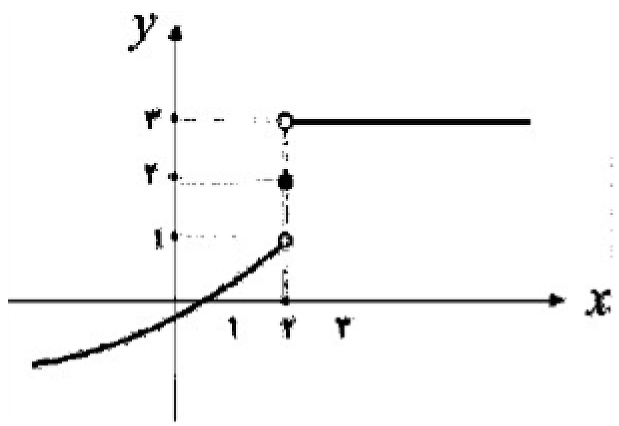
نام و نام خانوادگی :	عنوان آزمون : ریاضی تجربی ۱۱ فصل ۶
پایه تحصیلی :	زمان آزمون :
نام دبیر :	تاریخ برگزاری

p30konkor.com

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x=۱$ پیوسته است. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & x>۱\\ b-۱ & x=۱\\ x-۲a & x<۱\end{cases}$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳ پاسخ: ۱ حد راست $\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}$ $=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$ حد چپ $\lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}(x-۲a)=۱-۲a$ مقدار $f(۱)=b-۱$ چون تابع f در $x=۱$ پیوسته است $\Rightarrow\begin{cases}b-۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}\\ ۱-۲a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\end{cases}$	
۲	با توجه به نمودار تابع $f(x)$ مقدار عبارت، $\lim\limits_{x\to۲^+} f(x)+f(۲)+\lim\limits_{x\to۲^-}[f(x)]$ را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)  سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳ پاسخ: ۱ $\lim\limits_{x\to۲^-}[f(x)]=۰,\ \lim\limits_{x\to۲^+} f(x)=۳,\ f(۲)=۲\Rightarrow A=۰+۲+۳=۵$	

۳

پیوستگی تابع مقابل را در $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Cos}\,x & x<۰\\ \sqrt{۲} & x=۰\\ x^{۲}+۱ & x>۰\end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Cos}\,x)=۱\,,\ \lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(x^{۲}+۱)=۱$$

$f(۰)=\sqrt{۲}\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)\neq f(۰)\Rightarrow$ f در صفر پیوسته نیست.

۴

حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x\to ۲}\dfrac{۸-x^{۳}}{x^{۲}+۳x-۱۰}$

ب) $\lim_{x\to ۳^-}\dfrac{|۲-x|}{[x]+۱}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱

الف) $\lim_{x\to ۲}\dfrac{(۲-x)(۴+۲x+x^{۲})}{(x-۲)(x+۵)}=\lim_{x\to ۲}\dfrac{۴+۲x+x^{۲}}{-(x+۵)}=-\dfrac{۱۲}{۷}$

ب) $\lim_{x\to ۳^-}\dfrac{|۲-x|}{[x]+۱}=\dfrac{۱}{۳}$

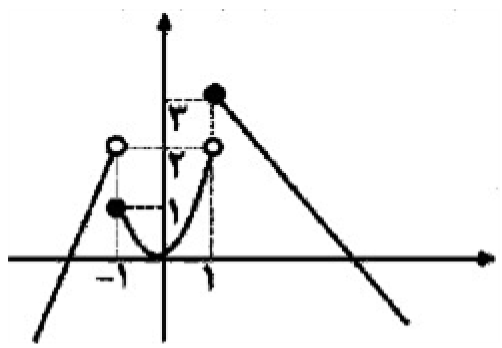
۵

نمودار تابع f به صورت مقابل داده شده است. مطلوب است:

الف) $\lim_{x\to ۱} f(x)$

ب) $\lim_{x\to -۱^+} f(x)$

پ) آیا تابع f در بازهٔ $[-۱,۱]$ پیوسته است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) وجود ندارد ب) ۱ پ) خیر

۶

پیوستگی تابع f را در نقطه $x=-۱$ بررسی کنید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است.)

$$f(x)=\begin{cases}۲[x]+۱ & x<-۱\\ -۳ & x=-۱\\ x^{۲}+۴x & x>-۱\end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

حد چپ $\lim_{x\to(-۱)^-}(۲[x]+۱)=۲(-۲)+۱=-۳$

حد راست $\lim_{x\to(-۱)^+}(x^{۲}+۴x)=۱-۴=-۳$

$f(-۱)=-۳$

$\lim_{x\to -۱} f(x)=f(-۱)\Rightarrow$ تابع پیوسته است

۷

حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x^{۳}+۸}{x+۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{|x-۲|}{x-۲}$ پ) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x-۲}{[x]+۱}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{(x+۲)(x^{۲}-۲x+۴)}{x+۲} = ۴+۴+۴ = ۱۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{(x-۲)}{x-۲} = ۱$ ، $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} \dfrac{-(x-۲)}{x-۲} = -۱$ $\Rightarrow$ حد وجود ندارد

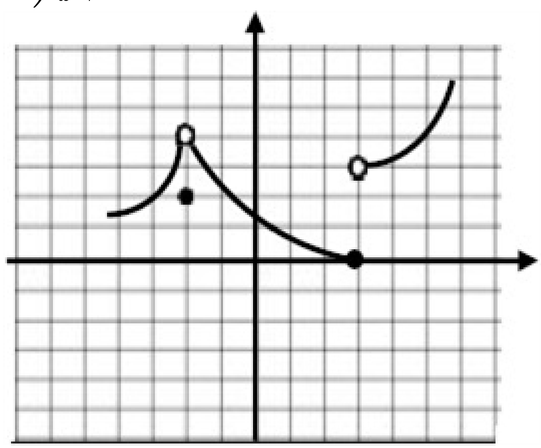
پ) $\dfrac{۰-۲}{[\pi]+۱} = \dfrac{-۲}{۳+۱} = \dfrac{-۱}{۲}$

۸

با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲} (x+f(x))$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) ۳

ب) $\lim\limits_{x\to -۲} x + \lim\limits_{x\to -۲} f(x) = ۲+۴ = ۶$

۹

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

تابع $y=\sqrt{۱-x}$ در $x=۱$ پیوستگی .... دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ چپ

۱۰

پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=-۲$ بررسی کنید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است.)

$$f(x)=\begin{cases}[x]-۲ & x<-۲\\ -۵ & x=-۲\\ ۳-۲x^{۲} & x>-۲\end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to -۲^{+}}(۳-۲x^{۲})=-۵\ ,\ \lim_{x\to -۲^{-}}([x])-۲=-۳-۲=-۵\ ,\ f(-۲)=-۵$$

تابع در $x=-۲$ پیوسته است.

۱۱

در صورت وجود حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است.)

الف) $\displaystyle\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۴}$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{[x]+۱}{\mathrm{Cos}\,(-\pi \mathrm{x})}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

الف) $\displaystyle\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۱)}{(x+۲)}=\frac{۱}{۴}$

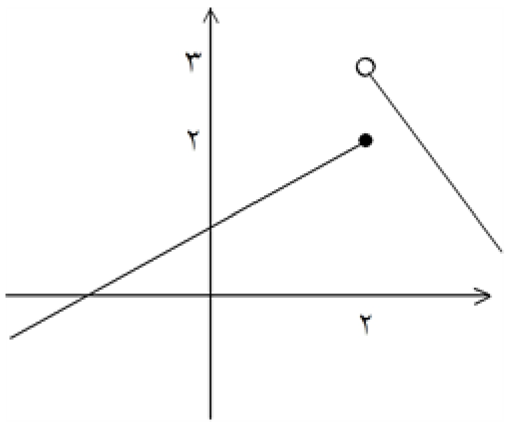
ب) $\displaystyle\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{[x]+۱}{\mathrm{Cos}\,(-\pi \mathrm{x})}=\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{-۲+۱}{-۱}=۱$

۱۲

نموداری از یک تابع رسم کنید که در نقطه $x=۲$، حد راست آن تابع برابر ۳ است ولی حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ برابر ۲ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱



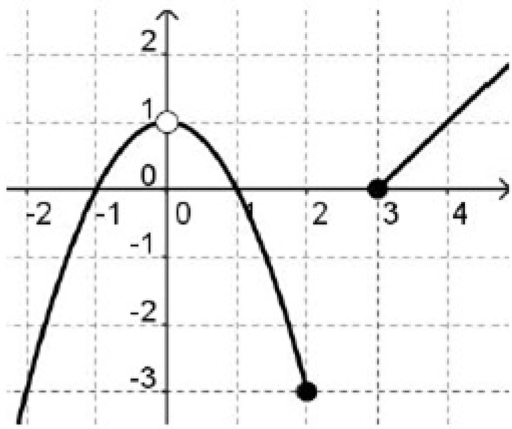
۱۳

با توجه به نمودار تابع f، حدهای خواسته شده را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) -۳ ب) وجود ندارد ج) ۱

۱۴

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- حد تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند، برابر صفر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۱۵

پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x - ۵ & x < ۲ \\ -۳ & x = ۲ \\ x^۲ - ۷ & x > ۲ \end{cases}$ را در $x = ۲$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱ چون حد تابع و مقدار تابع برابر است، پس تابع در $x = ۲$ پیوسته می‌باشد.

$$۲ - ۵ = -۳ = ۲^۲ - ۷ \Rightarrow -۳ = -۳ = -۳$$

۱۶

تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{[x] - ۲}{x - ۲}$ را درنظر بگیرید. با کامل کردن جدول زیر، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	$\to ۲$
f(x)	...	...	...	؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	$\to ۲$
f(x)	۰	۰	۰	۰

۱۷

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x}$ در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست.

۱۸

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} -۲x + a & x < ۰ \\ b + ۱ & x = ۰ \\ x^۲ + ۲ & x > ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ پیوسته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$-۲(۰) + a = (۰)^۲ + ۲ = b + ۱$$
$$a = ۲, b = ۱$$

۱۹

اگر تابع $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته باشد، مقدار a و b را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ax + ۳ & x < ۱ \\ ۲ & x = ۱ \\ x^۲ + b & x > ۱ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$f(۱) = ۲$$
$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (x^۲ + b) = ۱ + b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$
$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (ax + ۳) = a + ۳ = ۲ \Rightarrow a = -۱$$

۲۰

حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ - ۳x}$

ب) $\lim_{x \to ۲^-} \frac{x + ۳}{[x]}$

پ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} (\tan x + \cot x)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

الف) $\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ - ۳x} = \lim_{x \to ۳} \frac{(x - ۳)(x + ۳)}{x(x - ۳)} = ۲$

ب) $\lim_{x \to ۲^-} \frac{x + ۳}{[x]} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲ + ۳}{[۲^-]} = \frac{۵}{۱} = ۵$

پ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} (\tan x + \cot x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} ۱ + ۱ = ۲$

۲۱	حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۳x - ۴}{x^۲ + x} =$ $\lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{۲x + ۳}{[x] + ۲} =$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۳x - ۴}{x^۲ + x} = \lim\limits_{x\to -۱} \frac{x - ۴}{x} = \frac{-۵}{-۱} = ۵$ $\lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{۲x + ۳}{[x] + ۲} = \frac{۲(-۲) + ۳}{-۳ + ۲} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$	
۲۲	حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.) الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ + ۱}{[x]}$ پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x - \cos x)$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - x} = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)} = ۲$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ + ۱}{[x]} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۲^۲ + ۱}{[۲^+]} = \frac{۵}{۲}$ پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x - \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$	
۲۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. ([] نماد جزء صحیح است.) مقدار $\lim [x]$ وقتی $x \to ۰$ برابر صفر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ نادرست.	
۲۴	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. حاصل حد $\sqrt{x}$ وقتی $x \to ۰^+$ برابر .... است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ صفر	

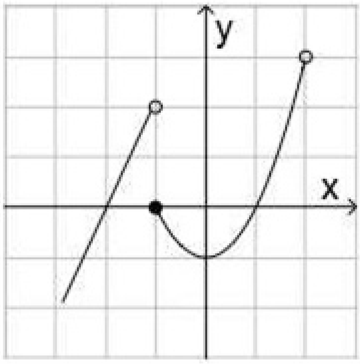
۲۵

با استفاده از نمودار زیر، مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) =$

پ) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) =$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) = ۲$

پ) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = -۱$

۲۶

آیا تابع $f(x) = \sqrt{x - x^۲}$ در نقطه $x = ۱$ حد دارد؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱ خیر. با توجه به دامنه تابع، همسایگی راست یک، وجود ندارد.

$x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow D = [۰, ۱]$

۲۷

پیوستگی تابع f را در $x = ۰$ ، به ازای تمام مقادیر a بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{ax}}{|x|} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$f(۰) = ۱ \,, \lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = a \,, \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = -a$

$a = ۰ \Rightarrow f(۰) \neq \lim\limits_{x \to ۰} f(x) \,, a \neq ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) \neq f(x)$

تابع در $x = ۰$ پیوسته نیست.

۲۸

مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه‌ای به طول $x = ۰$ پیوسته باشد. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x} & x > ۰ \\ x - \frac{a}{۴} & x = ۰ \\ b + \frac{[x]}{۲} & x < ۰ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

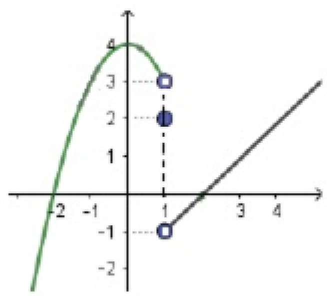
پاسخ: ۱

$$f(۰) = \frac{-a}{۴} \;, \lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱ + x - ۱}{x(\sqrt{۱ + x} + ۱)} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = b - \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۲ \;, b = ۱$$

۲۹

با توجه به شکل، حاصل عبارت زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.



$$۲\lim_{x\to ۱^+} f(x) + ۳f(۱) - \lim_{x\to ۰} f(x)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$۲\lim_{x\to ۱^+} f(x) + ۳f(۱) - \lim_{x\to ۰} f(x) = ۲(-۱) + ۳(۲) - ۴ = ۰$$

۳۰

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲\mathrm{x} + a & x > ۲ \\ ۳ & x = ۲ \\ \mathrm{bx} + ۱ & x < ۲ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ برای اینکه تابع در $x = ۲$ پیوسته باشد، باید: $\lim_{x\to ۲} f(x) = f(۲)$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۴ + a \;, \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲\mathrm{b} + ۱ \;\;, f(۲) = ۳$$

$$۴ + a = ۳ \Rightarrow a = -۱$$

$$۲\mathrm{b} + ۱ = ۳ \Rightarrow b = ۱$$

۳۱

حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x] - ۳}$ را در نقطه $x = ۳$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

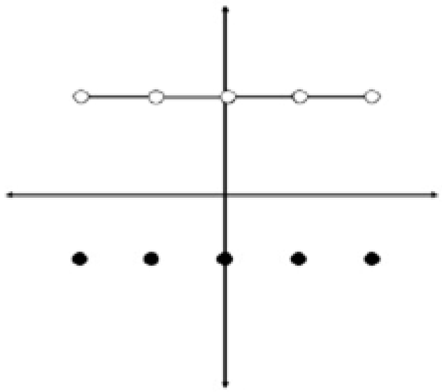
پاسخ: ۱ با توجه به دامنه تابع: $D = (-\infty, +\infty) - [۳, ۴)$ ، متغیر x نمی‌تواند با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک شود. بنابراین حد راست تابع در نقطه $x = ۳$ وجود ندارد.

۳۲

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -۲ & x \in Z \\ ۳ & x \notin Z \end{cases}$ را در فاصلهٔ $[-۲, ۲]$ رسم نموده و سپس با استفاده از نمودار $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱



$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۳ \quad \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۳ \quad \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۳$

۳۳

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر عدد دلخواه a ، برابر .... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ a

۳۴

پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = ۲$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x - ۹ & x > ۲ \\ -۵ & x = ۲ \\ -۲x^۲ + ۳ & x < ۲ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (۲x - ۹) = -۵$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (-۲x^۲ + ۳) = -۵$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) = -۵ = f(۲)$$

در نتیجه تابع f در $x = ۲$ پیوسته است.

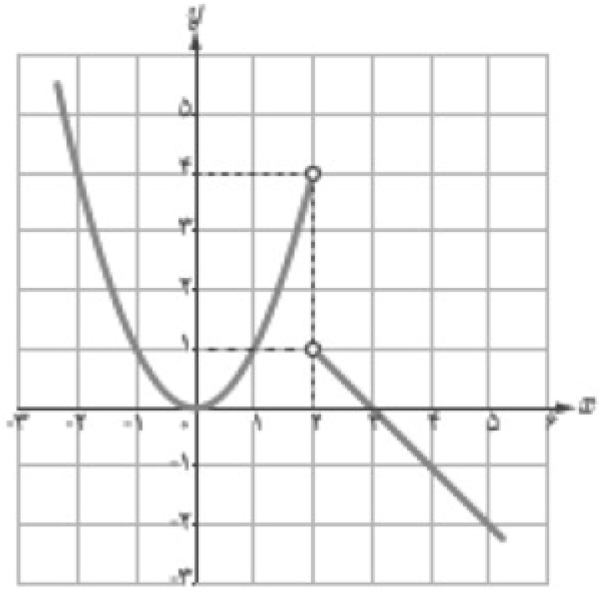
۳۵

با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) =$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) =$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ الف) ۱ ب) ۴ ج) صفر

۳۶

حاصل حد مقابل را به دست آورید. $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۳x}{x^۲ - ۹} =$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$\lim\limits_{x \to ۳} \frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)} = \lim\limits_{x \to ۳} \frac{x}{x+۳} = \frac{۱}{۲}$$

۳۷

جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

حد تابع $f(x) = \frac{x+۴}{[x]+۳}$ وقتی $x \to -۱^-$، برابر .... است. ([] نماد جزء صحیح است.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ ۳

۳۸

مقادیر b و a را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & x<-۱ \\ \text{ax}+b & x=-۱ \\ x^{۲}-b & x>-۱ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

مقدار تابع = حد چپ = حد راست شرط پیوستگی

$$f(-۱)=a(-۱)\ b=-a+b$$

$$\lim_{x\to -۱^{-}} f(x)=\lim_{x\to -۱^{-}}(-۱)=-۱$$

$$\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to -۱^{+}} x^{۲}-b=(-۱)^{۲}-b=۱-b$$

$$\begin{cases} ۱-b=-۱\Rightarrow b=۲ \\ -a+b=-۱\Rightarrow -a+۲=-۱\Rightarrow a=۳ \end{cases}$$

۳۹

مقدار حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-۳x}{x^{۲}-۹}$

ب) $\lim_{x\to ۱۴۰۲^{-}}[x]$

ج) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\operatorname{Cos} x$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

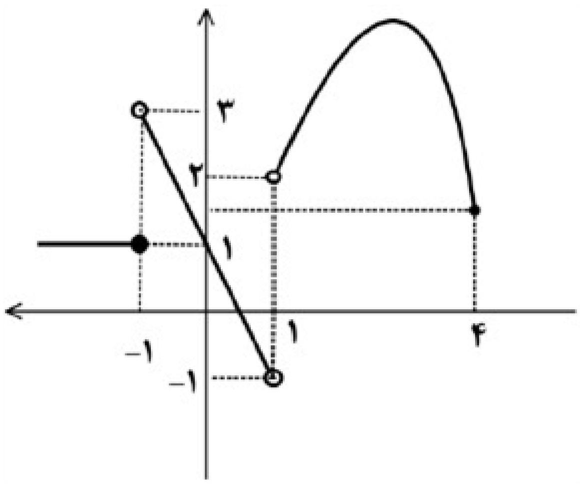
الف) $\lim_{x\to ۳}\dfrac{x(x-۳)}{(x+۳)(x-۳)}=\dfrac{۳}{۳+۳}=\dfrac{۱}{۲}$

ب) ۱۴۰۱

ج) $\operatorname{Cos}\dfrac{\pi}{۴}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴۰

با توجه به نمودار حاصل را بیابید.



$$\lim_{x\to (-۱)^{+}} f(x)-۳\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)+۳f(-۱)=$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

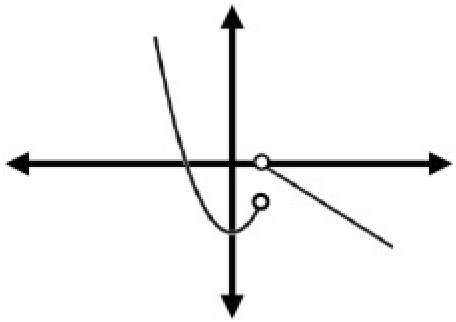
$$۳-۳(-۱)+۳(۱)=۹$$

۴۱

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>۱\\ x^۲-۲ & x<۱\end{cases}$ را رسم نموده و سپس با استفاده از نمودار حد تابع در نقطه $x=۱$ را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱



$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۰$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=\text{وجود ندارد}$$

۴۲

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x=۲$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{[x]+a}{x-۱} & x>۲\\ b-۱ & x=۲\\ ۲\text{bx}+۴ & x<۲\end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ برای اینکه تابع در $x=۲$ پیوسته باشد باید:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\frac{۲+a}{۱}\,,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۴b+۴\,,\ f(۲)=b-۱$$

$$۴b+۴=b-۱\Rightarrow b=\frac{-۵}{۳}\,,\ ۲+a=b-۱\Rightarrow a=\frac{-۱۴}{۳}$$

۴۳

مقدار a را طوری بیابید که تابع $g(x)=([x]-a)[x]$ در نقطه $x=-۲$ پیوسته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to -۲^-}([x]-a)[x]=\lim\left[-۲^-\right]-a\left[-۲^-\right]=(-۳-a)(-۳)=۹+۳a$$

$$\lim_{x\to -۲^+}([x]-a)[x]=\lim\left[-۲^+\right]-a\left[-۲^+\right]=(-۲-a)(-۲)=۴+۲a$$

$$f(-۲)=([-۲]-a)[-۲]=(-۲-a)(-۲)=۴+۲a$$

$$۹+۳a=۴+۲a\Rightarrow a=-۵$$

برای بررسی پیوستگی باید در نقطهٔ $x=-۲$ حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند.

۴۴

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر .... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ مقدار ثابت c

۴۵

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $g(x)=\sqrt{x-۳}$ در نقطه $x=۳$ حد ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

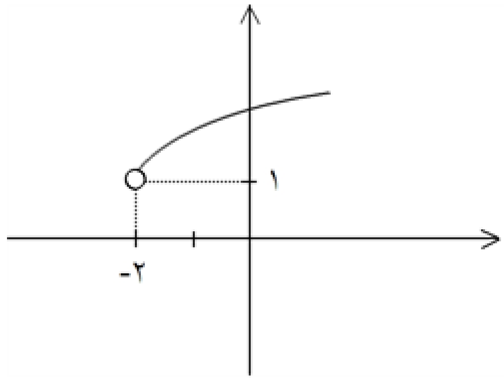
پاسخ: ۱ درست

۴۶

نمودار تابع g را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه $x=-۲$ حد راست داشته باشد ولی در این نقطه پیوستگی راست نداشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱



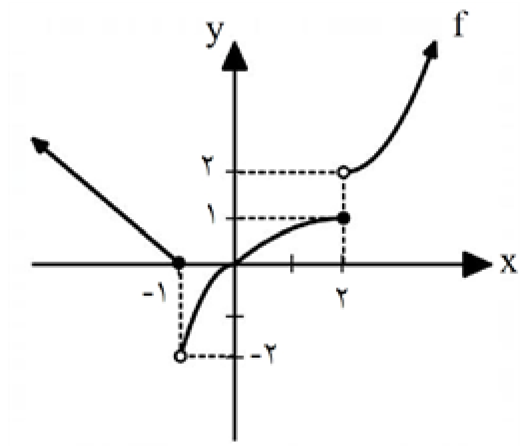
۴۷

نمودار f به صورت مقابل داده شده است. مطلوب است:

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x)$

پ) آیا تابع f در بازهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته است؟



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

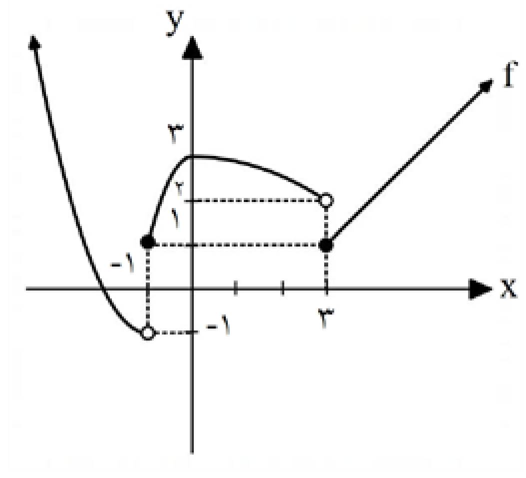
پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=۰\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=-۲\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-۱)} f(x)=$ حد ندارد

پ) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=-۲\\ f(-۱)=۰\end{cases} \Rightarrow$ در $x=-۱$ پیوستگی راست ندارد.

تابع f در $x=-۱$ پیوستگی راست ندارد، بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته نیست.

۴۸	آیا تابع f در بازهٔ $[-۱, ۳]$ پیوسته است؟ چرا؟  سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۲ \\ f(۳) = ۱ \end{cases} \Rightarrow$ تابع f در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد. تابع f در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد. بنابراین در بازهٔ $[-۱, ۳]$ پیوسته نیست.	
۴۹	حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. ($[]$ نماد جزء صحیح است.) الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳ - ۸}{x^۲ - ۵x + ۶}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{\lvert ۳ - x\rvert}{[x] + ۱}$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳ - ۸}{x^۲ - ۵x + ۶} = \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{(x-۲)(x^۲ + ۲x + ۴)}{(x-۲)(x-۳)} = \dfrac{۴+۴+۴}{۲-۳} = -۱۲$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{\lvert ۳ - x\rvert}{[x] + ۱} = \dfrac{\lvert ۳-۵\rvert}{[۵^-] + ۱} = \dfrac{۲}{۴+۱} = \dfrac{۲}{۵}$	

۵۰

پیوستگی تابع زیر را در $x = \frac{\pi}{۴}$ بررسی کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x & x > \frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲} & x = \frac{\pi}{۴} \\ [-x] + \sqrt{۲} + ۱ & x < \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{۴}\right)$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} \text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right) + \text{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}$$

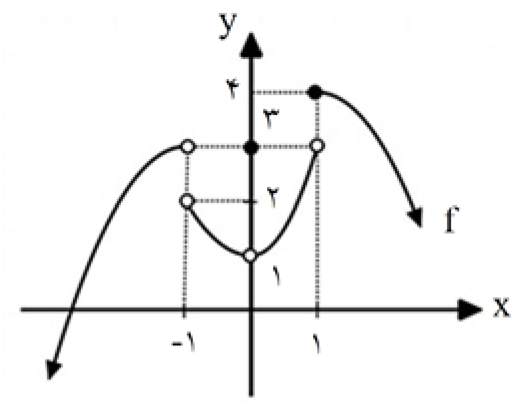
$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} [-x] + \sqrt{۲} + ۱ = -۱ + \sqrt{۲} + ۱ = \sqrt{۲}$$

بنابراین تابع در $x = \frac{\pi}{۴}$ پیوسته است.

۵۱

اگر نمودار f به صورت زیر باشد، مقدار عبارت $\lim\limits_{x \to (-۱)^+} [f(x)] + f(۰) + \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$ را به دست آورید.

([] نماد جزء صحیح است.)

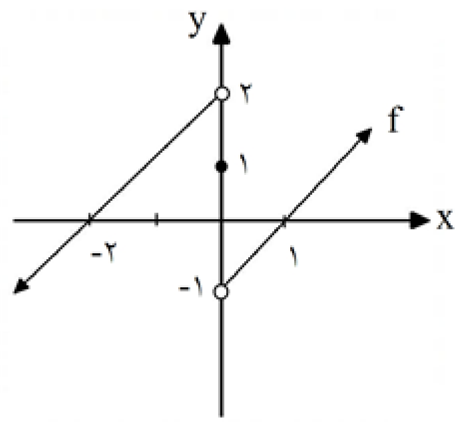


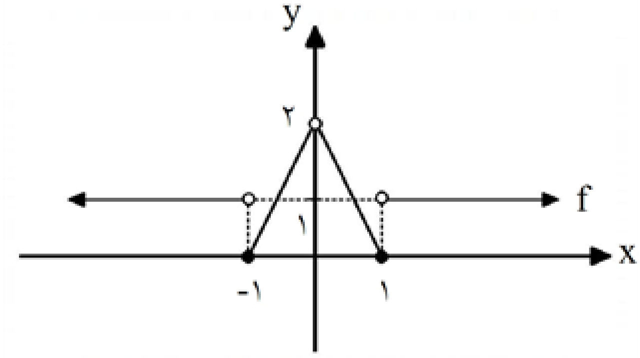
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

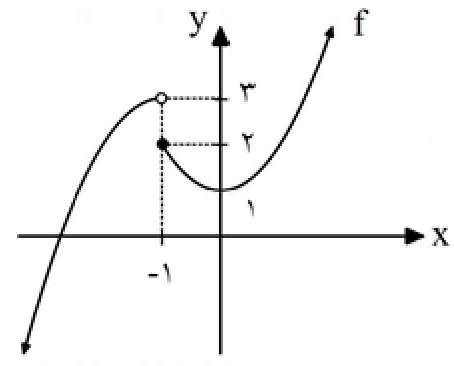
پاسخ: ۱

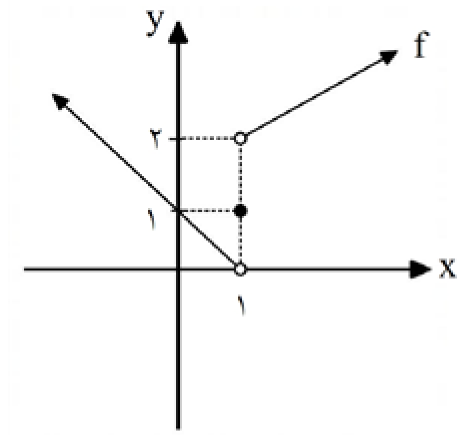
$$\lim_{x \to (-۱)^+} [f(x)] + f(۰) + \lim_{x \to ۱^-} f(x) = \left[۲^-\right] + ۳ + ۳ = ۱ + ۳ + ۳ = ۷$$

۵۲	حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.) الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱-x^{۳}}{x^{۲}-۷x+۶}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} \dfrac{\|x-۵\|}{[-x]+۳}$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱-x^{۳}}{x^{۲}-۷x+۶} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{-(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}{(x-۱)(x-۶)} = \dfrac{-۳}{-۵} = \dfrac{۳}{۵}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} \dfrac{\|x-۵\|}{[-x]+۳} = \dfrac{۴}{-۲+۳} = ۴$	
۵۳	اگر $f(x) = \begin{cases} ax^{۲}+x-۱ & x>۲ \\ ax+۴ & x<۳ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x) - \lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x) = ۱۶$ باشد، مقدار a را به دست آورید. سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^{+}} ax^{۲}+x-۱ = ۹a+۲ \\ \lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^{-}} ax+۴ = ۳a+۴ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x) - \lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x) = ۹a+۲-(۳a+۴) = ۱۶$ $\Rightarrow ۹a+۲-۳a-۴ = ۱۶ \Rightarrow ۶a-۲ = ۱۶ \Rightarrow ۶a = ۱۸ \Rightarrow a = ۳$	
۵۴	اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = a$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x) = b$ باشد، مقدار $h(a-b)$ را به دست آورید. $f(x) = \dfrac{x^{۳}-۸}{x-۲}$ $g(x) = \begin{cases} x^{۲}-۲x-۶ & x\neq ۵ \\ ۷ & x=۵ \end{cases}$ $h(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{۴}\right)$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}{x-۲} = ۴+۴+۴ = ۱۲ \Rightarrow a = ۱۲$ $\lim\limits_{x\to ۵} g(x) = \lim\limits_{x\to ۵} x^{۲}-۲x-۶ = ۲۵-۱۰-۶ = ۹ \Rightarrow b = ۹$ $\xrightarrow{a=۱۲ \text{ و } b=۹} h(۱۲-۹) = h(۳) = \sin\left(\dfrac{۳\pi}{۴}\right) = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{۴}\right) = \sin\dfrac{\pi}{۴} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$	
۵۵	اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۱۲$ باشد، مقدار $f(۲)+f(m)$ را به دست آورید. $f(x) = \begin{cases} x^{۲}+mx & x\neq ۲ \\ ۲m-۱ & x=۲ \end{cases}$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲} x^{۲}+mx = (۲)^{۲}+m(۲) = ۴+۲m = ۱۲ \Rightarrow ۲m = ۸ \Rightarrow m = ۴$ $\xrightarrow{m=۴} f(۲)+f(۴) = ۲(۴)-۱+(۴)^{۲}+۴(۴) = ۷+۱۶+۱۶ = ۳۹$	

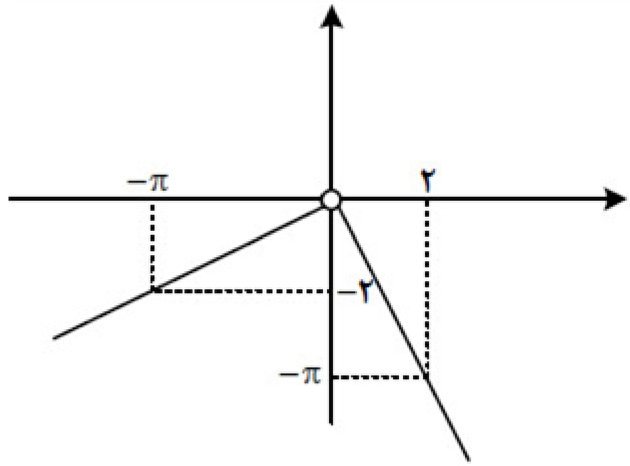
۵۶	مقدار m را چنان بیابید که تابع f در $x = ۲$ دارای حدی برابر ۹ باشد. $f(x) = \begin{cases} ۲mx + ۷ & x \neq ۲ \\ ۴m - ۱ & x = ۲ \end{cases}$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۹ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲} ۲mx + ۷ = ۴m + ۷ = ۹ \Rightarrow ۴m = ۲ \Rightarrow m = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$	
۵۷	با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حد زیر را حساب کنید.  $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - ۲}{f(x) + ۳}$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - ۲}{f(x) + ۳} = \frac{\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) - \lim\limits_{x \to ۰^-} ۲}{\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) + \lim\limits_{x \to ۰^-} ۳} = \frac{۲ - ۲}{۲ + ۳} = \frac{۰}{۵} = ۰$	

۵۸	با توجه به نمودار تابع f ، حدهای خواسته شده را بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)$ د) $\lim\limits_{x\to (-۱)} f(x)$  **سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم**	
پاسخ: ۱	الف) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۲$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۱$ ج) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = ۰$ د) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to (-۱)} f(x) =$ حد ندارد	

۵۹	با توجه به نمودار تابع f ، حدهای خواسته شده را بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)$ د) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$  سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 2$ ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = 3$ ج) $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x) =$ حد ندارد د) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$	
۶۰	مقدار k را چنان بیابید که تابع f در $x = 3$ دارای حدی برابر ۱۲ باشد. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{kx-3k} & x \neq 3 \\ 4+k & x = 3 \end{cases}$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 12 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{kx-3k} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{k(x-3)} = \frac{6}{k} = 12$ $\Rightarrow 12k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	

۶۱	با توجه به نمودار تابع f ، حد خواسته شده را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)  $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) + [x]}{x+1}$ سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)+[x]}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 1^-} [x]}{\lim\limits_{x\to 1^-} (x) + \lim\limits_{x\to 1^-} 1} = \frac{0-0}{1+1} = 0$	
۶۲	تابع غیرصفر $f(x) = a[x] + b[x+1]$ در R پیوسته است. مقدار $\frac{f(a)}{a}$ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$ سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳ **پاسخ:** ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $f(x) = a[x] + b[x] + b \Rightarrow f(x) = (a+b)[x] + b \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b$ $\Rightarrow f(x) = b \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -1$	

۶۳ شکل زیر، نمودار تابع f است. مقدار $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{|f(x)|}{\sin x}+\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\dfrac{\sin x}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $1-\dfrac{4}{\pi^2}$

۲) $\dfrac{4}{\pi^2}-1$

۳) $4\pi-\dfrac{1}{\pi^2}$

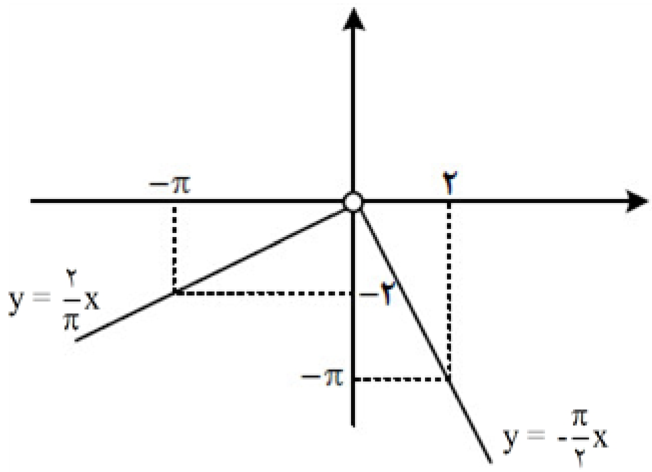
۴) $4\pi+\dfrac{1}{\pi^2}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

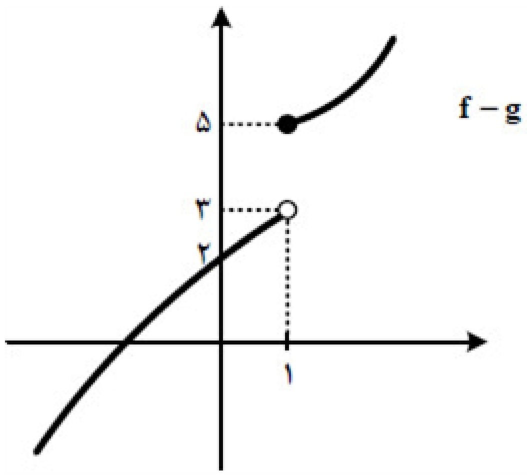
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{|f(x)|}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}}=+\frac{4}{\pi^2}$$

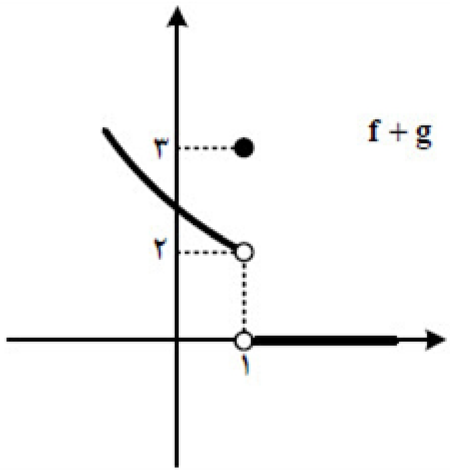
$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{|f(x)|}{\sin x}=\frac{\left|\frac{2}{\pi}\times-\frac{\pi}{2}\right|}{-1}=-1$$



۶۴	به ازای مقادیر طبیعی c، تابعی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^{۲}-۲x+۱} & \lvert x\rvert \le c\\ ax^{۲}+bx+۲ & \lvert x\rvert > c\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام می‌تواند مقدار $\left[\frac{a}{b}\right]$ باشد؟ ۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴- سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳ **پاسخ:** ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x)=\begin{cases}\lvert x-۱\rvert & -c\le x\le c\\ ax^{۲}+bx+۲ & x<-c\,,\ x>c\end{cases}$ $x=c \xrightarrow{c\in N} c-۱=ac^{۲}+bc+۲$ $x=-c \xrightarrow{c\in N} c+۱=ac^{۲}-bc+۲$ $\left.\begin{array}{l}\text{تفاضل} \Rightarrow -۲bc=۲ \Rightarrow b=-\frac{۱}{c}\\ \Rightarrow c-۱=ac^{۲}+۱ \Rightarrow a=\frac{c-۲}{c^{۲}}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲-c}{c}=\frac{۲}{c}-۱$ $c=۱ \Rightarrow \frac{۲}{c}-۱=۱$ $c=۲ \Rightarrow \frac{۲}{c}-۱=۰$ $c>۲ \Rightarrow -۱<\frac{۲}{c}-۱<۰ \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=-۱$	
۶۵	تابع ناصفر $f(x)=b\left[x^{۲}-ax\right]-۲a$ در R پیوسته است. مقدار $\frac{a}{f(b)}$ کدام است؟ ۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) صفر سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت **پاسخ:** ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x)=b\,[x(x-a)]-۲a \xrightarrow{\text{در } R \text{ پیوسته}} b=۰ \Rightarrow \frac{a}{f(b)}=\frac{a}{f(۰)}=\frac{a}{-۲a}=-\frac{۱}{۲}$	

۶۶ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ هستند. مقدار $\operatorname{Lim}\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟





۱) حد ندارد.　　۲) $۲/۲۵$　　۳) $۲/۵$　　۴) $۲/۷۵$

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۱)\ \operatorname{Lim}_{x\to ۱^+} (f+g)(x) = ۰$$

$$۲)\ \operatorname{Lim}_{x\to ۱^-} (f+g)(x) = ۲$$

$$۳)\ \operatorname{Lim}_{x\to ۱^+} (f-g)(x) = ۵$$

$$۴)\ \operatorname{Lim}_{x\to ۱^-} (f-g)(x) = ۳$$

$$۱,۳ \Rightarrow \operatorname{Lim}_{x\to ۱^+} (f+g)(x) + \operatorname{Lim}_{x\to ۱^+} (f-g)(x) = ۲\operatorname{Lim}_{x\to ۱^+} f(x) = ۵ \Rightarrow \operatorname{Lim}_{x\to ۱^+} f(x) = ۲/۵$$

$$۲,۴ \Rightarrow \operatorname{Lim}_{x\to ۱^-} (f+g)(x) + \operatorname{Lim}_{x\to ۱^-} (f-g)(x) = ۲\operatorname{Lim}_{x\to ۱^-} f(x) = ۵ \Rightarrow \operatorname{Lim}_{x\to ۱^-} f(x) = ۲/۵$$

۶۷ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{۳x^۲+(m-۱)x+(m-۴)}}{\left|x^۳+((m-۷)x+a)^۲\right|} & x \neq a \\[2mm] \dfrac{۲\operatorname{Sin} b}{۳\sqrt{x+۲}} & x = a \end{cases}$ در R پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\dfrac{\pi}{۳}$　　۲) $\dfrac{\pi}{۶}$　　۳) $\dfrac{۵\pi}{۳}$　　۴) $\dfrac{۵\pi}{۶}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x=a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (m-۱)^۲ - ۱۲(m-۴) = ۰ \Rightarrow (m-۷)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۷$$

ریشه صورت و مخرج $x = a \Rightarrow a = -۱$

$$\text{صورت}: \frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳+۱|} = \frac{\sqrt{۳}\,|x+۱|}{|x+۱|\,(x^۲-x+۱)} \Rightarrow \operatorname{Lim}_{x\to a} \text{صورت} = \operatorname{Lim}_{x\to(-۱)} \text{صورت} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{مخرج}: x = a = -۱: \frac{۲\operatorname{Sin} b}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \operatorname{Sin} b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶۸	تابع $f(x)=\begin{cases}(1-a)[x]+(3a^2-1)[-x] & x\notin Z\\ b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{a}\right) & x\in Z\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟ ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت **پاسخ:** ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع روی R پیوسته است پس در $x=0$ نیز پیوسته است، بنابراین داریم: $\left.\begin{array}{l} f(0)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{a}\right)\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=(1-a)\times(0)+(3a^2-1)(-1)=-3a^2+1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=(1-a)\times(-1)+(3a^2-1)(0)=a-1\end{array}\right\}\Rightarrow -3a^2+1=a-1$ $\Rightarrow 3a^2+a-2=0\Rightarrow\begin{cases} a=-1\Rightarrow\begin{cases} f(0)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{-1}\right)=0\\ \text{حد تابع}=a-1=-1-1=-2\end{cases} \text{غ ق ق}\\ a=\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases} f(0)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3}}\right)=b\,\mathrm{Sin}\frac{3\pi}{2}=-b\\ \text{حد تابع}=a-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}\end{cases}\end{cases}$ $\Rightarrow -b=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2$	
۶۹	به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{\lvert x^2-x-2\rvert}{x-2} & x<2\\ a[-x]+3+3a & x\geq 2\end{cases}$، روی بازه‌ی $(-\infty,2]$ پیوسته است؟ ۱) ۳- ۲) ۶- ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد چپ و راست در ۲ برابر نیستند، پس در ۲ پیوسته نیست و در نتیجه در R پیوسته نیست. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\lvert(x+1)(x-2)\rvert}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)(x-2)}{x-2}=-3\\ f(2)=-2a+3+3a=a+3\end{array}\right\} a+3=-3\Rightarrow a=-6$	

۷۰

برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[-x]| & \text{زوج } [x] \\ x-[x]+k & \text{فرد } [x]\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k, n \in \mathrm{N})$

۱) n زوج

۲) n فرد

۳) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.

۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توانیم برای $n=۱$ و $n=۲$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x=\pm ۱$ و $x=\pm ۲$ بررسی می‌کنیم:

$$x=۱: \lim_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=۱-۱+k=k$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} |x-[-x]|=۲$$

$$x=-۱: \lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=f(-۱)=k$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} = \lim_{x\to (-۱)^-} |x-[-x]|=۲$$

پس اگر $k=۲$ باشد به ازای $x=\pm ۱$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول‌اند.

$$x=۲: \lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} |x-[-x]|=۵$$

$$f(۲)=۲-(-۲)=۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} (x-[x]+k)=۱+k$$

پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.

۷۱ تابع
$$f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x^۲<|x|\\ \text{Cos}\,\pi x & x^۲=|x|\\ |x|\,([x]+۱) & |x|<x^۲<۲\end{cases}$$
، در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱ (۱) ۲ (۲)

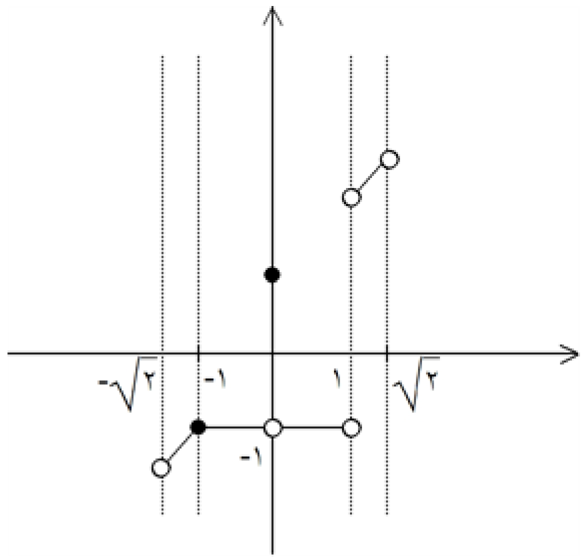
۳ (۳) در همه نقاط پیوسته است. (۴)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: (۲) گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & -۱<x<۱-\{۰\}\\ \text{Cos}\,(\pi x) & x=۰\,,\,۱\,,-۱\\ |x|\,([x]+۱) & ۱<x<\sqrt{۲}\ \text{یا}\ -\sqrt{۲}<x<-۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۱ & -۱<x<۱-\{۰\}\\ -۱ & x=\pm۱\\ ۱ & x=۰\\ ۲x & ۱<x<\sqrt{۲}\\ x & -\sqrt{۲}<x<-۱\end{cases}$$

پس این تابع در $x=۰$ و $x=۱$ ناپیوسته است.



۷۲ تابع
$$f(x)=\begin{cases}\tan\frac{(۲x+۱)\pi}{۴} & x\le ۱\\ \frac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)} & ۱<x<۵\\ b(x-[-x]) & x\ge ۵\end{cases}$$
روی بازه $[۱,۵]$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

$-۰/۷$ (۱) $-۰/۵$ (۲) $۰/۷$ (۳) $۰/۵$ (۴)

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: (۱) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

پیوستگی راست در $x=۱$:
$$\left\{\begin{array}{l}f(۱)=\tan\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)=-۱\\ \lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۲)}{-a\,\cancel{(x-۱)}}=\frac{۳}{-a}\end{array}\right\}\frac{۳}{-a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

پیوستگی چپ در $x=۵$:
$$\left\{\begin{array}{l}f(۵)=b(۵-[-۵])=۱۰b\\ \lim\limits_{x\to۵^-}f(x)=\frac{|۲۵+۵-۲|}{۳(۱-۵)}=\frac{۲۸}{۳\times-۴}=\frac{-۷}{۳}\end{array}\right\}۱۰b=\frac{-۷}{۳}\Rightarrow b=\frac{-۷}{۳۰}$$

$\Rightarrow \text{ab}=-۰/۷$

	اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \lvert x-[x]\rvert & \text{زوج } [x] \\ \lvert x-[x-a]\rvert & \text{فرد } [x] \end{cases}$ در R پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟ $(a<-۱)$ ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳ سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع در R پیوسته است پس در $x=۰$ هم پیوسته است. حال برای دو حالت $a\notin Z$ و $a\in Z$ داریم: $a\notin Z \begin{cases} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \\ f(۰^-)=\lvert ۰-[-a]\rvert=[-a] \end{cases} [-a]=۰\Rightarrow ۰\leq -a<۱\Rightarrow -۱<a\leq ۰$ غ ق ق با شرط $a<-۱$ اشتراک ندارد. $a\in Z \begin{cases} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \\ f(۰^-)=\left\lvert ۰+a-\left[۰^-\right]\right\rvert=\lvert a+۱\rvert \end{cases}$ $\lvert a+۱\rvert=۰\Rightarrow a=-۱$ با شرط $a<-۱$ اشتراک ندارد. پس به ازای هیچ مقدار $a<-۱$ پیوسته نمی‌شود. تذکر: تابع فقط به ازای $a=-۱$ روی R پیوسته می‌شود.	۷۳
	اگر در ریشه‌ای از معادله $۵x^۲-ax+b=۰$، حد تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+ax+b}{x-۱}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $\left[\dfrac{b-۲a}{۳}\right]$ کدام است؟ ۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) صفر سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱ **پاسخ:** ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\left.\begin{matrix} \text{ریشه}=۱\Rightarrow ۵-a+b=۰\Rightarrow a-b=۵ \\ \text{ریشه صورت } f=۱\Rightarrow ۱+a+b=۰\Rightarrow a+b=-۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=-۳ \end{cases}$ $\left[\dfrac{b-۲a}{۳}\right]=\left[\dfrac{-۳-۴}{۳}\right]=-۳$ تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x=۱$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x=۱$ صفر شود، در غیر این‌صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.	۷۴

فرض کنید $g(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$ و $f(x) = ۱ - x^۲$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof، کدام است؟ ۷۵

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

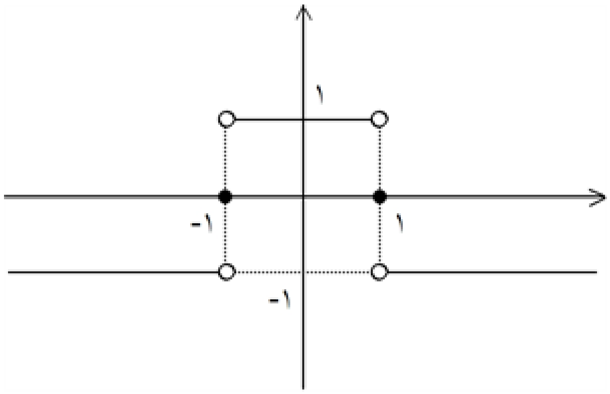
پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(\text{gof})(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $۱ - x^۲$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $۱ - x^۲$ منفی باشد، حاصل y برابر ‎-۱ و اگر $۱ - x^۲$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

$$\begin{cases} ۱ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \Rightarrow g(f(x)) = ۱ \\ ۱ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow g(f(x)) = ۰ \\ ۱ - x^۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \Rightarrow g(f(x)) = -۱ \end{cases}$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه $(\text{gof})(x)$ برابر است با:

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} ۱ & ; -۱ < x < ۱ \\ ۰ & ; x = \pm ۱ \\ -۱ & ; x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \end{cases}$$

با رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



در شکل مشخص است که تابع در $x = ۱$ و $x = -۱$ ناپیوسته است.

تابع $f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & |x^۳| < x^۲ \\ ۱ + \text{Cos}\, \pi x & |x^۳| = x^۲ \\ [x^۲] - [x] & |x^۳| > x^۲ \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ ۷۶

۱) ۲
۲) ۳
۳) بیشمار
۴) در همه نقاط پیوسته است.

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه سوم در بیشمار نقطه ناپیوسته است پس نیازی به بررسی بقیه ضابطه‌ها و نقاط مرزی نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -۱ < x < ۱ \,,\, x \neq ۰ \\ ۱ + \text{Cos}\, \pi x & x = ۰ \,,\, ۱ \,,\, -۱ \\ [x^۲] - [x] & x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \end{cases}$$

۷۷

مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}^-} [۲\sin x - ۱]$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱-
۲) صفر
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $\sin x$ اگر x در همسایگی چپ $\frac{\pi}{۶}$ باشد، حاصل از $\frac{۱}{۲}$ کمتر است.

$$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}^-} [۲\sin x] - ۱ = \left[۱^-\right] - ۱ = -۱$$

پاسخنامه تشریحی

۱) حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}$

$= \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۱}{\sqrt{x}+۱} = \frac{۱}{۲}$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (x-۲a) = ۱-۲a$

مقدار $f(۱) = b-۱$

چون تابع f در $x=۱$ پیوسته است $\Rightarrow \begin{cases} b-۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \\ ۱-۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۴} \end{cases}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-} [f(x)] = ۰, \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۳, f(۲) = ۲ \Rightarrow A = ۰+۲+۳ = ۵$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} (\operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x) = ۱$, $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} (x^۲+۱) = ۱$

$f(۰) = \sqrt{۲} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x) \neq f(۰) \Rightarrow$ f در صفر پیوسته نیست.

۴) الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{(۲-x)(۴+۲x+x^۲)}{(x-۲)(x+۵)} = \lim\limits_{x\to ۲} \frac{۴+۲x+x^۲}{-(x+۵)} = -\frac{۱۲}{۷}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{|۲-x|}{[x]+۱} = \frac{۱}{۳}$

۵) الف) وجود ندارد ب) ۱ پ) خیر

۶) $\left.\begin{array}{l} \text{حد چپ } \lim\limits_{x\to (-۱)^-} (۲[x]+۱) = ۲(-۲)+۱ = -۳ \\ \text{حد راست } \lim\limits_{x\to (-۱)^+} (x^۲+۴x) = ۱-۴ = -۳ \\ f(-۱) = -۳ \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -۱} f(x) = f(-۱) \Rightarrow$ تابع پیوسته است

۷) الف) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{x+۲} = ۴+۴+۴ = ۱۲$

ب) $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)}{x-۲} = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)}{x-۲} = -۱ \end{array} \Rightarrow$ حد وجود ندارد

پ) $\frac{۰-۲}{[\pi]+۱} = \frac{-۲}{۳+۱} = \frac{-۱}{۲}$

۸) الف) ۳

ب) $\lim\limits_{x\to -۲} x + \lim\limits_{x\to -۲} f(x) = ۲+۴ = ۶$

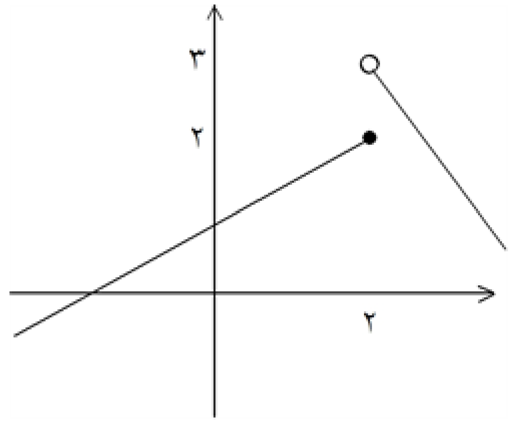
۹) چپ

۱۰ $\lim\limits_{x\to -۲^+}(۳-۲x^۲)=-۵\ ,\ \lim\limits_{x\to -۲^-}([x])-۲=-۳-۲=-۵\ ,\ f(-۲)=-۵$

تابع در $x=-۲$ پیوسته است.

۱۱ الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۱)}{(x+۲)}=\dfrac{۱}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-}\dfrac{[x]+۱}{\text{Cos}\,(-\pi \text{x})}=\lim\limits_{x\to -۱^-}\dfrac{-۲+۱}{-۱}=۱$

۱۲


۱۳ الف) ۳- ب) وجود ندارد ج) ۱

۱۴ نادرست

۱۵ چون حد تابع و مقدار تابع برابر است، پس تابع در $x=۲$ پیوسته می‌باشد.

$۲-۵=-۳=۲^۲-۷\Rightarrow -۳=-۳=-۳$

۱۶

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	→۲
f(x)	۰	۰	۰	۰

۱۷ نادرست.

۱۸ $-۲(۰)+a=(۰)^۲+۲=b+۱$

$a=۲, b=۱$

۱۹ $f(۱)=۲$

$\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x^۲+b)=۱+b=۲\Rightarrow b=۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(\text{ax}+۳)=a+۳=۲\Rightarrow a=-۱$

۲۰

الف) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^{۲}-۹}{x^{۲}-۳x} = \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۳} \dfrac{(x-۳)(x+۳)}{x(x-۳)} = ۲$

ب) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to ۲^{-}} \dfrac{x+۳}{[x]} = \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۲^{-}} \dfrac{۲+۳}{\left[۲^{-}\right]} = \dfrac{۵}{۱} = ۵$

پ) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\tan x + \cot x) = \operatorname{Lim}\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۱ + ۱ = ۲$

۲۱

$$\operatorname{Lim}\limits_{x\to -۱} \frac{x^{۲}-۳x-۴}{x^{۲}+x} = \operatorname{Lim}\limits_{x\to -۱} \frac{x-۴}{x} = \frac{-۵}{-۱} = ۵$$

$$\operatorname{Lim}\limits_{x\to -۲^{-}} \frac{۲x+۳}{[x]+۲} = \frac{۲(-۲)+۳}{-۳+۲} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

۲۲

الف) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-x} = \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)} = ۲$

ب) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{x^{۲}+۱}{[x]} = \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{۲^{۲}+۱}{\left[۲^{+}\right]} = \dfrac{۵}{۲}$

پ) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x) = \operatorname{Sin}\left(\dfrac{\pi}{۴}\right) - \operatorname{Cos}\left(\dfrac{\pi}{۴}\right) = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} - \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$

۲۳ نادرست.

۲۴ صفر

۲۵

الف) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to -۱^{+}} f(x) = ۰$

ب) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to -۱^{-}} f(x) = ۲$

پ) $\operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰} f(x) = -۱$

۲۶ خیر. با توجه به دامنه تابع، همسایگی راست یک، وجود ندارد.

$$x - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow D = [۰, ۱]$$

۲۷

$$f(۰) = ۱ \,,\, \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰^{+}} f(x) = a \,,\, \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰^{-}} f(x) = -a$$

$$a = ۰ \Rightarrow f(۰) \neq \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰} f(x) \,,\, a \neq ۰ \Rightarrow \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰^{-}} f(x) \neq f(x)$$

تابع در $x = ۰$ پیوسته نیست.

۲۸

$$f(۰) = \frac{-a}{۴} \,,\, \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰^{+}} f(x) = \operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰^{+}} \frac{۱+x-۱}{x(\sqrt{۱+x}+۱)} = \frac{۱}{۲}$$

$$\operatorname{Lim}\limits_{x\to ۰^{-}} f(x) = b - \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۲ \,,\, b = ۱$$

۲۹ $۲\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) + ۳f(۱) - \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۲(-۱) + ۳(۲) - ۴ = ۰$

۳۰ برای اینکه تابع در $x = ۲$ پیوسته باشد، باید: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = f(۲)$

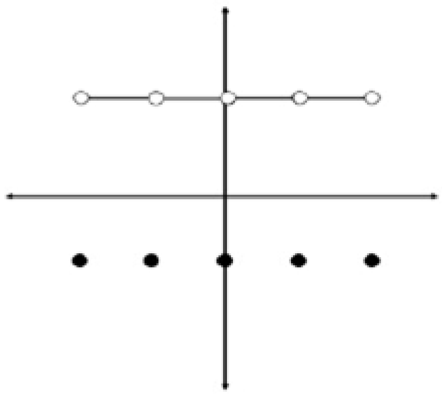
$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۴ + a \;,\; \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۲b + ۱ \;,\; f(۲) = ۳$

$۴ + a = ۳ \Rightarrow a = -۱$

$۲b + ۱ = ۳ \Rightarrow b = ۱$

۳۱ با توجه به دامنه تابع: $D = (-\infty, +\infty) - [۳, ۴)$ ، متغیر x نمی‌تواند با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک شود. بنابراین حد راست تابع در نقطه $x = ۳$ وجود ندارد.

۳۲



$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۳ \quad \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۳ \quad \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۳$

۳۳ a

۳۴

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (۲x - ۹) = -۵$

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (-۲x^۲ + ۳) = -۵$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -۵ = f(۲)$

در نتیجه تابع f در $x = ۲$ پیوسته است.

۳۵ الف) ۱ ب) ۴ ج) صفر

۳۶ $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x}{x+۳} = \dfrac{۱}{۲}$

۳۷ ۳

۳۸ مقدار تابع = حد چپ = حد راست شرط پیوستگی

$f(-۱)=a(-۱)\ b=-a+b$

$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^-}(-۱)=-۱$

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^+} x^۲-b=(-۱)^۲-b=۱-b$

$$\begin{cases} ۱-b=-۱\Rightarrow b=۲ \\ -a+b=-۱\Rightarrow -a+۲=-۱\Rightarrow a=۳\end{cases}$$

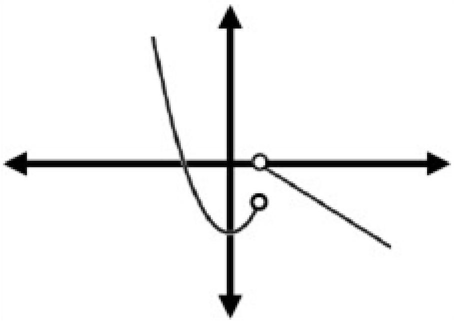
۳۹ الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x(x-۳)}{(x+۳)(x-۳)}=\dfrac{۳}{۳+۳}=\dfrac{۱}{۲}$

ب) ۱۴۰۱

ج) $\cos\dfrac{\pi}{۴}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴۰ $۳-۳(-۱)+۳(۱)=۹$

۴۱



$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=$ وجود ندارد

۴۲ برای اینکه تابع در $x=۲$ پیوسته باشد باید: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\dfrac{۲+a}{۱}\ ,\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۴b+۴\ ,\ f(۲)=b-۱$

$۴b+۴=b-۱\Rightarrow b=\dfrac{-۵}{۳}\ ,\ ۲+a=b-۱\Rightarrow a=\dfrac{-۱۴}{۳}$

۴۳ $\lim\limits_{x\to -۲^-}([x]-a)[x]=\lim\left[-۲^-\right]-a\left[-۲^-\right]=(-۳-a)(-۳)=۹+۳a$

$\lim\limits_{x\to -۲^+}([x]-a)[x]=\lim\left[-۲^+\right]-a\left[-۲^+\right]=(-۲-a)(-۲)=۴+۲a$

$f(-۲)=([-۲]-a)[-۲]=(-۲-a)(-۲)=۴+۲a$

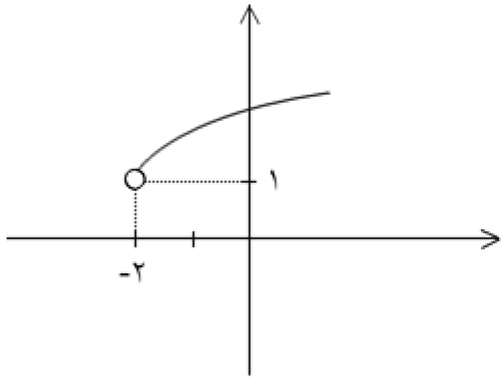
$۹+۳a=۴+۲a\Rightarrow a=-۵$

برای بررسی پیوستگی باید در نقطهٔ $x=-۲$ حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند.

۴۴ مقدار ثابت c

۴۵ درست

۴۶



۴۷

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = -۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-۱)} f(x) =$ حد ندارد

پ) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = -۲ \\ f(-۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow$ در $x = -۱$ پیوستگی راست ندارد.

تابع f در $x = -۱$ پیوستگی راست ندارد، بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته نیست.

۴۸

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to۳^-} f(x) = ۲ \\ f(۳) = ۱ \end{cases} \Rightarrow$ تابع f در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد.

تابع f در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد. بنابراین در بازهٔ $[-۱,۳]$ پیوسته نیست.

۴۹

الف) $\lim\limits_{x\to۲} \dfrac{x^۳ - ۸}{x^۲ - ۵x + ۶} = \lim\limits_{x\to۲} \dfrac{(x-۲)(x^۲ + ۲x + ۴)}{(x-۲)(x-۳)} = \dfrac{۴+۴+۴}{۲-۳} = -۱۲$

ب) $\lim\limits_{x\to۵^-} \dfrac{|۳-x|}{[x]+۱} = \dfrac{|۳-۵|}{[۵^-]+۱} = \dfrac{۲}{۴+۱} = \dfrac{۲}{۵}$

۵۰

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{۴}\right)$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right) + \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} [-x] + \sqrt{۲} + ۱ = -۱ + \sqrt{۲} + ۱ = \sqrt{۲}$$

بنابراین تابع در $x = \dfrac{\pi}{۴}$ پیوسته است.

۵۱

$$\lim_{x\to(-۱)^+} [f(x)] + f(۰) + \lim_{x\to۱^-} f(x) = \left[۲^-\right] + ۳ + ۳ = ۱ + ۳ + ۳ = ۷$$

الف) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{x^2-7x+6}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-6)}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$ ۵۲

ب) $\displaystyle \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-5|}{[-x]+3}=\frac{4}{-2+3}=4$

$$\begin{cases}\displaystyle \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} ax^2+x-1=9a+2\\ \displaystyle \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} ax+4=3a+4\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} f(x)-\lim_{x\to 3^-} f(x)=9a+2-(3a+4)=16$$ ۵۳

$\Rightarrow 9a+2-3a-4=16\Rightarrow 6a-2=16\Rightarrow 6a=18\Rightarrow a=3$

$\displaystyle \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=4+4+4=12\Rightarrow a=12$ ۵۴

$\displaystyle \lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5} x^2-2x-6=25-10-6=9\Rightarrow b=9$

$\displaystyle \xrightarrow{a=12 \text{ و } b=9} h(12-9)=h(3)=\operatorname{Sin}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{Sin}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\displaystyle \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2+mx=(2)^2+m(2)=4+2m=12\Rightarrow 2m=8\Rightarrow m=4$ ۵۵

$\xrightarrow{m=4} f(2)+f(4)=2(4)-1+(4)^2+4(4)=7+16+16=39$

$\displaystyle \lim_{x\to 2} f(x)=9\Rightarrow \lim_{x\to 2} 2mx+7=4m+7=9\Rightarrow 4m=2\Rightarrow m=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ۵۶

$\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-2}{f(x)+3}=\frac{\lim_{x\to 0^-} f(x)-\lim_{x\to 0^-} 2}{\lim_{x\to 0^-} f(x)+\lim_{x\to 0^-} 3}=\frac{2-2}{2+3}=\frac{0}{5}=0$ ۵۷

الف) $\begin{cases}\displaystyle \lim_{x\to 0^+} f(x)=2\\ \displaystyle \lim_{x\to 0^-} f(x)=2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2$ ۵۸

ب) $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

ج) $\displaystyle \lim_{x\to (-1)^+} f(x)=0$

د) $\begin{cases}\displaystyle \lim_{x\to (-1)^+} f(x)=0\\ \displaystyle \lim_{x\to (-1)^-} f(x)=1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to (-1)} f(x)=$ حد ندارد

۵۹

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۳$

ج) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x) =$ حد ندارد

د) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۱ \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۱$

۶۰

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{\mathrm{kx} - ۳\mathrm{k}} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{k(x-۳)} = \frac{۶}{k} = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۱۲\mathrm{k} = ۶ \Rightarrow k = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

۶۱

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{f(x) + [x]}{x + ۱} = \frac{\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) + \lim\limits_{x\to ۱^-} [x]}{\lim\limits_{x\to ۱^-} (x) + \lim\limits_{x\to ۱^-} ۱} = \frac{۰ - ۰}{۱ + ۱} = ۰$$

۶۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

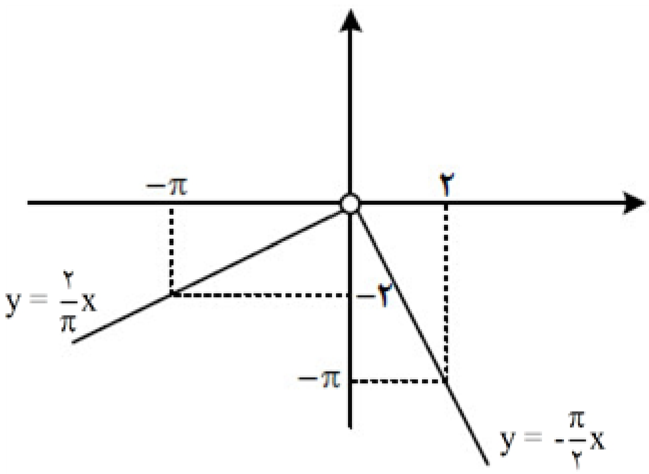
$$f(x) = a\,[x] + b\,[x] + b \Rightarrow f(x) = (a+b)\,[x] + b \Rightarrow a + b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow f(x) = b \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -۱$$

۶۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\mathrm{Sin}\, x}{|f(x)|} = \frac{۱}{-\frac{\pi}{۲} \times \frac{\pi}{۲}} = +\frac{۴}{\pi^۲}$$

$$\lim_{x\to \left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+} \frac{|f(x)|}{\mathrm{Sin}\, x} = \frac{\left|\frac{۲}{\pi} \times -\frac{\pi}{۲}\right|}{-۱} = -۱$$



۶۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & -c\le x\le c\\ \mathrm{ax}^۲+\mathrm{bx}+۲ & x<-c\,,\ x>c\end{cases}$$

$$x=c\xrightarrow{c\in \mathrm{N}} c-۱=\mathrm{ac}^۲+\mathrm{bc}+۲$$

$$x=-c\xrightarrow{c\in \mathrm{N}} c+۱=\mathrm{ac}^۲-\mathrm{bc}+۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{تفاضل}\Rightarrow -۲\mathrm{bc}=۲\Rightarrow b=-\frac{۱}{c}\\ \Rightarrow c-۱=\mathrm{ac}^۲+۱\Rightarrow a=\frac{c-۲}{c^۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲-c}{c}=\frac{۲}{c}-۱$$

$$c=۱\Rightarrow \frac{۲}{c}-۱=۱$$

$$c=۲\Rightarrow \frac{۲}{c}-۱=۰$$

$$c>۲\Rightarrow -۱<\frac{۲}{c}-۱<۰\Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=-۱$$

۶۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=b\,[x(x-a)]-۲a\xrightarrow{\text{در } R \text{ پیوسته}} b=۰\Rightarrow \frac{a}{f(b)}=\frac{a}{f(۰)}=\frac{a}{-۲a}=-\frac{۱}{۲}$$

۶۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۱)\ \lim_{x\to ۱^+}(f+g)(x)=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^-}(f+g)(x)=۲$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱^+}(f-g)(x)=۵$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۱^-}(f-g)(x)=۳$$

$$۱,۳\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}(f+g)(x)+\lim_{x\to ۱^+}(f-g)(x)=۲\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۵\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}f(x)=۲/۵$$

$$۲,۴\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}(f+g)(x)+\lim_{x\to ۱^-}(f-g)(x)=۲\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۵\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}f(x)=۲/۵$$

۶۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x=a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta=۰\Rightarrow (m-۱)^۲-۱۲(m-۴)=۰\Rightarrow (m-۷)^۲=۰\Rightarrow m=۷$$

ریشه صورت و مخرج $x=a\Rightarrow a=-۱$

$$\text{صورت}:\ \frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳+۱|}=\frac{\sqrt{۳}\,|x+۱|}{|x+۱|\,(x^۲-x+۱)}\Rightarrow \lim_{x\to a}\text{صورت}=\lim_{x\to(-۱)}\text{صورت}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{مخرج}:\ x=a=-۱:\ \frac{۲\,\mathrm{Sin}\,b}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \mathrm{Sin}\,b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع روی R پیوسته است پس در $x = ۰$ نیز پیوسته است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۰) = b\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{a}\right) \\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = (۱-a)\times(۰) + (۳a^۲-۱)(-۱) = -۳a^۲+۱ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = (۱-a)\times(-۱) + (۳a^۲-۱)(۰) = a-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow -۳a^۲+۱ = a-۱$$

$$\Rightarrow ۳a^۲ + a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = b\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{-۱}\right) = ۰ \\ \text{حد تابع} = a-۱ = -۱-۱ = -۲ \end{cases} \quad \text{غ ق ق} \\ a = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = b\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{\frac{۲}{۳}}\right) = b\,\text{Sin}\,\frac{۳\pi}{۲} = -b \\ \text{حد تابع} = a-۱ = \frac{۲}{۳}-۱ = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -b = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}} = ۲$$

۶۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد چپ و راست در ۲ برابر نیستند، پس در ۲ پیوسته نیست و در نتیجه در R پیوسته نیست.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{|(x+۱)(x-۲)|}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{-(x+۱)(x-۲)}{x-۲} = -۳ \\ f(۲) = -۲a + ۳ + ۳a = a + ۳ \end{array}\right\} a + ۳ = -۳ \Rightarrow a = -۶$$

۷۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توانیم برای $n = ۱$ و $n = ۲$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x = \pm ۱$ و $x = \pm ۲$ بررسی می‌کنیم:

$$x = ۱ : \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) = ۱ - ۱ + k = k$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} |x - [-x]| = ۲$$

$$x = -۱ : \lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = f(-۱) = k$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} = \lim_{x\to (-۱)^-} |x - [-x]| = ۲$$

پس اگر $k = ۲$ باشد به ازای $x = \pm ۱$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول‌اند.

$$x = ۲ : \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} |x - [-x]| = ۵$$

$$f(۲) = ۲ - (-۲) = ۴$$

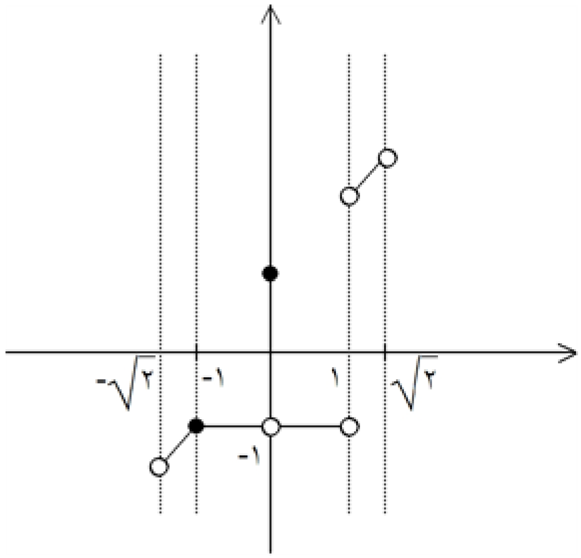
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (x - [x] + k) = ۱ + k$$

پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.

۷۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱<x<۱-\{۰\} \\ \text{Cos}\,(\pi x) & x=۰\,,\,۱\,,-۱ \\ |x|\,(\,[x]+۱) & ۱<x<\sqrt{۲} \text{ یا } -\sqrt{۲}<x<-۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱<x<۱-\{۰\} \\ -۱ & x=\pm۱ \\ ۱ & x=۰ \\ ۲x & ۱<x<\sqrt{۲} \\ x & -\sqrt{۲}<x<-۱ \end{cases}$$

پس این تابع در $x=۰$ و $x=۱$ ناپیوسته است.



۷۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x=۱ \text{ پیوستگی راست در: } \left\{\begin{array}{l} f(۱)=\tan\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)=-۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}\,(x+۲)}{-a\,\cancel{(x-۱)}}=\frac{۳}{-a} \end{array}\right\} \frac{۳}{-a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

$$x=۵ \text{ پیوستگی چپ در: } \left\{\begin{array}{l} f(۵)=b(۵-[-۵]\,)=۱۰b \\ \lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=\frac{|۲۵+۵-۲|}{۳(۱-۵)}=\frac{۲۸}{۳\times -۴}=\frac{-۷}{۳} \end{array}\right\} ۱۰b=\frac{-۷}{۳}\Rightarrow b=\frac{-۷}{۳۰}$$

$$\Rightarrow \text{ab}=-۰/۷$$

۷۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع در R پیوسته است پس در $x=۰$ هم پیوسته است. حال برای دو حالت $a\notin Z$ و $a\in \text{Z}$ داریم:

$$a\notin Z\left\{\begin{array}{c} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \\ f(۰^-)=|۰-[-a]|=[-a] \end{array}\right\}[-a]=۰\Rightarrow ۰\leq -a<۱\Rightarrow -۱<a\leq ۰ \quad \text{غ ق ق}$$

با شرط $a<-۱$ اشتراک ندارد.

$$a\in\text{Z}\left\{\begin{array}{c} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \\ f(۰^-)=\left|۰+a-\left[۰^-\right]\right|=|a+۱| \end{array}\right.$$

$$|a+۱|=۰\Rightarrow a=-۱$$

با شرط $a<-۱$ اشتراک ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار $a<-۱$ پیوسته نمی‌شود.

تذکر: تابع فقط به ازای $a=-۱$ روی R پیوسته می‌شود.

۷۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} \text{ریشه} = ۱ \Rightarrow ۵ - a + b = ۰ \Rightarrow a - b = ۵ \\ f \text{ ریشه صورت} = ۱ \Rightarrow ۱ + a + b = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۳ \end{cases}$$

$$\left[\frac{b - ۲a}{۳}\right] = \left[\frac{-۳ - ۴}{۳}\right] = -۳$$

تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x = ۱$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x = ۱$ صفر شود، در غیر این‌صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.

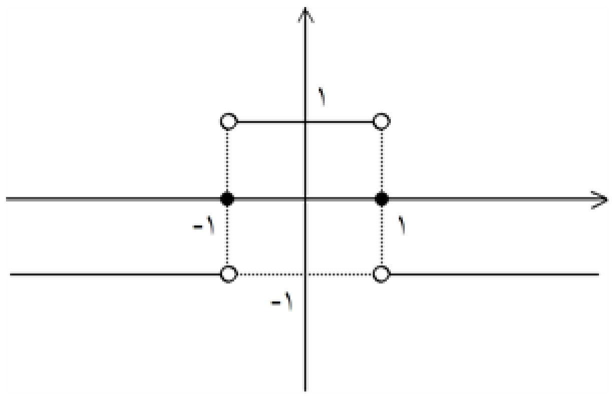
۷۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(\mathrm{gof})(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $۱ - x^۲$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $۱ - x^۲$ منفی باشد، حاصل y برابر ۱- و اگر $۱ - x^۲$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

$$\begin{cases} ۱ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \Rightarrow g(f(x)) = ۱ \\ ۱ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow g(f(x)) = ۰ \\ ۱ - x^۲ < ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \Rightarrow g(f(x)) = -۱ \end{cases}$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه $(\mathrm{gof})(x)$ برابر است با:

$$(\mathrm{gof})(x) = \begin{cases} ۱ & ; \ -۱ < x < ۱ \\ ۰ & ; \ x = \pm ۱ \\ -۱ & ; \ x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \end{cases}$$

با رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



در شکل مشخص است که تابع در $x = ۱$ و $x = -۱$ ناپیوسته است.

۷۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه سوم در بیشمار نقطه ناپیوسته است پس نیازی به بررسی بقیه ضابطه‌ها و نقاط مرزی نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -۱ < x < ۱ \ , \ x \neq ۰ \\ ۱ + \mathrm{Cos}\, \pi x & x = ۰ \ , \ ۱ \ , \ -۱ \\ \left[x^۲\right] - [x] & x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \end{cases}$$

۷۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $\mathrm{Sin}\, x$ اگر x در همسایگی چپ $\frac{\pi}{۶}$ باشد، حاصل از $\frac{۱}{۲}$ کمتر است.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}^-} [۲ \,\mathrm{Sin}\, x] - ۱ = \left[۱^-\right] - ۱ = -۱$$

پاسخنامه کلیدی

۶۲	۱	**۲**	۳	۴
۶۳	۱	**۲**	۳	۴
۶۴	**۱**	۲	۳	۴
۶۵	**۱**	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	**۳**	۴
۶۷	**۱**	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	**۳**	۴
۶۹	۱	**۲**	۳	۴
۷۰	۱	**۲**	۳	۴
۷۱	۱	**۲**	۳	۴
۷۲	**۱**	۲	۳	۴
۷۳	**۱**	۲	۳	۴
۷۴	**۱**	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	**۳**	۴
۷۶	۱	۲	**۳**	۴
۷۷	**۱**	۲	۳	۴