



p30konkor.com

زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

تاریخ برگزاری :

نام و نام خانوادگی :

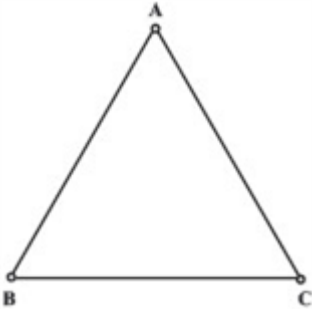
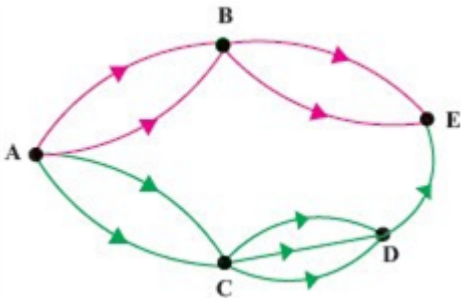
پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون : ریاضی ۱۰ فصل ۶- ترکیبی

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.</p> <p>الف) $9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$</p> <p>ب) $9 \times 8 \times 7 \times 6$</p> <p>پ) $11 \times 10 \times 9$</p> <p>ث) $n(n-1)$</p> <p>ت) ۸</p> <p>ج) $n(n-1)(n-2)(n-3)$</p>	
۲	<p>با حروف کلمه‌ی «گل پیرا» و بدون تکرار حروف</p> <p>الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «گل» شروع می‌شود؟</p> <p>ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟</p> <p>پ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟</p> <p>ت) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟</p> <p>ث) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه‌ی «پیرا» کنار هم آمده باشند؟</p>	
۳	<p>فرض کنیم A یک مجموعه‌ی n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد: $(a \in A)$</p> <p>الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی A برابر است با: ()</p> <p>ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها هست، برابر است با: ()</p> <p>پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها نیست، برابر است با: ()</p> <p>ت) بنابراین: $() = () + ()$</p>	
۴	<p>در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟</p>	
۵	<p>چند بردار سطری در فضا می‌توان مشخص کرد که درایه‌های آن‌ها فقط ارقام ۰ و ۱ باشد؟</p>	
۶	<p>نشان دهید که: $P(n, 1) = n$</p>	
۷	<p>نشان دهید که: $C(8, 5) = C(7, 5) + C(7, 4)$</p>	
۸	<p>از هریک از روابط زیر n را به دست آورید.</p> <p>$C(n, 1) = 5$ و $C(n, n-2) = 6$</p>	



۹	می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با $C(n, r)$. ثابت کنید: $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$
۱۰	با حروف a, b, c و d چند جایگشت می‌توان نوشت که حرف اول جایگشت‌های حاصل همیشه a باشد.
۱۱	هر یک از ترکیب‌های ۳ از ۵ مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e\}$ روی یک کارت نوشته شده است. پس از مخلوط کردن آنها یک کارت را به تصادف برمی‌داریم. احتمال آن‌که حرف a یکی از حروف این کارت باشد چیست؟
۱۲	می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم. الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند. پ) هر دو قسمت الف و ب را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.
	
۱۳	اگر شکل مقابل نشان‌دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟
	
۱۴	مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آن‌ها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد. $2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$
۱۵	تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف ت، ش، و، ا، ن، پ و ه می‌توان نوشت چندتا است؟ (بدون تکرار حروف)
۱۶	یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چین این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟
۱۷	از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه: الف) کمیته‌ی ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟ ب) کمیته‌ی ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟ پ) کمیته‌ی ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟



۱۸	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی برابر $\binom{7}{2}$ است.</p> <p>ب) حاصل $\binom{5}{0} + \binom{6}{2}$ برابر ۱۶ است.</p>
۱۹	<p>اگر $\binom{6}{2} + 2n = 17$ باشد، مقدار n را به دست آورید.</p>
۲۰	<p>مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:</p> <p>الف) چند زیرمجموعه دارد که شامل ۵ و ۱ باشد و فاقد ۴ باشد؟</p> <p>ب) چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟</p> <p>ج) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که شامل ۷ باشد؟</p> <p>د) چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد که شامل ۶ باشد و فاقد ۲ و ۱ باشد؟</p>



۱

$$\text{ب) } 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!}$$

$$\text{پ) } 11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!}$$

$$\text{ت) } 8 = \frac{8!}{7!}$$

$$\text{ث) } n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\text{ج) } n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$$

۲

الف) تعداد کل حالتها برابر است با : $6!$

تعداد کل حالتهایی که در آن با «گل» شروع شود برابر است با : $4!$

$$\text{ب) } P(6, 4) = \frac{6!}{2!} = 360$$

$$\text{پ) } 2! \times 5! = 240$$

$$\text{ت) } 2! \times 4 \times 3 \times 3 = 72$$

ث) جابه‌جایی گلی گ یا ل و پیرا

$$4! \times 2 \times 2! = 96$$

۳

$$\text{الف) } \binom{n}{r}$$

$$\text{ب) } \binom{n-1}{r-1}$$

$$\text{پ) } \binom{n-1}{r}$$

$$\text{ت) } \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

۴

فرض کنیم تعداد داوطلبان n نفر باشد بنابراین:

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \times 7 \Rightarrow n = 8$$

۵

بردار سطری به صورت (a, b, c) می‌باشد. هریک از حروف a, b, c می‌توانند 0 یا 1 باشند. یعنی هرکدام دو

حالت دارند، پس جواب برابر است با $2 \times 2 \times 2 = 8$.

۶

$$p(n, 1) = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\begin{cases} C(7, 5) = \frac{7!}{5! \times 2!} = 21 \\ C(7, 4) = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35 \\ C(8, 5) = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56 \end{cases} \xrightarrow{\text{بدیهی است که}} 56 = 21 + 35$$

۷

$$C(n, 1) = 5 \Rightarrow \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = 5 \Rightarrow \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = 5 \rightarrow n = 5$$

$$C(n, n-2) = 6 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times (n-n+2)!} = 6 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 6$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 4$$

۹ $C(n, n), \dots, C(n, 1), C(n, 0)$ به ترتیب تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی، ۱ عضوی، ... و n

عضوی می‌باشند مجموع اینها (سمت چپ) برابر تعداد کل زیرمجموعه‌ها یعنی برابر 2^n است.

۱۰ حرف اول یک حالت دارد. حال سه حرف دیگر ۳! جایگشت دارند پس جواب برابر ۶ است.

۱۱ تعداد ترکیب‌ها برابر $\binom{5}{3} = 10$ است. اگر a یکی از حروف باشد، پس ۲ حرف دیگر از بین ۴ حرف دیگر انتخاب

می‌کنیم که برابر $\binom{4}{2} = 6$ است، پس $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

۱۲ الف) برای آن‌که راس A رنگ متفاوت با رئوس B و C داشته باشد ۲ حالت داریم (A به رنگ آبی و دو رأس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برای متفاوت بودن رئوس B و C نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب $2 \times 2 \times 2 = 8$ طریق این کار امکان‌پذیر است.

ب) با توجه به این‌که هر رأس به دو رأس دیگر وصل است، این خواسته غیرممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی‌توان این کار را انجام داد.

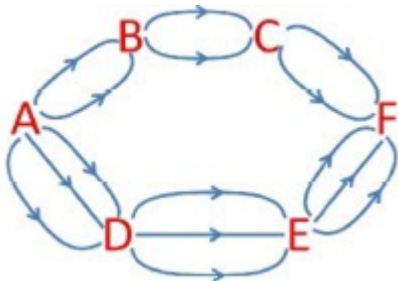
پ) حالت الف: با توجه به این‌که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

حالت ب: جواب همان جواب قسمت الف یعنی ۶ می‌باشد زیرا با وجود سه رأس و ۳ رنگ متمایز، خود به خود رئوس هم‌رنگ نخواهند بود.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسیر ABE: } 2 \times 2 = 4 \\ \text{مسیر ACDE: } 2 \times 3 \times 1 = 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 10$$

۱۴ مسئله: اگر شکل مقابل نشان‌دهنده جاده‌های بین شهرهای A, B, C, D, E, F باشد و همه‌ی جاده‌ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر F رفت؟



$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$P(6, 4) = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{2} \times \cancel{1}} = 360$$



$$\text{الف)} \binom{5}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{8}{2} = 10 \times 15 \times 28 = 420.$$

$$\text{ب)} \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{8}{1} = 5 \times 6 \times 8 = 240.$$

$$\text{پ)} \binom{8}{1} \times \binom{11}{1} + \binom{8}{2} = 88 + 28 = 116$$

الف) درست ۱۸

ب) درست

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4! \times 2} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\Rightarrow 15 + 2n = 17 \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1$$

الف) ۲۰

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
<u>۱</u> ×	<u>۲</u> ×	<u>۲</u> ×	<u>۱</u> ×	<u>۱</u> ×	<u>۲</u> ×	<u>۲</u>
باشد	باشد	باشد	نباشد	باشد	باشد	باشد
	نباشد	نباشد			نباشد	نباشد

$$= 2^4 = 16$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه های عضو ۴} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

(ب)

$$\{7, -, -\} \Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15$$

(ج)

$$\{6, -, -, -, -\} \Rightarrow \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)! \times 4!} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 1$$

(د)

