



p30konkor.com

عنوان آزمون : ریاضی تجربی ۱۲ - فصل ۴

زمان آزمون :

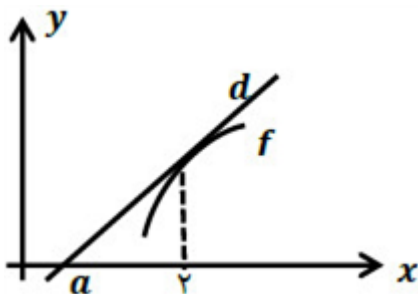
تاریخ برگزاری

نام و نام خانوادگی :

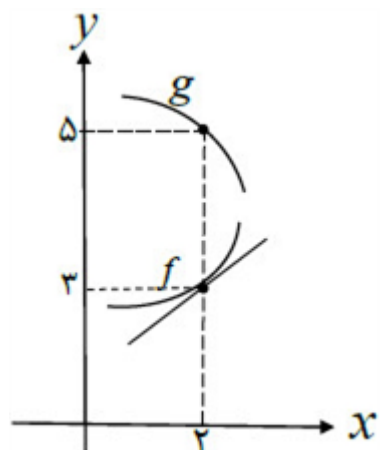
پایه تحصیلی :

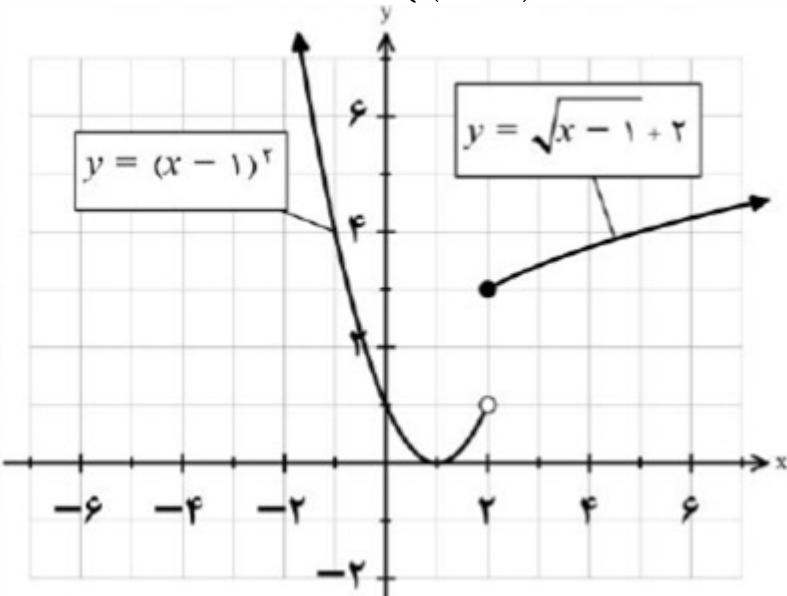
نام دبیر :

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگتر باشد.	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه
۲	مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). $f(x) = (x - 6)^3 + \frac{5x + 3}{\sqrt{2x - 1}}$	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه
۳	اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه
۴	با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در $x = 2$ بیابید.	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه
۵	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانیه) الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[3, 4]$ را به دست آورید. ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $20 \frac{m}{s}$ است.	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. - تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه
۷	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه
۸	اگر $f'(1) = 3$ ، $g'(1) = 5$ و $f(1) = 1$ ، مقدار مشتق $(f + g)$ در $x = 1$ را به دست آورید.	۱۴۰۳ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه

۹	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^3 + t - 1$ است: الف) سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید. ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۰	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$، خط مماس بر نمودار f در $x = 4$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p>
۱۱	<p>خط d در نقطه با طول $x = 2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور xها) را بیابید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۲	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^4 - 2x)$ ب) $g(x) = \frac{3x + 1}{x^5 - x + 1}$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۳	<p>تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۴	<p>اگر $f(x) = 2x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشند. حاصل $(f \times g)'(1) + (f + g)'(4)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۵	<p>آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x + 5}$ را وقتی متغیر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۶	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 + 2t + 3$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 2]$ (برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 2]$ با هم برابرند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>
۱۷	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ برقرار باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>

۱۸	جمله‌ی زیر را کامل کنید. اگر $f(x) = -x^3$ آن‌گاه $f'(1)$ برابر است با	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۹	اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ آن‌گاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۲۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $g(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^3+8}$ ب) $f(x) = \sqrt{2x+1}$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۲۱	با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه $x=2$ بررسی نمایید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۲۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۲۳	با توجه به نمودار تابع مقابل: الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟ ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟ پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟ ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۲۴	آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

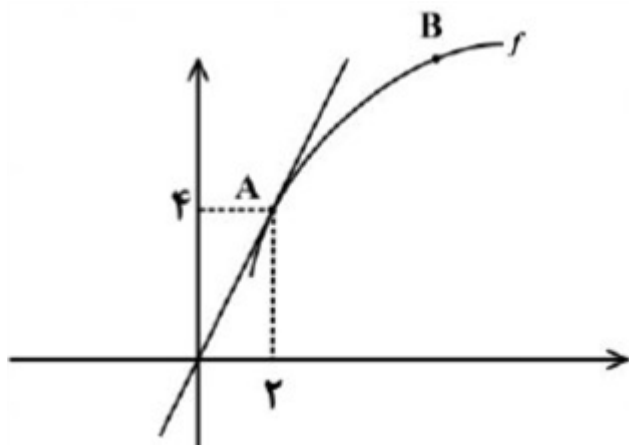
۲۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>
۲۶	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+4)$</p> <p>ب) $g(x) = \frac{-7x^2+1}{x-6}$</p> <p>پ) $h(x) = (2x^5-1)^4$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۷	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- نقطه $(1, 1)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = 2-x^2$ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۸	<p>با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۹	<p>در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{120}{t} + 5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه $t = 2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[4, 6]$ را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۳۰	<p>با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $x > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$ آنگاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۳۱	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & x < 1 \\ 2x^2-3 & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>

	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ب) $g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ ۳۲</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید. الف) سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید. ۳۳</p> <p>ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
	<p>نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}+2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت مقابل است:</p>  <p>الف) آیا تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است؟ ب) آیا تابع در بازه $(-\infty, 2)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟ پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x = 2$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
	<p>یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟ ۳۵</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>

نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



۳۶

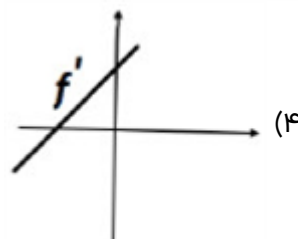
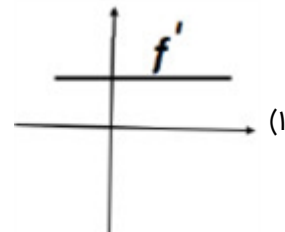
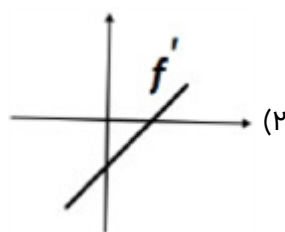
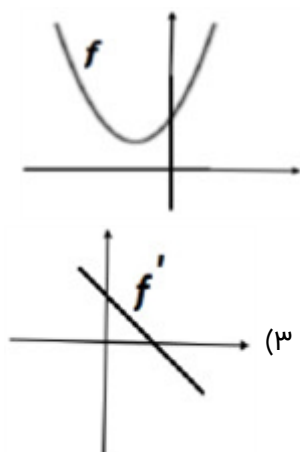
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه ای به طول $x = 0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

۳۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۳۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

ب) $g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2 + 2x)$

الف) $f(x) = \frac{-2x+3}{x+4}$

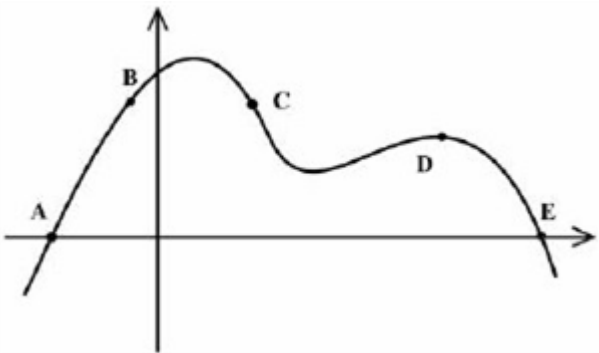
۳۹

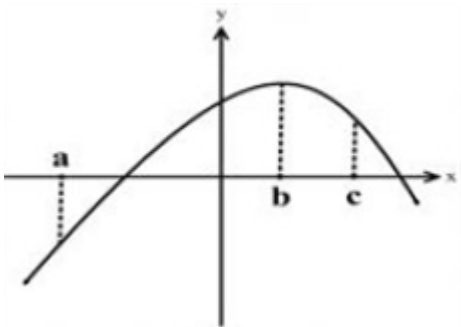
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم- شهریورماه ۱۴۰۱

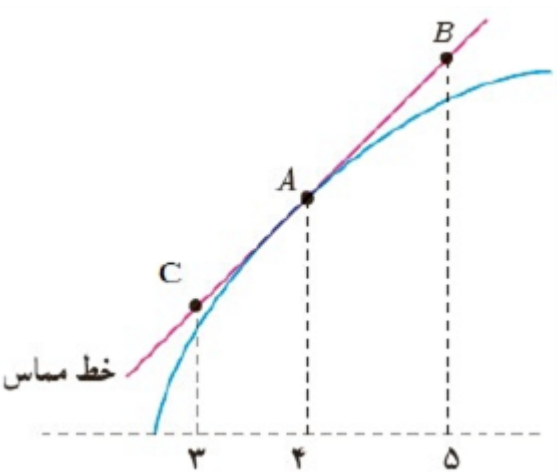
تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی متر تا حدود شصت ماهگی نشان می دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

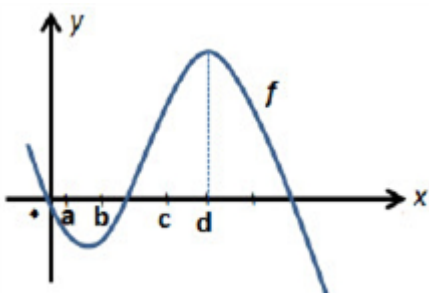
۴۰

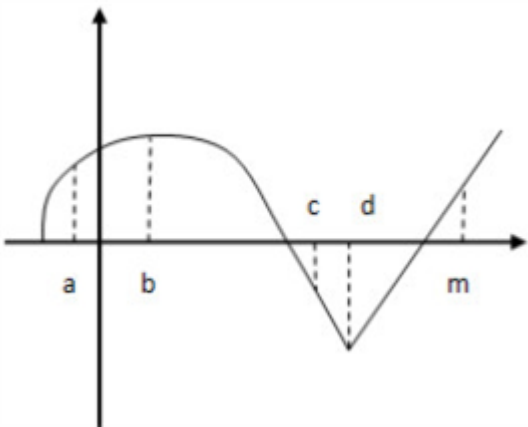
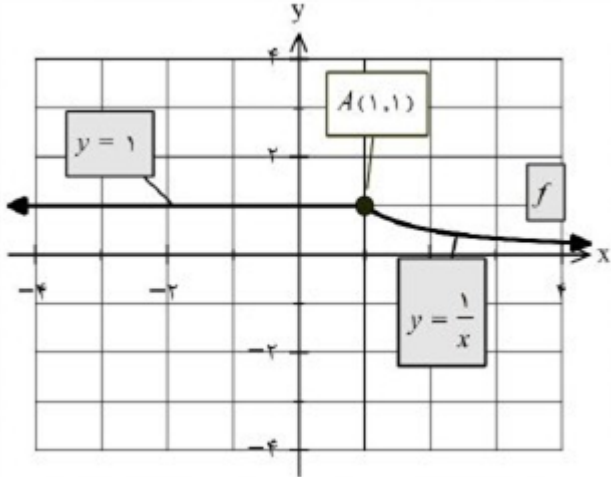
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم- شهریورماه ۱۴۰۱

۴۱	معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۴۲	از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه: الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟ ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۴۳	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t + 3$ برحسب متر است. (t برحسب ثانیه است). الف) سرعت متوسط تابع در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید. ب) سرعت لحظه‌ای تابع را در $t = 4$ به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۴۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. - تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۴۵	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۴۶	اگر $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < 0 \\ x^2 + 3x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۴۷	مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) $f(x) = \sqrt{\frac{9x - 2}{x + 1}}$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۴۸	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^3 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. <u>سرعت متوسط</u> را در بازه زمانی $[0, 5]$ و <u>سرعت لحظه‌ای</u> را در لحظه $t = 2$ به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

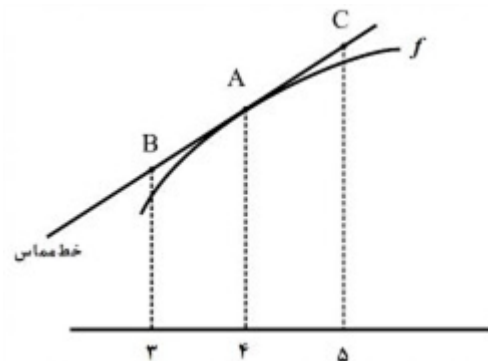
۴۹	<p>با توجه به نمودار تابع f، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_c, m_b, m_a نمایش داده شود. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟</p>  <p> $m_c = m_b = m_a$ (۴) $m_a > m_b > m_c$ (۳) $m_b > m_a > m_c$ (۲) $m_c > m_b > m_a$ (۱) </p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۵۰	<p>اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۵۱	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 2x - 4$ را در $x = 2$ بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۵۲	<p>برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور xها معادله خط مماس را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۵۳	<p>اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ برحسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۵۴	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 - 6)^2 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right)$</p> <p>ب) $g(x) = \sin^3(5x)$</p> <p>پ) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۵	<p>دوچرخه‌سواری طبق معادله $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 6$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چه قدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۶	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>

۵۷	<p>برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۸	<p>در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x+2 & x \geq -1 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند، ولی $f'(-1)$ موجود نیست.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۹	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۶۰	<p>جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. - اگر $f'(5) = 2$ و $g'(5) = -1$ در این صورت $(2f - g)'(5)$ برابر با است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۶۱	<p>مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۶۲	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۶۳	<p>اگر توابع f, g مشتق‌پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۶۴	<p>اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>

۶۵	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}}$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>										
۶۶	<p>تابع با ضابطه $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.</p> <p>الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چه قدر است؟</p> <p>ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چه قدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>										
۶۷	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - x)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>										
۶۸	<p>تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در لحظه $t = 4$ از آهنگ متوسط تغییر تابع f از لحظه $t = 3$ تا $t = 5$ چه مقدار بیش‌تر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>										
۶۹	<p>با درنظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a, b, c, d و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.</p> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f'(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>۰</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۰/۵</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td></td> <td>-۰/۵</td> </tr> </tbody> </table>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>	x	$f'(x)$		۰		۰/۵		۲		-۰/۵
x	$f'(x)$										
	۰										
	۰/۵										
	۲										
	-۰/۵										
۷۰	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>										
۷۱	<p>جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.</p> <p>- شیب خط مماس بر منحنی $y = 1 - 5x^2 - 2x$ در نقطه‌ای به طول ۲- واقع بر آن برابر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>										
۷۲	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت درنظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. مطلوب است:</p> <p>الف) سرعت متوسط در بازه $[1, 2]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>										
۷۳	<p>معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در نقطه $A(1, f(1))$ به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>										

	<p>با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.</p> <p>ب) طول نقطه «گوشه‌ای» را بنویسید.</p> <p>پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.</p>  <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>	۷۴
	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید:</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.</p> <p>ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $35 \frac{m}{s}$ است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>	۷۵
	<p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>- اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>	۷۶
	<p>با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی A، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق‌پذیر نیست.</p>  <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>	۷۷
	<p>مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$</p> <p>ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>	۷۸

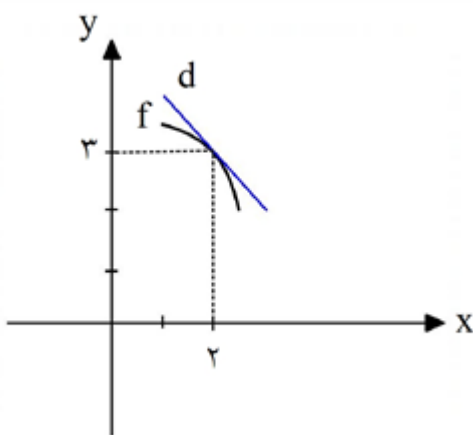
برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مشخصات نقاط B و C را بیابید.



۷۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{15 - 5f(x)}{x - 2} = 10$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.



۸۰

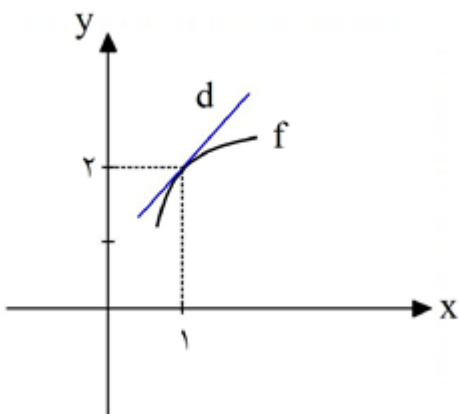
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x < 2 \\ 5x & x = 2 \\ 4\sqrt{x+2} + 2 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

۸۱

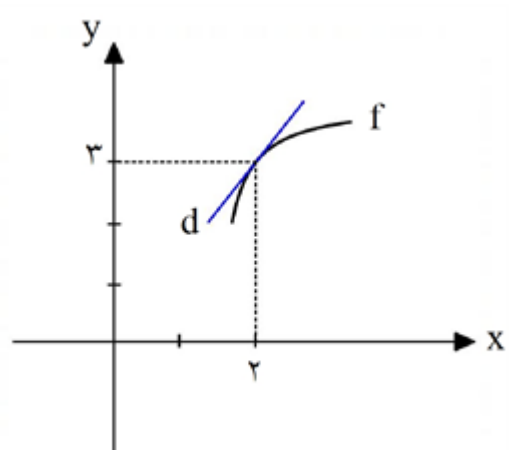
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = 2$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.



۸۲

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

۸۳	<p>گنجایش ظرفی ۳۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $v(t) = ۳۰ \left(1 - \frac{t}{۴۰}\right)^۲$ به دست می‌آید. در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰, ۴۰]$ می‌شود؟</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۸۴	<p>اگر $f(۲) = ۷$ و $\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{۳x - ۶} = ۲$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x^۲ f(x)$ را در $x = ۲$ به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۸۵	<p>اگر $f(۱) = -۲$ و $\lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x^۳ - ۱} = ۵$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x f(x)$ را در $x = ۱$ به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۸۶	<p>با توجه به شکل، اگر $\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{۳f(x) - ۹}{x - ۲} = ۶$ باشد، معادله خط d را به دست آورید.</p>  <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۸۷	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^۳ + ۱ & x < ۱ \\ ۲x & x = ۱ \\ ۲\sqrt{x+۳} - ۲ & x > ۱ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۸۸	<p>اگر $f(۳) = ۵$ و $\lim_{x \rightarrow ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{۵x - ۱۵} = ۲$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x f(x)$ را در $x = ۳$ به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۸۹	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -۲t^۲ + ۶۰t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانیه)</p> <p>الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[۱, ۵]$ را به دست آورید.</p> <p>ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر $۴ \frac{m}{s}$ است.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>

۹۰	<p>مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} [-x] & x > ۰ \\ x & x \leq ۰ \end{cases}$ را در نقطه $x = ۰$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۹۱	<p>در تابع f، $\lim_{x \rightarrow -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{۲x + ۲} = ۳$ و این تابع از نقطه $A(-۱, ۲)$ می‌گذرد. معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۹۲	<p>تابع $f(x) = x - ۳x^۲$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[-۱, ۵]$ به دست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۱, ۵]$ بزرگ‌تر باشد.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۹۳	<p>تابع $f(x) = x - ۲x^۲$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[۰, ۴]$ به دست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰, ۴]$ کوچک‌تر باشد.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۹۴	<p>مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> $f(x) = (x - ۲)^۳ + \frac{\sqrt[۷]{x^۲ + ۱}}{\sqrt[۳]{x + ۱}}$ <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۹۵	<p>آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^۳ + kx + ۱$ در بازه $[۰, ۲]$ برابر ۲ است. الف) k را حساب کنید. ب) آهنگ لحظه‌ای این تابع را در $x = -\frac{k}{۲}$ حساب کنید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۹۶	<p>مشتق تابع $f(x) = \frac{۳x + ۱}{x + ۳}$ را در نقطه ۲- حساب کنید و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-۲, -۵)$ بنویسید.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>
۹۷	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) $f(x) = (x + \sqrt{x}) \left(\frac{۵x + ۱}{۴x + ۹} \right)$ ب) $g(x) = \sqrt{\frac{۳x^۲ + ۱}{۵x + ۹}}$</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -دوازدهم</p>

الف) $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$ آهنگ متوسط در بازه $[0, 2]$

ب) $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1$ آهنگ لحظه ای

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + \frac{5(\sqrt{2x-1}) - \frac{2}{\sqrt{2x-1}}(5x+3)}{(\sqrt{2x-1})^2}$$

۳ فرض کنیم $y = ax + b$ ، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$y = 3x + b \xrightarrow{(2,4)} b = -2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

الف) $\frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5$ روش اول

روش دوم: $h'(3/5) = -10(3/5) + 40 = 5$ سرعت متوسط

ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2$

۶ نادرست

۷ f پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \text{ مشتق ناپذیر}$$

$$((f+g) \circ f)'(1) = f'(1) \times (f+g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3 + 5) = 24$$

الف) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$

ب) $f'(t) = 6t^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25$

۱۰ -۹

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$$

$$d: (2, 3), (a, 0): 2 = \frac{0 - 3}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{الف)} f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^5 - 2x) + (4x^3 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$$

$$\text{ب)} g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(2x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

$$(f + g)'(4) = f'(4) + g'(4) = (6(4)^2) + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 96 + \frac{1}{4}$$

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (6)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3) = 6 + \frac{3}{2}$$

$$(f + g)'(4) + (f \times g)'(1) = 96 + \frac{1}{4} + 6 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4}$$

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$f'(t) = 2t + 2$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$$

$$2t + 2 = 4 \Rightarrow t = 1$$

۱۷ نادرست

۱۸ -۶

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{الف)} g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x - 1)^3 (x^2 + 8) - 3x^2 (2x - 1)^4}{(x^2 + 8)^2}$$

$$\text{ب)} f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

تابع در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

۲۲ نادرست

۲۳ الف (E)

۲۴

ت) $m_D > m_A$

پ (C)

ب (B)

$$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13$$

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$ ، برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 0]$ است.

۲۵ درست

الف)
$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+2}}(x^2+4) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$$

ب)
$$g'(x) = \frac{(-14x)(x-6) - (1)(-4x^2+1)}{(x-6)^2}$$

پ)
$$h'(x) = 4(2x^5-1)^2(10x^4)$$

۲۶

۲۷ نادرست

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 5f'(2) \end{aligned}$$

۲۸

$$f'(t) = \frac{-120}{t^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$$

۲۹

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(4)}{6-4} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{4} + 5\right)}{6-4} = \frac{25-35}{2} = -5$$

$$\Rightarrow -30 - 5 = -35$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) + \sqrt{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ص ۹۳}) \end{aligned}$$

۳۰

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x - 1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x - 1} = 3$$

در نقطه $x = 1$ مشتق ناپذیر است. $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$

(در صورت استفاده از فرمول‌های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)

الف) $f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

ب) $g'(x) = 3 \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^2 \left(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2} \right)$

الف) $\text{سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$

ب) $h'(t) = -8t + 40 = 16 \Rightarrow t = 3$

الف) خیر - چون ناپیوسته است.

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است.

پ) $x \geq 2: f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2}$

$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{4}{2} = 2$

ب) $m_A > m_B$

$f'(\cdot) = m = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt{x} - \cdot}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty, A(\cdot, \cdot)$

معادله مماس قائم: $x = 0$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیر ثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f'

محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
	نزولی	صعودی
f		
f'	-	+

$$\text{الف)} \quad f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$$

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2+2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$$

$$\text{آهنگ متوسط رشد} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$$

ب) C

الف) A

$$\text{الف)} \quad \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$$

$$\text{ب)} \quad f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$$

نادرست

تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نمی باشد.

تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= 3 \\ f'_-(0) &= a \end{aligned} \Rightarrow a = 3$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3(x+1)-1(3x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-2}{x+1}}}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$$

$$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times 8 + 3(-4) = 22$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد. ۵۱

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2x-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2 \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

$$x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(2) = 12, y - 0 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 24$$

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$$

الف) $f'(x) = 3(2x)(x^2 - 4) \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) + \frac{1}{4}(x^2 - 4)^2$

ب) $g'(x) = 15 \sin^2(5x) \cos(5x)$

پ) $h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x^2 - 2x + 1) - (2x^2 - 2)(\sqrt{x})}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

$$d'(t) = t^2 + 10 \Rightarrow d'(2) = 14$$

$$A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4}$$

$$B(5, 26/5), C(3, 23/5)$$

درست ۵۶

$f'(-1)$ موجود نیست. ۵۸

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2-1}{x+1} = 1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-1}{x+1} = -2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

۵ ۶۰

تابع در $x = 1$ پیوسته است. ۶۱

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+2-4}{x-(-1)} = -2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+4-4}{x-(-1)} = 2 \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

$f'(-1)$ موجود نیست.

الف) $f'(x) = 5(x^3 + 2x - 1)^4 (3x + 2)$

ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^3 + 1) + (\sqrt{3x+2})(3x^2)$

$3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$

$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$

تابع در $x = \cdot$ پیوسته است.

$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^3 - \cdot}{x - \cdot} = \cdot$

$f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ پس مشتق تابع در $x = \cdot$ موجود نیست.

الف) $f'(x) = 5(x^3 + 2x + 1)^4 (3x + 2)$

ب) $g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x+2}) - \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}}{(\sqrt{3x+2})^2}$

الف) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$

ب) $f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2}$

$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases}$

$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4$

$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4 \Rightarrow f'_+(\cdot) = f'_-(\cdot)$ تابع مشتق‌پذیر است

$f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15$

آهنگ متوسط $= \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16$

$-15 - (-16) = 1$

x	a	b	c	d
f'(x)	-۰/۵	۰/۵	۲	۰

نادرست

۱۸

الف) $\frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25$ سرعت متوسط ۲۵

ب) $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10$ سرعت لحظه ای ۱۰

$f(1) = -1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = x - 2$

الف) $x = b$

ب) $x = d$

پ) $x = c$

الف) $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25$

ب) $h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$

پیوسته

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$
 $\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = 0$

$f'(1)$ موجود نیست.

الف) $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$

ب) $g'(x) = (6x)(2x - 5)^2 + (3)(2)(2x - 5)^2(3x^2 - 4)$

$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$

$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{15 - 5f(x)}{x - 2} = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(f(x) - 3)}{x - 2} = 10 \Rightarrow -5f'(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = -2 \Rightarrow m = -2$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 4 + 3 \Rightarrow y = -2x + 7$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 4$$

$$f(2) = 4(2) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 3x = 4 + 6 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

تابع در $x = 2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ \sqrt{\frac{1}{x+2}} & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ f'_-(2) = 4 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2) \Rightarrow x = 2 \text{ مشتقناپذیر است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{(x+1)(x-1)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 4 \Rightarrow m = 4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 4 + 2 \Rightarrow y = 4x - 2$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای: } v'(t) = 6 \cdot \left(1 - \frac{t}{4}\right) \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{t}{4}\right)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{v(4) - v(0)}{4 - 0} = \frac{0 - 3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \text{آهنگ متوسط} \Rightarrow -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{t}{4}\right) = -\frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{t}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{t}{4} = \frac{1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3(x-2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{1}{3} f'(2) = 2$$

$$\Rightarrow f'(2) = 6$$

$$g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=2} g'(2) = 4f(2) + 4f'(2)$$

$$= 4 \times 7 + 4 \times 6 = 28 + 24 = 52$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{3} f'(1) = 5$$

$$\Rightarrow f'(1) = 15$$

$$g(x) = x f(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + x f'(x) \xrightarrow{x=1} g'(1) = f(1) + f'(1) = -2 + 15 = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) - 9}{x - 2} = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(f(x) - 3)}{x - 2} = 6 \Rightarrow 3f'(2) = 6 \Rightarrow f'(2) = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + 3 \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right) & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f'_-(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow x = 1 \text{ مشتق‌ناپذیر است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{\Delta x - 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{\Delta(x - 3)} = \frac{1}{\Delta} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{1}{\Delta} f'(3) = 2 \Rightarrow f'(3) = 10$$

$$g(x) = xf(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + xf'(x) \xrightarrow{x=3} g'(3) = f(3) + 3f'(3) = 5 + 3(10) = 35$$

$$\bar{V} = \frac{h(5) - h(1)}{5 - 1} = \frac{250 - 58}{4} = \frac{192}{4} = 48$$

(الف) ۸۹

$$V(t) = -4t + 60 = 4 \Rightarrow -4t = -56 \Rightarrow t = 14$$

(ب)

$$\begin{aligned} f'_+(\cdot) &= \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{[-x]}{x} = \frac{-1}{1} = -1 \\ f'_-(\cdot) &= \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned} \Rightarrow f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$$

۹۰

تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2(x + 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(-1) = 3 \Rightarrow f'(-1) = 6$$

۹۱

$$\Rightarrow m = 6$$

بنابراین شیب خط مماس برابر ۶ است.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 6(x + 1) \Rightarrow y - 2 = 6x + 6 \Rightarrow y = 6x + 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{-70 - (-4)}{6} = \frac{-66}{6} = -11$$

(الف)

۹۲

$$\text{آهنگ لحظه ای} = f'(x) = 1 - 6x > -11 \Rightarrow -6x > -12 \Rightarrow x < 2$$

(ب)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-28 - 0}{4} = -7$$

(الف)

۹۳

$$\text{آهنگ لحظه ای} = f'(x) = 1 - 4x < -7 \Rightarrow -4x < -8 \Rightarrow x > 2$$

(ب)

$$f(x) = (x - 2)^2 + \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow f'(x) = 2(x - 2) + \frac{(14x)\sqrt{3x+1} - \frac{2}{\sqrt{3x+1}}(3x^2 + 1)}{(\sqrt{3x+1})^2}$$

۹۴

الف) ۹۵

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 + 2k + 1 - 1}{2} = \frac{4 + 2k}{2} = 2 + k = 2 \Rightarrow k = -2$$

ب) برای یافتن آهنگ لحظه‌ای از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 2$$

$$f'\left(-\frac{k}{2}\right) = f'(1) = 2 - 2 = 0$$

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x+2) - (1)(3x+1)}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(-2) = \frac{3+5}{1} = 8$$

۹۶

$$\begin{cases} A(-2, -5) \\ m = 8 \end{cases} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-5) = 8(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y + 5 = 8(x + 2) \Rightarrow y = 8x + 16 - 5 \Rightarrow y = 8x + 11$$

$$\text{الف) } f(x) = (x + \sqrt{x})\left(\frac{5x+1}{4x+9}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{5x+1}{4x+9}\right) + \left(\frac{5(4x+9) - 4(5x+1)}{(4x+9)^2}\right)(x + \sqrt{x})$$

۹۷

$$\text{ب) } g(x) = \sqrt{\frac{3x^2+1}{5x+9}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{6x(5x+9) - 5(3x^2+1)}{(5x+9)^2}}{2\sqrt{\frac{3x^2+1}{5x+9}}}$$

