



p30konkor.com

عنوان آزمون : حسابان ۱۲ فصل ۴

زمان آزمون :

تاریخ برگزاری

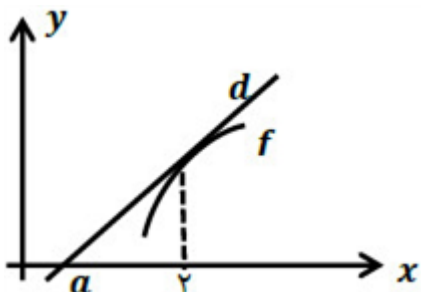
نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

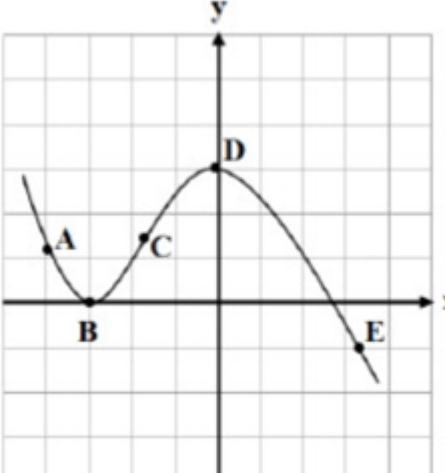
ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.</p> <p>ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>الف) $\text{پاسخ: } 1 \quad \text{آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$</p> <p>ب) $\text{آهنگ لحظه‌ای } f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$</p>	
۲	<p>مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> $f(x) = (x - 1)^3 + \frac{5x + 3}{\sqrt{2x - 1}}$ <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $f'(x) = 3(x - 1)^2 + \frac{5(\sqrt{2x - 1}) - \frac{2}{\sqrt{2x - 1}}(5x + 3)}{(\sqrt{2x - 1})^2}$</p>	
۳	<p>با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4$ را در $x = 2$ بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4$</p>	
۴	<p>اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ فرض کنیم $y = ax + b$، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد:</p> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \Rightarrow a = 3$ $y = 3x + b \xrightarrow{(2, 4)} b = -2 \Rightarrow y = 3x - 2$	
۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>	

	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانیه)</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[3, 4]$ را به دست آورید.</p> <p>ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $20 \frac{m}{s}$ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) روش اول: $\frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$</p> <p>روش دوم: $h'(3/5) = -10(3/5) + 40 = 5$</p> <p>ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$</p>	۶
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (\sqrt{3x + 2})$</p> <p>ب) $g(x) = \sin^3 x + \tan(x^2)$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = 2 \times 2x (x^2 + 1) (\sqrt{3x + 2}) + \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}} (x^2 + 1)^2$</p> <p>ب) $g'(x) = 2 \times 3 \times \cos^2 x \sin^2 x + 2x (1 + \tan^2(x^2))$</p> <p>اگر دانش‌آموزی به صورت $3 \sin^6 x$ بنویسید، نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.</p>	۷
	<p>اگر $f'(1) = 3$، $g'(1) = 5$ و $f(1) = 1$، مقدار مشتق $(f + g)$ در $x = 1$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$((f + g) \text{ of})'(1) = f'(1) \times (f + g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3 + 5) = 24$</p>	۸
	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ f پیوسته است.</p> <p>مشتق ناپذیر $f'_-(0) \neq f'_+(0)$</p> <p>$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x - 0}{x} = -1$</p> <p>$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$</p>	۹
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$، خط مماس بر نمودار f در $x = 4$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ -۹</p>	۱۰

	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^3 + t - 1$ است: الف) سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید. ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>الف) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$</p> <p>ب) $f'(t) = 6t^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۱۱
	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^4 - 2x)$</p> <p>ب) $g(x) = \frac{3x + 1}{x^5 - x + 1}$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>الف) $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^4 - 2x) + (4x^3 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(3x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۱۲
	<p>خط d در نقطه با طول $x = 2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور xها) را بیابید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$</p> <p>$d : (2, 3), (a, 0) : 2 = \frac{3 - 0}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۱۳
	<p>آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x + 5}$ را وقتی متغیر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۱۴

	<p>اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند. حاصل $(f \times g)'(1) + (f + g)'(4)$ را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $(f + g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (2 \times 4) + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 8 + \frac{1}{4}$ $f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (2)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 2 + \frac{3}{2}$ $(f + g)'(4) + (f \times g)'(1) = 8 + \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$	۱۵
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sin x}$ ب) $g(x) = \cos^2(x^2)$ پ) $h(x) = (3x + 5)^6$</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = \frac{5(1 + \tan^2 x)(1 - \sin x) - (-\cos x)(5 \tan x)}{(1 - \sin x)^2}$ ب) $g'(x) = -2 \cos^2(x^2) \times 2x \times \sin(x^2)$ پ) $h'(x) = 6 \times 3 \times (3x + 5)^5$</p>	۱۶
	<p>تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$ <p>$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.</p>	۱۷
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ برقرار باشد.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>	۱۸

	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 + 2t + 3$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 2]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 2]$ با هم برابرند؟</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(t) = 2t + 2$ $\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$ $2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1$	۱۹
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $g(x) = \frac{(2x - 1)^4}{x^3 + 8}$</p> <p>ب) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{الف) } g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x - 1)^3 (x^3 + 8) - 3x^2 (2x - 1)^4}{(x^3 + 8)^2}$ $\text{ب) } f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x + 1)^2}}$	۲۰
	<p>اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ آن‌گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$	۲۱
	<p>جمله‌ی زیر را کامل کنید.</p> <p>اگر $f(x) = -x^3$ آن‌گاه $f''(1)$ برابر است با</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ -۶</p>	۲۲
	<p>تابعی با ضابطه $f(x) = \frac{3x - 6}{x^2 + 2}$ را در نظر بگیرید:</p> <p>الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-2, 0]$ را به دست آورید.</p> <p>ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = -1$ را به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{الف) } \frac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$ $\text{ب) } f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x + 6}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -1$	۲۳

۲۴	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) $f(x) = (x^4 + 2x)(\sqrt{x})$ ب) $g(x) = 3 \operatorname{tg} x - \sin^2(x)$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f(x) = (x^4 + 2x)(\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = (4x^3 + 2)(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^4 + 2x)$</p> <p>ب) $g(x) = 3 \operatorname{tg} x - \sin^2(x) \Rightarrow g'(x) = 3(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 2 \sin x \cos x$</p>
۲۵	<p>با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی نمایید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} = +\infty$ <p>تابع در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.</p>
۲۶	<p>با توجه به نمودار تابع مقابل:</p> <p>الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟</p> <p>ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟</p> <p>پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟</p> <p>ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ الف) E ب) B پ) C ت) $m_D > m_A$</p>
۲۷	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۲۸	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = ۲x^۲ + ۵x + ۱$ در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۲, ۰]$ است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = ۴x + ۵ \Rightarrow f'(۲) = ۱۳$$

$$\frac{f(۰) - f(-۲)}{۰ - (-۲)} = \frac{۱ - (-۱)}{۲} = ۱$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = ۲$ ، ۱۳ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۲, ۰]$ است.

پاسخ: ۱

۲۹

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۴)$

ب) $g(x) = \frac{-۷x^۲+۱}{x-۶}$

پ) $h(x) = (۲x^۵-۱)^۴$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

الف) $f'(x) = \frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^۳+۴) + ۳x^۲(\sqrt{۳x+۲})$

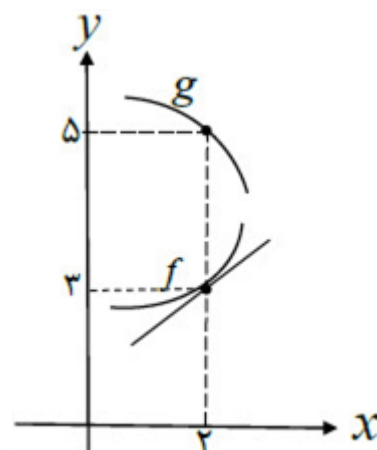
ب) $g'(x) = \frac{(-۱۴x)(x-۶) - (۱)(-۷x^۲+۱)}{(x-۶)^۲}$

پ) $h'(x) = ۴(۲x^۵-۱)^۳(۱۰x^۴)$

پاسخ: ۱

۳۰

با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x)g(x) - ۳g(x)}{x-۲}$ چند برابر $f'(۲)$ است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x)g(x) - ۳g(x)}{x-۲} = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x)g(x) - f(۲)g(۲)}{x-۲} = \lim_{x \rightarrow ۲} g(x) \frac{f(x) - f(۲)}{x-۲}$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۲} g(x) \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x-۲} = ۵f'(۲)$$

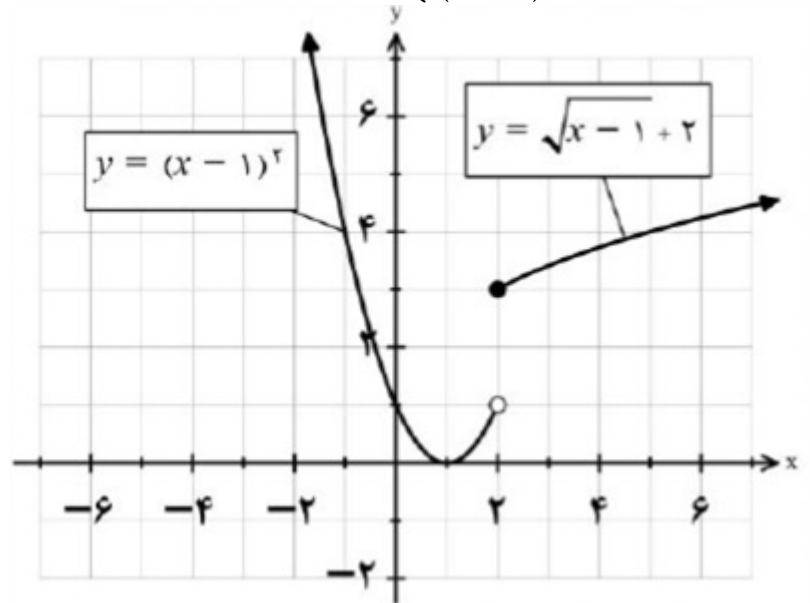
پاسخ: ۱

۳۱

	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. - نقطه $(1, 1)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = 2 - x^2$ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>	۳۲
	<p>در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{120}{t} + 5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه $t = 2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[4, 6]$ را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$ $\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{4} + 5\right)}{6 - 4} = \frac{25 - 35}{2} = -5$ $\Rightarrow -30 - 5 = -35$	۳۳
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (5x^3 - x)^4 (\sqrt{2x+1})$ ب) $g(x) = \frac{4 \tan x}{3x^2 - 1}$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = 4(15x^2 - 1)(5x^3 - x)^3 (\sqrt{2x+1}) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)(5x^3 - x)^4$ (ص ۹۴)</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{4(1 + \tan^2 x)(3x^2 - 1) - (6x) \times (4 \tan x)}{(3x^2 - 1)^2}$ (ص ۹۶)</p>	۳۴
	<p>اگر $f(x) = \cos 2x$ باشد، مقدار $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = -4 \cos 2x$ $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \sqrt{2}$ (ص ۱۰۱)	۳۵
	<p>با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $f(x) = \sqrt{x}$، $x > 0$، آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ص ۹۳) <p>(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)</p>	۳۶

	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x < 1 \\ 2x^2 - 3 & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ تابع پیوسته است.</p> $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x - 1} = 4$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x - 1} = 3$ <p>در نقطه $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است. $f'_+(1) \neq f'_-(1)$</p> <p>(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)</p>	۳۷
	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید.</p> <p>الف) سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید.</p> <p>ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $\text{سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$</p> <p>ب) $h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$</p>	۳۸
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ب) $g(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$</p> <p>ب) $g'(x) = 2 \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2}\right)$</p>	۳۹

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت مقابل است:



۴۰

الف) آیا تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است؟

ب) آیا تابع در بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x = 2$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) خیر - چون ناپیوسته است.

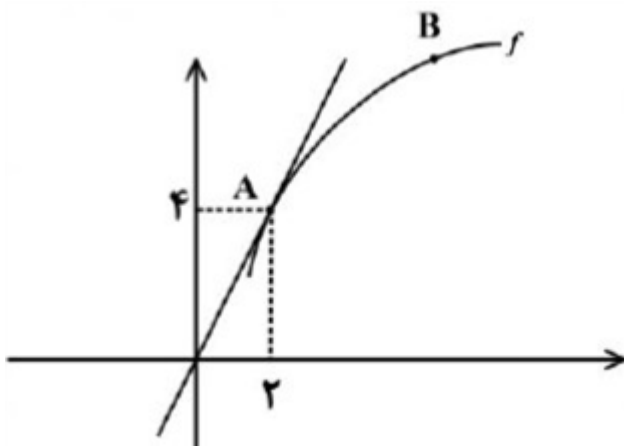
ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است.

پ) $x \geq 2 : f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2}$

نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



۴۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{4}{2} = 2$

ب) $m_A > m_B$

پاسخ: ۱

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

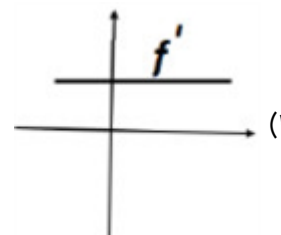
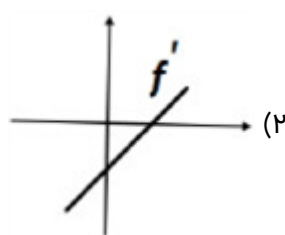
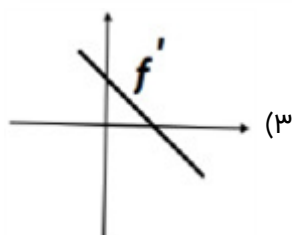
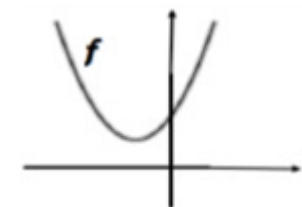
$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$$

۴۲

با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۴۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
	نزولی	صعودی
f		
f'	-	+

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

ب) $g(x) = \cos^2(2x) - \frac{1}{x}$

الف) $f(x) = \sqrt[3]{x}(3x^2 + 2)$

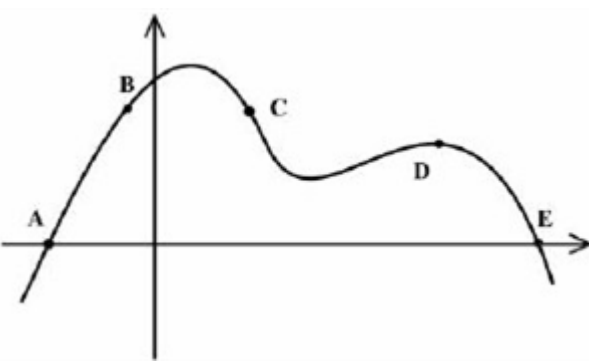
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

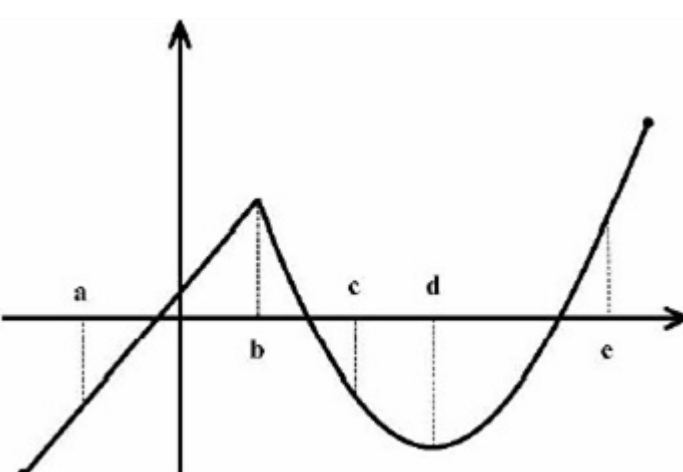
الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt[3]{x}}(3x^2 + 2) + \sqrt[3]{x}(6x)$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = 2(-2 \sin 2x)(\cos^2 2x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

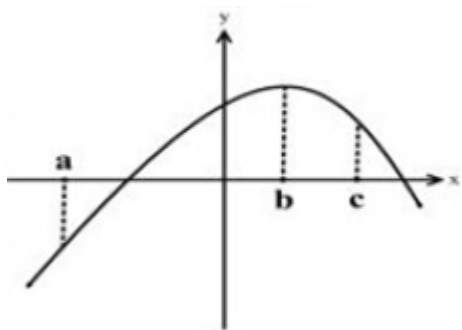
۴۴

۴۵	<p>معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = ۰$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(۰) = m = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\sqrt[3]{x} - ۰}{x} = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{۱}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, A(۰, ۰)$ <p>معادله مماس قائم: $x = ۰$</p>
۴۶	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = \frac{-۲x + ۳}{x + ۴}$</p> <p>ب) $g(x) = (\sqrt{۳x + ۱})(x^۲ + ۲x)$</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = \frac{-۲(x + ۴) - ۱(-۲x + ۳)}{(x + ۴)^2}$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۱}}(x^۲ + ۲x) + (۲x + ۲)(\sqrt{۳x + ۱})$</p>
۴۷	<p>معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = x^۲ - ۱$ را در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ واقع بر منحنی بنویسید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'_{+}(۱) = \lim_{x \rightarrow ۱^{+}} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \rightarrow ۱^{+}} \frac{ x^۲ - ۱ - ۰}{x - ۱} = ۲ \Rightarrow y - ۰ = ۲(x - ۱)$
۴۸	<p>از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:</p> <p>الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟</p> <p>ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟</p>  <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ الف) A ب) C</p>
۴۹	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- تابع $[x](x^۲ - ۱)$ در $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>

	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t + 3$ برحسب متر است. (t برحسب ثانیه است). الف) سرعت متوسط تابع در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید. ب) سرعت لحظه‌ای تابع را در $t = 4$ به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>الف) $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$</p> <p>ب) $f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۵۰
	<p>با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است طول نقطه‌ای که: الف) تابع در آن مشتق‌پذیر نیست. ب) مماس در آن موازی محور طول‌هاست پ) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.</p>  <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>الف) b ب) d پ) e</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۵۱
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (4x^2 - 5x)^3 (\sqrt{x} + 1)$ ب) $g(x) = \frac{9x + 1}{x - x^2}$ پ) $h(x) = \sin(3x^2)$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>الف) $f'(x) = 3(4x^2 - 5x)^2 (8x - 5)(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2 - 5x)^3$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{9(x - x^2) - (1 - 2x)(9x + 1)}{(x - x^2)^2}$</p> <p>پ) $h'(x) = 6x \cos(3x^2)$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۵۲

	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در $x = 1$ پیوسته است.</p> $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$ <p>$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.</p>	۵۳
	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. <u>سرعت متوسط</u> را در بازه زمانی $[0, 5]$ و <u>سرعت لحظه‌ای</u> را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$ $f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$	۵۴
	<p>مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> $f(x) = \sqrt{\frac{9x - 2}{x + 1}}$ <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = \frac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$	۵۵
	<p>اگر $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < 0 \\ x^2 + 3x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است.</p> $f'_+(0) = 3 \Rightarrow a = 3$ $f'_-(0) = a$	۵۶
	<p>اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times 8 + 3(-6) = 22$	۵۷

با توجه به نمودار تابع f ، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_c, m_b, m_a نمایش داده شود. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



$m_c = m_b = m_a$ (۴)
 $m_a > m_b > m_c$ (۳)
 $m_b > m_a > m_c$ (۲)
 $m_c > m_b > m_a$ (۱)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵۸

اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$$

پاسخ: ۱

۵۹

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5 (2x)$

ب) $g(x) = 5 \operatorname{tg} x + \sin x^2$

پ) $h(x) = \frac{2}{x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) $f'(x) = 5(-6x + 1)(-3x^2 + x)^4 (2x) + (2)(-3x^2 + x)^5$

ب) $g'(x) = 5(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x \cos x^2$

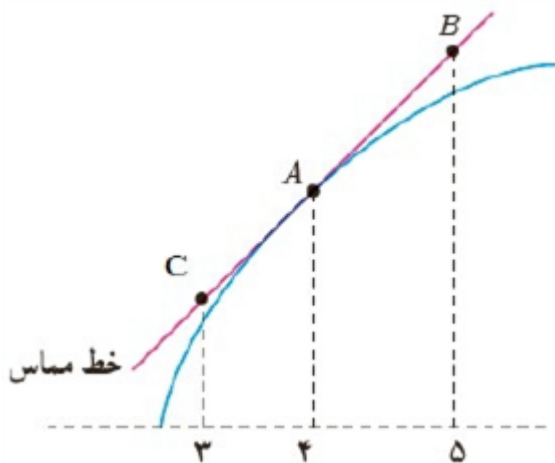
پ) $h'(x) = \frac{-2}{x^2}$

پاسخ: ۱

۶۰

۶۱

برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4}$$

$$B(5, 26/5), C(3, 23/5)$$

پاسخ: ۱

۶۲

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (x^2 - 6)^2 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right)$

ب) $g(x) = \sin^2(5x)$

پ) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

الف) $f'(x) = 2(2x)(x^2 - 6)^2 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) + \frac{1}{4}(x^2 - 6)^2$

ب) $g'(x) = 10 \sin^2(5x) \cos(5x)$

پ) $h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)(x^3 - 2x + 1) - (3x^2 - 2)(\sqrt{x})}{(x^3 - 2x + 1)^2}$

پاسخ: ۱

۶۳

دوچرخه‌سواری طبق معادله $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 6$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چه قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

$$d'(t) = t^2 + 10 \Rightarrow d'(2) = 14$$

پاسخ: ۱

۶۴

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 2x - 4$ را در $x = 2$ بررسی کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.</p> $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ 2x-4 }{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ 2x-4 }{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2 \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$	۶۵
	<p>برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور xها معادله خط مماس را بنویسید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$ $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(2) = 12, y - 0 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 24$	۶۶
	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^3 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (ت برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$ $\text{سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$	۶۷
	<p>جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.</p> <p>- اگر $f'(5) = 2$ و $g'(5) = -1$ در این صورت $(2f - g)'(5)$ برابر با است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ ۵</p>	۶۸
	<p>در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x + 2 & x \geq -1 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند، ولی $f'(-1)$ موجود نیست.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ $f'(-1)$ موجود نیست.</p> $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2-1}{x+1} = 1$ $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-1}{x+1} = -2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$	۶۹

	<p>مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$ <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در $x = 1$ پیوسته است.</p> $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3 - (-1)}{x - (-1)} = -2$ $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 6 - (-2)}{x - (-1)} = 2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ <p>$f'(-1)$ موجود نیست.</p>	۷۰
	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^2 + 1)$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2)$</p> <p>ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x + 2}} \right) (x^2 + 1) + (\sqrt{3x + 2})(2x)$</p>	۷۱
	<p>اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$	۷۲
	<p>اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در $x = 0$ پیوسته است.</p> $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$ $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$ <p>$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس مشتق تابع در $x = 0$ موجود نیست.</p>	۷۳
	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x + 2}}$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x + 1)^4 (2x + 2)$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x + 2}) - \frac{x}{\sqrt{3x + 2}}}{(\sqrt{3x + 2})^2}$</p>	۷۴

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.
الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چه قدر است؟

۷۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

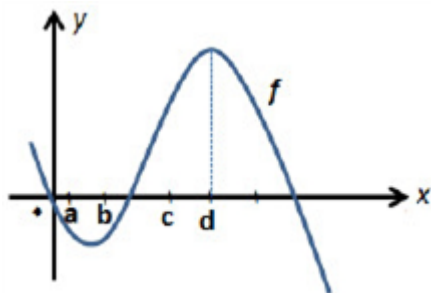
$$\text{آهنگ تغییر متوسط (الف)} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) آهنگ لحظه‌ای (ب)} \quad f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2}$$

با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a, b, c, d و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵



۷۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

x	a	b	c	d
$f'(x)$	-۰/۵	۰/۵	۲	۰

پاسخ: ۱

تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در لحظه $t = 4$ از آهنگ متوسط تغییر تابع f از لحظه $t = 3$ تا $t = 5$ چه مقدار بیش‌تر است؟

۷۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

پاسخ: ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

$$-15 - (-16) = 1$$

جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

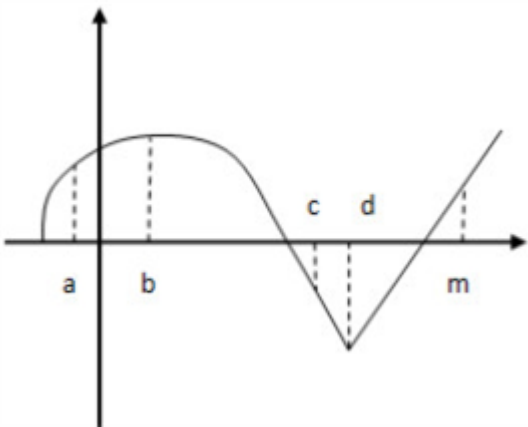
- شیب خط مماس بر منحنی $y = 1 - 5x^2 - 2x$ در نقطه‌ای به طول ۲- واقع بر آن برابر است.

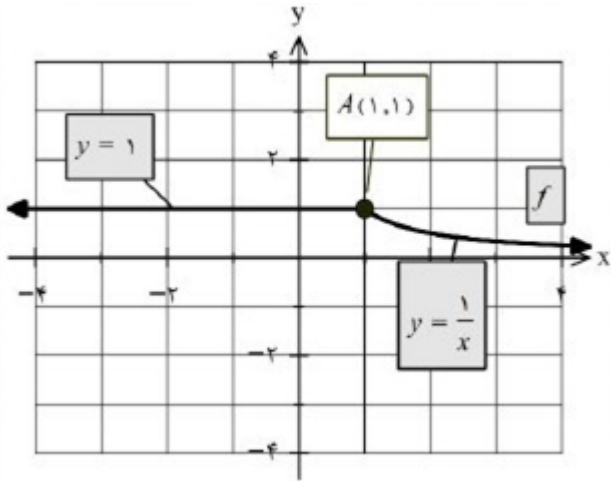
۷۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

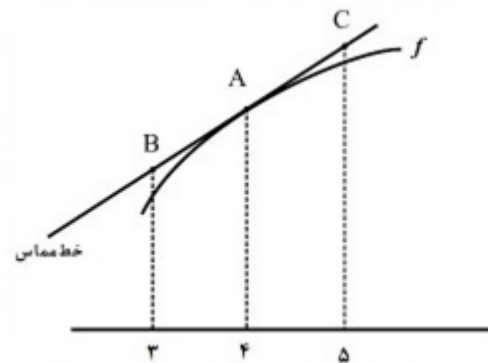
پاسخ: ۱ ۱۸

	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - x)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$ $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4$ $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4 \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) \text{ است}$ <p>تابع مشتق‌پذیر است</p>	۷۹
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = \frac{4 \sin \frac{x}{3}}{x^2 + \sqrt{x}}$</p> <p>ب) $g(x) = 3x(x^2 - 6x)^2 + \cos 2x$</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = \frac{\left(2 \cos \frac{x}{3}\right)(x^2 + \sqrt{x}) - \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(4 \sin \frac{x}{3}\right)}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$</p> <p>ب) $g'(x) = 3 \times (x^2 - 6x)^2 + (3 \times (2x - 6)(x^2 - 6x)) \times 3x - 2 \sin 2x$</p>	۸۰
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (\sqrt{3x+1})(2x^3 - 1)$</p> <p>ب) $g(x) = 3 \operatorname{tg}^2 x + \cos x^2$</p> <p>پ) $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{5x}$</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(2x^3 - 1) + (\sqrt{3x+1})(6x^2)$</p> <p>ب) $g'(x) = 6 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x(-\sin x^2)$</p> <p>پ) $h'(x) = \frac{(2x - 3)(5x) - (5)(x^2 - 3x)}{(5x)^2}$</p>	۸۱
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>	۸۲

	<p>با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.</p> <p>ب) طول نقطه «گوشه‌ای» را بنویسید.</p> <p>پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.</p>  <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) $x = b$</p> <p>ب) $x = d$</p> <p>پ) $x = c$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۸۳
	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. مطلوب است:</p> <p>الف) سرعت متوسط در بازه $[1, 2]$</p> <p>ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) سرعت متوسط $\frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25$</p> <p>ب) سرعت لحظه ای $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۸۴
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>- اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ پیوسته</p>	۸۵
	<p>معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در نقطه $A(1, f(1))$ به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>$f(1) = -1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = x - 2$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۸۶

	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = \frac{x^9 - 2}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^9 - 2)}{(\sqrt{x})^2}$ پاسخ: ۱</p> <p>ب) $g'(x) = (6x)(2x - 5)^3 + (3)(2)(2x - 5)^2(3x^2 - 4)$</p>	۸۷
	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید:</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.</p> <p>ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $35 \frac{m}{s}$ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25$ پاسخ: ۱</p> <p>ب) $h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$</p>	۸۸
	<p>با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی A، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$ $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پاسخ: ۱</p> <p>$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0$</p> <p>$f'(1)$ موجود نیست.</p>	۸۹

برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$$

$$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$$

پاسخ: ۱

الف) $\text{آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$

ب) $\text{آهنگ لحظه ای } f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + \frac{5(\sqrt{2x-1}) - \frac{2}{\sqrt{2x-1}}(5x+3)}{(\sqrt{2x-1})^2}$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

۴ فرض کنیم $y = ax + b$ ، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$y = 3x + b \xrightarrow{(2,4)} b = -2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

۵ نادرست

الف) $\frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$

دوم $\text{سرعت متوسط} = h'(3/5) = -10(3/5) + 40 = 5$

ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$

الف) $f'(x) = 2 \times 3x^2(x^2 + 1)(\sqrt{3x+2}) + \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^2 + 1)^2$

ب) $g'(x) = 2 \times 3 \times \cos 3x \sin 3x + 2x(1 + \tan^2(x^2))$

(اگر دانش‌آموزی به صورت $3 \sin^2 x$ بنویسد، نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$$((f+g) \circ f)'(1) = f'(1) \times (f+g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3 + 5) = 24$$

۹ f پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \text{ مشتق ناپذیر}$$

۱۰ -۹

$$\text{الف)} \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$$

$$\text{ب)} f'(t) = 6t^5 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25$$

$$\text{الف)} f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x^5 - 2x) + (5x^4 - 2)(\frac{1}{2}\sqrt{x} + 1)$$

$$\text{ب)} g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(3x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$$

$$d: (2, 3), (a, 4) : 2 = \frac{4 - 3}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$(f + g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (6(4)^5) + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 96 + \frac{1}{4}$$

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (6)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3) = 6 + \frac{3}{2}$$

$$(f + g)'(4) + (f \times g)'(1) = 96 + \frac{1}{4} + 6 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$$

$$\text{الف)} f'(x) = \frac{5(1 + \tan^2 x)(1 - \sin x) - (-\cos x)(5 \tan x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\text{ب)} g'(x) = -5 \cos^5(x^5) \times 5x \times \sin(x^5)$$

$$\text{پ)} h'(x) = 6 \times 3 \times (3x + 5)^5$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

۱۸ نادرست

$$f'(t) = 2t + 2$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$$

$$2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{الف)} \quad g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x - 1)^2 (x^2 + 8) - 2x^2 (2x - 1)^2}{(x^2 + 8)^2}$$

۲۰

$$\text{ب)} \quad f'(x) = \frac{2}{2\sqrt[2]{(2x+1)^2}}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

۲۱

-۶

۲۲

$$\text{الف)} \quad \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

۲۳

$$\text{ب)} \quad f'(x) = \frac{-2x^2 + 12x + 6}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -1$$

$$\text{الف)} \quad f(x) = (x^2 + 2x)(\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = (2x + 2)(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 2x)$$

۲۴

$$\text{ب)} \quad g(x) = 2 \operatorname{tg} x - \sin^2(2x) \Rightarrow g'(x) = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 4 \sin^2 2x \cos 2x$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{(x-2)^3}} = +\infty$$

۲۵

تابع در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

ت) $m_D > m_A$

پ) C

ب) B

الف) E

۲۶

نادرست

۲۷

درست

۲۸

$$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13$$

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

۲۹

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$ ، برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است.

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^2 + 2) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$$

۳۰

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{(-14x)(x-6) - (1)(-2x^2 + 1)}{(x-6)^2}$$

$$\text{پ)} \quad h'(x) = 2(2x^5 - 1)^2(10x^4)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5f'(2)\end{aligned}$$

۳۱

۳۲ نادرست

$$f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$$

۳۳

$$\begin{aligned}\text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{4} + 5\right)}{6 - 4} = \frac{20 - 30}{2} = -5 \\ &\Rightarrow -30 - 5 = -35\end{aligned}$$

$$\text{الف)} \quad f'(x) = (15x^2 - 1)(2x^2 - x)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2x+1}) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)(2x^2 - x) \quad (\text{ص ۹۴})$$

۳۴

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{4(1 + \tan^2 x)(3x^2 - 1) - (6x) \times (4 \tan x)}{(3x^2 - 1)^2} \quad (\text{ص ۹۶})$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = -4 \cos 2x$$

۳۵

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\sqrt{2} \quad (\text{ص ۱۰۱})$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ص ۹۳})\end{aligned}$$

۳۶

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)

۳۷ تابع پیوسته است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x - 1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x - 1} = 3$$

در نقطه $x = 1$ مشتق ناپذیر است. $f'_+(1) \neq f'_-(1)$

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)

$$\text{الف)} \quad \text{سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$$

۳۸

$$\text{ب)} \quad h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$$

الف) $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

ب) $g'(x) = 3 \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^2 \left(\frac{3(x+1) - 1(3x-1)}{(x+1)^3} \right)$

۴۰ الف) خیر - چون ناپیوسته است.

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است.

پ) $x \geq 2 : f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{4}{2} = 2$

ب) $m_A > m_B$

$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$

۴۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f'

محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می کند.

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}(3x^2 + 2) + \sqrt{3x}(2x)$

ب) $g'(x) = 3(-2 \sin 2x)(\cos 2x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$f'(0) = m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, A(0, 0)$

معادله مماس قائم: $x = 0$

الف) $f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$

ب) $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2 + 2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$

ب) C

الف) A

الف) $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$

۵۰

ب) $f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$

پ) e

د) b

الف) ۵۱

الف) $f'(x) = 3(4x^2 - 5x)^2(8x - 5)(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2 - 5x)^2$

۵۲

ب) $g'(x) = \frac{9(x - x^2) - (1 - 2x)(9x + 1)}{(x - x^2)^2}$

پ) $h'(x) = 8x \cos(3x^2)$

۵۳ تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نمی باشد.

$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$

۵۴

$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$

$f'(x) = \frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$

۵۵

۵۶ تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

$f'_+(0) = 3, f'_-(0) = a \Rightarrow a = 3$

$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times 8 + 3(-6) = 22$

۵۷

۵۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$f'(t) = 2t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 2t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$

۵۹

الف) $f'(x) = 5(-6x + 1)(-3x^2 + x)^4(2x) + (2)(-3x^2 + x)^5$

۶۰

ب) $g'(x) = 5(1 + \tan^2 x) + 2x \cos x$

پ) $h'(x) = \frac{-2}{x^2}$

$$A(۴, ۲۵) \Rightarrow ۱/۵ = \frac{y_B - ۲۵}{۵ - ۴}$$

$$B(۵, ۲۶/۵), C(۳, ۲۳/۵)$$

$$\text{الف) } f'(x) = ۳(۲x)(x^۲ - ۶)^۲ \left(\frac{۱}{۴}x + ۱ \right) + \frac{۱}{۴}(x^۲ - ۶)^۲$$

$$\text{ب) } g'(x) = ۱۵ \sin^۲(۵x) \cos(۵x)$$

$$\text{پ) } h'(x) = \frac{\left(\frac{۱}{\sqrt{x}} \right)(x^۳ - ۲x + ۱) - (۳x^۲ - ۲)(\sqrt{x})}{(x^۳ - ۲x + ۱)^۲}$$

$$d'(t) = t^۲ + ۱۰ \Rightarrow d'(۲) = ۱۴$$

۶۱

۶۲

۶۳

۶۴ درست

۶۵

تابع در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد.

$$f'_{+}(۲) = \lim_{x \rightarrow ۲^{+}} \frac{|۲x - ۴|}{x - ۲} = \lim_{x \rightarrow ۲^{+}} \frac{۲(x - ۲)}{x - ۲} = ۲$$

$$f'_{-}(۲) = \lim_{x \rightarrow ۲^{-}} \frac{|۲x - ۴|}{x - ۲} = \lim_{x \rightarrow ۲^{-}} \frac{-۲(x - ۲)}{x - ۲} = -۲$$

$$\Rightarrow f'_{+}(۲) \neq f'_{-}(۲)$$

$$x^۲ - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow (۲, ۰)$$

$$f'(x) = ۳x^۲ \Rightarrow m = f'(۲) = ۱۲, y - ۰ = ۱۲(x - ۲) \Rightarrow y = ۱۲x - ۲۴$$

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(۵) - f(۰)}{۵ - ۰} = ۴$$

$$\text{سرعت لحظه ای} \Rightarrow f'(t) = ۲t - ۱ = ۴ \Rightarrow t = \frac{۵}{۲}$$

۶۶

۶۷

۵ ۶۸

۶۹ $f'(-۱)$ موجود نیست.

$$f'_{+}(-۱) = \lim_{x \rightarrow (-۱)^{+}} \frac{x + ۲ - ۱}{x + ۱} = ۱$$

$$f'_{-}(-۱) = \lim_{x \rightarrow (-۱)^{-}} \frac{x - ۱}{x + ۱} = -۲$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-۱) \neq f'_{-}(-۱)$$

$$f'_{+}(-۱) = \lim_{x \rightarrow -۱^{+}} \frac{x^۲ + ۳ - ۴}{x - (-۱)} = -۲$$

$$f'_{-}(-۱) = \lim_{x \rightarrow -۱^{-}} \frac{۲x + ۶ - ۴}{x - (-۱)} = ۲$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-۱) \neq f'_{-}(-۱)$$

۷۰ تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

$f'(-۱)$ موجود نیست.

الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2)$

ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(2x)$

$3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$

$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$

تابع در $x = \cdot$ پیوسته است.

$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \cdot$

$f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ پس مشتق تابع در $x = \cdot$ موجود نیست.

الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x + 1)^4 (2x + 2)$

ب) $g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x+2}) - \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}}{(\sqrt{3x+2})^2}$

الف) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$

ب) $f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2}$

x	a	b	c	d
$f'(x)$	-0.5	0.5	2	0

$f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$

آهنگ متوسط $= \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$

$-15 - (-16) = 1$

$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$

$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4$

$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4 \Rightarrow f'_+(\cdot) = f'_-(\cdot)$ تابع مشتق‌پذیر است

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)(x^2 + \sqrt{x}) - \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$$

۸۰

$$\text{ب)} \quad g'(x) = 2 \times (x^2 - 2x)^2 + (2 \times (2x - 2)(x^2 - 2x)^2) \times 2x - 2 \sin 2x$$

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}}(2x^2 - 1) + (\sqrt{2x} + 1)(2x^2)$$

۸۱

$$\text{ب)} \quad g'(x) = 2 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x(-\sin x^2)$$

$$\text{پ)} \quad h'(x) = \frac{(2x - 2)(5x) - (5)(x^2 - 2x)}{(5x)^2}$$

۸۲ نادرست

$$\text{الف)} \quad x = b$$

$$\text{ب)} \quad x = d$$

$$\text{پ)} \quad x = c$$

۸۳

$$\text{الف)} \quad \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ سرعت متوسط}$$

۸۴

$$\text{ب)} \quad h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10 \text{ سرعت لحظه ای}$$

۸۵ پیوسته

$$f(1) = -1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = x - 2$$

۸۶

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۸۷

$$\text{ب)} \quad g'(x) = (2x)(2x - 5)^2 + (2)(2)(2x - 5)^2(3x^2 - 4)$$

$$\text{الف)} \quad \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25$$

۸۸

$$\text{ب)} \quad h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$$

$$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = 1$$

۸۹

$f'(1)$ موجود نیست.



$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$$

$$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$$



