

منبع: کنکور سراسری

۱ اگر $f(x) = x^2 - 4x + 5$ آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 1$
 (۲) $x^2 + 3$
 (۳) $x^2 + 4x + 5$
 (۴) $x^2 - 4x + 5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲ اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
 (۲) $[0, 3]$
 (۳) $[1, 2]$
 (۴) $[1, 3]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۳ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۷
 (۳) ۸
 (۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴ اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و g با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) ۱
 (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۵ اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-4, 1)$
 (۲) $(-3, 2)$
 (۳) $(-2, 1)$
 (۴) $(-1, 4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶ اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $2x \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱



۷ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ ، آنگاه عدد a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۸ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- (۱) $x \leq -1$
(۲) $x \geq -1$
(۳) $x \leq 1$
(۴) $x \geq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۹ اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ آنگاه $(f + g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) $x^2 - 1$
(۲) $x^2 + 1$
(۳) $x^2 - 2x$
(۴) $x^2 + 2x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۰ اگر $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟

- (۱) $[-1, 1]$
(۲) $(-\infty, 0)$
(۳) $(-\infty, +\infty)$
(۴) $(0, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۱ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_p^{(x^2+2x)}$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-4, 2]$
(۲) $[-2, 0]$
(۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$
(۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۲ در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۲
(۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱



۱۳ اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $-\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۴ اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟

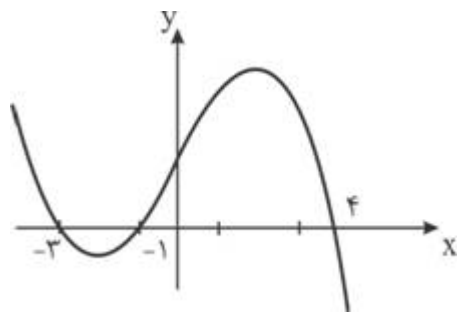
- (۱) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$
 (۲) $-\frac{1}{4} \sin^2 x$
 (۳) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$
 (۴) $\frac{1}{4} \cos^2 x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۵ اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ ، آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-5, 1)$
 (۲) $(-1, 5)$
 (۳) $(-2, 1)$
 (۴) $(1, 5)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱



۱۶ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

- (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$
 (۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$
 (۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$
 (۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۷ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$
 (۲) $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
 (۳) $(-2, 0)$
 (۴) $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴



۱۸ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع gof و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۴/۵
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۹ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) $x - 1$
(۲) $x + 1$
(۳) x
(۴) $2x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۰ اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

- (۱) $[\frac{2}{3}, 2]$
(۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$
(۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$
(۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۱ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) x
(۲) $-x$
(۳) $-x - 1$
(۴) $x + 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۲ ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{x}{1-|x|}$; $|x| < 1$
(۲) $y = \frac{1-|x|}{|x|}$; $|x| > 1$
(۳) $y = \frac{x}{|x|-1}$; $|x| > 1$
(۴) $y = \frac{|x|-1}{x}$; $|x| < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

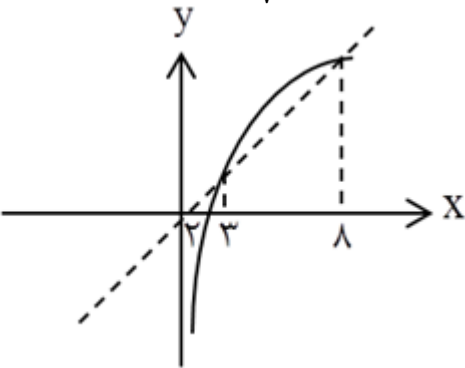
۲۳ ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x\sqrt{|x|}$; $x \in R$
(۲) $y = x\sqrt{|x|}$; $x \in R - \{0\}$
(۳) $y = x|x|$; $x \in R - \{0\}$
(۴) $y = x|x|$; $x \in R$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲



شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیم ساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



- (۱) $[0, 2]$
 (۲) $[2, 3]$
 (۳) $[2, 8]$
 (۴) $[3, 8]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

ضابطه وارون تابع $\begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

- (۱) $y = x|x|; x \in \mathbf{R}$
 (۲) $y = -x^2; x < 0$
 (۳) $y = \pm x^2; x \in \mathbf{R}$
 (۴) $y = \pm x|x|; x \in \mathbf{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x - 1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$
 (۲) $y = -x^2 - 4x + 5; x \leq 2$
 (۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$
 (۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{1 + x}; x < 0$
 (۲) $1 - \sqrt{1 - x}; x < 1$
 (۳) $1 + \sqrt{1 - x}; 0 < x < 1$
 (۴) $1 - \sqrt{1 - x}; 0 < x < 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $2x^2 + 3x + 1$
 (۲) $2x^2 - 2x + 3$
 (۳) $2x^2 - x + 4$
 (۴) $2x^2 + x + 3$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbf{R} چگونه است؟

- (۱) نزولی
 (۲) صعودی
 (۳) وارون ناپذیر
 (۴) یک به یک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

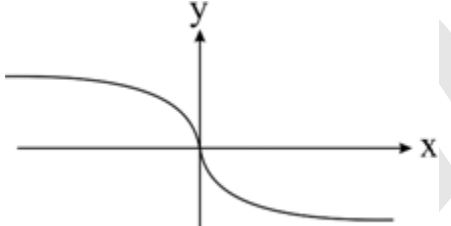
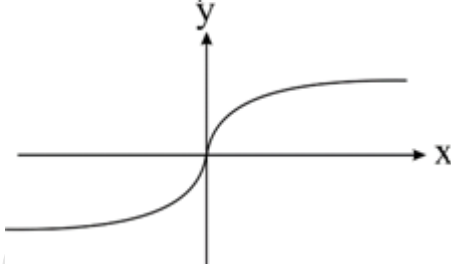
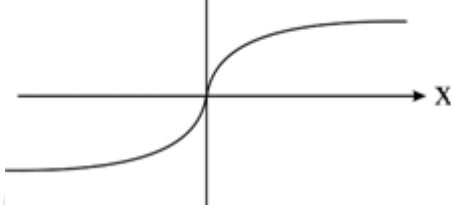
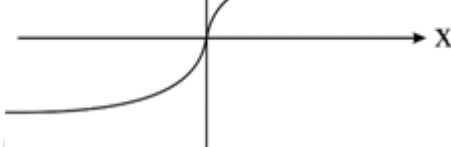


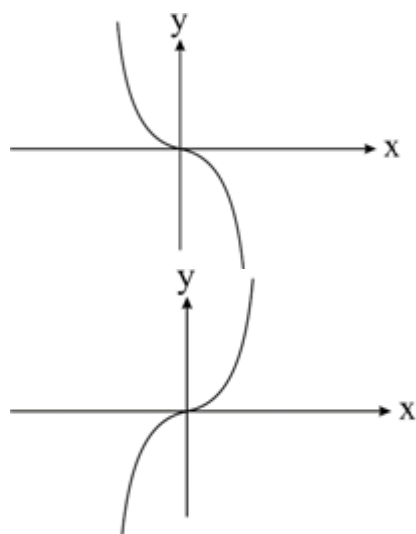
۳۰ تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

- (۱) $-x + 7; x > 8$
 (۲) $\frac{1}{3}x + 2; x > 3$
 (۳) $x + 7; x > -4$
 (۴) $\frac{1}{4}x - 2; -4 < x < 8$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۱ اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) 
 (۲) 
 (۳) 
 (۴) 



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۲ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{3}{4}$
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۳ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $-x^2$
 (۲) x^2
 (۳) $x|x|$
 (۴) $-x|x|$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۴ دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x + 9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۶
 (۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶



نام و نام خانوادگی:



۳۵ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathcal{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۲) ۴ و -۱

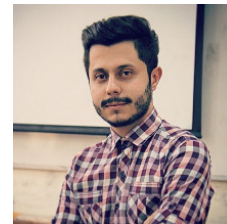
(۴) ۴ و ۱

(۱) -۴ و -۱

(۳) -۴ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

@keshavarzmath



۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۱	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۲	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۲	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۲	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۳	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۴	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۴	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۴	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۵	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۳۵	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
۶	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۶	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۶	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		
۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۱۷	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۷	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		
۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۸	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		
۹	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۲۹	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		
۱۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۲۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	۳۰	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		

@keshavarzmath



گزینه ۴

۱

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $x - 3 = t$ را بر حسب t به دست آورده و ضابطه $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x - 3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow[x=t+3]{x-3=t} f(t) = (t + 3)^2 - 4(t + 3) + 5$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

ضابطه $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطه $f(1-x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

روش دوم: روش دیگر برای به دست آوردن $f(1-x)$ از روی ضابطه $f(x-3)$ این است که به جای x متغیر $4-x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x \rightarrow 4-x} f(4-x-3) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 5 \\ \Rightarrow f(1-x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$$

گزینه ۴

۲

روش اول:

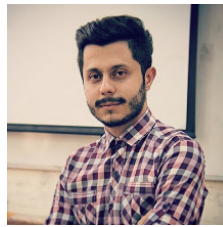
ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس با توجه به محدوده قابل قبول برای x بازه ای که در آن تابع $f(3-x)$ تعریف شده است را مشخص می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ \xrightarrow{\times(-1)} \Rightarrow -2 \leq -x \leq 0 \xrightarrow{+3} \Rightarrow 1 \leq 3-x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطه $f(3-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می آوریم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} \\ = \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_f = [1, 3]$$



گزینه ۴

۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

تابع دو ضابطه ای است. برای محاسبه $f(1)$ از ضابطه پایین و برای محاسبه $f(5)$ از ضابطه بالا استفاده می کنیم.

گام دوم

$$x > 3 : f(x) = x - \sqrt{x+4} \Rightarrow f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$x \leq 3 : f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

پس مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ برابر است با:

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 2(2) + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 9$$

گزینه ۲

۴

برای تعیین نقطه تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطه fog مشخص شود. سپس معادله $f(x) = fog(x)$ را حل کرده و نقطه تلاقی دو تابع که در واقع ریشه همین معادله است را به دست می آوریم.

$$f(x) = (2x - 3)^2, g(x) = x + 2 \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = (2g(x) - 3)^2 =$$

$$(2(x+2) - 3)^2 = (2x + 4 - 3)^2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

معادله $f(x) = fog(x)$ را حل می کنیم:

$$f(x) = fog(x) \Rightarrow (2x - 3)^2 = (2x + 1)^2 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه ای به طول $x = \frac{1}{2}$ با هم متقاطع اند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲



گزینه ۱

۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطه تابع $gof(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ضابطه تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جمله "مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور x ها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محور x ها قرار بگیرد باید مقدار y تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادله $gof(x) > 0$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطه $gof(x)$ و حل نامعادله $gof(x) > 0$:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = x^2 + 3x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

$$gof(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 > 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow$$

$$(x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

بنابراین در بازه $(-4, 1)$ مقادیر تابع $gof(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور x ها قرار می گیرد.

گزینه ۲

۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می دهند. به شکل رسم شده در این تست خوب دقت کنید:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \rightarrow 2x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می شود. ابتدا وارد ضابطه f می شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحله دوم $f(x)$ وارد ضابطه g می شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = 2x$ است.

گام دوم

ضابطه $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطه $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(5)$ را محاسبه می کنیم:

$$g(x) = 3x + 4, g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow 3f(x) = 2x - 4 \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{2}{3}(5) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$



گزینه ۴

۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = 5$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفه اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطه تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = 5$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهنده تابع g ، زوج مرتب $(6, 5)$ دارای مؤلفه دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = 6$ حال با داشتن ضابطه $f(x)$ مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=6} a + \sqrt{a} = 6$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$ معادله را به یک معادله درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود).

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق } t = -3 \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = 4$ جواب تست می شود.

گزینه ۳

۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطه $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطه $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|-x + 2| - x}$$

$$|-x + 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 2: -x + 2 < 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ غ ق ق} \\ x \leq 2: -x + 2 \geq 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x + 2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به بازه اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ به صورت $x \leq 1$ در می آید.



گزینه ۱

۹

ضابطه $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می‌کنیم، سپس ضابطه تابع $(f+g)(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = x^2 - x - 2, f(g(x)) = x^2 + x - 2 \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 - g(x) = x^2 + x$$

برای این که بتوانیم راحت‌تر ضابطه $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می‌کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^2 - g(x) = x^2 + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{1}{4} \text{ اضافه می‌کنیم}} (g(x))^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x$$

$$+ \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{4})^2 = (x + \frac{1}{4})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{4} = \pm(x + \frac{1}{4})$$

پس برای ضابطه $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$1) g(x) - \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4} \Rightarrow g(x) = x + 1 \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x$$

$$-2 + x + 1 = x^2 - 1$$

$$2) g(x) - \frac{1}{4} = -x - \frac{1}{4} \Rightarrow g(x) = -x \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x$$

$$-2 - x = x^2 - 2x - 2$$

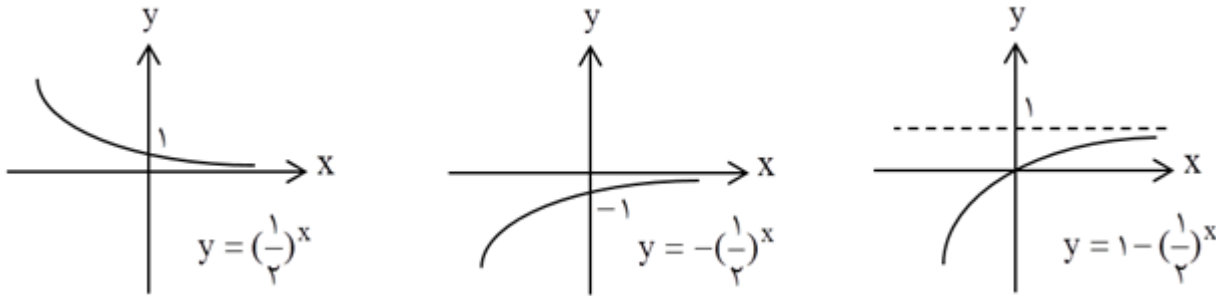
با توجه به گزینه‌های موجود، گزینه ۱ قابل قبول است.



گزینه ۳

۱۰

ابتدا محدوده تابع $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x$ را تعیین کنید (بهترین شیوه رسم شکل است). سپس دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را به دست می آوریم. نمودار تابع $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x$ را رسم می کنیم:



عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد. داریم:

$$y = \sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x, f(x) \geq 0 \\ x, f(x) < 0 \end{cases} \quad (f(x) \text{ و } x \text{ باید هم علامت باشند})$$

با توجه به نمودار تابع $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x$ ، هر جا که x مثبت است، $f(x)$ هم مثبت است و هر جا که x منفی است $f(x)$ هم منفی است. بنابراین دامنه تعریف تابع به صورت $(-\infty, +\infty)$ در می آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گزینه ۴

۱۱

برای به دست آوردن D_{fog} اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطه $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ دامنه تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_p^{(x^2+2x)} \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین D_{fog} می رویم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \mid \log_p^{(x^2+2x)} \leq 3\}$$

$$\log_p^{(x^2+2x)} \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{fog} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴



گزینه ۳

۱۲

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم.

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times b^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a \times 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{32} \Rightarrow 2b^2 = 32 \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b>0} b = 4$$

بنابراین ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$ در می‌آید. مقدار $f(\frac{3}{2})$ برابر است با:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 2^3 = \frac{3}{2} \times 8 = 3 \times 4 = 12$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گزینه ۳

۱۳

برای حل تست گام‌های زیر را برمی‌داریم:

الف) مختصات دو نقطه A و B را در ضابطه تابع $f(x)$ قرار داده و مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

ب) با مشخص شدن ضابطه $f(x)$ حاصل $f(-1)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = a(b)^x - 1 \xrightarrow{A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \frac{1}{2} = a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \sqrt{b} \quad (I)$$

$$f(x) = a(b)^x - 1 \xrightarrow{B(1,1)} 1 = ab - 1 \Rightarrow ab = 12 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{3}{2} \sqrt{b} \times b = 12 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow \sqrt{b^3} = 8$$

به توان ۲

$$\longrightarrow b^3 = 64 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{(II)} 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

پس ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = 3(4)^x - 1$ در می‌آید. $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = 3(4)^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳



گزینه ۱

۱۴

برای یافتن ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x = \sin^2 x(\sin x - 1) = \sin^2 x(-\cos x) = -\sin^2 x \cos x$$

با توجه به فرمول $\sin^2 x$ داریم:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

پس ضابطه تابع $f \circ g$ به صورت زیر درمی آید:

$$f \circ g(x) = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گزینه ۲

۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یعنی $f(g(x))$ با جایگذاری ضابطه $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می آید.
ب) می خواهیم نمودار تابع $f \circ g(x)$ زیر محور x ها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادله $f \circ g(x) < 0$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}(x-3)\right)^2 + \frac{1}{2}(x-3) - 2 = \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}$$

حالا مجموعه جواب نامعادله $f \circ g(x) < 0$ را تعیین می کنیم:

$$f \circ g(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} < 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow x \in (-1, 5)$$



گزینه ۴

۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

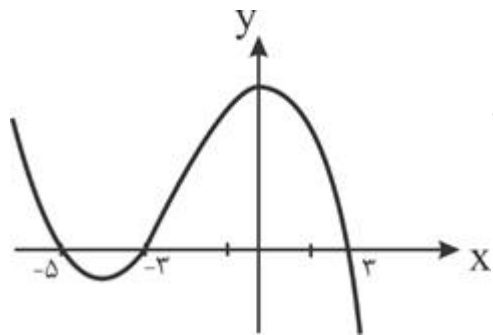
گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-2)$ کافی است نمودار تابع $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه به نمودار تابع $f(x-2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل قبول است پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5, -3] \cup [0, 2]$

گزینه ۱

۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

دامنه تابع $f \circ g$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

گام دوم

دامنه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطه گفته شده در گام اول، $D_{f \circ g}$ را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$$

$$-x^2+x+2 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2-x-2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow D_f = (-1, 2)$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2\}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^x > 0 \xrightarrow{\left(\frac{1}{e}\right)^x < 2} \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2 \Rightarrow (e^{-1})^x < 2 \Rightarrow e^{-x} < 2 \Rightarrow -x < \ln 2$$

$$\xrightarrow{\div -1} x > -\ln 2 \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\ln 2, +\infty)$$



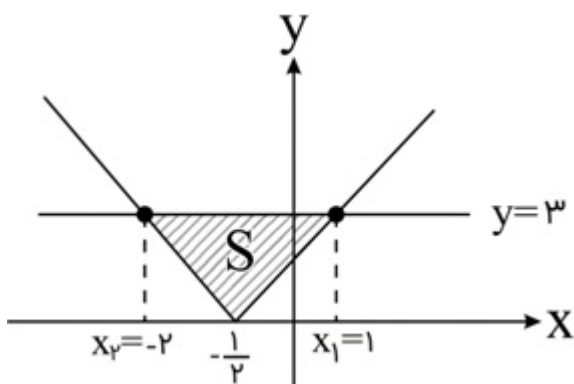
گزینه ۳

۱۸

ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \Rightarrow (gof)(x) = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|2x + 1|$ و خط $y = 3$ را می‌یابیم.

$$2x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$-2x_2 - 1 = 3 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$S = \frac{(|x_1| + |x_2|) \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

گزینه ۴

۱۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

در ضابطه $g(x)$ ، به جای x ضابطه $f(x)$ را جایگذاری می‌کنیم.

گام دوم

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{2x-1}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x \Rightarrow g(f(x)) = 2x$$



گزینه ۴

۲۰

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = 0$ ← غ.ق.ق ← گزینه ۲ حذف می‌شود.

$x = 1$ ← غ.ق.ق ← گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4-9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4-9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

از طرفی چون $x \neq 0$ است، پس گزینه ۴ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

گزینه ۳

۲۱

$$g(x) = \frac{1-3x}{x+2}, \quad f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$$

$$g(f(x)) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)+2} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1-\frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-7x-7}{7} \Rightarrow g(f(x)) = -x-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶



برای حل این تست از دو روش استفاده می‌کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطه تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست‌ها است. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطه مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می‌کنیم آیا با جابه‌جایی مؤلفه‌های اول و دوم، نقطه جدید در ضابطه تابع معکوس صدق می‌کند یا خیر.

روش اول:

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \Rightarrow -1 < y < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ ، $|x| < 1$ درمی‌آید

روش دوم:

نقطه $(0, 0)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می‌کند. از بین گزینه‌ها تنها معادله‌ای که $x = 0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطه $(0, 0)$ هم در ضابطه آن صدق کند، ضابطه $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.



گزینه ۴

۲۳

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x > 0$ و $x < 0$ تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می‌کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه‌های جدید، ضابطه معکوس تابع را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x \neq 0 : y = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 : |x| = x \Rightarrow y = \sqrt{x}; y > 0 \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow y = -\sqrt{-x}; y < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{x, y > 0} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x > 0$$

به توان ۲

$$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow{x, y < 0} y^2 = -x \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

به توان ۲

هم چنین نقطه $(0, 0)$ باید در ضابطه وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطه معکوس تابع به صورت $y = x|x|; x \in \mathbf{R}$ در می‌آید.

روش دوم:

اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه $f^{-1}(x)$ صدق می‌کند. نقطه $A(4, 2)$ در ضابطه $f(x)$ صدق می‌کند. پس نقطه $B(2, 4)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه‌های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر \mathbf{R} است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعه اعداد حقیقی یا همان \mathbf{R} باشد. تنها گزینه‌ای که تمام این ویژگی‌ها را دارد، گزینه $y = x|x|; x \in \mathbf{R}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گزینه ۴

۲۴

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.دامنه تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x - f^{-1}(x)$ نامنفی شود پس:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینه هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می‌گیرد و برعکس. در بازه $[3, 8]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد بنابراین در همین بازه نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و در نتیجه $x - f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت صحیح تر نامنفی می‌شود). بنابراین بازه $[3, 8]$ دامنه تعریف تابع داده شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴



گزینه ۱

۲۵

یک روش این است که از روی تابع اصلی، ضابطه وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سپس با توجه به این که اگر نقطه (α, β) در ضابطه اصلی صدق کند، نقطه (β, α) در وارون آن صدق می کند، گزینه درست را پیدا کنیم.

روش اول:

$$1) \ y = \sqrt{x}, \ x \geq 0, \ y \geq 0 \xrightarrow{\text{به توان } 2} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, \ x \geq 0$$

$$2) \ y = -\sqrt{-x}, \ x < 0 \Rightarrow y < 0 \xrightarrow{\text{به توان } 2} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, \ x < 0$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = x|x|, \ x \in R$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطه $(4, 2)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینه ۱ است که نقطه $(2, 4)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطه وارون در نظر گرفته شود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گزینه ۱

۲۶

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون از روی ضابطه تابع اصلی x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت به جای x عبارت $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجه زوج، مثبت است}} x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2] \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$$

اکنون ضابطه تابع وارون را به دست می آوریم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \xrightarrow{\text{به توان } 2} x-1 = (2-y)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x = 5 - 4y + y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

پس ضابطه تابع وارون به صورت $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲



گزینه ۳

۲۷

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

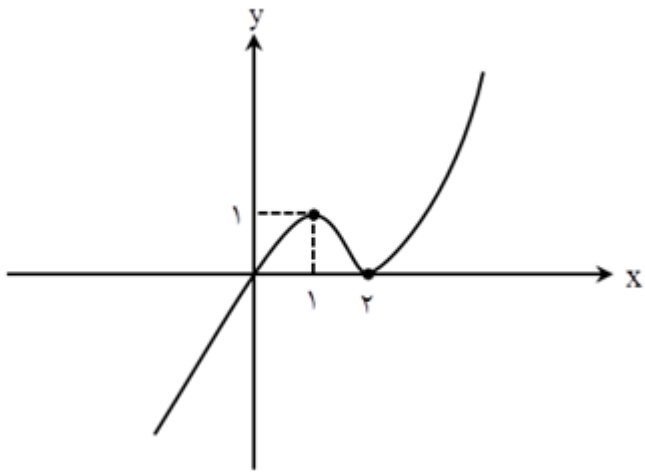
الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطه تابع را به صورت تفکیک‌شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می‌کنیم $x \geq 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < 2$ باشد و ضابطه تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) با توجه به این نکته که $D_{f^{-1}} = R_f$ دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطه آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2 \Rightarrow y = x(x - 2) \\ x < 2 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) \Rightarrow y = -x(x - 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازه $[1, 2]$ است. برد تابع در این بازه $[0, 1]$ است. پس $D_{f^{-1}} = [0, 1]$ (رد گزینه‌های ۱ و ۲). حال در محدوده مشخص‌شده ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{+1} 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1 - y = (x - 1)^2 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{1 - y}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x}; \quad 0 < x < 1$$



گزینه ۳

۲۸

دو تابع $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(2x+1) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \quad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $2x+1 = t$ باشد، x را بر حسب t به دست آورده و در ضابطه (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$2x+1 = t \Rightarrow 2x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

$$f(2x+1) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(t) = \lambda \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \epsilon \left(\frac{t-1}{2}\right) + \omega$$

$$= 2(t-1)^2 + 3t - 3 + \omega$$

$$\Rightarrow f(t) = 2(t^2 - 2t + 1) + 3t + 2 = 2t^2 - 4t + 2 + 3t + 2 = 2t^2 - t + 4$$

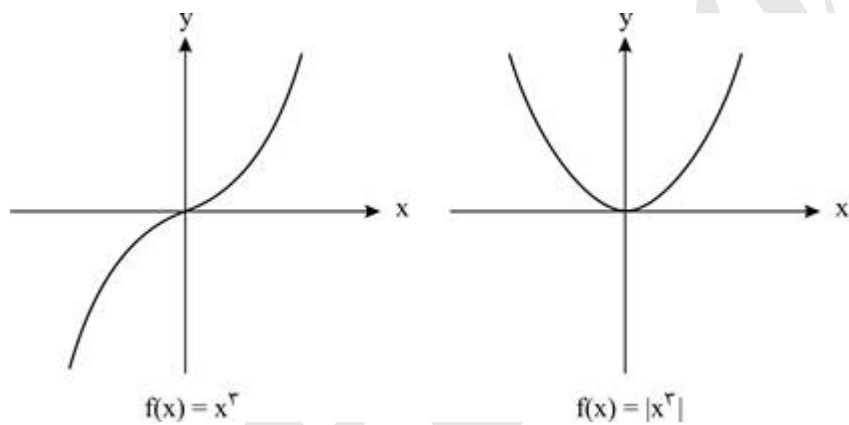
بنابراین ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + 4$ به صورت $f(x)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گزینه ۳

۲۹

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، در نتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینه ۳ می‌تواند درست باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵



گزینه ۳

۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را با توجه به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدوده x بر اساس ریشه عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشه عبارت‌های درون قدر مطلق، $x = -1$ و $x = 3$ است. داریم:

$$x < -1 : f(x) = -2x + 6 - (-x - 1) = -2x + 6 + x + 1 = -x + 7$$

$$-1 \leq x \leq 3 : f(x) = -2x + 6 - (x + 1) = -3x + 5$$

$$x > 3 : f(x) = 2x - 6 - (x + 1) = x - 7$$

در بازه $x > 3$ تابع $f(x) = x - 7$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

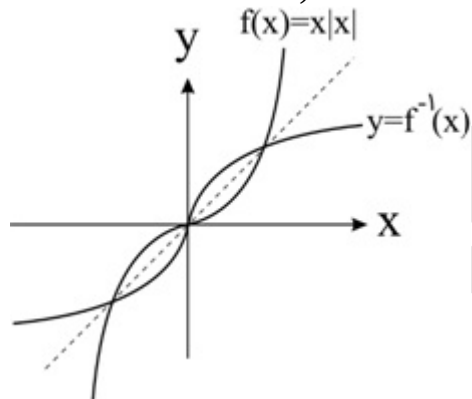
$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, \quad x > -4$$

گزینه ۳

۳۱

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. نمودار f^{-1} قرینه $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵



گزینه ۲

۳۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه به اینکه $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $g(2a) = f(6)$

گام دوم

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow g(2a) = \frac{2a}{2a-1} = f(6) = 3$$

$$\Rightarrow 2a = 3(2a-1) \Rightarrow 2a = 6a-3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

گزینه ۳

۳۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

می‌دانیم اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع صدق کند، نقطه $A'(\beta, \alpha)$ در ضابطه وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow (4, 2) \in f \Rightarrow (2, 4) \in f^{-1}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow (-4, -2) \in f \Rightarrow (-2, -4) \in f^{-1}$$

باتوجه به این دو مثال ضابطه وارون تابع به صورت $f^{-1}(x) = x|x|$ خواهد بود.

گزینه ۲

۳۴

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = \lambda \Rightarrow (f^{-1}(a), \lambda) \in g^{-1} \Rightarrow (\lambda, f^{-1}(a)) \in g \Rightarrow g(\lambda) = f^{-1}(a) \quad (*)$$

$$g(x) = \sqrt{5x+9} \Rightarrow g(\lambda) = \sqrt{49} \Rightarrow g(\lambda) = 7$$

$$\xrightarrow{(*)} f^{-1}(a) = 7 \Rightarrow (a, 7) \in f^{-1} \Rightarrow (7, a) \in f \Rightarrow a = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶



گزینه ۲

۳۵

راه حل اول:

ضابطه تابع وارون را به دست می آوریم:

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 4 \Rightarrow yx - x = 2y + 4$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x+4}{x-1}$$

با مساوی قرار دادن ضابطه تابع با وارون آن نقطه تقاطع را محاسبه می کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +4 \end{cases}$$

راه حل دوم:

هرگاه نمودار تابعی، نمودار وارون خود را قطع کند، محل تلاقی این دو نمودار دارای مختصات یکسان است.

$$(a, a) \Rightarrow f(a) = a \Rightarrow \frac{a+4}{a-2} = a \xrightarrow{a \neq 2} a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = +4 \end{cases}$$