



p30konkor.com

عنوان آزمون : ریاضی تجربی ۱۲ - فصل ۴

زمان آزمون :

تاریخ برگزاری

نام و نام خانوادگی :

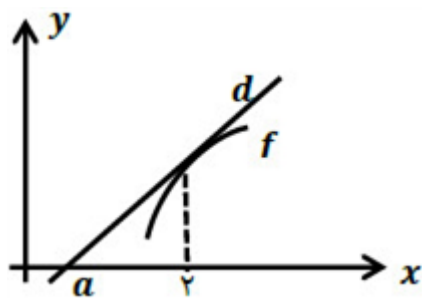
پایه تحصیلی :

نام دبیر :

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.</p> <p>ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>الف) $\text{پاسخ: } 1 \quad \text{آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$</p> <p>ب) $\text{آهنگ لحظه‌ای } f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$</p>	
۲	<p>مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> $f(x) = (x - 6)^3 + \frac{5x + 3}{\sqrt{2x - 1}}$ <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $f'(x) = 3(x - 6)^2 + \frac{5(\sqrt{2x - 1}) - \frac{2}{\sqrt{2x - 1}}(5x + 3)}{(\sqrt{2x - 1})^2}$</p>	
۳	<p>اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ فرض کنیم $y = ax + b$، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد:</p> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \Rightarrow a = 3$ $y = 3x + b \xrightarrow{(2, 4)} b = -2 \Rightarrow y = 3x - 2$	
۴	<p>با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4$ را در $x = 2$ بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $f'_{-}(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4$</p>	

۵	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانویه)</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[3, 4]$ را به دست آورید.</p> <p>ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $20 \frac{m}{s}$ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $\frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$ روش اول</p> <p>سرعت متوسط: $h'(3/5) = -10(3/5) + 40 = 5$ روش دوم</p> <p>ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$</p>
۶	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۷	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ f پیوسته است.</p> <p>مشتق ناپذیر $f'_-(0) \neq f'_+(0)$</p> $\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x - 0}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0 \end{aligned} \right\}$
۸	<p>اگر $f'(1) = 3$، $g'(1) = 5$ و $f(1) = 1$ مقدار مشتق $(f + g)$ در $x = 1$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ $((f + g) \text{ of})'(1) = f'(1) \times (f + g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3 + 5) = 24$</p>
۹	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 + t - 1$ است:</p> <p>الف) سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید.</p> <p>ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$</p> <p>ب) $f'(t) = 4t + 1 \Rightarrow f'(2) = 9$</p>
۱۰	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$، خط مماس بر نمودار f در $x = 4$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ -۹</p>

خط d در نقطه با طول $x = 2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x ها) را بیابید.



۱۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$$

پاسخ: ۱

$$d : (2, 3), (a, 0) : 2 = \frac{0 - 3}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^5 - 2x)$ ب) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^5 - x + 1}$

۱۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

الف) $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^5 - 2x) + (2x^3 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$

پاسخ: ۱

ب) $g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(x^2 + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$

تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

پاسخ: ۱

۱۳

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

اگر $f(x) = 2x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند. حاصل $(f+g)'(4) + (f \times g)'(1)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

$$(f+g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (4(4))^2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 96 + \frac{1}{4}$$

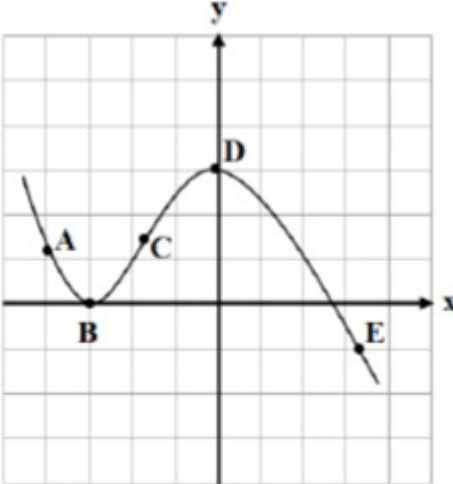
پاسخ: ۱

۱۴

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (6)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3) = 6 + \frac{3}{2}$$

$$(f+g)'(4) + (f \times g)'(1) = 96 + \frac{1}{4} + 6 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$$

۱۵	<p>آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+5}$ را وقتی متغیر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$
۱۶	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 + 2t + 3$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 2]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 2]$ با هم برابرند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(t) = 2t + 2$ $\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$ $2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1$
۱۷	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ برقرار باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۱۸	<p>جمله‌ی زیر را کامل کنید.</p> <p>اگر $f(x) = -x^3$ آن‌گاه $f''(1)$ برابر است با</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ -۶</p>
۱۹	<p>اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ آن‌گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$
۲۰	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $g(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^3+8}$</p> <p>ب) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x-1)^3 (x^3+8) - 3x^2(2x-1)^4}{(x^3+8)^2}$</p> <p>ب) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$</p>

۲۱	<p>با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی نمایید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} = +\infty$ <p>تابع در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.</p>
۲۲	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۲۳	<p>با توجه به نمودار تابع مقابل:</p> <p>الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟</p> <p>ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟</p> <p>پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟</p> <p>ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ الف) E ب) B پ) C ت) $m_D > m_A$</p>
۲۴	<p>آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = x^2 + 5x + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13$ $\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$ <p>پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$، ۱۳ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است.</p>
۲۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+4)$

ب) $g(x) = \frac{-7x^2+1}{x-6}$

پ) $h(x) = (2x^5-1)^4$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+4) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$

ب) $g'(x) = \frac{(-14x)(x-6) - (1)(-7x^2+1)}{(x-6)^2}$

پ) $h'(x) = 4(2x^5-1)^3(10x^4)$

پاسخ: ۱

۲۶

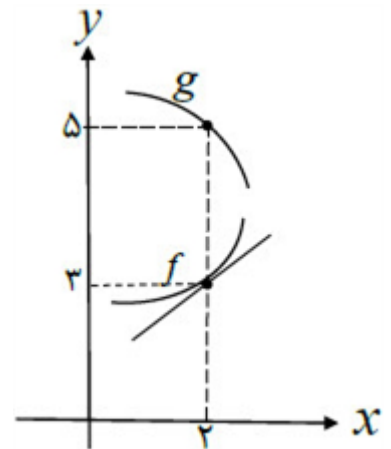
درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- نقطه $(1, 1)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = |2-x^2|$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

۲۷

با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 5f'(2)$$

پاسخ: ۱

۲۸

	<p>در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{120}{t} + 5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه $t = 2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[4, 6]$ را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$ $\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{4} + 5\right)}{6 - 4} = \frac{25 - 35}{2} = -5$ $\Rightarrow -30 - 5 = -35$	۲۹
	<p>با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $x > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$ آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ص ۹۳})$ <p>(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)</p>	۳۰
	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x < 1 \\ 2x^2 - 3 & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ تابع پیوسته است.</p> $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x - 1} = 4$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x - 1} = 3$ <p>$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است.</p> <p>(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)</p>	۳۱
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ب) $g(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$</p> <p>ب) $g'(x) = 3 \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2}\right)$</p>	۳۲

جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید. الف) سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید. ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

۳۳

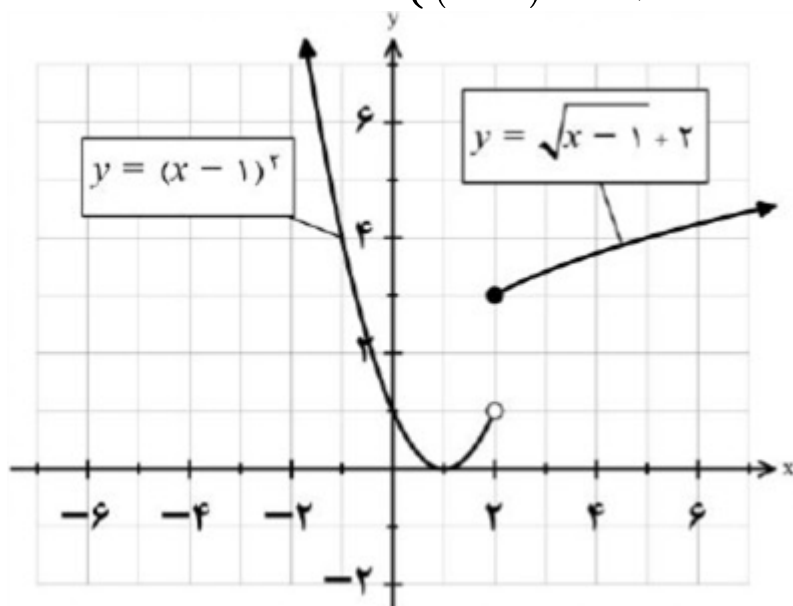
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) سرعت متوسط $= \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$

پاسخ: ۱

ب) $h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت مقابل است:



۳۴

الف) آیا تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است؟
ب) آیا تابع در بازه $(-\infty, 2)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟
پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x = 2$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ الف) خیر - چون ناپیوسته است.

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق‌پذیر است.

پ) $x \geq 2 : f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2}$

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

آهنگ متوسط $= \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$
 $m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$

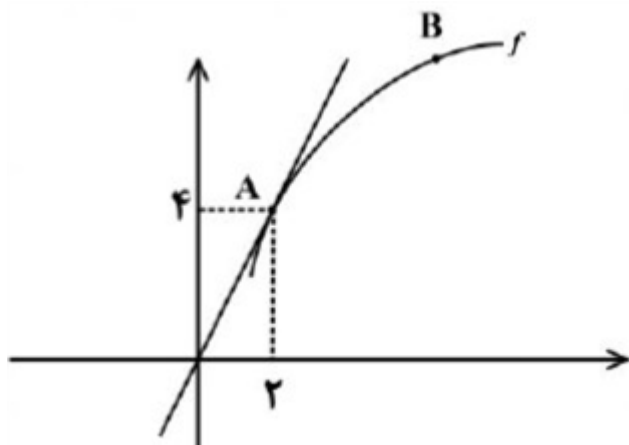
پاسخ: ۱

۳۵

نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



۳۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{4}{2} = 2$

پاسخ: ۱

ب) $m_A > m_B$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

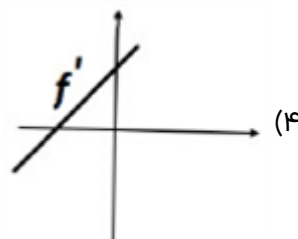
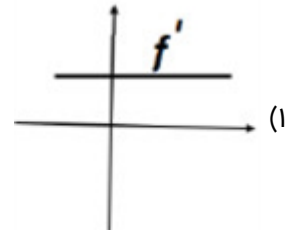
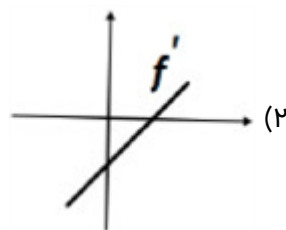
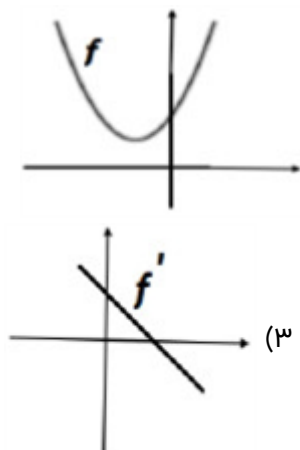
$f'(0) = m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, A(0, 0)$

پاسخ: ۱

معادله مماس قائم: $x = 0$

۳۷

با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۳۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

ب) $g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2 + 2x)$

الف) $f(x) = \frac{-2x+3}{x+4}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

الف) $f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$

ب) $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2 + 2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$

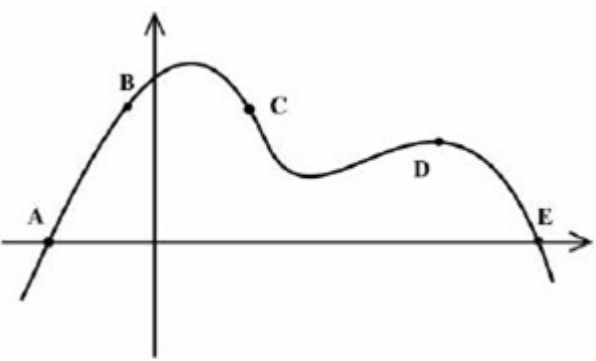
۳۹

تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود شصت ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

آهنگ متوسط رشد $= \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$

۴۰

	<p>معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = x^2 - 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ x^2 - 1 - 0}{x - 1} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$	۴۱
	<p>از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:</p> <p>الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟</p> <p>ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ الف) A ب) C</p>	۴۲
	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t + 3$ برحسب متر است. (t برحسب ثانیه است).</p> <p>الف) سرعت متوسط تابع در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید.</p> <p>ب) سرعت لحظه‌ای تابع را در $t = 4$ به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$</p> <p>ب) $f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$</p>	۴۳
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>	۴۴
	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در $x = 1$ پیوسته است.</p> <p>$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$</p> <p>$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.</p>	۴۵

اگر $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < 0 \\ x^2 + 3x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

۴۶

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= 3 \\ f'_-(0) &= a \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = \frac{\frac{9(x+1)-1(9x-2)}{(x+1)^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$$

پاسخ: ۱

۴۷

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط را در بازه زمانی $[0, 5]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

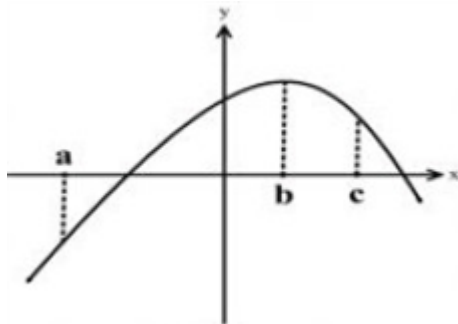
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta t} &= \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4 \\ f'(t) &= 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3 \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

۴۸

با توجه به نمودار تابع f ، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_c, m_b, m_a نمایش داده شود. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



$$m_c = m_b = m_a \quad \text{۴} \quad m_a > m_b > m_c \quad \text{۳} \quad m_b > m_a > m_c \quad \text{۲} \quad m_c > m_b > m_a \quad \text{۱}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۹

اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.

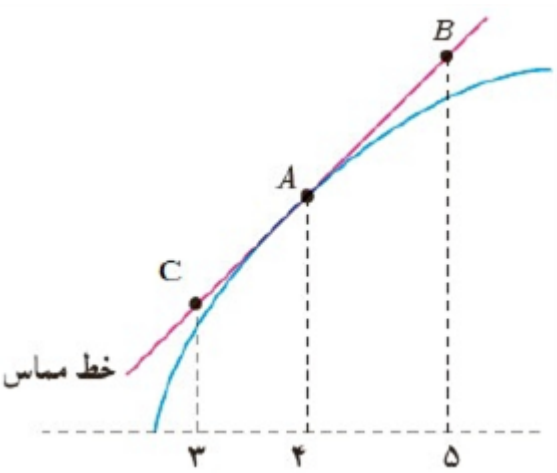
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times 8 + 3(-6) = 22$$

پاسخ: ۱

۵۰

	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 2x - 4$ را در $x = 2$ بررسی کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.</p> $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ 2x-4 }{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ 2x-4 }{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2 \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$	۵۱
	<p>برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور xها معادله خط مماس را بنویسید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$ $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(2) = 12, y - 0 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 24$	۵۲
	<p>اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ برحسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$	۵۳
	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 - 6)^2 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right)$</p> <p>ب) $g(x) = \sin^2(5x)$</p> <p>پ) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{الف) } f'(x) = 2(x^2 - 6)(2x) \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) + \frac{1}{4}(x^2 - 6)^2$ $\text{ب) } g'(x) = 10 \sin^2(5x) \cos(5x)$ $\text{پ) } h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)(x^3 - 2x + 1) - (3x^2 - 2)(\sqrt{x})}{(x^3 - 2x + 1)^2}$	۵۴
	<p>دوچرخه‌سواری طبق معادله $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 6$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چه قدر است؟</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $d'(t) = t^2 + 10 \Rightarrow d'(2) = 14$	۵۵

	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>	۵۶
	<p>برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4}$ $B(5, 26/5), C(3, 23/5)$	۵۷
	<p>در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x + 2 & x \geq -1 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند، ولی $f'(-1)$ موجود نیست.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ $f'(-1)$ موجود نیست.</p> $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2-1}{x+1} = 1$ $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-1}{x+1} = -2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$	۵۸
	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (ت برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$ $\text{سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$	۵۹
	<p>جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.</p> <p>- اگر $f'(5) = 2$ و $g'(5) = -1$ در این صورت $(2f - g)'(5)$ برابر با است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ ۵</p>	۶۰

	<p>مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$ <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در $x = 1$ پیوسته است.</p> $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3 - 6}{x - (-1)} = -2$ $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 6 - 6}{x - (-1)} = 2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ <p>$f'(-1)$ موجود نیست.</p>	۶۱
	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^3 + 1)$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2)$</p> <p>ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x + 2}} \right) (x^3 + 1) + (\sqrt{3x + 2})(3x^2)$</p>	۶۲
	<p>اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$	۶۳
	<p>اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ تابع در $x = 0$ پیوسته است.</p> $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$ $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$ <p>$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس مشتق تابع در $x = 0$ موجود نیست.</p>	۶۴
	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x + 2}}$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x + 1)^4 (2x + 2)$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x + 2}) - \frac{x}{\sqrt{3x + 2}}}{(\sqrt{3x + 2})^2}$</p>	۶۵

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.
الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چه قدر است؟

۶۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{آهنگ تغییر متوسط (الف)} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{25 - 50}{25} = -\frac{1}{2}$$

پاسخ: ۱

$$\text{آهنگ لحظه‌ای (ب)} \quad f'(49) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14}$$

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - |x|)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

۶۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4 \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow \text{تابع مشتق‌پذیر است}$$

تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در لحظه $t = 4$ از آهنگ متوسط تغییر تابع f از لحظه $t = 3$ تا $t = 5$ چه مقدار بیش‌تر است؟

۶۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

پاسخ: ۱

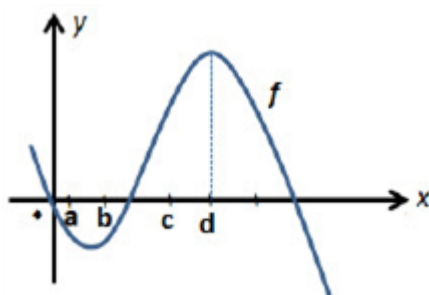
$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

$$-15 - (-16) = 1$$

با درنظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a, b, c, d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.

۶۹

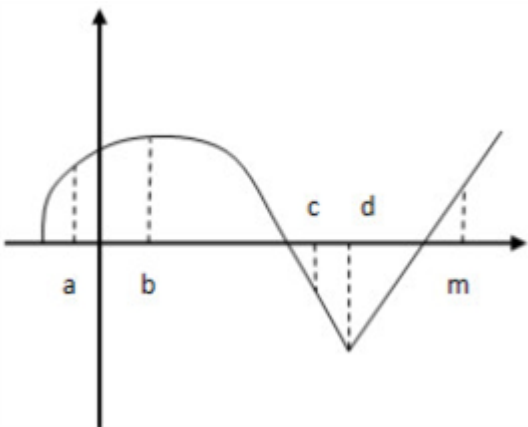
x	f'(x)
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵

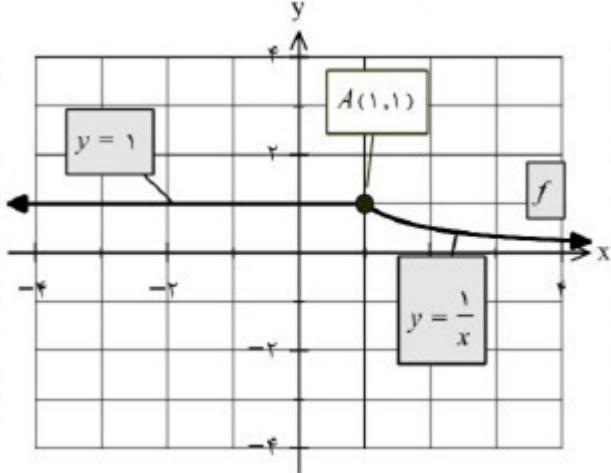


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

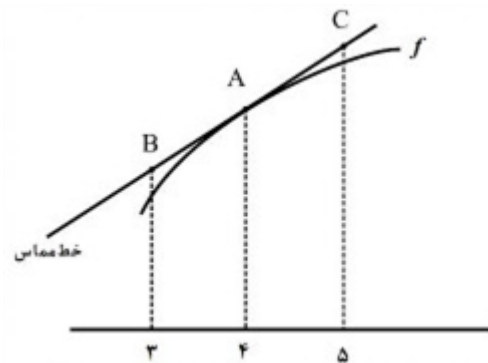
x	a	b	c	d
f'(x)	-۰/۵	۰/۵	۲	۰

پاسخ: ۱

۷۰	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = ۰$ مشتق پذیر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۷۱	<p>جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. - شیب خط مماس بر منحنی $y = ۱ - ۵x^۲ - ۲x$ در نقطه‌ای به طول ۲- واقع بر آن برابر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ ۱۸</p>
۷۲	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -۵t^۲ + ۴۰t$ به دست می‌آید. مطلوب است:</p> <p>الف) سرعت متوسط در بازه $[۱, ۲]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = ۳$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $\frac{h(۲) - h(۱)}{۲ - ۱} = ۲۵$ سرعت متوسط ب) $h'(t) = -۱۰t + ۴۰ \Rightarrow h'(۳) = ۱۰$ سرعت لحظه‌ای</p>
۷۳	<p>معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^۳ - ۲x$ را در نقطه $A(۱, f(۱))$ به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$f(۱) = -۱ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۲ \Rightarrow f'(۱) = ۱ \Rightarrow y = x - ۲$</p>
۷۴	<p>با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید. ب) طول نقطه «گوشه‌ای» را بنویسید. پ) طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) $x = b$ ب) $x = d$ پ) $x = c$</p>

	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید:</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.</p> <p>ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $35 \frac{m}{s}$ است.</p> <p>سوالیات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25$</p> <p>ب) $h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۷۵
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>- اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a است.</p> <p>سوالیات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ پیوسته</p>	۷۶
	<p>با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی A، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.</p>  <p>سوالیات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$</p> <p>$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = 0$</p> <p>$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$f'(1)$ موجود نیست.</p>	۷۷
	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$</p> <p>ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$</p> <p>سوالیات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$</p> <p>ب) $g'(x) = (6x)(2x - 5)^3 + (3)(2)(2x - 5)^2(3x^2 - 4)$</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۷۸

برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



۷۹

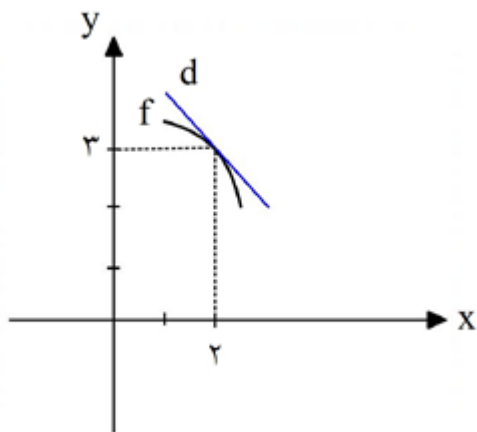
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$$

$$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$$

پاسخ: ۱

با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{15 - 5f(x)}{x - 2} = 10$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.



۸۰

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{15 - 5f(x)}{x - 2} = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(f(x) - 3)}{x - 2} = 10 \Rightarrow -5f'(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = -2 \Rightarrow m = -2$$

پاسخ: ۱

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 4 + 3 \Rightarrow y = -2x + 7$$

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x < 2 \\ 5x & x = 2 \\ 4\sqrt{x+2} + 2 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4\sqrt{x+2} + 2 = 4\sqrt{4} + 2 = 10$$

پاسخ: ۱

$$f(2) = 5(2) = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 3x = 4 + 6 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

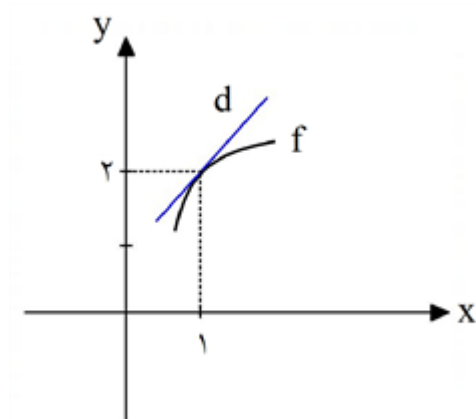
تابع در $x = 2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ 4\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right) & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \\ f'_-(2) = 4 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2) \Rightarrow x = 2 \text{ مشتق‌ناپذیر است.}$$

۸۱

با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = 2$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{(x+1)(x-1)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 4 \Rightarrow m = 4$$

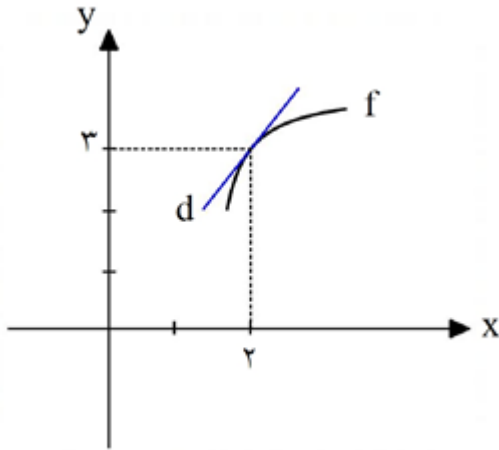
پاسخ: ۱

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 4 + 2 \Rightarrow y = 4x - 2$$

۸۲

	<p>گنجایش ظرفی ۳۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $v(t) = ۳۰ \left(1 - \frac{t}{۴۰}\right)^۲$ به دست می‌آید. در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰, ۴۰]$ می‌شود؟</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>آهنگ لحظه‌ای: $v'(t) = ۶۰ \left(1 - \frac{t}{۴۰}\right) \left(-\frac{۱}{۴۰}\right) = -\frac{۳}{۲} \left(1 - \frac{t}{۴۰}\right)$</p> <p>آهنگ متوسط $= \frac{v(۴۰) - v(۰)}{۴۰ - ۰} = \frac{۰ - ۳۰}{۴۰} = -\frac{۳}{۴}$</p> <p>آهنگ متوسط = آهنگ $\Rightarrow -\frac{۳}{۲} \left(1 - \frac{t}{۴۰}\right) = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow 1 - \frac{t}{۴۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{t}{۴۰} = \frac{۱}{۲} - 1$</p> <p>لحظه‌ای</p> <p>$\Rightarrow -\frac{t}{۴۰} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{t}{۴۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow t = ۲۰$</p>	۸۳
	<p>اگر $f(۲) = ۷$ و $\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{۳x - ۶} = ۲$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x^۲ f(x)$ را در $x = ۲$ به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{۳x - ۶} = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{۳(x - ۲)} = \frac{۱}{۳} \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \frac{۱}{۳} f'(۲) = ۲$</p> <p>$\Rightarrow f'(۲) = ۶$</p> <p>$g(x) = x^۲ f(x) \Rightarrow g'(x) = ۲x f(x) + x^۲ f'(x) \xrightarrow{x=۲} g'(۲) = ۴f(۲) + ۴f'(۲)$</p> <p>$= ۴ \times ۷ + ۴ \times ۶ = ۲۸ + ۲۴ = ۵۲$</p>	۸۴
	<p>اگر $f(۱) = -۲$ و $\lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x^۳ - ۱} = ۵$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x f(x)$ را در $x = ۱$ به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>$\lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x^۳ - ۱} = \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{(x - ۱)(x^۲ + x + ۱)} = \frac{۱}{۳} \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \frac{۱}{۳} f'(۱) = ۵$</p> <p>$\Rightarrow f'(۱) = ۱۵$</p> <p>$g(x) = x f(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + x f'(x) \xrightarrow{x=۱} g'(۱) = f(۱) + f'(۱) = -۲ + ۱۵ = ۱۳$</p>	۸۵

با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) - 9}{x - 2} = 6$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.



۸۶

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

پاسخ: ۱ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) - 9}{x - 2} = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(f(x) - 3)}{x - 2} = 6 \Rightarrow 3f'(2) = 6 \Rightarrow f'(2) = 2 \Rightarrow m = 2$
 $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 3 \Rightarrow y = 2x - 1$

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 2x & x = 1 \\ 2\sqrt{x+3} - 2 & x > 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

پاسخ: ۱ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{x+3} - 2 = 4 - 2 = 2$
 $f(1) = 2(1) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right) & x > 1 \end{cases}$

$\begin{cases} f'_+(1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f'_-(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow$ تابع در $x = 1$ مشتق ناپذیر است.

۸۷

اگر $f(3) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{5x - 15} = 2$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = 3$ به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

پاسخ: ۱ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{5x - 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{5(x - 3)} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{1}{5} f'(3) = 2 \Rightarrow f'(3) = 10$

$g(x) = xf(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + xf'(x) \xrightarrow{x=3} g'(3) = f(3) + 3f'(3) = 5 + 3(10) = 35$

۸۸

	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -2t^2 + 60t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانیه)</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[1, 5]$ را به دست آورید.</p> <p>ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $\frac{6}{5}m/s$ است.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ الف) $\bar{V} = \frac{h(5) - h(1)}{5 - 1} = \frac{250 - 58}{4} = \frac{192}{4} = 48$</p> <p>ب) $V(t) = -4t + 60 = 6 \Rightarrow -4t = -54 \Rightarrow t = 13.5$</p>	۸۹
	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} [-x] & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید. ([]) نماد جزء صحیح است.)</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[-x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1} = -1$</p> <p>$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$</p> <p>$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$</p> <p>تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.</p>	۹۰
<p>$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2(x + 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(-1) = 3 \Rightarrow f'(-1) = 6$</p> <p>$\Rightarrow m = 6$</p>	<p>در تابع f، $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2x + 2} = 3$ و این تابع از نقطه $A(-1, 2)$ می‌گذرد. معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ بنابراین شیب خط مماس برابر ۶ است.</p> <p>$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 6(x + 1) \Rightarrow y - 2 = 6x + 6 \Rightarrow y = 6x + 8$</p>	۹۱
	<p>تابع $f(x) = x - 3x^2$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[-1, 5]$ به دست آورید.</p> <p>ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-1, 5]$ بزرگ‌تر باشد.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ الف) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{-70 - (-4)}{6} = \frac{-66}{6} = -11$</p> <p>ب) $f'(x) = 1 - 6x > -11 \Rightarrow -6x > -12 \Rightarrow x < 2$</p>	۹۲

۹۳	<p>تابع $f(x) = x - 2x^2$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 4]$ به دست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 4]$ کوچک‌تر باشد.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ الف) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-28 - 0}{4} = -7$ ب) $f'(x) = 1 - 4x < -7 \Rightarrow -4x < -8 \Rightarrow x > 2$ آهنگ لحظه‌ای</p>
۹۴	<p>مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). $f(x) = (x - 2)^3 + \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt{3x + 1}}$</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ $f(x) = (x - 2)^3 + \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt{3x + 1}} \Rightarrow f'(x) = 3(x - 2)^2 + \frac{(14x)\sqrt{3x + 1} - \frac{2}{2\sqrt{3x + 1}}(\sqrt[3]{x^2 + 1})}{(\sqrt{3x + 1})^2}$</p>
۹۵	<p>آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 + kx + 1$ در بازه $[0, 2]$ برابر ۲ است. الف) k را حساب کنید. ب) آهنگ لحظه‌ای این تابع را در $x = -\frac{k}{3}$ حساب کنید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ الف) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 + 2k + 1 - 1}{2} = \frac{8 + 2k}{2} = 4 + k = 2 \Rightarrow k = -2$ ب) برای یافتن آهنگ لحظه‌ای از تابع مشتق می‌گیریم. $f(x) = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$ $f'\left(-\frac{k}{3}\right) = f'(1) = 3 - 2 = 1$</p>
۹۶	<p>مشتق تابع $f(x) = \frac{3x + 1}{x + 3}$ را در نقطه ۲- حساب کنید و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-2, -5)$ بنویسید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱ $f(x) = \frac{3x + 1}{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x + 3) - (1)(3x + 1)}{(x + 3)^2} \Rightarrow f'(-2) = \frac{3 + 5}{1} = 8$ $\begin{cases} A(-2, -5) \\ m = 8 \end{cases} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-5) = 8(x - (-2))$ $\Rightarrow y + 5 = 8(x + 2) \Rightarrow y = 8x + 16 - 5 \Rightarrow y = 8x + 11$</p>

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = (x + \sqrt{x}) \left(\frac{5x + 1}{4x + 9} \right)$

ب) $g(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{5x + 9}}$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

الف) $f(x) = (x + \sqrt{x}) \left(\frac{5x + 1}{4x + 9} \right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{5x + 1}{4x + 9} \right) + \left(\frac{5(4x + 9) - 4(5x + 1)}{(4x + 9)^2} \right) (x + \sqrt{x})$$

$$\text{ب) } g(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{5x + 9}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{6x(5x+9) - 5(3x^2+1)}{(5x+9)^2}}{2\sqrt{\frac{3x^2+1}{5x+9}}}$$

پاسخ: ۱

۹۷

الف) $\text{آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$

ب) $\text{آهنگ لحظه ای } f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + \frac{5(\sqrt{2x-1}) - \frac{2}{\sqrt{2x-1}}(5x+3)}{(\sqrt{2x-1})^2}$$

۳ فرض کنیم $y = ax + b$ ، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$y = 3x + b \xrightarrow{(2,4)} b = -2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

الف) $\text{روش اول: } \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$

روش دوم: $h'(3/5) = -10(3/5) + 40 = 5$

ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$

۶ نادرست

۷ f پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \text{ مشتق ناپذیر}$$

$$((f+g) \circ f)'(1) = f'(1) \times (f+g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3 + 5) = 24$$

الف) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$

ب) $f'(t) = 6t^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25$

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$$

$$d: (2, 3), (a, 0): 2 = \frac{0 - 3}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{الف)} f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^4 - 2x) + (4x^3 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$$

$$\text{ب)} g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(2x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

$$(f + g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (4(4)^2) + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 96 + \frac{1}{4}$$

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (4)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 4 + \frac{3}{2}$$

$$(f + g)'(4) + (f \times g)'(1) = 96 + \frac{1}{4} + 4 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$$

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$f'(t) = 2t + 2$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$$

$$2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1$$

۱۷ نادرست

۱۸ -۶

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{الف)} g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x - 1)^2 (x^2 + 8) - 2x^2 (2x - 1)^4}{(x^2 + 8)^2}$$

$$\text{ب)} f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

تابع در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

۲۲ نادرست

۲۳ الف (E)

۲۴

(ت) $m_D > m_A$

(پ) C

(ب) B

$$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13$$

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$ ، برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است.

۲۵ درست

الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3 + 4) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$

ب) $g'(x) = \frac{(-14x)(x-6) - (1)(-7x^2+1)}{(x-6)^2}$

پ) $h'(x) = 4(2x^5 - 1)^2(10x^4)$

۲۶

۲۷ نادرست

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5f'(2)$$

۲۸

$$f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$$

۲۹

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{4} + 5\right)}{6 - 4} = \frac{25 - 35}{2} = -5$$

$$\Rightarrow -30 - 5 = -35$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ص ۹۳})$$

۳۰

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x - 1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x - 1} = 3$$

در نقطه $x = 1$ مشتق ناپذیر است. $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)

الف) $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

ب) $g'(x) = 3 \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^2 \left(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2} \right)$

الف) $\text{سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$

ب) $h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$

الف) خیر - چون ناپیوسته است. ۳۲

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است.

پ) $x \geq 2: f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2}$

$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{4}{2} = 2$

ب) $m_A > m_B$

$f'(\cdot) = m = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt[3]{x} - \cdot}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, A(\cdot, \cdot)$

معادله مماس قائم: $x = 0$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' ۳۳

محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
	نزولی	صعودی
f		
f'	-	+

الف) $f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$

۳۹

ب) $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2+2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$

آهنگ متوسط رشد $= \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$

۴۰

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$

۴۱

ب) C

الف) A

۴۲

الف) $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$

۴۳

ب) $f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$

نادرست

۴۴

تابع در $x = 1$ پیوسته است.

۴۵

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نمی باشد.

تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

۴۶

$f'_+(0) = 3 \Rightarrow a = 3$
 $f'_-(0) = a$

$f'(x) = \frac{\frac{3(x+1) - 1(3x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-2}{x+1}}}$

۴۷

$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$

۴۸

$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۹

$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times 8 + 3(-6) = 22$

۵۰

۵۱ تابع در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد.

$$f'_{+}(\gamma) = \lim_{x \rightarrow \gamma^{+}} \frac{|x - \epsilon|}{x - \gamma} = \lim_{x \rightarrow \gamma^{+}} \frac{\gamma(x - \gamma)}{x - \gamma} = \gamma$$

$$f'_{-}(\gamma) = \lim_{x \rightarrow \gamma^{-}} \frac{|x - \epsilon|}{x - \gamma} = \lim_{x \rightarrow \gamma^{-}} \frac{-\gamma(x - \gamma)}{x - \gamma} = -\gamma \Rightarrow f'_{+}(\gamma) \neq f'_{-}(\gamma)$$

$$x^{\gamma} - \wedge = \circ \Rightarrow x = \gamma \Rightarrow (\gamma, \circ)$$

$$f'(x) = \gamma x^{\gamma} \Rightarrow m = f'(\gamma) = \gamma^{\gamma}, y - \circ = \gamma^{\gamma}(x - \gamma) \Rightarrow y = \gamma^{\gamma}x - \gamma^{\gamma}\gamma$$

$$f'(t) = \gamma t^{\gamma} - \gamma = \gamma \Rightarrow \gamma t^{\gamma} = \gamma \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$$

الف) $f'(x) = \gamma(\gamma x)(x^{\gamma} - \epsilon)^{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma}x + 1 \right) + \frac{1}{\gamma}(x^{\gamma} - \epsilon)^{\gamma}$

ب) $g'(x) = \gamma \sin^{\gamma}(\delta x) \cos(\delta x)$

پ) $h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\gamma \sqrt{x}} \right) (x^{\gamma} - \gamma x + 1) - (\gamma x^{\gamma} - \gamma)(\sqrt{x})}{(x^{\gamma} - \gamma x + 1)^{\gamma}}$

$$d'(t) = t^{\gamma} + \gamma \circ \Rightarrow d'(\gamma) = \gamma^{\gamma}$$

$$A(\epsilon, \gamma \delta) \Rightarrow \gamma / \delta = \frac{y_B - \gamma \delta}{\delta - \epsilon}$$

$$B(\delta, \gamma \epsilon / \delta), C(\gamma, \gamma \gamma / \delta)$$

۵۸ $f'(-1)$ موجود نیست.

$$f'_{+}(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^{+}} \frac{x + \gamma - 1}{x + 1} = 1$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^{-}} \frac{x^{\gamma} - 1}{x + 1} = -\gamma \Rightarrow f'_{+}(-1) \neq f'_{-}(-1)$$

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(\delta) - f(\circ)}{\delta - \circ} = \gamma$$

$$\text{سرعت لحظه ای} \Rightarrow f'(t) = \gamma t - 1 = \gamma \Rightarrow t = \frac{\delta}{\gamma}$$

۵ ۶۰

۶۱ تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'_{+}(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^{+}} \frac{x^{\gamma} + \gamma - \epsilon}{x - (-1)} = -\gamma$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^{-}} \frac{\gamma x + \epsilon - \epsilon}{x - (-1)} = \gamma \Rightarrow f'_{+}(-1) \neq f'_{-}(-1)$$

$f'(-1)$ موجود نیست.

۶۲

الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4 (2x + 2)$

ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^2 + 1) + (\sqrt{3x+2})(2x^2)$

$3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$

۶۳

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$$

۶۴ تابع در $x = \cdot$ پیوسته است.

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \cdot$$

۶۵ $f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ پس مشتق تابع در $x = \cdot$ موجود نیست.

الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x + 1)^4 (2x + 2)$

ب) $g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x+2}) - \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}}{(\sqrt{3x+2})^2}$

۶۶

الف) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$

ب) $f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2}$

۶۷

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4 \Rightarrow f'_+(\cdot) = f'_-(\cdot) \text{ تابع مشتق پذیر است}$$

۶۸

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

$$-15 - (-16) = 1$$

۶۹

x	a	b	c	d
f'(x)	-۰/۵	۰/۵	۲	۰

۷۰

نادرست

۷۱

۱۸

الف) $\frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25$ سرعت متوسط ۲۵

ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10$ سرعت لحظه ای ۱۰

$f(1) = -1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = x - 2$

الف) $x = b$

ب) $x = d$

پ) $x = c$

الف) $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25$

ب) $h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$

۷۶ پیوسته

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$
 $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$
 $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = 0$

$f'(1)$ موجود نیست.

الف) $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$

ب) $g'(x) = (9x)(2x - 5)^2 + (2)(2)(2x - 5)^2(3x^2 - 4)$

$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$

$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{15 - 5f(x)}{x - 2} = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(f(x) - 3)}{x - 2} = 10 \Rightarrow -5f'(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = -2 \Rightarrow m = -2$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 4 + 3 \Rightarrow y = -2x + 7$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[4]{x+2} + 2 = \sqrt[4]{4} + 2 = 10$$

$$f(2) = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 3x = 4 + 6 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

تابع در $x = 2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ \sqrt[4]{\frac{1}{x+2}} & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ f'_-(2) = 4 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2) \Rightarrow \text{تابع مشتق ناپذیر است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{(x+1)(x-1)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 4 \Rightarrow m = 4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 4 + 2 \Rightarrow y = 4x - 2$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای: } v'(t) = 6 \cdot \left(1 - \frac{t}{40}\right) \left(-\frac{1}{40}\right) = -\frac{3}{20} \left(1 - \frac{t}{40}\right)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{v(40) - v(0)}{40 - 0} = \frac{0 - 30}{40} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \text{آهنگ متوسط} \Rightarrow -\frac{3}{20} \left(1 - \frac{t}{40}\right) = -\frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{t}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{t}{40} = \frac{1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{40} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3(x - 2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{3} f'(2) = 2$$

$$\Rightarrow f'(2) = 6$$

$$g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=2} g'(2) = 4f(2) + 4f'(2)$$

$$= 4 \times 10 + 4 \times 6 = 40 + 24 = 64$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{3} f'(1) = 5$$

$$\Rightarrow f'(1) = 15$$

$$g(x) = x f(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + x f'(x) \xrightarrow{x=1} g'(1) = f(1) + f'(1) = -2 + 15 = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) - 9}{x - 2} = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(f(x) - 3)}{x - 2} = 6 \Rightarrow 3f'(2) = 6 \Rightarrow f'(2) = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 3 \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right) & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f'_-(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ مشتقناپذیر است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{\Delta x - 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{\Delta(x - 3)} = \frac{1}{\Delta} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{1}{\Delta} f'(3) = 2 \Rightarrow f'(3) = 10$$

$$g(x) = xf(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + xf'(x) \xrightarrow{x=3} g'(3) = f(3) + 3f'(3) = 5 + 3(10) = 35$$

$$\bar{V} = \frac{h(5) - h(1)}{5 - 1} = \frac{250 - 58}{4} = \frac{192}{4} = 48$$

(الف) ۸۹

$$V(t) = -4t + 60 = 4 \Rightarrow -4t = -56 \Rightarrow t = 14$$

(ب)

$$\begin{aligned} f'_+(\cdot) &= \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{[-x]}{x} = \frac{-1}{1} = -\infty \\ f'_-(\cdot) &= \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned} \Rightarrow f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$$

۹۰

تابع در $x = 0$ مشتقناپذیر است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2(x + 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(-1) = 3 \Rightarrow f'(-1) = 6$$

۹۱

$$\Rightarrow m = 6$$

بنابراین شیب خط مماس برابر ۶ است.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 6(x + 1) \Rightarrow y - 2 = 6x + 6 \Rightarrow y = 6x + 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{-70 - (-4)}{6} = \frac{-66}{6} = -11$$

(الف)

۹۲

$$f'(x) = 1 - 6x > -11 \Rightarrow -6x > -12 \Rightarrow x < 2$$

(ب)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-28 - 0}{4} = -7$$

(الف)

۹۳

$$f'(x) = 1 - 4x < -7 \Rightarrow -4x < -8 \Rightarrow x > 2$$

(ب)

$$f(x) = (x - 2)^3 + \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt{3x + 1}} \Rightarrow f'(x) = 3(x - 2)^2 + \frac{(14x)\sqrt{3x + 1} - \frac{3}{\sqrt[3]{3x + 1}}(\sqrt[3]{x^3 + 1})}{(\sqrt{3x + 1})^2}$$

۹۴

الف ۹۵

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 + 2k + 1 - 1}{2} = \frac{8 + 2k}{2} = 4 + k = 2 \Rightarrow k = -2$$

ب) برای یافتن آهنگ لحظه‌ای از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f'\left(-\frac{k}{2}\right) = f'(1) = 3 - 2 = 1$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x + 1}}{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(x + 3)} - (1)(\sqrt[3]{x + 1})}{(x + 3)^2} \Rightarrow f'(-2) = \frac{\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-1}}{1} = 0$$

۹۶

$$\begin{cases} A(-2, -5) \\ m = 8 \end{cases} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-5) = 8(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y + 5 = 8(x + 2) \Rightarrow y = 8x + 16 - 5 \Rightarrow y = 8x + 11$$

$$\text{الف) } f(x) = (x + \sqrt{x})\left(\frac{\sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt[3]{x + 9}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt[3]{x + 9}}\right) + \left(\frac{\sqrt[3]{(x + 9)} - \sqrt[3]{(x + 1)}}{(\sqrt[3]{x + 9})^2}\right)(x + \sqrt{x})$$

$$\text{ب) } g(x) = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x + 9}}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{\sqrt[3]{(x + 9)} - \sqrt[3]{(x^3 + 1)}}{(\sqrt[3]{x + 9})^2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x + 9}}}}$$

۹۷

