد $2^x$ از عدد $2^y$ ..... است. (بیشتر - کمتر) پاسخ: ۱ بیشتر
۲۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. توابع $f(x) = \text{Log}_2 (x+1)$ و $g(x) = 2^{x+1}$ وارون هم هستند. پاسخ: ۱ نادرست



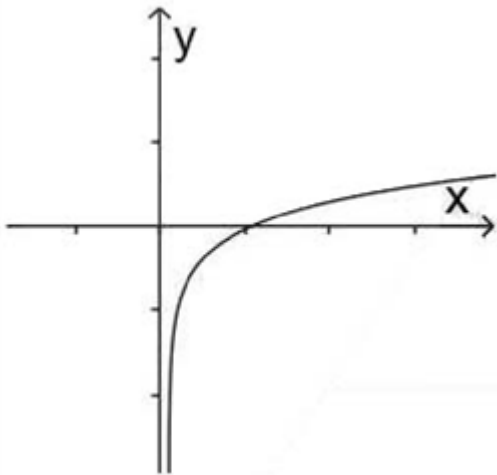
اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_a x - 1$  از نقطه  $(9, 1)$  عبور کند:  
 الف) مقدار  $a$  را به دست آورید.  
 ب) نمودار تابع را رسم کنید.

$$1 = \log_a 9 - 1 \Rightarrow a^1 = 9 \Rightarrow a = 3$$

پاسخ: ۱ الف)

ب)

۲۸

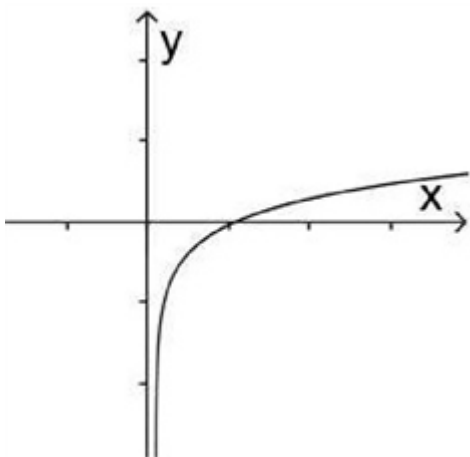


الف) نمودار تابع  $y = \log x$  را رسم کنید.  
 ب) اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \log_a x$  از نقطه  $(8, 3)$  عبور کند، مقدار  $a$  را به دست آورید.

پاسخ: ۱ الف)

ب)

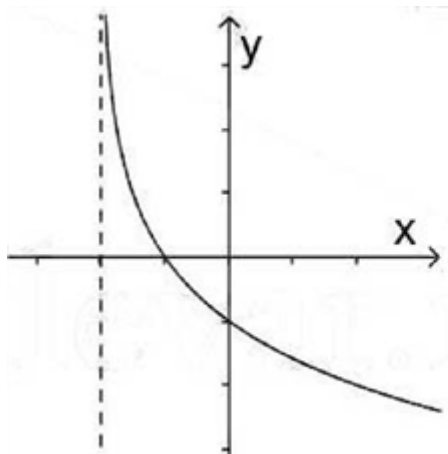
۲۹



$$3 = \log_a 8 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$



نمودار تابع  $f(x) = -\text{Log}_2(x+2)$  را رسم کنید. دامنه آن را به صورت بازه بنویسید.



$$D_f = (-2, +\infty)$$

پاسخ: ۱

۳۰

معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x+1}$

ب)  $\text{Log}_5(x^2+1) = 1 + \text{Log}_5(3x-5)$

الف)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x+1} = (5^{-2})^{x-1} = (5^3)^{2x+1} \Rightarrow 5^{-2x+2} = 5^{6x+3}$

$$\Rightarrow -2x+2 = 6x+3 \Rightarrow -8x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$$

ب)  $\text{Log}_5(x^2+1) = 1 + \text{Log}_5(3x-5) = \text{Log}_5(x^2+1) = \text{Log}_5 5 + \text{Log}_5(3x-5)$

$$\Rightarrow \text{Log}_5(x^2+1) = \text{Log}_5(15x-25) \Rightarrow x^2+1 = 15x-25 \Rightarrow x^2-15x+26 = 0$$

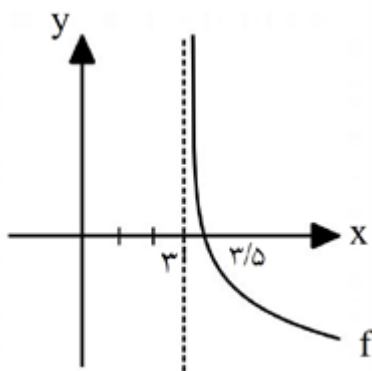
$$\Rightarrow (x-2)(x-13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ق ق} \\ x = 13 \text{ ق ق} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

۳۱



با توجه به نمودار تابع  $f(x) = a - \log_2(x+b)$ ،  $a$  و  $b$  را به دست آورید.



۳۲

$$D_f = (3/5, +\infty) \Rightarrow x > 3/5 \Rightarrow -b = 3/5 \Rightarrow b = -3/5$$

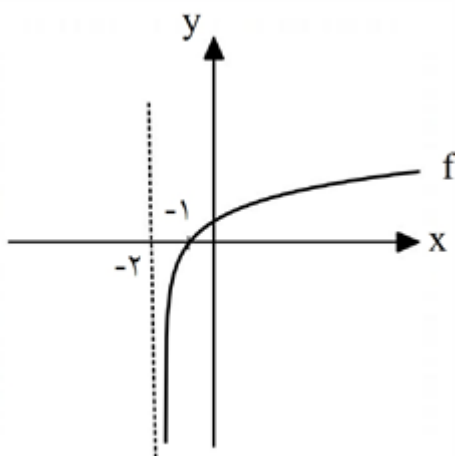
$$x + b > 0 \Rightarrow x > -b$$

$$f(x) = a - \log_2(x - 3/5) \xrightarrow{A(1,0)} a - \log_2(1 - 3/5) = 0 \Rightarrow a - \log_2(2/5) = 0$$

$$\Rightarrow a - \log_2 2^{-1} = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

پاسخ: ۱

در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = a + \log_2(x+b)$  رسم شده است. مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.



۳۳

$$D_f = (-2, +\infty) \Rightarrow x > -2 \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$x + b > 0 \Rightarrow x > -b$$

$$f(x) = a + \log_2(x + 2) \xrightarrow{A(-1,0)} 0 = a + \log_2(-1 + 2) \Rightarrow a + \log_2 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

پاسخ: ۱

اگر  $\log_2 3 = n$  و  $\log_2 2 = m$  باشند، آن گاه مقدار  $\log_2 \sqrt[3]{12}$  را بر حسب  $m$  و  $n$  به دست آورید.

$$\log_2 \sqrt[3]{12} = \log_2 12^{1/3} = \frac{1}{3} \log_2 12 = \frac{1}{3} \log_2 2^2 \times 3 = \frac{1}{3} (2 \log_2 2 + \log_2 3)$$

$$= \frac{1}{3} (2m + n) = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}n$$

پاسخ: ۱

۳۴



	<p>معادلات زیر را حل کنید.</p> <p>الف) <math>32^{2x-1} = \left(\frac{1}{64}\right)^{x+1}</math></p> <p>ب) <math>\text{Log}_x(x+4) + \text{Log}_x(x+3) = \text{Log}_x 20</math></p> <p>الف) <math>32^{2x-1} = \left(\frac{1}{64}\right)^{x+1} \Rightarrow (2^5)^{2x-1} = (2^{-6})^{x+1} \Rightarrow 2^{10x-5} = 2^{-6x-6}</math></p> <p><math>\Rightarrow 10x - 5 = -6x - 6 \Rightarrow 16x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{16}</math></p> <p>ب) <math>\text{Log}_x(x+4) + \text{Log}_x(x+3) = \text{Log}_x 20 \Rightarrow \text{Log}_x(x+4)(x+3) = \text{Log}_x 20</math></p> <p><math>\Rightarrow x^2 + 7x + 12 = 20 \Rightarrow x^2 + 7x - 8 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق} \\ x = -8 \text{ غ ق} \end{cases}</math></p>	۳۵
	<p>نیمهٔ عمر مادهٔ هسته‌ای ۲۵ سال است. نمونه‌ای از این ماده، ۵۱۲ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۲۵۰ سال باقی می‌ماند را محاسبه کنید.</p> <p><math>n = 25 \quad t = 250 \quad m_0 = 512 \quad m(250) = ?</math></p> <p><math>m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{n}} \Rightarrow m(250) = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{250}{25}} = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{512}{1024} = \frac{1}{2}</math></p>	۳۶
	<p>اگر <math>\text{Log } 2 = a</math> و <math>\text{Log } 3 = b</math> باشد، آن‌گاه مقدار <math>\text{Log } \frac{\sqrt[3]{2}}{81}</math> را برحسب <math>a</math> و <math>b</math> به دست آورید.</p> <p><math>\text{Log } \frac{\sqrt[3]{2}}{81} = \text{Log } \sqrt[3]{2} - \text{Log } 81 = \text{Log } 2^{\frac{1}{3}} - \text{Log } 3^4 = \frac{1}{3} \text{Log } 2 - 4 \text{Log } 3 = \frac{a}{3} - 4b</math></p>	۳۷
	<p>در تابع با ضابطه <math>f(x) = -1 + 3^{2x-1}</math>:</p> <p>الف) مقدار <math>f\left(\frac{5}{2}\right)</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) نمودار تابع، خط <math>y = 8</math> را با چه طولی قطع می‌کند؟</p> <p>الف) <math>f\left(\frac{5}{2}\right) = -1 + 3^{2\left(\frac{5}{2}\right)-1} = -1 + 3^{5-1} = -1 + 3^4 = -1 + 81 = 80</math></p> <p>ب) باید تابع را برابر ۸ قرار دهیم و <math>x</math> را به دست آوریم:</p> <p><math>-1 + 3^{2x-1} = 8 \Rightarrow 3^{2x-1} = 9 \Rightarrow 3^{2x-1} = 3^2 \Rightarrow 2x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}</math></p>	۳۸



در تابع با ضابطه  $f(x) = 2 + \text{Log}(x + 1)$ :

$$\sqrt{3}$$

الف) مقدار  $f(26)$  را به دست آورید.

ب) نمودار تابع، خط  $y = 4$  را با چه طولی قطع می‌کند؟

پاسخ: ۱ الف

۳۹

$$f(26) = 2 + \text{Log}(26 + 1) = 2 + \text{Log} \frac{27}{\sqrt{3}} = 2 + \text{Log} \frac{3^3}{3^{\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{3}{\frac{1}{2}} \text{Log} \frac{3}{3} = 2 + 6 = 8$$

ب) باید تابع را برابر ۴ قرار دهیم و  $x$  را به دست آوریم:

$$2 + \text{Log}(x + 1) = 4 \Rightarrow \text{Log}(x + 1) = 2 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{3^2} \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

در تابع با ضابطه  $f(x) = 2 + 3^{x-1}$ :

الف) مقدار  $f(2)$  را به دست آورید.

ب) نمودار تابع، خط  $y = 3$  را با چه طولی قطع می‌کند؟

پاسخ: ۱ الف

۴۰

$$f(2) = 2 + 3^{2-1} = 2 + 3 = 5$$

ب) باید تابع را برابر ۳ قرار دهیم و  $x$  را به دست آوریم:

$$2 + 3^{x-1} = 3 \Rightarrow 3^{x-1} = 3 - 2 \Rightarrow 3^{x-1} = 1 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

در تابع با ضابطه  $f(x) = 3 - \text{Log}_{\frac{1}{5}}(x - 1)$ :

الف) مقدار  $f\left(\frac{6}{5}\right)$  را به دست آورید.

ب) نمودار و تابع، خط  $y = 1$  را با چه طولی قطع می‌کند؟

پاسخ: ۱

۴۱

الف)

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = 3 - \text{Log}_{\frac{1}{5}}\left(\frac{6}{5} - 1\right) = 3 - \text{Log}_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = 3 - \text{Log}_{\frac{1}{5}} 5^{-1} = 3 + \text{Log}_{\frac{1}{5}} 5 = 3 + 1 = 4$$

ب) باید تابع را برابر یک قرار دهیم و  $x$  را به دست آوریم:

$$3 - \text{Log}_{\frac{1}{5}}(x - 1) = 1 \Rightarrow -\text{Log}_{\frac{1}{5}}(x - 1) = -2 \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{5}}(x - 1) = 2 \Rightarrow x - 1 = 5^2 \Rightarrow x = 25 + 1 \Rightarrow x = 26$$



	<p>حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\text{Log}_{\frac{432}{36}} - \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{2}{6}}</math></p> <p>ب) <math>\text{Log}_{\frac{5}{3}} + \text{Log}_{\frac{18}{3}} - \text{Log}_{\frac{10}{3}}</math></p> <p>الف) <math>\text{Log}_{\frac{432}{36}} - \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{432}{6}} - \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2} \left( \text{Log}_{\frac{432}{6}} - \text{Log}_{\frac{2}{6}} \right)</math></p> <p><math>= \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{432}{2}} = \frac{1}{2} \text{Log}_{216} = \frac{1}{2} \text{Log}_{6^3} = \frac{3}{2} \text{Log}_{\frac{6}{6}} = \frac{3}{2}</math></p> <p>ب) <math>\text{Log}_{\frac{5}{3}} + \text{Log}_{\frac{18}{3}} - \text{Log}_{\frac{10}{3}} = \text{Log}_{\frac{5 \times 18}{10}} = \text{Log}_{\frac{9}{3}} = \text{Log}_{3^2} = 2 \text{Log}_{\frac{3}{3}} = 2</math></p>	<p>۴۲</p> <p>پاسخ: ۱</p>
	<p>معادله زیر را حل کنید.</p> <p><math>\text{Log}_{\frac{1}{4}} (4x + 1) = \text{Log}_{\frac{1}{4}} 16</math></p> <p><math>\text{Log}_{\frac{1}{4}} 16 = \text{Log}_{4^{-1}} 4^2 = -2 \text{Log}_{\frac{4}{4}} = -2</math></p> <p><math>\text{Log}_{\frac{1}{4}} (4x + 1) = \text{Log}_{\frac{1}{4}} 16 \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{4}} (4x + 1) = -2 \Rightarrow 4x + 1 = 4^{-2} \Rightarrow 4x = \frac{1}{4} - 1</math></p> <p><math>\Rightarrow 4x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{16}</math> ق ق</p>	<p>۴۳</p> <p>پاسخ: ۱</p>
	<p>معادله زیر را حل کنید.</p> <p><math>\text{Log}_x (x^2 + 5) = \text{Log}_x (x + 1) + \text{Log}_x (x + 2)</math></p> <p><math>\text{Log}_x (x^2 + 5) = \text{Log}_x (x + 1) + \text{Log}_x (x + 2) \Rightarrow \text{Log}_x (x^2 + 5) = \text{Log}_x (x + 1)(x + 2)</math></p> <p><math>\Rightarrow x^2 + 5 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow 5 = 3x + 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1</math> غ ق ق</p>	<p>۴۴</p> <p>پاسخ: ۱</p>



	<p>اگر <math>g(x) = \sqrt{4-x}</math> و <math>f(x) = \text{Log}_3(x+1)</math> باشد: الف) دامنه <math>\text{gof}</math> را با استفاده از تعریف محاسبه کنید. ب) مقدار <math>(\text{gof})(26)</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ: ۱ الف)</p> $D_f : x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D_f = (-1, +\infty)$ $D_g : 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_g = (-\infty, 4]$ $D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x > -1 \mid \underbrace{\text{Log}_3(x+1)}_{(1)} \leq 4\}$ $\text{Log}_3(x+1) \leq 4 \Rightarrow x+1 \leq 3^4 \Rightarrow x \leq 81-1 \Rightarrow x \leq 80 \quad (2)$ $\xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 < x \leq 80 \Rightarrow D_{\text{gof}} = (-1, 80]$ <p>ب)</p> $(\text{gof})(26) = g(f(26)) = g(3) = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$ $\underbrace{\text{Log}_3(26+1)}_{\text{Log}_3 27} = \text{Log}_3 27 = 3$	۴۵
	<p>با فرض <math>\text{Log}_2 = 0/3</math>، <math>\text{Log}_3 = 0/47</math> و <math>\text{Log}_7 = 0/8</math> مقدار عددی <math>\text{Log}_{14} 15</math> را حساب کنید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{Log}_{14} 15 = \frac{\text{Log } 15}{\text{Log } 14} = \frac{\text{Log } \frac{30}{2}}{\text{Log } 2 \times 7} = \frac{\text{Log } 30 - \text{Log } 2}{\text{Log } 2 + \text{Log } 7} = \frac{\text{Log } 3 + \text{Log } 10 - \text{Log } 2}{\text{Log } 2 + \text{Log } 7}$ $\text{Log}_{14} 15 = \frac{0/47 + 1 - 0/3}{0/3 + 0/8} = \frac{1/17}{1/1} = \frac{117}{110}$	۴۶
	<p>اگر <math>f(x) = 2x + 1</math> و <math>g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x</math> باشد، مقدار <math>(f^{-1} + g)(-3)</math> را حساب کنید.</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{y-1}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ $(f^{-1} + g)(-3) = f^{-1}(-3) + g(-3) = \frac{-3-1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 2^3 = -2 + 8 = 6$	۴۷

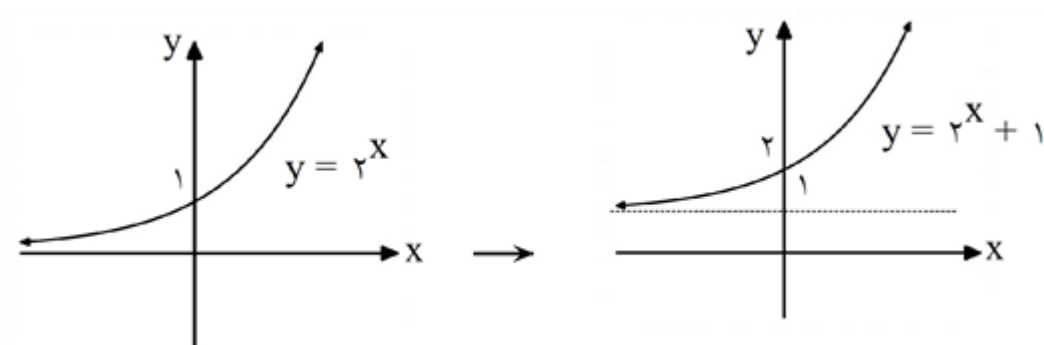


نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $y = 2^x + 1$

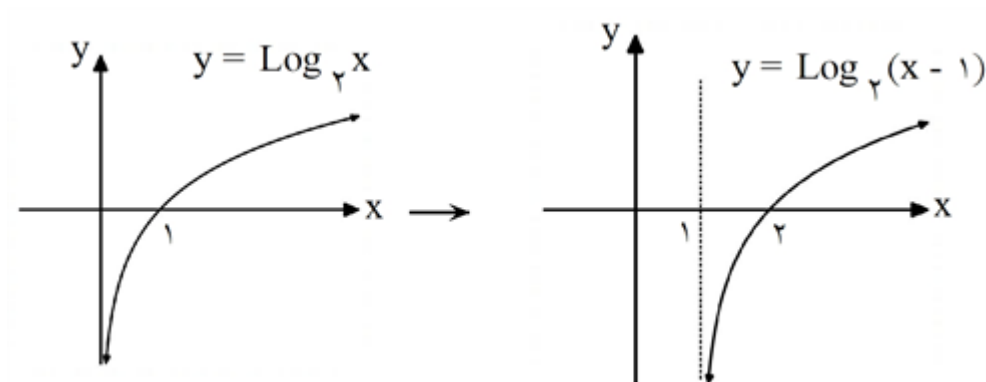
ب)  $y = \log_2(x - 1)$

پاسخ: ۱ الف)



۴۸

ب)



در معادله  $\sqrt{13 - \log_2 \frac{3x}{\sqrt{x}}} = 3$  مقدار  $x$  را حساب کنید.

$\sqrt{13 - \log_2 \frac{3x}{\sqrt{x}}} = 3 \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} 13 - \log_2 \frac{3x}{\sqrt{x}} = 9 \Rightarrow \log_2 \frac{3x}{\sqrt{x}} = 4$

پاسخ: ۱

۴۹

$\Rightarrow (\sqrt{x})^4 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = 3 \text{ ق ق} \end{cases}$

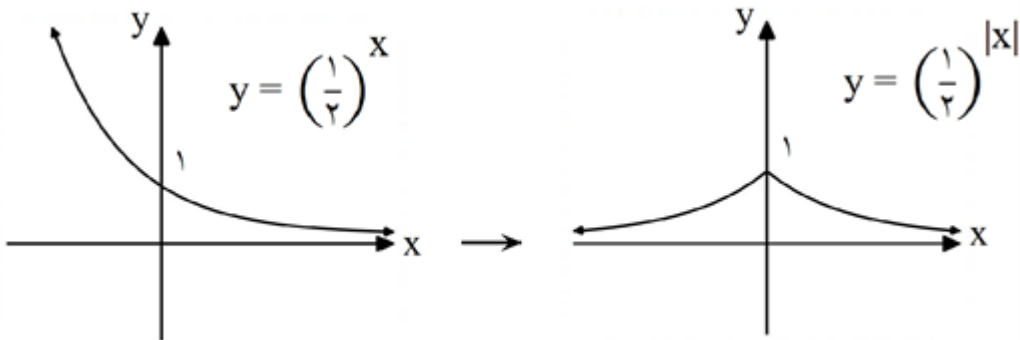


نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $y = 2^{-|x|}$       ب)  $y = \frac{|x|}{x} \operatorname{Log}_{\frac{1}{2}} x$

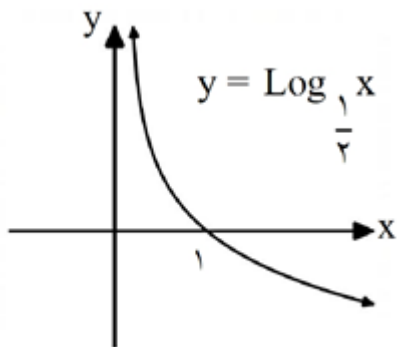
پاسخ: ۱ الف

$$y = (2)^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$



ب)

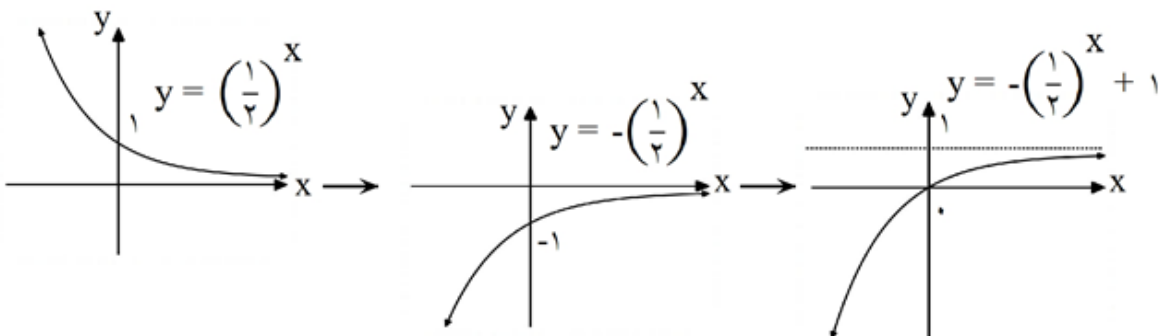
$D = (0, +\infty) \xrightarrow{x>0} y = \frac{x}{x} \operatorname{Log}_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow y = \operatorname{Log}_{\frac{1}{2}} x$



نمودار تابع با ضابطه  $y = -2^{-x} + 1$  را رسم کنید.

$$y = -2^{-x} + 1 \Rightarrow y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

پاسخ: ۱




۵۰

۵۱



۵۲	<p>نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چه قدر است؟</p> <p>پاسخ: ۱</p> $m(t) = 128 \times 2^{-\frac{t}{30}} \quad t = 300$ <p>جرم باقی‌مانده بعد از ۳۰۰ سال <math>\frac{1}{8}</math> <math>\Rightarrow 128 \times 2^{-10} = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8}</math></p>
۵۳	<p>گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.</p> <p>الف) <math>\log_b a \times \log_a b = 1</math> (ب) <math>\log 5 = \log 3 + \log 2</math></p> <p>پاسخ: ۱ الف) ✓ ب) ×</p>
۵۴	<p>اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی <math>f(x) = \log_a x</math> از نقطه‌ی <math>(\frac{1}{2}, -4)</math> عبور کند، مقدار a چند است؟</p> <p>پاسخ: ۱</p> $-4 = \log_a \frac{1}{2} \Rightarrow a^{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^{-4} = 2^{-1} \Rightarrow a^4 = 2 \Rightarrow a = 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}$
۵۵	<p>نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.</p> <p>الف) جرم <math>m(t)</math> را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.</p> <p>ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math>m(t) = 1 \times 2^{-\frac{t}{4}} = 2^{-\frac{t}{4}}</math></p> <p>ب) <math>2^{-\frac{t}{4}} = 0.01 \Rightarrow \log 2^{-\frac{t}{4}} = \log 10^{-2} = -\frac{t}{4} \log 2 = -2 \Rightarrow -\frac{t}{4} = \frac{-2}{\log 2} \Rightarrow t = \frac{8}{\log 2} = \frac{8}{0.301} \approx 26.6</math> روز</p>
۵۶	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید:</p> <p>الف) <math>a^{\log_b a} = a</math> (<math>b \neq 1, a, b &gt; 0</math>)</p> <p>ب) <math>\log_a abc = \log_a a + \log_a b + \log_a c</math> (<math>d \neq 1, a, b, c, d &gt; 0</math>)</p> <p>پ) <math>\log x \log y = \log x + \log y</math></p> <p>ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.</p> <p>پاسخ: ۱ الف) نادرست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست</p>



	<p>الف) جرم باکتری‌ها در زمان <math>t</math> از فرمول <math>m(t) = 2^t</math> به دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.</p> <p>ب) با استفاده از وارون تابع <math>m(t)</math>، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟</p> <p><math>\text{Log}_2 \simeq 0.301</math></p> <p>الف) <math>m(t) = 2^t \Rightarrow \text{Log}_2 y = t</math></p> <p>ب) <math>m(t) = 2^t = 5000 \Rightarrow \text{Log}_2 5000 = t \Rightarrow \text{Log}_2 5^4 \times 2^3 = 4 \text{Log}_2 5 + 3 \text{Log}_2 2</math></p> $= 4 \text{Log}_2 \frac{10}{2} + 3 = 4 \left( \text{Log}_2 10 - \text{Log}_2 2 \right) + 3 = 4 \times \frac{1}{\text{Log}_{10} 2} - 1 \times 4 + 3 = \frac{4}{0.301} - 1$	۵۷
	<p>معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.</p> <p>الف) <math>\text{Log}_4 m^2 - \text{Log}_4 m - 3 = 0</math></p> <p>ب) <math>\text{Log}_2 (12b - 21) - \text{Log}_2 (b^2 - 3) = 2</math></p> <p>پ) <math>\text{Log} (x^2 - 1) = -1</math></p> <p>الف) <math>2 \text{Log}_4 m - \text{Log}_4 m - 3 = 0 \Rightarrow \text{Log}_4 m = 3 \Rightarrow m = 4^3 = 64</math></p> <p>ب) <math>\text{Log}_2 \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2 \Rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 4 \Rightarrow 12b - 21 = 4b^2 - 12 \Rightarrow 4b^2 - 12b + 9 = 0</math></p> <p>غ ق ق ق <math>\Rightarrow (2b - 3)^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}</math></p> <p>پ) <math>x^2 - 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 11 \Rightarrow x = \pm \sqrt{11}</math></p>	۵۸
	<p>عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.</li> <li>- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.</li> <li>- تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.</li> <li>- تابع لگاریتم محور <math>y</math>ها را قطع می‌کند.</li> <li>- اگر نقطه <math>(b, d)</math> روی نمودار <math>y = a^x</math> قرار داشته باشد، آن‌گاه <math>(d, b)</math> روی نمودار <math>y = \text{Log}_a x</math> قرار دارد.</li> <li>- اگر <math>a &gt; b &gt; 0</math> آن‌گاه <math>\text{Log}_{10} a &lt; \text{Log}_{10} b</math>.</li> </ul> <p>۱ پاسخ:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. × مبنا را معلوم نکرده است.</li> <li>✓ لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.</li> <li>✓ تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.</li> <li>× تابع لگاریتم محور <math>y</math>ها را قطع می‌کند.</li> <li>- اگر نقطه <math>(b, d)</math> روی نمودار <math>y = a^x</math> قرار داشته باشد، آن‌گاه <math>(d, b)</math> روی نمودار <math>y = \text{Log}_a x</math> قرار دارد. ✓</li> <li>- اگر <math>a &gt; b &gt; 0</math> آن‌گاه <math>\text{Log}_{10} a &lt; \text{Log}_{10} b</math>. × در مبنای بیش از یک لگاریتم صعودی است.</li> </ul> <p><math>a &gt; b \Rightarrow \text{Log}_{10} a &gt; \text{Log}_{10} b</math></p>	۵۹





الف) خط  $y = 27$  نمودار تابع  $y = 3^x$  را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟  
 ب) خط  $y = 10$  نمودار تابع  $y = (0.01)^x$  را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

الف)  $\begin{cases} y = 3^x \\ y = 27 \end{cases} \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$

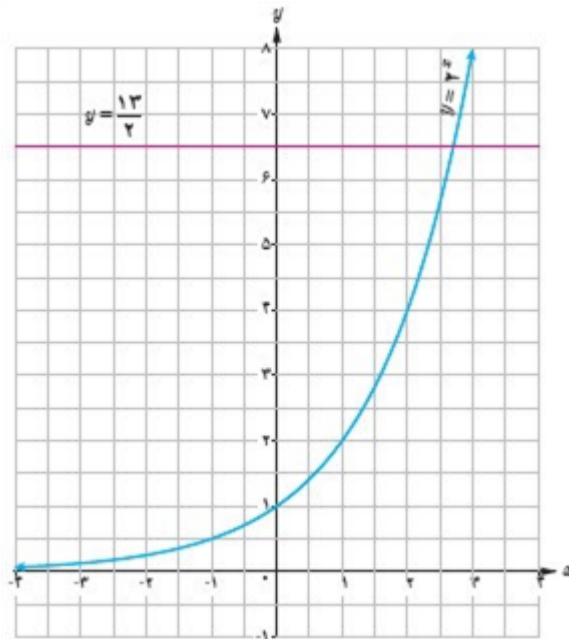
۶۰ پاسخ: ۱

ب)  $\begin{cases} y = (0.01)^x \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow (0.01)^x = 10 \Rightarrow 10^{-2x} = 10 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$



الف) در شکل زیر خط  $y = \frac{13}{2}$  نمودار  $y = 2^x$  را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟

ب) خط  $y = \sqrt{7}$  را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار  $y = 2^x$  بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

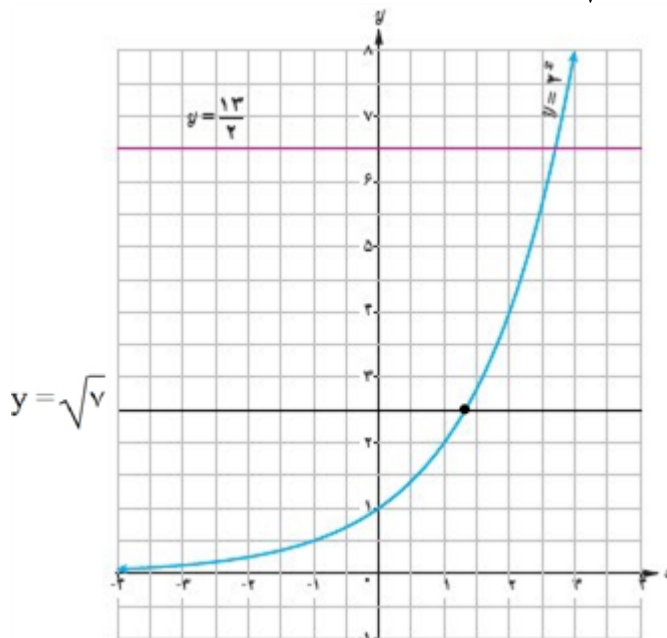


الف)  $2 < x < 3 \Rightarrow 2^2 < y < 2^3$

ب)  $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$

پاسخ: ۱

پس  $\sqrt{7}$  بین ۲ و ۳ بین محور y ها است و طول نقطه برخورد خط و منفی بین  $1 < x < 2$  است.

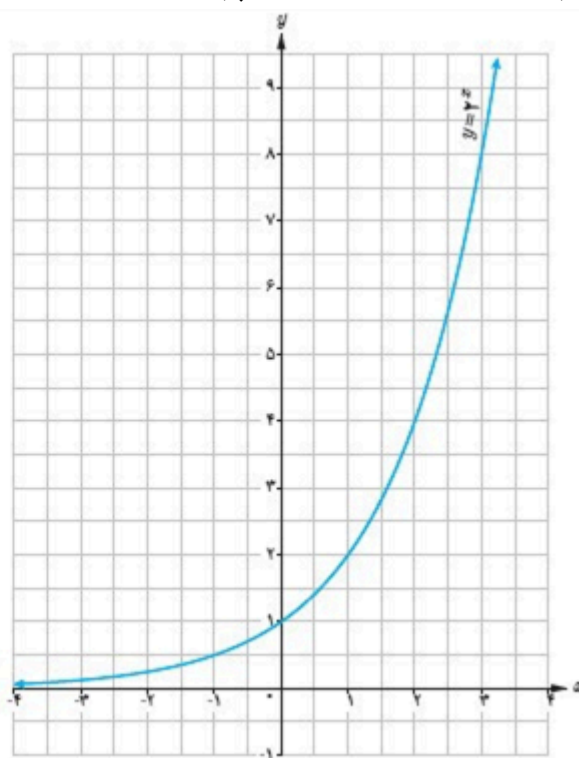
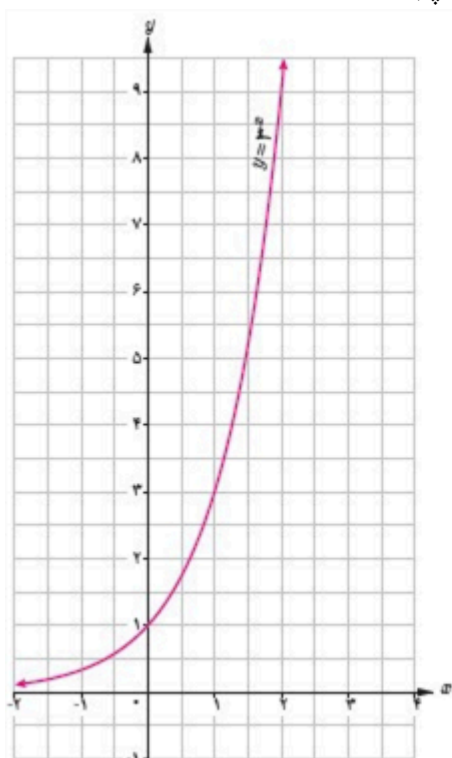


ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف)  $3^1 - \sqrt{2}$

ب)  $2^{1/25}$

پ)  $3^{5/19}$



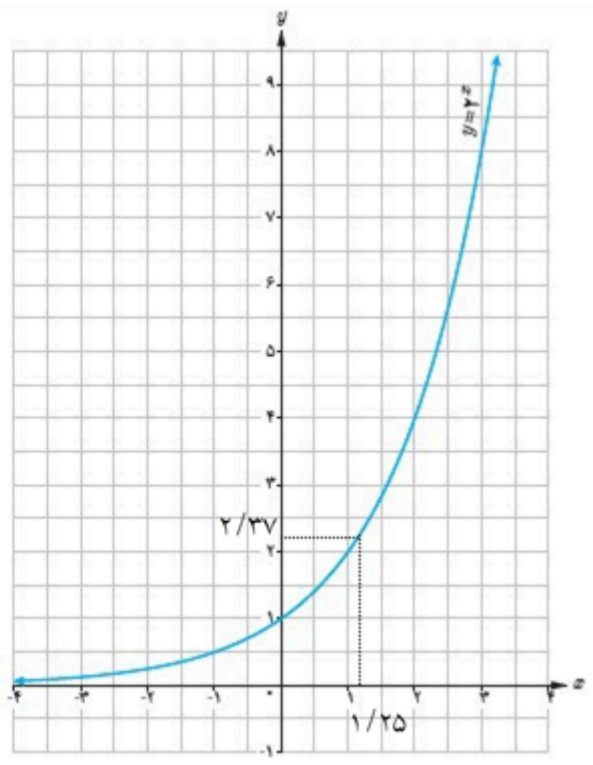
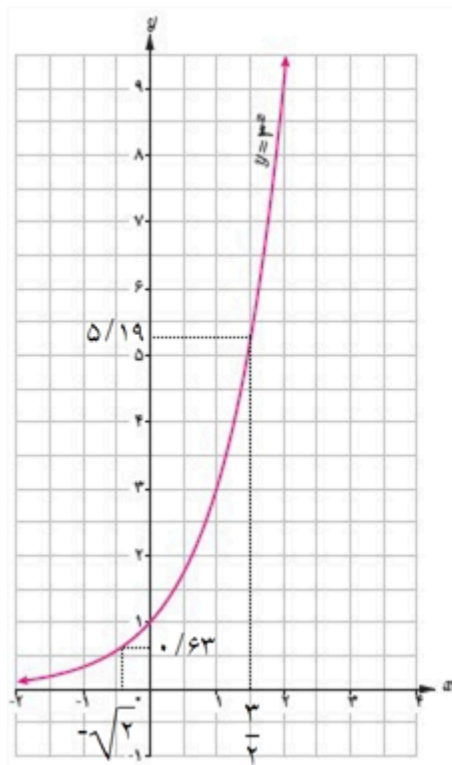
الف)  $3^1 - \sqrt{2} \approx 0.63$

ب)  $2^{1/25} \approx 1.03$

پ)  $3^{5/19} \approx 1.85$

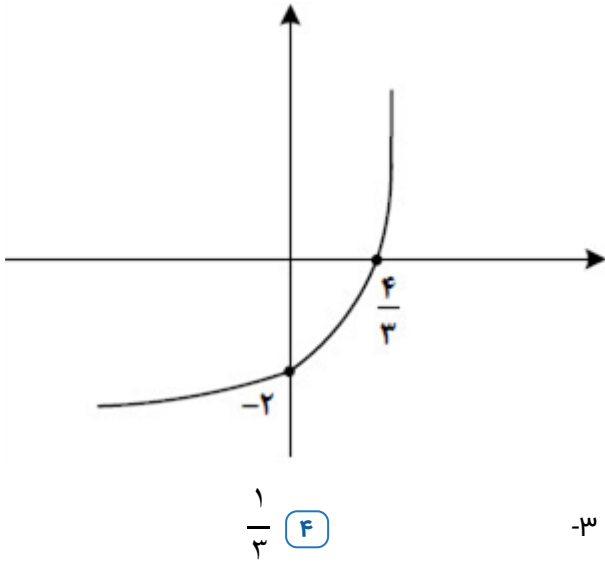
پاسخ: ۱

۶۲





شکل مقابل، نمودار تابع  $y = -1 + \log_c(ax + b)$  است. اگر  $b - c = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $(a + c)b$  کدام است؟



۶۸

۱) -۵

۲)  $\frac{1}{5}$

۳) -۳

۴)  $\frac{1}{3}$

پاسخ: ۱) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} (0, -2) \Rightarrow -2 = -1 + \log_c b \Rightarrow -1 = \log_c b \Rightarrow c^{-1} = b \Rightarrow b = \frac{1}{c} \\ b - c = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{c} - c = \frac{1}{3} \Rightarrow 3c^2 + 1c - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \times \\ c = \frac{1}{3}, b = 3 \end{cases} \\ \left(\frac{1}{3}, 0\right) \Rightarrow 0 = -1 + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}a + 3\right) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}a + 3 \Rightarrow a = -2 \\ (a + c)b = \left(-2 + \frac{1}{3}\right)(3) = -5 \end{cases}$$

اگر  $\log(x^2 - 2x + 1) + 3 \log(1 - x) = 5$  باشد، مقدار  $\log \frac{(-x)}{3}$  کدام است؟

۴)  $\frac{1}{2}$

۳)  $-\frac{1}{2}$

۲) -۲

۱) ۲

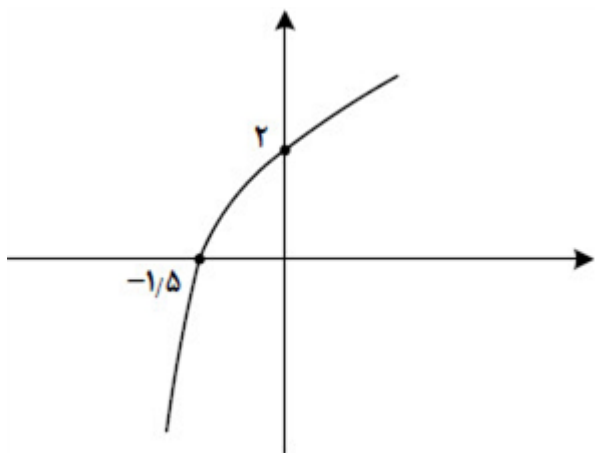
پاسخ: ۱) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{(1-x)^2(1-x)^3}{10} &= 5 \Rightarrow (1-x)^5 = 10^5 \Rightarrow 1-x = 10 \Rightarrow -x = 9 \\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{-x}{3} &= \log_{\frac{1}{3}} 9 = 2 \end{aligned}$$

۶۹



شکل مقابل، نمودار تابع  $y = 1 - \log_c(ax - b)$  است. اگر  $b + c = -\frac{3}{2}$  باشد، حاصل  $(a + c)b$  کدام است؟



۲ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۳ (۲)

-۳/۵ (۱)

۷۰

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(0/2) \Rightarrow 2 = 1 - \log_c \frac{-b}{c} \Rightarrow \log_c \frac{-b}{c} = -1$$

$$-b = c^{-1} = \frac{1}{c} \Rightarrow bc = -1$$

$$(-1/5, 0) \Rightarrow 0 = 1 - \log_c \frac{(-1/5)a - b}{c} \Rightarrow \log_c \frac{(-1/5)a - b}{c} = 1 \Rightarrow (-1/5)a - b = c$$

$$\left. \begin{array}{l} bc = -1 \\ b + c = -\frac{3}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{c > 0} \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{array} \right.$$

$$-1/5a - b = c \Rightarrow -1/5a + 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1/5a = 1/5 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow (a + c)b = \left(1 + \frac{1}{2}\right)(-2) = -3$$

اگر  $\log(2 - x) - \log \frac{1}{(x - 2)^2} = 3$  باشد، مقدار  $\log \frac{(-x)}{\sqrt{2}}$  کدام است؟

$-\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

۶ (۲)

-۶ (۱)

۷۱

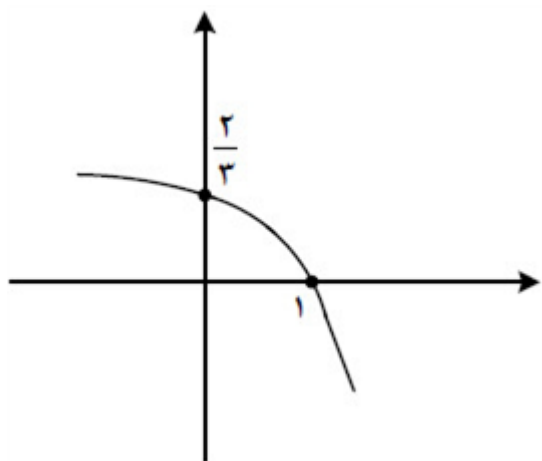
پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \log \left( \frac{\frac{(-x)}{1}}{\frac{1}{(x-2)^2}} \right) = 3 \Rightarrow -(x-2)^2 = 1000 \Rightarrow x-2 = -10 \Rightarrow x = -8$$

$$\Rightarrow \log \sqrt[4]{2} = 3 \times 2 = 6$$



شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = 1 + c \times 3^{a+bx}$  است. مقدار  $f(-1)$  کدام است؟



۷۲

$\frac{7}{8}$  (۴)

$\frac{5}{3}$  (۳)

$\frac{8}{9}$  (۲)

$\frac{10}{9}$  (۱)

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + c \times 3^{a+b} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow c \times 3^a = -\frac{1}{3} \xrightarrow{(2)} 1 + c \times 3^a \times 3^b = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} \times 3^b = 0 \Rightarrow 3^{b-1} = 1$$

$$\Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(-1) = 1 + c \times 3^{a-b} = 1 + c \times 3^a \times 3^{-1} = 1 - \frac{1}{3} \times 3^{-1} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

اگر  $\text{Log} \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \text{Log} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{2} = \text{Log} (x - 2)$  باشد، مقدار  $\text{Log} \frac{x}{\sqrt[3]{2}}$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{4}{3}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

۷۳

$$\text{Log} \frac{((x - 2)(x^2 + 2x + 4))}{2} = \text{Log} \frac{(x^3 - 8)}{2} = 3 \Rightarrow x^3 - 8 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Log} \frac{x}{\sqrt[3]{2}} = \text{Log} \frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4$$

پس داریم:



اگر  $\text{Log } 2 \simeq 0/3$  و  $\text{Log } 3 \simeq 0/4$  باشد،

اختلاف ریشه‌های معادله  $(\text{Log } \frac{5}{3})x^2 + (\text{Log } 9)x - \text{Log } 15 = 0$  چقدر است؟

$$\frac{26}{11} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{14}{11} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{14}{3} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{26}{3} \quad \boxed{1}$$

$$\text{Log } 5 = 1 - \text{Log } 2 = 1 - 0/3 = 0/3$$

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۷۴

$$\left(\text{Log } \frac{5}{3}\right)x^2 + (\text{Log } 9)x - \text{Log } 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\text{Log } 5 - \text{Log } 3)x^2 + (2 \text{Log } 3)x - (\text{Log } 5 + \text{Log } 3) = 0$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{\text{Log } 5 + \text{Log } 3}{\text{Log } 5 - \text{Log } 3} = -\frac{0/3 + 0/4}{0/3 - 0/4} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{14}{3}$$





نمودار تابع نمایی  $f(x) = k - \left(\frac{1}{9}\right)^{ax+b}$  محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۶ واحدی از مبدأ مختصات قطع می‌کند. مقدار  $bk$  کدام است؟

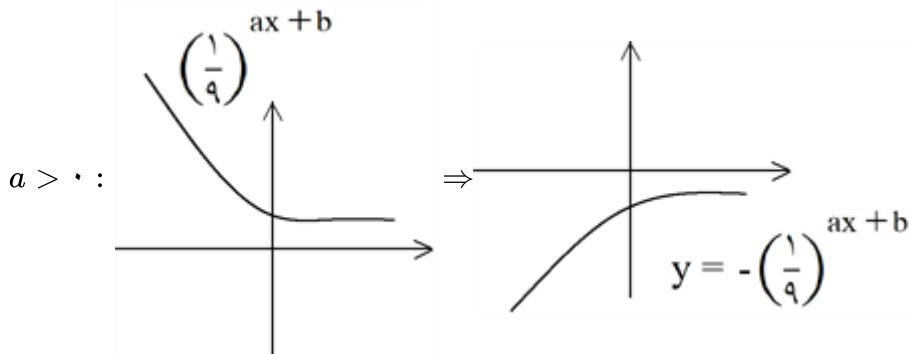
۴  $-۳/۵$

۳  $-۴/۵$

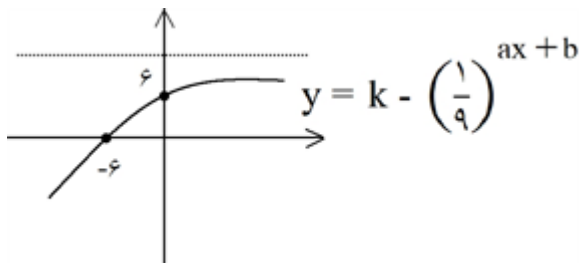
۲  $-۲/۵$

۱  $-۵/۵$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



در این حالت حتماً  $k > ۰$  و طول از مبدأ منفی و عرض از مبدأ مثبت است.



$$\left. \begin{aligned} f(۰) = ۶ &\Rightarrow k - \left(\frac{1}{9}\right)^b = ۶ \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^b = k - ۶ \\ f(-۶) = ۰ &\Rightarrow k - \left(\frac{1}{9}\right)^{-۶a+b} = ۰ \Rightarrow k = \left(\frac{1}{9}\right)^{-۶a+b} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^b = \left(\frac{1}{9}\right)^{-۶a+b} - ۶ \Rightarrow ۳^{-۲b} = ۳^{۱۲a-۲b} - ۶$$

$$۳^{-۲b}(۳^{۱۲a} - ۱) = ۶ \Rightarrow \begin{cases} -۲b = ۱ \Rightarrow b = -\frac{1}{۲} \Rightarrow k = ۹ \\ ۱۲a = ۱ \Rightarrow a = \frac{1}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow bk = \left(-\frac{1}{۲}\right)(۹) = -۴/۵$$

برای  $a < ۰$  نیز به همین نتیجه می‌رسد.

۷۵



مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته  $12/5$  درصد از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از

چند روز،  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟  $\left(\text{Log}_{\sqrt{2}}^3 = 1/6, \text{Log}_{\sqrt{2}}^3 = 0/6\right)$

۱۲۶ (۴)

۵۶ (۳)

۲۸ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر هفته  $12/5$  درصد از دست می‌دهد و  $87/5$  درصد باقی ماند یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ماده اولیه باقی مانده است. از طرفی } \text{Log}_{\sqrt{2}}^3 = \frac{10}{16} \text{ و } \text{Log}_{\sqrt{2}}^3 = \frac{10}{6} \text{ است.}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n A = \frac{1}{\sqrt{2}} A \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Log}_{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \text{Log}_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\text{Log}_{\sqrt{2}}^3$$

$$n \left( \text{Log}_{\sqrt{2}}^3 - 3 \text{Log}_{\sqrt{2}}^3 \right) = -\text{Log}_{\sqrt{2}}^3 \Rightarrow n \left( \frac{10}{6} - \frac{30}{16} \right) = -\frac{10}{6} \Rightarrow n = 8 \Rightarrow \text{هفته} \Rightarrow 56 \text{ روز}$$

۷۶

نمودار تابع نمایی  $f(x) = k + 4^{ax-b}$  محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۲ واحدی از مبدأ مختصات قطع می‌کند. مقدار  $bk$  کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار از دو نقطه روی محورها عبور کرده که می‌تواند  $(-2, 0)$  یا  $(2, 0)$  روی محور

$x$  و  $(0, 2)$  یا  $(0, -2)$  روی محور  $y$ ها باشند. در نتیجه نقاط را به صورت  $(n, 0)$  و  $(0, m)$  و  $n = \pm 2$  و

$$k + 4^{na-b} = 0 \Rightarrow k + \frac{4^{na}}{4^b} = 0 \Rightarrow k = -\frac{4^{na}}{4^b} \quad m = \pm 2 \text{ در نظر می‌گیریم:}$$

$$k + 4^{-b} = m \Rightarrow k + \frac{1}{4^b} = m \Rightarrow \frac{1}{4^b} - \frac{4^{na}}{4^b} = m \Rightarrow 4^{na} - 1 = -4^b \times m \Rightarrow 2^{2na} + 2^{2b} \times m = 1$$

$$\xrightarrow[m=2]{m=-2} 2^{2a} - 2^{2b+1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 2b+1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{4^{na}}{4^b} = 0 \Rightarrow k + \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{-\frac{1}{2}}} = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow bk = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-4) = 2$$

۷۷



اگر  $\text{Log } 2 \simeq 0/3$  و  $\text{Log } 3 \simeq 0/4$  باشد،

اختلاف ریشه‌های معادله  $x^5 (\text{Log } 30) + 2x (\text{Log } 6) - \text{Log } \frac{5}{6} = 0$  چقدر است؟

۱ (۴)

۱/۴ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۷ (۱)

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log } 2 \simeq 0/3 \Rightarrow \text{Log } 5 = 1 - \text{Log } 2 \simeq 0/7$$

$$\text{Log } 3 \simeq 0/4 \Rightarrow \text{Log } 6 = \text{Log } 2 + \text{Log } 3 \simeq 0/7$$

$$x^5 (\text{Log } 30) + 2x (\text{Log } 6) - \text{Log } \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow (\text{Log } 5 + \text{Log } 6)x^5 + (2 \text{Log } 6)x + (\text{Log } 6 - \text{Log } 5) = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} x = -1, \frac{\text{Log } 5 - \text{Log } 6}{\text{Log } 5 + \text{Log } 6} \simeq 0 \xrightarrow{\text{تفاضل}} \simeq |-1 - 0| = 1$$

۷۸

مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت  $\frac{1}{9}$  از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه

$\frac{1}{6}$  از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟  $\left( \text{Log } \frac{5}{2} = 2/4, \text{Log } \frac{5}{3} = 1/4 \right)$

۴۲۰ (۴)

۴۴۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۳۸۰ (۱)

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A(t) = A \cdot \left( \frac{8}{9} \right)^n \Rightarrow \left( \frac{8}{9} \right)^n = \frac{A(t)}{A} = \frac{1}{6} \Rightarrow n(3 \text{Log } 2 - 2 \text{Log } 3) = -(\text{Log } 2 + \text{Log } 3)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\text{Log } 3 + \text{Log } 2}{2 \text{Log } 3 - 3 \text{Log } 2} = \frac{\text{Log } \frac{5}{2} + 1}{2 \text{Log } \frac{5}{3} - 3}$$

از طرفی از دو تساوی داده شده داریم:

$$\text{Log } \frac{5}{2} = \frac{\text{Log } \frac{5}{3}}{\text{Log } \frac{5}{2}} = \frac{2/4}{1/4} = \frac{12}{7} \Rightarrow n = \frac{\frac{12}{7} + 1}{\frac{12}{7} - 3} = \frac{19}{3}$$

یعنی در  $\frac{19}{3}$  ساعت یا ۳۸۰ دقیقه نتیجه موردنظر حاصل می‌شود.

۷۹



در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}$  مقدار  $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  کدام است؟

$\text{Log } \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{۴}$

$\text{Log } \sqrt[3]{2} \quad \text{۳}$

$\text{Log } \frac{2}{2} \quad \text{۲}$

$\text{Log } \frac{1}{2} \quad \text{۱}$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{(2^x)^2 - 1}{2^x}}{\frac{(2^x)^2 + 1}{2^x}} \Rightarrow 2(2^x)^2 - 2 = (2^x)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 = 3 \Rightarrow 2^x = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{Log}_2} \text{Log}_2 2^x = \text{Log}_2 \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2 \sqrt{3}$$

اگر  $\text{Log}_3 5 = a$  و  $\text{Log}_9 b = 1 + a$  باشد، مقدار  $\text{Log}_{15} \sqrt{b}$  کدام است؟

$2/5 \quad \text{۴}$

$2 \quad \text{۳}$

$1/5 \quad \text{۲}$

$1 \quad \text{۱}$

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_9 b = 1 + \text{Log}_3 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \text{Log}_3 b = \text{Log}_3 3 + \text{Log}_3 5 \Rightarrow \text{Log}_3 b = 2 \text{Log}_3 3 + 2 \text{Log}_3 5$$

$$\Rightarrow \text{Log}_3 b = \text{Log}_3 3^2 + \text{Log}_3 5^2 \Rightarrow \text{Log}_3 b = \text{Log}_3 15^2 \Rightarrow b = 15^2$$

$$\text{Log}_{15} \sqrt{b} = \text{Log}_{15} \sqrt{15^2} = \text{Log}_{15} 15 = 1$$

تابع نمایی  $f(x) = 5 - 3^{ax+b}$  را در نظر بگیرید. اگر  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$  و  $f(0) = 1$  باشد، مقدار جزء صحیح

$f\left(-\frac{1}{4}\right)$  کدام است؟

صفر  $\text{۴}$

$-1 \quad \text{۳}$

$2 \quad \text{۲}$

$1 \quad \text{۱}$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow 5 - 3^b = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+b} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 - 3^b = 2 \Rightarrow 3^b = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+1} = 4 \Rightarrow 3^{\frac{a}{2}+1} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = 5 - 3^{-2x+1}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5 - 3^{-2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)+1} = 5 - 3^{\frac{1}{2}} = 5 - \sqrt{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5 - \sqrt{27}$$

$$-1 < 5 - \sqrt{27} < 0 \Rightarrow [5 - \sqrt{27}] = -1$$

اگر  $3^x = 0/216$  و  $5^y = 675$  باشد،  $y$  برابر کدام است؟

$\frac{x-3}{2x-15}$  (۱)       $\frac{3x-5}{x+2}$  (۲)       $\frac{2x-15}{x-3}$  (۳)       $\frac{x+2}{3x-5}$  (۴)

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۸۳

$$3^x = 0/216 \rightarrow \text{Log}_3 3^x = \text{Log}_3 \frac{3^3}{3^6} \Rightarrow x = 3 - 3 \text{Log}_3 5 \Rightarrow \text{Log}_3 5 = \frac{3-x}{3}$$

$$5^y = 675 \rightarrow \text{Log}_5 5^y = \text{Log}_5 5^2 \times 3^3 \Rightarrow y = \text{Log}_5 5^2 \times 3^3 \Rightarrow y = 2 + 3 \text{Log}_5 3$$

$$y = 2 + 3 \left( \frac{3}{3-x} \right) \Rightarrow y = \frac{15-2x}{3-x} \Rightarrow y = \frac{2x-15}{x-3}$$

دامنه  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{\text{Log } x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

صفر (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به علت وجود  $\text{Log } x$  باید  $x > 0$  پس برای اینکه زیر رادیکال منفی نشود، باید:

۸۴

$$\text{Log } x > 0 \Rightarrow \text{Log } x > \text{Log } 1 \Rightarrow x < 1 \cap 0 < x < 1$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌شود.

مقدار  $\text{Log} \frac{m}{n} = a$  و مقدار  $\text{Log} \frac{m^2 n}{mn} = b$  است. اگر  $a > 0$  باشد، حاصل  $[b]$  چقدر است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

$$\text{Log} \frac{m}{n} = a \Rightarrow \frac{\text{Log } m}{\text{Log } n} = a$$

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۸۵

$$b = \text{Log} \frac{m^2 n}{mn} = \frac{2 \text{Log } m + \text{Log } n}{\text{Log } m + \text{Log } n} = \frac{2a + 1}{a + 1} = 1 + \frac{a}{a + 1} = 1/0.00 \Rightarrow [b] = 1$$

تذکر: برای حل تستی، می‌توانیم  $m = n$  در نظر بگیریم و به راحتی به جواب برسیم.

بزرگ‌ترین عضو مجموعه  $A = \left\{ m^r + n^s \mid m, n \in \mathbb{N}, 8^{-\frac{r}{2}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{s}{2}n} > \frac{1}{128} \right\}$  کدام است؟

۱۲ (۱)      ۹ (۲)      ۵ (۳)      ۲ (۴)

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸۶

$$8^{-\frac{r}{2}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{s}{2}n} > \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-2m-2n} + 2^{-2m-2n} > 2^{-7} \Rightarrow 2(2^{-2m-2n}) > 2^{-7}$$

$$\Rightarrow 2^{-2m-2n} > 2^{-8} \Rightarrow -2m - 2n > -8 \Rightarrow m + n < 4 \Rightarrow (m, n) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$\text{Max}(m^r + n^s) = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

	<p>توابع <math>f(x) = \text{Log}(2x - 5)</math> و <math>g(x) = x + \sqrt{2x - 4}</math> را در نظر بگیرید. اگر نمودار <math>y = g^{-1} \circ f^{-1}(x)</math> محور <math>y</math>ها را در <math>\alpha</math> قطع کند، مقدار <math>\alpha</math> کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ <math>4 - \sqrt{2}</math>    <input type="radio"/> ۲ <math>4 - \sqrt{3}</math>    <input type="radio"/> ۳ <math>4 + \sqrt{2}</math>    <input type="radio"/> ۴ <math>4 + \sqrt{3}</math> </p> <p>پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.</p> <p> <math>g^{-1}(f^{-1}(\cdot)) = \alpha \Rightarrow f^{-1}(\cdot) = g(\alpha) \Rightarrow \cdot = f(g(\alpha))</math>  در تابع <math>f</math>، <math>f(3) = \cdot</math> است زیرا:  <math>2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3</math> (<math>\text{Log } 1 = 0</math>)  <math>\Rightarrow g(\alpha) = 3 = \alpha + \sqrt{2\alpha - 4} \Rightarrow 3 - \alpha = \sqrt{2\alpha - 4} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\alpha &lt; 3} \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 2\alpha - 4</math>  <math>\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha = -13 \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 = (\alpha - 4)^2 = 3 \Rightarrow \alpha = 4 - \sqrt{3}</math> </p>	۸۷
	<p>نمودار <math>f(x) = 2 + 2^{b-ax}</math> نمودار تابع <math>g(x) = -x^2 - 3x + 8</math> را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر <math>f^{-1}(10) = -1</math> باشد، مقدار <math>2b - a</math> کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ ۳    <input type="radio"/> ۲ ۲    <input type="radio"/> ۳ ۳    <input type="radio"/> ۴ ۲ </p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.</p> <p> <math>g(1) = 4 \Rightarrow (1, 4) \in f \Rightarrow f(1) = 2 + 2^{b-a} = 4 \Rightarrow b - a = 1</math> (۱)  <math>f^{-1}(10) = -1 \Rightarrow f(-1) = 10 \Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 10 \Rightarrow 2^{b+a} = 8 \Rightarrow b + a = 3</math> (۲)  <math>\xrightarrow{(1), (2)} b = 2, a = 1 \Rightarrow 2b - a = 3</math> </p>	۸۸
	<p>تابع <math>f(x) = \sqrt[2]{2^{ax+b}}</math> از نقطه <math>\left(\frac{1}{2}, 1\right)</math> عبور می‌کند. اگر <math>f^{-1}(8) = 5</math> باشد، حاصل <math>a - b</math> چقدر است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ ۳    <input type="radio"/> ۲ ۲    <input type="radio"/> ۳ ۱    <input type="radio"/> ۴ صفر </p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.</p> <p> <math>f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt[2]{2^{\frac{a}{2}+b}} \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = -b \Rightarrow a = -2b</math> (۱)  <math>f^{-1}(8) = 5 \Rightarrow f(5) = 8 \Rightarrow \sqrt[2]{2^{5a+b}} = 8 \Rightarrow 2^{5a+b} = 2^6 \Rightarrow 5a + b = 6</math>  <math>\xrightarrow{(1)} -10b + b = 6 \Rightarrow b = -1, a = 2 \Rightarrow a - b = 3</math> </p>	۸۹
	<p>از تساوی <math>(81)^{-1} \times 9^{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^x</math> مقدار <math>x</math> کدام است؟</p> <p> <input type="radio"/> ۱ صفر    <input type="radio"/> ۲ ۴    <input type="radio"/> ۳ ۱    <input type="radio"/> ۴ ۲ </p> <p>پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.</p> <p> <math>(81)^{-1} \times 9^{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^{-4} \times 3^{2x-2} = (-3)^{-x} \Rightarrow (3)^{2x-6} = (-3)^{-x}</math>  <math>\xrightarrow{x \text{ زوج باشد}} 2x - 6 = -x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2</math> </p>	۹۰



اگر  $a^2 + 9b^2 = 10ab$  باشد، مقدار  $\text{Log}\left(\frac{a+3b}{4}\right)$ ، واسطه حسابی کدام دو جمله زیر است؟

$\text{Log } a, \text{Log } b$  (۲)

$\text{Log } a, \text{Log } 3b$  (۱)

$\text{Log } \sqrt{a}, \text{Log } \sqrt{3b}$  (۴)

$\text{Log } \sqrt{a}, \text{Log } \sqrt{b}$  (۳)

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین رابطه  $a^2 + 9b^2 = 10ab$  را با  $ab$  جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow a^2 + 9ab + 9b^2 = 16ab \Rightarrow (a+3b)^2 = 16ab \Rightarrow \left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 = ab$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow \text{Log}\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 = \text{Log } ab \Rightarrow 2 \text{Log}\left(\frac{a+3b}{4}\right) = \text{Log } a + \text{Log } b$$

این یعنی  $\text{Log } \frac{a+3b}{4}$  واسطه حسابی  $\text{Log } a$  و  $\text{Log } b$  است.

۹۱

اگر  $\text{Log}_{\frac{1}{8}} 18 = m$  باشد، حاصل  $\text{Log}_{\frac{1}{4}} 12$  کدام است؟

$\frac{3m-1}{4}$  (۴)

$\frac{3}{4}(m-1)$  (۳)

$\frac{3m+1}{4}$  (۲)

$\frac{3}{4}(m+1)$  (۱)

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_{\frac{1}{8}} 18 = m \Rightarrow \frac{\text{Log}_{\frac{1}{2}} 18}{\text{Log}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}} = m \Rightarrow \frac{2 \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 + 1}{3} = m \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{3m-1}{2}$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{4}} 12 = \frac{\text{Log}_{\frac{1}{2}} 12}{\text{Log}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} = \frac{\text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 + 2}{2} = \frac{\frac{3m-1}{2} + 2}{2} = \frac{3m+3}{4} = \frac{3}{4}(m+1)$$

۹۲

تابع  $f(x) = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^x$  از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر  $f^{-1}(-1) = -1$  باشد، حاصل  $a - b$  چقدر است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$\left. \begin{aligned} (0, 0) &\Rightarrow a + b = 0 \\ (-1, -1) &\Rightarrow a + 2b = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, b = -1$$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۹۳



فرض کنید  $5^x = 10$  است. اگر  $2^{f(x)} = 20$  باشد، ضابطه  $f$  کدام است؟

$$\frac{x+1}{2x+1} \quad \text{۴}$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \quad \text{۳}$$

$$\frac{x-1}{2x-1} \quad \text{۲}$$

$$\frac{2x+1}{x+1} \quad \text{۱}$$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{فرض: } 5^x = 10 \Rightarrow 5^x = 5 \times 2 \Rightarrow 5^{x-1} = 2 \Rightarrow 5 = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$2^{f(x)} = 20 = 2^2 \times 5 = 2^2 \times 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{2+\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{2x-1}{x-1}} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

راه دوم:

$$5^x = 10 \Rightarrow x = \log_5 10 = \log_5 2 + \log_5 5 = \log_5 2 + 1 \Rightarrow \log_5 2 = x - 1$$

$$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow f(x) = \log_2 20 = \frac{\log_5 20}{\log_5 2} = \frac{\log_5 2 + \log_5 10}{\log_5 2} = \frac{x-1 + x}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

۹۴

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = a\left(\frac{1}{2}\right)^x + b$  محور  $x$  ها را با طول ۱- و محور  $y$  ها را با عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار تابع  $f$  در  $x = 1$ ، کدام است؟

$$۴ \quad \text{۴}$$

$$۳ \quad \text{۳}$$

$$۲ \quad \text{۲}$$

$$۱ \quad \text{۱}$$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط به مختصات  $(-1, 0)$  و  $(0, 2)$  در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} (-1, 0) \Rightarrow 0 = a\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + b \Rightarrow 0 = a\left(\frac{2}{1}\right)^{+1} + b \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a \quad (*) \\ (0, 2) \Rightarrow 2 = a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b \Rightarrow a + b = 2 \quad (**) \Rightarrow (*), (**): \Rightarrow a - 2a = 2 \\ \Rightarrow a = -2, b = -2a = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 \Rightarrow f(1) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

۹۵





$$\text{Log}_{\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{2}) - \text{Log}_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2}) = 2 \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = 2^2 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 4x - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

۱

$$\text{Log} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5} = \text{Log} \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{5}{4} = \frac{1}{2} (\text{Log} 5 - \text{Log} 4) = \frac{1}{2} (\text{Log} 5 - 2 \text{Log} 2)$$

$$= \frac{1}{2} (b - 2a) = \frac{1}{2} b - a$$

۲

$$m(t) = m_0 \times 2^{\frac{-t}{n}} \Rightarrow m(t) = 128 \times 2^{\frac{-t}{10}} \Rightarrow m(30) = 128 \times 2^{\frac{-30}{10}} = 2^7 \times 2^{-3} = 2^{4} = 16$$

۳

$$b = -2$$

۴

$$(2/5, a) \in f \Rightarrow a = \text{Log}_{\frac{1}{2}}(2/5 - 2) \Rightarrow a = \text{Log}_{\frac{1}{2}}(2^{-1}) = -1 \Rightarrow a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Log}\left(\frac{\sqrt{2^m}}{16}\right) = \text{Log}(\sqrt{2^m}) - \text{Log}(16) = \text{Log}\left(2^{\frac{m}{2}}\right) - \text{Log}(2^4) = \frac{m}{2} - 4$$

۵

$$\text{الف) } 2^{-\lambda x + 4} = 2^{5 - 5x} \Rightarrow -\lambda x + 4 = 5 - 5x \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

۶

ب) روش اول:

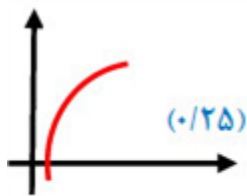
$$\text{Log}_{\frac{1}{3}}(x^3 - 1) - \text{Log}_{\frac{1}{3}}(x + 3) = 1 \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^3 - 1}{x + 3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x + 3} = 3$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

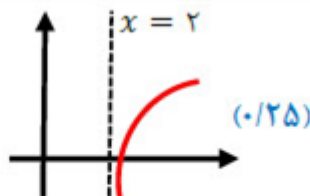
راه حل دوم:

$$\text{Log}_{\frac{1}{3}}(x^3 - 1) = \text{Log}_{\frac{1}{3}}(3) + \text{Log}_{\frac{1}{3}}(x + 3) \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{3}}(x^3 - 1) = \text{Log}_{\frac{1}{3}}(3x + 9)$$

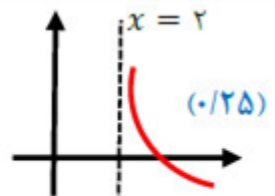
$$\Rightarrow x^3 - 1 = 3x + 9 \Rightarrow x^3 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$



$$y = \log_2 x$$



$$y = \log_2(x - 2)$$



$$y = -\log_2(x - 2)$$

۷

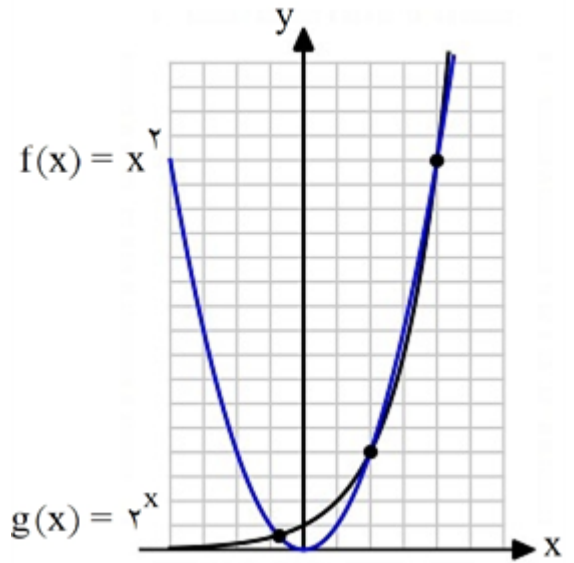
$$\text{Log} \sqrt{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{Log}(2 \times 3 \times 2) = \frac{1}{2} (\text{Log}(2) + \text{Log}(3) + 1 - \text{Log}(2)) = \frac{1}{2} (1 + \text{Log}(3))$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 0/2) = \frac{1}{2}$$

۸

$$\text{الف) } 4^{x+2} = 4^{-3x} \Rightarrow 3x + 2 = -3x \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$$

$$\text{ب) } \log_2 \frac{(x+1)}{x-3} = 3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 8 \Rightarrow x+1 = 8x-24 \Rightarrow x = \frac{25}{7} \text{ قابل قبول}$$



سه نقطه

(0, 0)

$$\log_2 \frac{x(x-2)}{2} = 3 \Rightarrow x(x-2) = 2^3 = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = 4 \text{ (غ ق ق)}$$

$$\log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \left( \log \frac{10}{2} \right) = 3(\log 10 - \log 2) = 3(1 - 0.301) = 2.097$$

$$f(0) = -\frac{1}{9} \Rightarrow 3^{-2} + b = -\frac{1}{9} \Rightarrow b = -1$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 3^{ax-2} - 1 = 0 \Rightarrow 3^{2a-2} = 1 = 3^0 \Rightarrow 2a-2 = 0$$

$$a = 1 \text{ (ص ۱۰۳ و ۱۰۴)}$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

-۴

$$1 = 2 \cdots \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{\lambda}} \Rightarrow \log 1 = \log 2 \cdots + \frac{t}{\lambda} \log \frac{1}{2} \Rightarrow 0 = \log 2 + \log 1000 + \frac{t}{\lambda} (-\log 2)$$

$$\Rightarrow 0 = 0.301 + 3 + \frac{t}{\lambda} (-0.301) \Rightarrow t = 11$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+7) = 2 \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-1)(x+7) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x - 7 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 2 \text{ ق ق}$$

$$A = \log_{\frac{5}{4}} = \log_{\frac{10}{4}} = \log 10 - \log 4 = 1 - 2 \log 2 = 0.4$$

$$(-1, +\infty)$$

$$(1, 2)$$

$$\text{درست}$$

$$\frac{9}{\sqrt[4]{27}} = \frac{3^2}{3^{3/4}} = 3^{5/4}$$

$$A = \log_{\frac{9}{3}} \sqrt[4]{27} + \log_{\frac{9}{3}} 0.01 = \frac{5}{4} + (-3) = -\frac{7}{4}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2 \Rightarrow (x-1)\left(\frac{x}{3} + 1\right) = 3^2 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} - 1 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ق ق}, x = -5 \text{ غ ق ق}$$

$$\left(\frac{1}{3}, -2\right) \rightarrow -2 = 2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{a} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{a} = -4 \Rightarrow a^{-4} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \sqrt[4]{3}$$

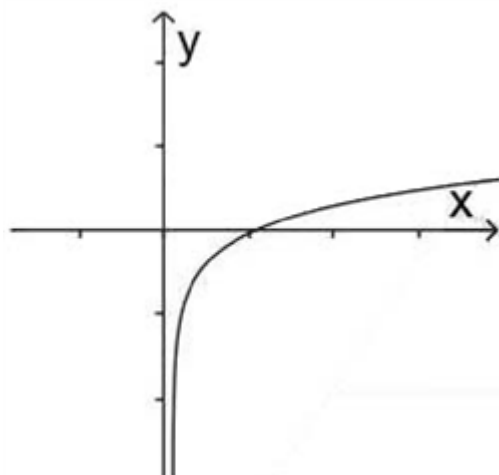
$$\text{بیشتر}$$

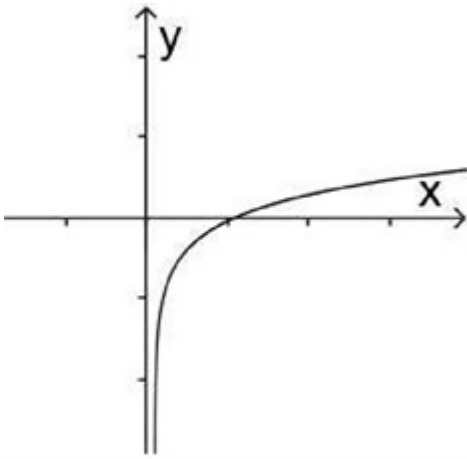
$$\text{نادرست}$$

$$1 = \log_a^9 - 1 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{الف)}$$

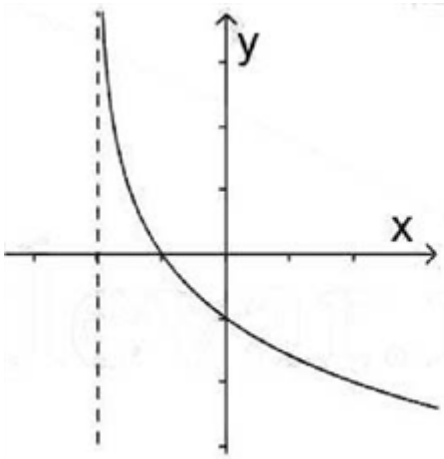
$$\text{ب)}$$





ب)

$$r = \log_a \lambda \Rightarrow a^r = \lambda \Rightarrow a = r$$



$$D_f = (-2, +\infty)$$

$$\text{الف) } \left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{r_{x+1}} = (5^{-2})^{x-1} = (5^r)^{r_{x+1}} \Rightarrow 5^{-2x+2} = 5^{r_{x+1}}$$

$$\Rightarrow -2x + 2 = r_{x+1} \Rightarrow -2x = r_{x+1} - 2 \Rightarrow x = -\frac{r_{x+1} - 2}{2}$$

$$\text{ب) } \log_{\frac{1}{5}}(x^r + 1) = 1 + \log_{\frac{1}{5}}(r_{x+1} - 2) = \log_{\frac{1}{5}}(x^r + 1) = \log_{\frac{1}{5}} 5 + \log_{\frac{1}{5}}(r_{x+1} - 2)$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{5}}(x^r + 1) = \log_{\frac{1}{5}}(15x - 25) \Rightarrow x^r + 1 = 15x - 25 \Rightarrow x^r - 15x + 26 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ق ق} \\ x = 13 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$D_f = (r, +\infty) \Rightarrow x > r \Rightarrow -b = r \Rightarrow b = -r$$

$$f(x) = a - \log_{\frac{1}{5}}(x - r) \xrightarrow{A(r/5, \cdot)} a - \log_{\frac{1}{5}}(r/5 - r) = 0 \Rightarrow a - \log_{\frac{1}{5}} \frac{r}{5} = 0$$

$$\Rightarrow a - \log_{\frac{1}{5}} r^{-1} = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

٣٠

٣١

٣٢



$$D_f = (-2, +\infty) \Rightarrow x > -2 \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$x + b > 0 \Rightarrow x > -b$$

$$f(x) = a + \log_{\frac{1}{2}}(x+b) \xrightarrow{A(-1,0)} 0 = a + \log_{\frac{1}{2}}(-1+2) \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\log \sqrt[3]{12} = \log 12^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 12 = \frac{1}{3} \log 2^2 \times 3 = \frac{1}{3} (2 \log 2 + \log 3)$$

$$= \frac{1}{3} (2m + n) = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}n$$

$$\text{الف) } 3 \cdot 2^{x-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} \Rightarrow (2^{\frac{1}{2}})^{x-1} = (2^{-\frac{3}{2}})^{x+1} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow 16x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{16}$$

$$\text{ب) } \log \frac{(x+4)}{x} + \log \frac{(x+3)}{x} = \log \frac{2}{x} \Rightarrow \log \frac{(x+4)(x+3)}{x^2} = \log \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 12 = 2x \Rightarrow x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق غ} \\ x = -8 \text{ غ ق ق غ} \end{cases}$$

$$n = 25 \quad t = 250 \quad m_1 = 512 \quad m(250) = ?$$

$$m(t) = m_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{n}} \Rightarrow m(250) = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{250}{25}} = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{512}{1024} = \frac{1}{2}$$

$$\log \frac{\sqrt[3]{2}}{81} = \log \sqrt[3]{2} - \log 81 = \log 2^{\frac{1}{3}} - \log 3^4 = \frac{1}{3} \log 2 - 4 \log 3 = \frac{a}{3} - 4b$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -1 + 3^{\left(\frac{5}{3}\right) - 1} = -1 + 3^{\frac{2}{3}} = -1 + 3^{\frac{2}{3}} = -1 + 3^{\frac{2}{3}} = -1 + 81 = 80$$

(الف) ۳۸

ب) باید تابع را برابر ۸ قرار دهیم و x را به دست آوریم:

$$-1 + 3^{3x-1} = 8 \Rightarrow 3^{3x-1} = 9 \Rightarrow 3^{3x-1} = 3^2 \Rightarrow 3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

(الف) ۳۹

$$f(2^6) = 2 + \log_{\sqrt{3}}(2^6 + 1) = 2 + \log_{\sqrt{3}} 2^6 = 2 + \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 2 + \frac{6}{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{3}} 2 = 2 + 12 = 14$$

ب) باید تابع را برابر ۴ قرار دهیم و x را به دست آوریم:

$$2 + \log_{\sqrt{3}}(x+1) = 4 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+1) = 2 \Rightarrow x+1 = \sqrt{3}^2 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$$



الف ۴۰

$$f(2) = 2 + 3^{2-1} = 2 + 3 = 5$$

ب) باید تابع را برابر ۳ قرار دهیم و x را به دست آوریم:

$$2 + 3^{x-1} = 3 \Rightarrow 3^{x-1} = 3 - 2 \Rightarrow 3^{x-1} = 1 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

الف

۴۱

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = 3 - \text{Log}_{\frac{5}{6}}\left(\frac{6}{5} - 1\right) = 3 - \text{Log}_{\frac{5}{6}}\frac{1}{5} = 3 - \text{Log}_{\frac{5}{6}}5^{-1} = 3 + \text{Log}_{\frac{5}{6}}5 = 3 + 1 = 4$$

ب) باید تابع را برابر یک قرار دهیم و x را به دست آوریم:

$$3 - \text{Log}_{\frac{5}{6}}(x - 1) = 1 \Rightarrow -\text{Log}_{\frac{5}{6}}(x - 1) = -2 \Rightarrow \text{Log}_{\frac{5}{6}}(x - 1) = 2 \Rightarrow x - 1 = 5^2 \Rightarrow x = 25 + 1 \Rightarrow x = 26$$

۴۲

$$\begin{aligned} \text{الف) } \text{Log}_{\frac{432}{36}} - \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{2}{6}} &= \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{432}{6}} - \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2} \left( \text{Log}_{\frac{432}{6}} - \text{Log}_{\frac{2}{6}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{432}{6}} = \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{216}{6}} = \frac{1}{2} \text{Log}_{\frac{36}{6}} = \frac{3}{2} \text{Log}_{\frac{6}{6}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \text{Log}_{\frac{5}{3}} + \text{Log}_{\frac{18}{3}} - \text{Log}_{\frac{10}{3}} = \text{Log}_{\frac{5 \times 18}{10}} = \text{Log}_{\frac{9}{3}} = \text{Log}_{\frac{3^2}{3}} = 2 \text{Log}_{\frac{3}{3}} = 2$$

۴۳

$$\text{Log}_{\frac{16}{\frac{1}{4}}} = \text{Log}_{\frac{4^2}{4^{-1}}} = -2 \text{Log}_{\frac{4}{4}} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{Log}_{\frac{(4x+1)}{3}} &= \text{Log}_{\frac{16}{\frac{1}{4}}} \Rightarrow \text{Log}_{\frac{(4x+1)}{3}} = -2 \Rightarrow 4x + 1 = 3^{-2} \Rightarrow 4x = \frac{1}{9} - 1 \\ &\Rightarrow 4x = -\frac{8}{9} \Rightarrow x = -\frac{2}{9} \quad \text{ق ق} \end{aligned}$$

۴۴

$$\begin{aligned} \text{Log}_{\frac{(x^2+5)}{x}} &= \text{Log}_{\frac{(x+1)}{x}} + \text{Log}_{\frac{(x+2)}{x}} \Rightarrow \text{Log}_{\frac{(x^2+5)}{x}} = \text{Log}_{\frac{(x+1)(x+2)}{x}} \\ &\Rightarrow x^2 + 5 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow 5 = 3x + 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \quad \text{غ ق ق} \end{aligned}$$

$$D_f : x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D_f = (-1, +\infty)$$

$$D_g : 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow D_g = (-\infty, 5]$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \underbrace{\{x > -1 \mid \log_r(x+1) \leq 5\}}_{(1)}$$

$$\log_r(x+1) \leq 5 \Rightarrow x+1 \leq r^5 \Rightarrow x \leq 31 - 1 \Rightarrow x \leq 30 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 < x \leq 30 \Rightarrow D_{gof} = (-1, 30]$$

(ب)

$$(gof)(25) = g(f(25)) = g(5) = \sqrt{5-3} = \sqrt{2} = 1$$

$$\log_r(25+1) = \log_r 26 = 5$$

$$\log_{12} \frac{15}{14} = \frac{\log 15}{\log 14} = \frac{\log \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7}}{\log 2 \cdot 7} = \frac{\log 3 + \log 5 - \log 2 - \log 7}{\log 2 + \log 7} = \frac{\log 3 + \log 5 - \log 2}{\log 2 + \log 7}$$

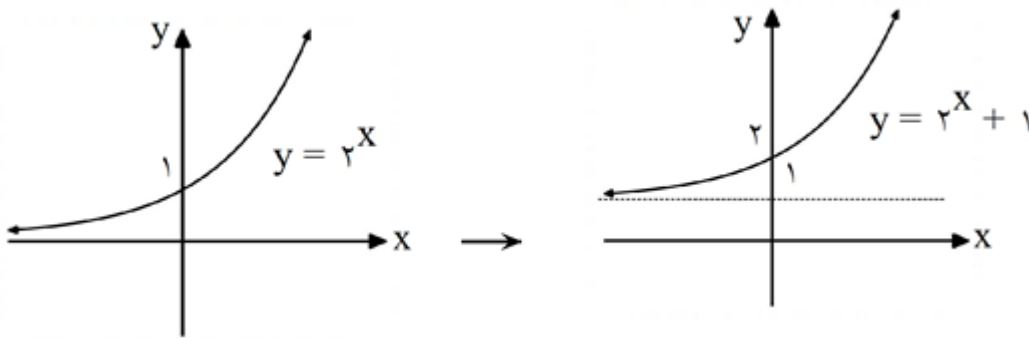
$$\log_{12} \frac{15}{14} = \frac{0.1761 + 0.6990 - 0.3010}{0.3010 + 0.8451} = \frac{0.5741}{1.1461} = \frac{117}{110}$$

٤٦

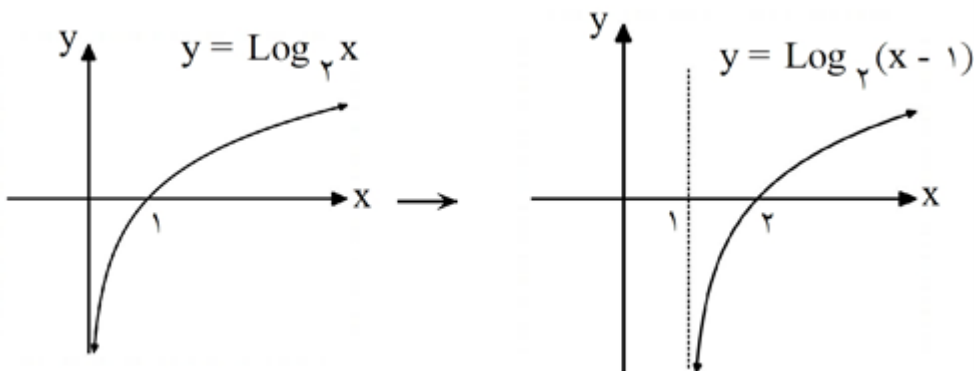
$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{y-1}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$(f^{-1} + g)(-3) = f^{-1}(-3) + g(-3) = \frac{-3-1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 2^3 = -2 + 8 = 6$$

٤٨ (الف)



(ب)



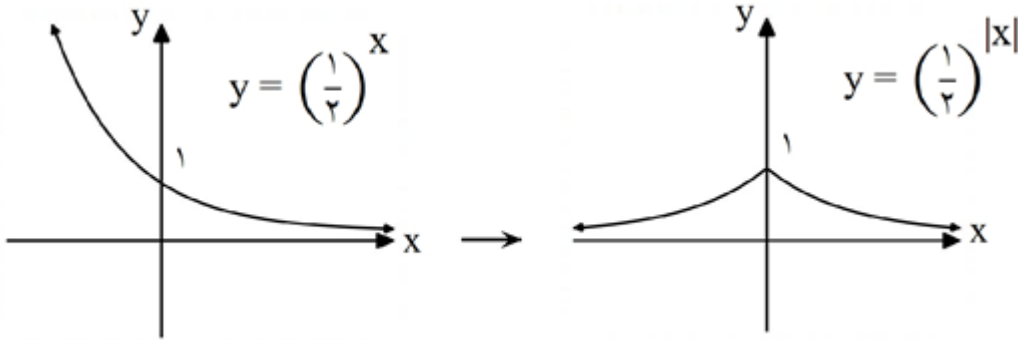
$$\sqrt{13 - \text{Log}_{\sqrt{x}} 2^x} = 3 \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}} 13 - \text{Log}_{\sqrt{x}} 2^x = 9 \Rightarrow \text{Log}_{\sqrt{x}} 2^x = 4$$

۴۹

$$\Rightarrow (\sqrt{x})^4 = 2^x \Rightarrow x^2 - 2^x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = 2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

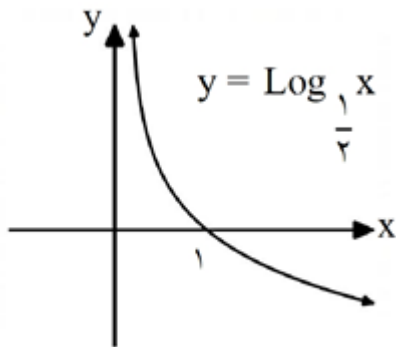
الف) ۵۰

$$y = (2)^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$



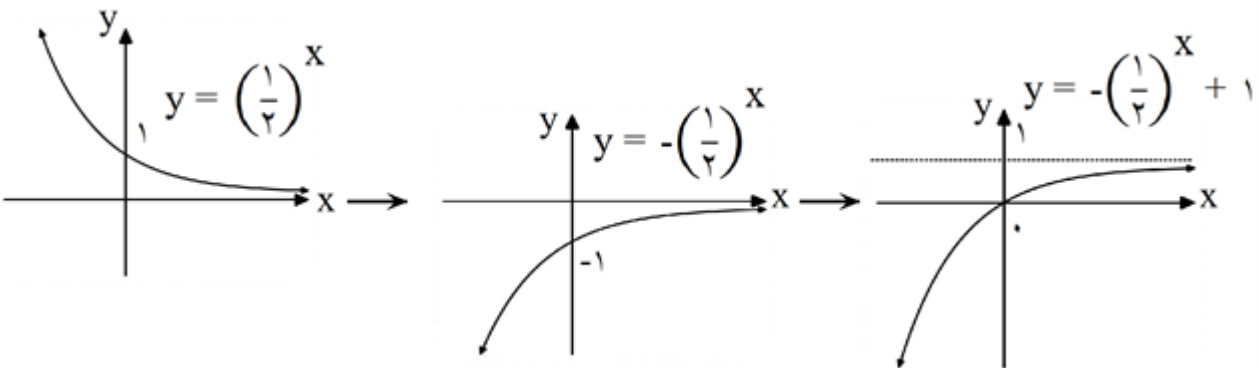
ب)

$$D = (0, +\infty) \xrightarrow{x > 0} y = \frac{x}{x} \text{Log}_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow y = \text{Log}_{\frac{1}{2}} x$$



$$y = -2^{-x} + 1 \Rightarrow y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

۵۱



$$m(t) = 128 \times 2^{-\frac{t}{300}} \quad t = 300$$

۵۲

$$(300) = 128 \times 2^{-\frac{300}{300}} \Rightarrow 128 \times 2^{-10} = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ سال } 300 \text{ بعد از جرم باقی مانده}$$





$$-۴ = \text{Log} \frac{1}{a} \Rightarrow a^{-۴} = \frac{1}{۲} \Rightarrow a^{-۴} = ۲^{-۱} \Rightarrow a^۴ = ۲ \Rightarrow a = ۲^{\frac{1}{۴}} \Rightarrow a = \sqrt[۴]{۲}$$

الف)  $m(t) = ۱ \times ۲^{-\frac{t}{۴}} = ۲^{-\frac{t}{۴}}$

ب)  $۲^{-\frac{t}{۴}} = ۰/۰۱ \Rightarrow \text{Log} ۲^{-\frac{t}{۴}} = \text{Log} ۱۰^{-۲} = -\frac{t}{۴} \text{Log} ۲ = -۲ \Rightarrow -\frac{t}{۴} = \frac{-۲}{\text{Log} ۲}$   
 $\Rightarrow t = \frac{۸}{\text{Log} ۲} = \frac{۸}{۰/۳۰۱} \approx ۲۶ \text{ روز}$

ت) نادرست

پ) نادرست

ب) درست

الف (✓) ۵۶

الف)  $m(t) = ۲^t \Rightarrow \text{Log} \frac{y}{۲} = t$

ب)  $m(t) = ۲^t = ۵۰۰۰ \Rightarrow \text{Log} \frac{۵۰۰۰}{۲} = t \Rightarrow \text{Log} \frac{۵^۴ \times ۲^۳}{۲} = ۴ \text{Log} \frac{۵}{۲} + ۳ \text{Log} \frac{۲}{۲}$   
 $= ۴ \text{Log} \frac{۱۰}{۲} + ۳ = ۴ \left( \text{Log} \frac{۱۰}{۲} - \text{Log} \frac{۲}{۲} \right) + ۳ = ۴ \times \frac{۱}{\text{Log} ۱۰} - ۱ \times ۴ + ۳ = \frac{۴}{۰/۳۰۱} - ۱$

الف)  $۲ \text{Log} \frac{m}{۴} - \text{Log} \frac{m}{۴} - ۳ = ۰ \Rightarrow \text{Log} \frac{m}{۴} = ۳ \Rightarrow m = ۴^۳ = ۶۴$

ب)  $\text{Log}_۲ \frac{۱۲b - ۲۱}{b^۲ - ۳} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۲b - ۲۱}{b^۲ - ۳} = ۴ \Rightarrow ۱۲b - ۲۱ = ۴b^۲ - ۱۲ \Rightarrow ۴b^۲ - ۱۲b + ۹ = ۰$   
 $\Rightarrow (۲b - ۳)^۲ = ۰ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$  غ ق ق

پ)  $x^۲ - ۱ = ۱۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۱ \Rightarrow x = \pm \sqrt{۱۱}$

۵۹ - لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. × مبنا را معلوم نکرده است.

✓ - لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

✓ - تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.

× - تابع لگاریتم محور yها را قطع می‌کند.

✓ - اگر نقطه (b, d) روی نمودار  $y = a^x$  قرار داشته باشد، آن‌گاه (d, b) روی نمودار  $y = \text{Log}_a x$  قرار دارد.

- اگر  $a > b > ۰$  آن‌گاه  $\text{Log}_۱ a < \text{Log}_۱ b$ . × در مبنا ۱ بیش از یک لگاریتم صعودی است.

$$a > b \Rightarrow \text{Log} \frac{a}{۱۰} > \text{Log} \frac{b}{۱۰}$$



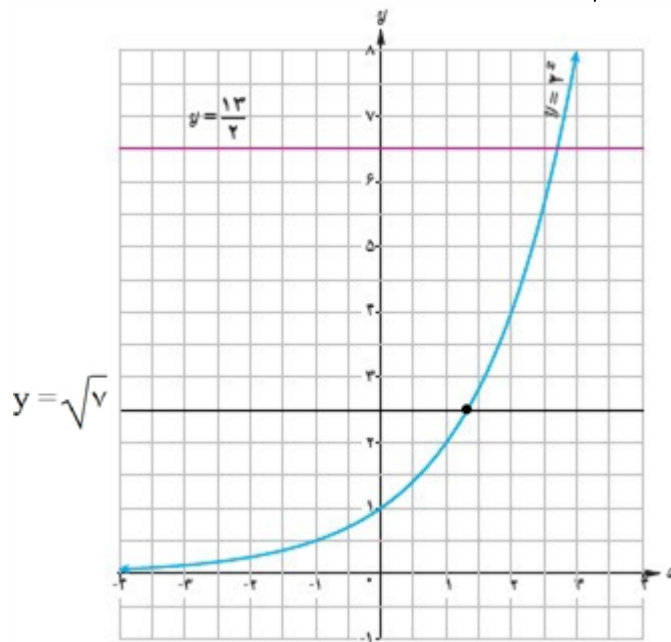
$$\text{الف) } \begin{cases} y = 3^x \\ y = 27 \end{cases} \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{ب) } \begin{cases} y = (0.01)^x \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow (0.01)^x = 10 \Rightarrow 10^{-2x} = 10 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{الف) } 2 < x < 3 \Rightarrow 2^2 < y < 2^3$$

$$\text{ب) } \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

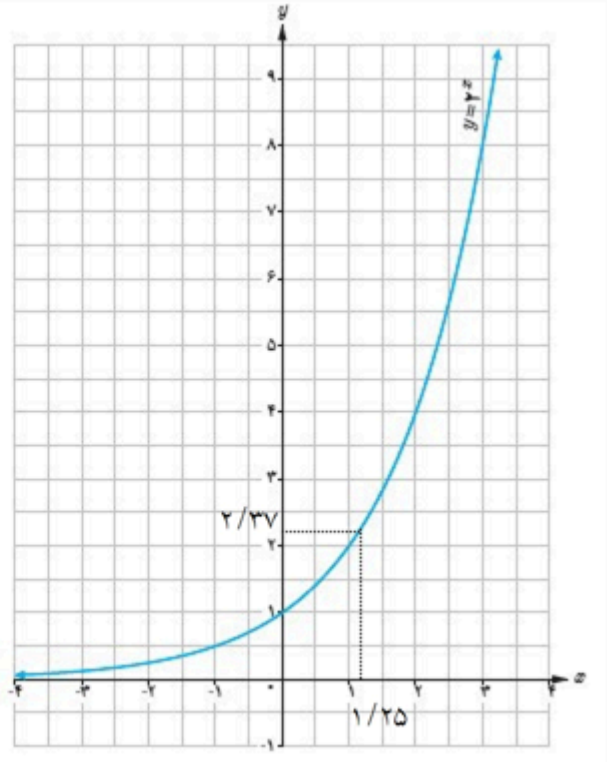
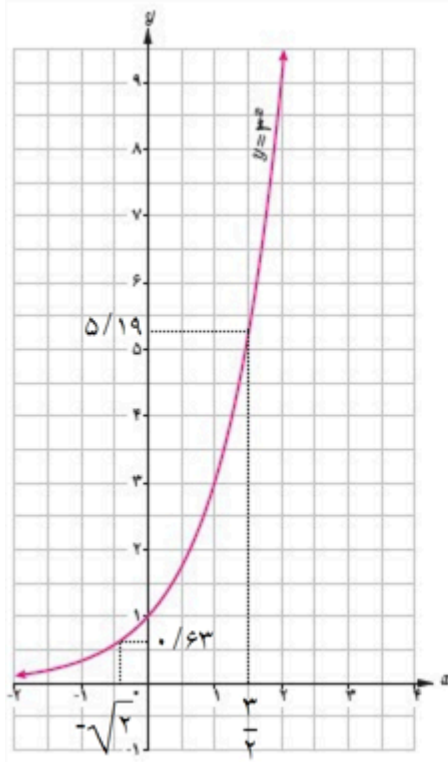
پس  $\sqrt{7}$  بین ۲ و ۳ بین محور y ها است و طول نقطه برخورد خط و منفی بین  $1 < x < 2$  است.



الف)  $3^{1-\sqrt{2}} \approx 0.63$

ب)  $2^{1/25} \approx 2/37$

پ)  $3^{5/19} \approx 5/19$



الف)  $3\sqrt{2}, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{6}$

ب)  $2^{4x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 4x - 2 > -10 \Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow x > -2$

پ)  $x > y > z$

الف)  $m(t) = 100 \times 2^t$

ب)  $m(20) = 100 \times 2^{20}$

$\log_4 x = 3 \Rightarrow x = 4^3 = 64$

ب)  $\log x = -3 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$

الف

ب)  $\log_{3^2} 3^{-4} = \frac{-4}{2}$

ج)  $\log_e \sqrt{e} = \log_e e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

الف)  $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} = \log_{2^{-3}} 2^{-1} = \frac{-1}{-3}$

الف)  $22^{\frac{1}{5}} = 2$

ب)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

ج)  $16^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۸

$$\begin{cases} (\cdot, -2) \Rightarrow -2 = -1 + \log_c b \Rightarrow -1 = \log_c b \Rightarrow c^{-1} = b \Rightarrow b = \frac{1}{c} \\ b - c = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{c} - c = \frac{1}{3} \Rightarrow 3c^2 + 1c - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \times \\ c = \frac{1}{3}, b = 3 \end{cases} \\ \left(\frac{4}{3}, \cdot\right) \Rightarrow \cdot = -1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{3}a + 3 \Rightarrow a = -2 \\ (a + c)b = \left(-2 + \frac{1}{3}\right)(3) = -5 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۹

$$\begin{aligned} \log_{10} (1-x)^2 (1-x)^3 &= 5 \Rightarrow (1-x)^5 = 10^5 \Rightarrow 1-x = 10 \Rightarrow -x = 9 \\ \log_3^{-x} &= \log_3 9 = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۰

$$\begin{aligned} (\cdot/2) \Rightarrow 2 &= 1 - \log_c \frac{-b}{c} \Rightarrow \log_c \frac{-b}{c} = -1 \\ -b &= c^{-1} = \frac{1}{c} \Rightarrow bc = -1 \\ (-1/5, \cdot) \Rightarrow \cdot &= 1 - \log_c \frac{(-1/5)a - b}{c} \Rightarrow \log_c \frac{(-1/5)a - b}{c} = 1 \Rightarrow (-1/5)a - b = c \\ bc &= -1 \left\{ \begin{array}{l} c > 0 \\ b < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{5} \\ b = -2 \end{cases} \\ (-1/5)a - b &= c \Rightarrow (-1/5)a + 2 = \frac{1}{5} \Rightarrow (-1/5)a = -9/5 \Rightarrow a = 9 \\ \Rightarrow (a + c)b &= \left(9 + \frac{1}{5}\right)(-2) = -18 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۱

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_{10} \left( \frac{(y-x)^2}{\frac{1}{(x-y)^2}} \right) &= 3 \Rightarrow -(x-2)^2 = 1000 \Rightarrow x-2 = -10 \Rightarrow x = -8 \\ \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 8 &= 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۲

$$\begin{aligned} f(\cdot) &= \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \quad (1) \\ f(1) &= 0 \Rightarrow 1 + c \times 3^{a+b} = 0 \quad (2) \\ (1) \Rightarrow c \times 3^a &= -\frac{1}{3} \xrightarrow{(2)} 1 + c \times 3^a \times 3^b = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} \times 3^b = 0 \Rightarrow 3^{b-1} = 1 \\ \Rightarrow b-1 &= 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(-1) = 1 + c \times 3^{a-b} = 1 + c \times 3^a \times 3^{-1} = 1 - \frac{1}{3} \times 3^{-1} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\text{Log } ((x - 2)(x^2 + 2x + 4)) = \text{Log } (x^3 - 8) = 3 \Rightarrow x^3 - 8 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Log } \frac{x}{\sqrt[3]{2}} = \text{Log } \frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4$$

پس داریم:

$$\text{Log } 5 = 1 - \text{Log } 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

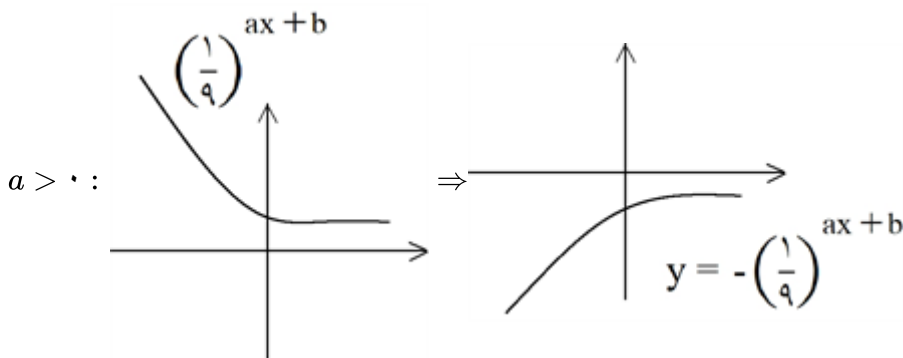
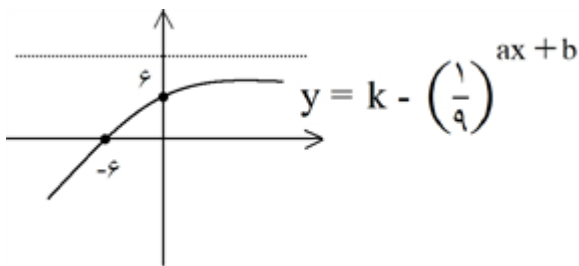
$$\left(\text{Log } \frac{5}{3}\right)x^2 + (\text{Log } 9)x - \text{Log } 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\text{Log } 5 - \text{Log } 3)x^2 + (2 \text{Log } 3)x - (\text{Log } 5 + \text{Log } 3) = 0$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{\text{Log } 5 + \text{Log } 3}{\text{Log } 5 - \text{Log } 3} = -\frac{0.7 + 0.477}{0.7 - 0.477} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{14}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در این حالت حتماً  $k > 0$  و طول از مبدأ منفی و عرض از مبدأ مثبت است.

$$\left. \begin{aligned} f(0) = 6 &\Rightarrow k - \left(\frac{1}{9}\right)^b = 6 \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^b = k - 6 \\ f(-6) = 0 &\Rightarrow k - \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a+b} = 0 \Rightarrow k = \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a+b} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^b = \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a+b} - 6 \Rightarrow 3^{-2b} = 3^{12a-2b} - 6$$

$$3^{-2b}(3^{12a} - 1) = 6 \Rightarrow \begin{cases} -2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = 9 \\ 12a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow bk = \left(-\frac{1}{2}\right)(9) = -4.5$$

برای  $a < 0$  نیز به همین نتیجه می‌رسد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر هفته ۱۲/۵ درصد از دست می‌دهد و ۸۷/۵ درصد باقی ماند یعنی  $\frac{۷}{۸}$  ماده اولیه

باقی مانده است. از طرفی  $\text{Log } \frac{۷}{۳} = \frac{۱۰}{۱۶}$  و  $\text{Log } \frac{۷}{۳} = \frac{۱۰}{۶}$  است.

$$\left(\frac{۷}{۸}\right)^n A = \frac{۱}{۷}A \Rightarrow \left(\frac{۷}{۸}\right)^n = \frac{۱}{۷}$$

$$\text{Log } \left(\frac{۷}{۸}\right)^n = \text{Log } \frac{۱}{۷} = -\text{Log } \frac{۷}{۳}$$

$$n \left( \text{Log } \frac{۷}{۳} - ۳ \text{Log } \frac{۷}{۳} \right) = -\text{Log } \frac{۷}{۳} \Rightarrow n \left( \frac{۱۰}{۶} - \frac{۳۰}{۱۶} \right) = -\frac{۱۰}{۶} \Rightarrow n = ۸ \Rightarrow \text{هفته } ۸ \Rightarrow \text{روز } ۵۶$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار از دو نقطه روی محورها عبور کرده که می‌تواند  $(-۲, ۰)$  یا  $(۲, ۰)$  روی محور  $x$  ها و  $(۰, ۲)$  یا  $(۰, -۲)$  روی محور  $y$  ها باشند. در نتیجه نقاط را به صورت  $(n, ۰)$  و  $(۰, m)$  و  $n = \pm ۲$  و  $m = \pm ۲$  در نظر

$$k + ۴^{na-b} = ۰ \Rightarrow k + \frac{۴^{na}}{۴^b} = ۰ \Rightarrow k = -\frac{۴^{na}}{۴^b} \quad \text{می‌گیریم:}$$

$$k + ۴^{-b} = m \Rightarrow k + \frac{۱}{۴^b} = m \Rightarrow \frac{۱}{۴^b} - \frac{۴^{na}}{۴^b} = m \Rightarrow ۴^{na} - ۱ = -۴^b \times m \Rightarrow ۲^{2na} + ۲^{2b} \times m = ۱$$

$$\xrightarrow[n=۲]{m=-۲} ۲^{2a} - ۲^{2b+1} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲^a = ۱ \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ ۲^{b+1} = ۰ \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{۴^{na}}{۴^b} = ۰ \Rightarrow k + \frac{۴^{\frac{1}{2}}}{۴^{-\frac{1}{2}}} = ۰ \Rightarrow k = -۴ \Rightarrow bk = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-۴) = ۲$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log } ۲ \simeq ۰/۳ \Rightarrow \text{Log } ۵ = ۱ - \text{Log } ۲ \simeq ۰/۷$$

$$\text{Log } ۳ \simeq ۰/۴ \Rightarrow \text{Log } ۶ = \text{Log } ۲ + \text{Log } ۳ \simeq ۰/۷$$

$$x^۲ (\text{Log } ۳۰) + ۲x (\text{Log } ۶) - \text{Log } \frac{۵}{۶} = ۰ \Rightarrow (\text{Log } ۵ + \text{Log } ۶)x^۲ + (۲ \text{Log } ۶)x + (\text{Log } ۶ - \text{Log } ۵)$$

= ۰

$$\xrightarrow{a+c=b} x = -۱, \frac{\text{Log } ۵ - \text{Log } ۶}{\text{Log } ۵ + \text{Log } ۶} \simeq ۰ \xrightarrow{\text{تفاضل}} \simeq |-۱ - ۰| = ۱$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۹

$$A(t) = A \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{A(t)}{A} = \frac{1}{9} \Rightarrow n(2 \log 2 - 2 \log 3) = -(\log 2 + \log 3)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 2 + \log 3}{2 \log 3 - 2 \log 2} = \frac{\log 2 + 1}{2 \log 2 - 2}$$

از طرفی از دو تساوی داده شده داریم:

$$\log_2 3 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2/4}{1/4} = \frac{12}{1} \Rightarrow n = \frac{\frac{12}{1} + 1}{\frac{12}{1} - 2} = \frac{13}{10}$$

یعنی در  $\frac{13}{10}$  ساعت یا ۳۸۰ دقیقه موردنظر حاصل می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۰

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{(2^x)^2 - 1}{2^x}}{\frac{(2^x)^2 + 1}{2^x}} \Rightarrow 2(2^x)^2 - 2 = (2^x)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 = 3 \Rightarrow 2^x = \sqrt{3} \xrightarrow{\log_2} \log_2 2^x = \log_2 \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_2 \sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۱

$$\log_9 b = 1 + \log_3 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 b = \log_3 2 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 b = 2 \log_3 2 + 2 \log_3 5$$

$$\Rightarrow \log_3 b = \log_3 2^2 + \log_3 5^2 \Rightarrow \log_3 b = \log_3 10^2 \Rightarrow b = 10^2$$

$$\log_{10} \sqrt{b} = \log_{10} \sqrt{10^2} = \log_{10} 10 = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۲

$$f(\cdot) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(\cdot) = 2 \Rightarrow 5 - 3^b = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+b} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 - 3^b = 2 \Rightarrow 3^b = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+1} = 4 \Rightarrow 3^{\frac{a}{2}+1} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = 5 - 3^{-2x+1}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5 - 3^{-2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)+1} = 5 - 3^{\frac{1}{2}} = 5 - \sqrt{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5 - \sqrt{3}$$

$$-1 < 5 - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow [5 - \sqrt{3}] = -1$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۳

$$3^x = 0.216 \xrightarrow{\text{Log}} \text{Log } 3^x = \text{Log } \frac{3^x}{3^x} \Rightarrow x = 3 - 3 \text{Log } \frac{5}{3} \Rightarrow \text{Log } \frac{5}{3} = \frac{3-x}{3}$$

$$5^y = 675 \xrightarrow{\text{Log}} \text{Log } 5^y = \text{Log } 675 \Rightarrow y = \text{Log } \frac{5^2 \times 3^2}{5} \Rightarrow y = 2 + 2 \text{Log } \frac{3}{5}$$

$$y = 2 + 2 \left( \frac{3}{3-x} \right) \Rightarrow y = \frac{15-2x}{3-x} \Rightarrow y = \frac{2x-15}{x-3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به علت وجود  $\text{Log } x$  باید  $x > 0$  پس برای اینکه زیر رادیکال منفی نشود، باید: ۸۴

$$\text{Log } x > 0 \Rightarrow \text{Log } x > \text{Log } 1 \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{\cap} 0 < x < 1$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌شود.

$$\text{Log } \frac{m}{n} = a \Rightarrow \frac{\text{Log } m}{\text{Log } n} = a$$

$$b = \text{Log } \frac{m^n}{mn} = \frac{2 \text{Log } m + \text{Log } n}{\text{Log } m + \text{Log } n} = \frac{2a+1}{a+1} = 1 + \frac{a}{a+1} = 1/0.0 \Rightarrow [b] = 1$$

تذکر: برای حل تستی، می‌توانیم  $m = n$  در نظر بگیریم و به راحتی به جواب برسیم.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۶

$$8^{-\frac{1}{2}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{1}{2}n} > \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-2m-2n} + 2^{-2m-2n} > 2^{-7} \Rightarrow 2(2^{-2m-2n}) > 2^{-7}$$

$$\Rightarrow 2^{-2m-2n} > 2^{-8} \Rightarrow -2m-2n > -8 \Rightarrow m+n < 4 \Rightarrow (m, n) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$\text{Max}(m^2 + n^2) = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۷

$$g^{-1}(f^{-1}(\cdot)) = \alpha \Rightarrow f^{-1}(\cdot) = g(\alpha) \Rightarrow \cdot = f(g(\alpha))$$

$$2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3 \quad (\text{Log } 1 = 0) \quad \text{در تابع } f, f(3) = 0 \text{ است زیرا:}$$

$$\Rightarrow g(\alpha) = 3 = \alpha + \sqrt{2\alpha - 4} \Rightarrow 3 - \alpha = \sqrt{2\alpha - 4} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\alpha < 3} \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 2\alpha - 4$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha = -13 \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 = (\alpha - 4)^2 = 3 \Rightarrow \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۸

$$g(1) = 4 \Rightarrow (1, 4) \in f \Rightarrow f(1) = 2 + 2^{b-a} = 4 \Rightarrow b - a = 1 \quad (1)$$

$$f^{-1}(10) = -1 \Rightarrow f(-1) = 10 \Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 10 \Rightarrow 2^{b+a} = 8 \Rightarrow b + a = 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} b = 2, a = 1 \Rightarrow 2b - a = 3$$





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۹

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt[2]{2^{\frac{a}{2}+b}} \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = -b \Rightarrow a = -2b \quad (1)$$

$$f^{-1}(8) = 5 \Rightarrow f(5) = 8 \Rightarrow \sqrt[2]{2^{5a+b}} = 2^3 \Rightarrow 2^{5a+b} = 2^6 \Rightarrow 5a + b = 6$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} -10b + b = 6 \Rightarrow b = -1, a = 2 \Rightarrow a - b = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۰

$$(81)^{-1} \times 9^{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^{-4} \times 3^{2x-2} = (-3)^{-x} \Rightarrow (3)^{2x-6} = (-3)^{-x}$$

$$\xrightarrow{x \text{ زوج باشد}} 2x - 6 = -x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین رابطه  $a^2 + 9b^2 = 10ab$  را با  $ab$  جمع می‌کنیم. ۹۱

$$\Rightarrow a^2 + 6ab + 9b^2 = 16ab \Rightarrow (a + 3b)^2 = 16ab \Rightarrow \left(\frac{a + 3b}{4}\right)^2 = ab$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow \log\left(\frac{a + 3b}{4}\right)^2 = \log ab \Rightarrow 2 \log\left(\frac{a + 3b}{4}\right) = \log a + \log b$$

این یعنی  $\log \frac{a + 3b}{4}$  واسطه حسابی  $\log a$  و  $\log b$  است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۲

$$\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8} = m \Rightarrow \frac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}} = m \Rightarrow \frac{2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} + 1}{3} = m \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \frac{3m - 1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = \frac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} = \frac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + 2}{2} = \frac{\frac{3m-1}{2} + 2}{2} = \frac{3m + 3}{4} = \frac{3}{4}(m + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} (0, 0) \Rightarrow a + b = 0 \\ (-1, -1) \Rightarrow a + 2b = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1, b = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۳



$$\text{فرض: } 5^x = 10 \Rightarrow 5^x = 5 \times 2 \Rightarrow 5^{x-1} = 2 \Rightarrow 5 = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$${}_2f(x) = 20 = 2^2 \times 5 = 2^2 \times 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{2+\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{2x-1}{x-1}} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

راه دوم:

$$5^x = 10 \Rightarrow x = \text{Log}_5 10 = \text{Log}_5 2 + \text{Log}_5 5 = \text{Log}_5 2 + 1 \Rightarrow \text{Log}_5 2 = x - 1$$

$${}_2f(x) = 20 \Rightarrow f(x) = \text{Log}_2 20 = \frac{\text{Log}_5 20}{\text{Log}_5 2} = \frac{\text{Log}_5 2 + \text{Log}_5 10}{\text{Log}_5 2} = \frac{x-1+x}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط به مختصات  $(-1, 0)$  و  $(0, 2)$  در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} (-1, 0) \Rightarrow 0 = a\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + b \Rightarrow 0 = a\left(\frac{2}{1}\right)^{+1} + b \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a (*) \\ (0, 2) \Rightarrow 2 = a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b \Rightarrow a + b = 2(**) \Rightarrow (*), (**): \Rightarrow a - 2a = 2 \\ \Rightarrow a = -2, b = -2a = 4 \\ \Rightarrow f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 \Rightarrow f(1) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$



# پاسخنامه کلیدی

۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴

