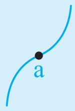
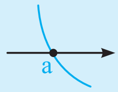
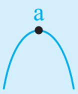
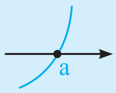
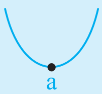
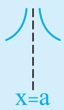
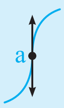
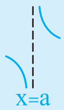
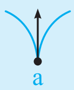
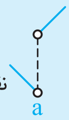
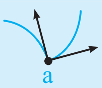
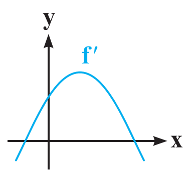
۱۲ رابطه‌ی بین نمودار توابع f و f'

فرض کنید می‌خواهیم از روی نمودار تابع پیوسته‌ی f، نمودار تابع f' را رسم کنیم. داریم:

وضعیت در f'	وضعیت در f
صعودی اکید	تقعر رو به بالا
نزولی اکید	تقعر رو به پایین
مثبت (بالای محور x)	صعودی اکید
منفی (پایین محور x)	نزولی اکید
اکسترمم 	عطف افقی یا مایل 
تقاطع نزولی با محور x ها 	ماکزیمم نسبی مشتق‌پذیر 
تقاطع صعودی با محور x ها 	مینیمم نسبی مشتق‌پذیر 
مجانب قائم با انفصال مضاعف 	عطف قائم 
مجانب قائم با انفصال ساده 	نقطه‌ی بازگشتی 
نقطه‌ی تو خالی جهشی 	نقطه‌ی زاویه‌دار (گوشه) 
مجانب افقی $y = a$	مجانب مایل $y = ax + b$
مجانب افقی $y = ۰$	مجانب افقی $y = a$

۱۰۵ نمودار f'، مشتق تابع f به صورت شکل زیر است. تابع f از نظر نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و نقطه‌ی عطف چگونه است؟

داخل ریاضی ۸۴ | پاسخ: ۳

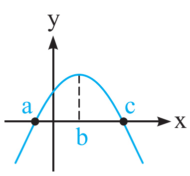


۱) فقط یک ماکسیمم در سمت راست محور y ها

۲) یک ماکسیمم و یک می‌نیمم و یک نقطه‌ی عطف در سمت راست محور y ها

۳) یک می‌نیمم در سمت چپ محور y ها، یک ماکسیمم و یک نقطه‌ی عطف در سمت راست محور y ها

۴) یک ماکسیمم در سمت چپ محور y ها، یک می‌نیمم و یک نقطه‌ی عطف در سمت راست محور y ها



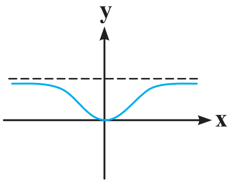
به نمودار f' دقت کنید:

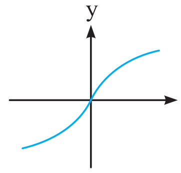
نقطه	وضعیت در f'	وضعیت در f
$x = a$	تقاطع صعودی در سمت چپ	min در سمت چپ
$x = b$	اکسترمم در سمت راست	عطف در سمت راست
$x = c$	تقاطع نزولی در سمت راست	max در سمت راست

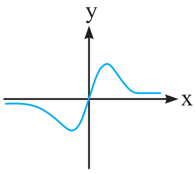
۱۰۶ شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟

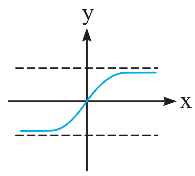
خارج ریاضی ۹۳ | پاسخ: ۲

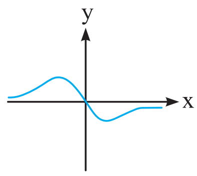
منبع: قسمت «ت» تمرین ۵ ص ۱۴۹ دیفرانسیل



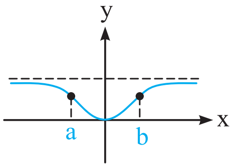
(۱


(۲


(۳


(۴


به نمودار f دقت کنید:

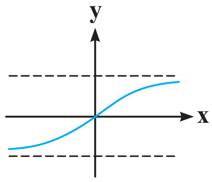


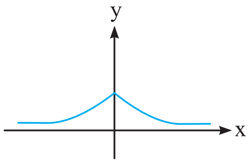
وضعیت در f'	موقعیت در f	نقطه
اکسترمم زیر محور x ها	عطف نزولی	$x=a$
تقاطع صعودی با محور x ها	Min	$x=0$
اکسترمم بالای محور x ها	عطف صعودی	$x=b$

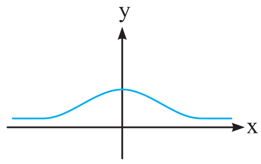
۱۰۷ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$، به کدام صورت است؟

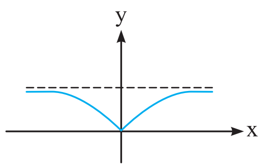
داخل ریاضی ۹۳ | پاسخ: ۱ و ۲

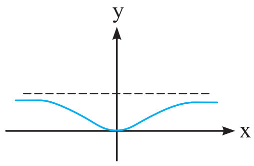
منبع: تمرین ۵ ص ۱۴۹ دیفرانسیل



(۱


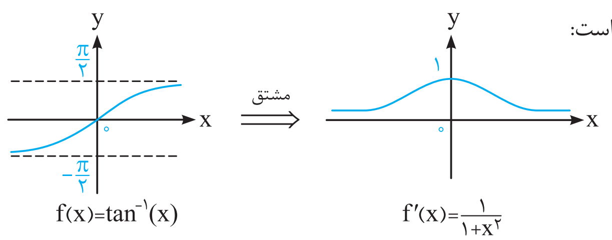
(۲


(۳


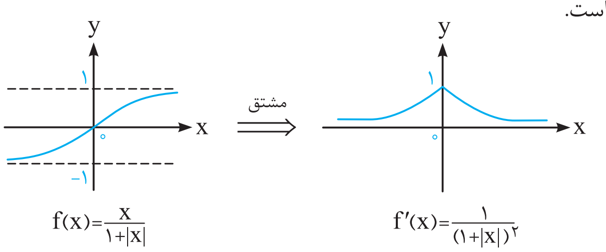
(۴


این سؤال ۲ پاسخ صحیح دارد. از آن‌جایی که f در $x<0$ تقعر رو به بالا و در $x>0$ تقعر رو به پایین دارد پس f' در $x<0$ صعودی و در $x>0$ نزولی خواهد بود یعنی گزینه‌ی (۱) و (۲) صحیح است.

حالت اول: اگر $f(x)=\tan^{-1}x$ فرض شود گزینه‌ی (۲) صحیح است:



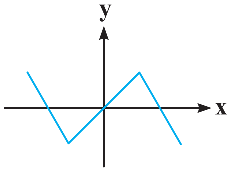
حالت دوم: اگر $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ فرض شود، گزینه‌ی (۱) صحیح است.

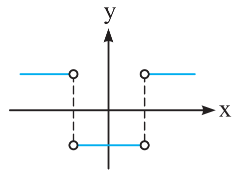


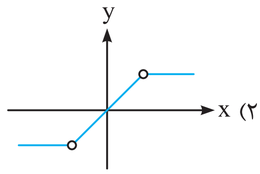
۱۰۸ نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است. نمودار f' کدام است؟

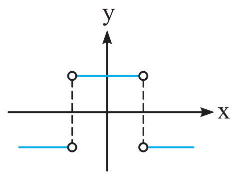
کتاب درسی دیفرانسیل | پاسخ: ۳

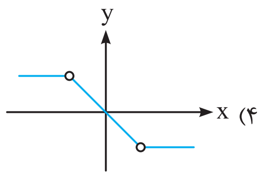
تمرین ۵ ص۱۴۹



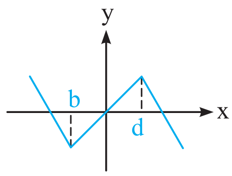








به نمودار f دقت کنید:



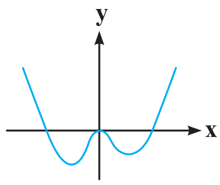
در نقاط b و d تابع f زاویه‌دار است، پس در تابع f' نمودار به‌صورت نقاط تو خالی، دارای جهش می‌شود و حد ندارد. (یعنی گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح هستند.)

همچنین نمودار تابع f بین b و d صعودی است، پس تابع f' بین b و d مثبت (بالای محور x) می‌باشد، بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۰۹ نمودار زیر، نمودار f' است. تابع f ....

کتاب درسی دیفرانسیل | پاسخ: ۴

تمرین ۱۳ ص۱۹۱



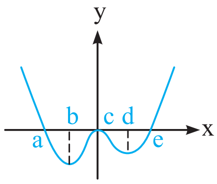
۱) یک ماکزیمم در سمت راست محور y ها دارد.

۲) یک مینیمم در سمت چپ محور y ها دارد.

۳) دو نقطه‌ی عطف دارد.

۴) سه نقطه‌ی عطف دارد.

به نمودار f' دقت کنید:

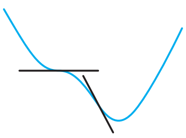


وضعیت در f	موقعیت در f'	نقطه
max	تقاطع نزولی با محور x ها	$x=a$
عطف	min	$x=b$
عطف	max	$x=c$
عطف	min	$x=d$
min	تقاطع صعودی با محور x ها	$x=e$

۱۱۰ شکل مقابل نمودار تابع f است. مقادیر اکسترمم نسبی تابع مشتق f از راست به چپ چگونه است؟

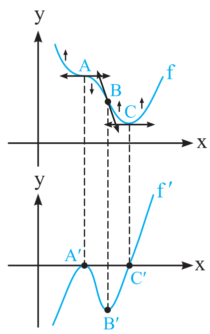
داخل ریاضی ۸۲ | پاسخ: ۴

منبع: تمرین ۱۲ ص ۱۹۱ دیفرانسیل



۱) می‌نیمم مثبت ـ ماکسیمم مثبت
۲) می‌نیمم منفی ـ ماکسیمم منفی

۳) می‌نیمم صفر ـ ماکسیمم مثبت
۴) می‌نیمم منفی ـ ماکسیمم صفر



قبل از نقطه‌ی $f : A$ نزولی با تقعر رو به بالا است، بنابراین در این محدوده f' منفی و اکیداً صعودی است.

بین A و $f : B$ نزولی با تقعر رو به پایین است، بنابراین در این محدوده f' منفی و اکیداً نزولی است.

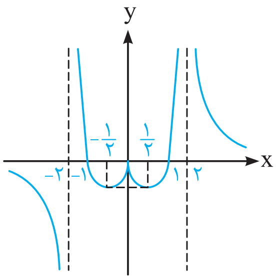
بین B و $f : C$ نزولی با تقعر رو به بالا است، بنابراین در این محدوده f' منفی و اکیداً صعودی است.

بعد از نقطه‌ی C : f صعودی با تقعر رو به بالا است، بنابراین در این محدوده f' مثبت و اکیداً صعودی است.

۱۱۱ اگر تابع f پیوسته بوده و نمودار تابع مشتق آن (تابع f') به‌صورت زیر باشد، کدام گزینه نادرست است؟

تمرین ۱۵ ص۱۹۱

کتاب درسی دیفرانسیل | پاسخ: ۴



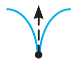
۱) تابع f در $x=۲$ عطف دارد.

۲) تابع f در $x=-۲$ دارای مینیمم است.

۳) تابع f دارای ۴ نقطه‌ی عطف است.

۴) تابع f در $x=۱$ دارای ماکزیمم است.

وضعیت در f	وضعیت در f'	نقطه
min بازگشتی	مجانب قائم (انفصال ساده)	$x=-۲$
max	تقاطع نزولی با محور x ها	$x=-۱$
عطف	min	$x=-\frac{۱}{۲}$
عطف	max بازگشتی	$x=۰$
عطف	min	$x=\frac{۱}{۲}$
min	تقاطع صعودی با محور x ها	$x=۱$
عطف قائم	مجانب قائم (انفصال مضاعف)	$x=۲$

دقت کنید در همسایگی $x=-۲$ تابع f' قبل از آن منفی و بعد از آن مثبت است، پس تابع f قبل از $x=-۲$ نزولی و بعد از آن صعودی است، یعنی به صورت  بوده است.

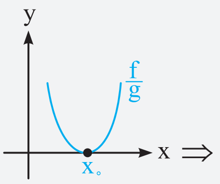
۱۳ رسم نمودار تابع در اطراف یک نقطه

برای رسم نمودار تابع f در همسایگی $x_۰$:

۱ $f'(x_۰)$ را می‌یابیم. در این صورت با توجه به $\oplus$ یا $\ominus$ یا صفر شدن f' متوجه می‌شویم که تابع f در همسایگی $x_۰$ صعودی یا نزولی است یا این که در $x_۰$ اکسترمم دارد یا نه.

۲ با تعیین $f''(x_۰)$ متوجه می‌شویم که تقعر تابع f رو به بالا است یا پایین یا این که $x_۰$ عطف می‌باشد یا نه.

◄ ***تذکر۱:*** اگر تابع مشتق‌پذیر f ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ بر محور x ها مماس می‌شود.

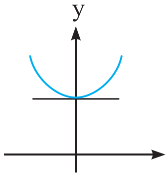


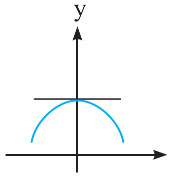
$\Rightarrow$ $x_۰$ ریشه‌ی مضاعف تابع f است.

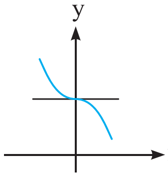
◄ ***تذکر۲:*** اگر $x=a$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد (بزرگ‌تر از یک) تابع f باشد، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ عطف دارد $(g(a)\neq ۰)$ مانند $x=۱$ در تابع $y=\frac{(x-۱)^۳}{x}$ که نقطه‌ی عطف آن است.

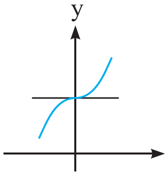
۱۱۲ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲+\sin x-x\cos x$ در همسایگی نقطه‌ی $x=۰$ به کدام شکل است؟

داخل ریاضی ۸۳ | پاسخ: ۴

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

با تعیین علامت y' می‌توانیم وضعیت منحنی تابع f را در مجاورت نقطه به‌طول $x=0$ بررسی کنیم:

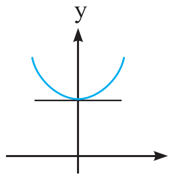
$$f(x)=2+\sin x-x\cos x \Rightarrow f'(x)=\cancel{\cos x}-\cancel{\cos x}+x\sin x=x\sin x \xrightarrow{x=0} f'(0)=0$$

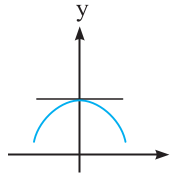
x		۰	
f′	+	۰	+
f	↗		↗

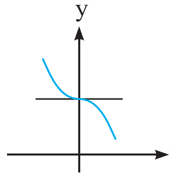
در طرف راست $x=0$، $\sin x$ و x هر دو مثبت‌اند و در طرف چپ $x=0$، $\sin x$ و x هر دو منفی‌اند. لذا f' در اطراف $x=0$ مثبت است، بنابراین تابع در اطراف $x=0$ اکیداً صعودی است و در نتیجه گزینه‌ی (۴) صحیح است. (در ضمن با توجه به $f'(0)=0$، تابع f در نقطه به طول $x=0$ مماس افقی دارد.)

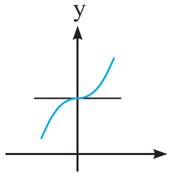
۱۱۳ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ در نزدیکی نقطه‌ی $x=0$ چگونه است؟

خارج ریاضی ۸۴ | پاسخ: ۱

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم. داریم:

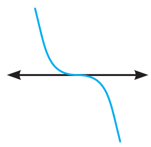
$$y=\frac{x^2+1}{x^3+1}\Rightarrow y'=\frac{2x(x^3+1)-3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2}=\frac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}\xrightarrow{y'=0} x(-x^3-3x+2)=0$$

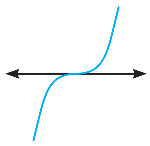
حال با توجه به این‌که $x=0$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق تابع می‌باشد، با استفاده از آزمون مشتق اول به بررسی وضعیت منحنی تابع در مجاورت این نقطه می‌پردازیم که در نتیجه نقطه‌ی $x=0$، طول min نسبی منحنی تابع داده شده می‌باشد.

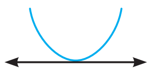
x		۰	
y′	−	۰	+
y	↘	min	↗

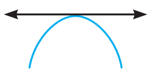
۱۱۴ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{6}x^3-x+\sin x$ در همسایگی $x=0$ چگونه است؟

داخل ریاضی ۸۶ | پاسخ: ۲

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تابع $f(x)=\frac{x^3}{6}-x+\sin x$ تابعی فرد است زیرا:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{6}-(-x)+\sin(-x)=-\frac{x^3}{6}+x-\sin x=-\left(\frac{x^3}{6}-x+\sin x\right)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

بنابراین منحنی تابع f نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد، یعنی یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) جواب است. حال به محاسبه‌ی مشتق دوم f می‌پردازیم:

$$f'(x)=\frac{x^2}{2}-1+\cos x\Rightarrow f''(x)=x-\sin x$$

$f''(x)$ هم تابعی فرد است که اگر $x>0$ باشد، آن‌گاه با توجه به آن که $x>\sin x$ بنابراین $f''(x)>0$ و تقعر منحنی روبه بالا می‌باشد و اگر $x<0$ باشد، آن‌گاه $f''(x)<0$ و تقعر منحنی روبه پایین است (توجه کنید که خود $x=0$ هم نقطه‌ی عطف است). بنابراین گزینه‌ی (۲) پاسخ تست است.

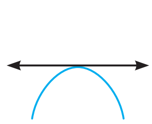
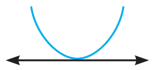
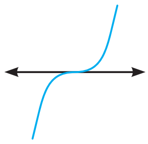
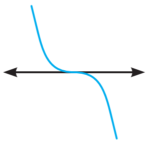
کلک ۱: از آن‌جایی که در همسایگی $x=0$ داریم: $\sin x \sim x$

پس می‌توانیم رفتار تابع $y=\frac{1}{6}x^3-x+x$ یعنی $y=\frac{1}{6}x^3$ را بررسی کنیم. که گزینه‌ی (۲) صحیح است.

کلک ۲: از آن‌جایی که $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$، فقط گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱۱۵ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin 2x\cos x$ در همسایگی نقطه‌ی بحرانی روی بازه‌ی $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ به کدام صورت است؟

داخل ریاضی ۸۱ | پاسخ: ۱

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

از معادله‌ی $f'(x)=0$ باید نقاط بحرانی را بیابیم:

$$f'(x)=2\cos 2x\cos x-\sin x\sin 2x=0\Rightarrow 2\cos 2x\cos x=\sin x\sin 2x$$

حل معادله‌ی فوق وقت‌گیر است، می‌توان کلک زد:

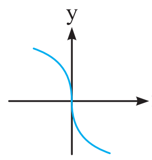
شروع بازه : $x=0\Rightarrow f'(0)=2>0$

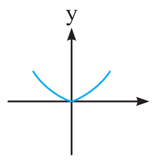
پایان بازه : $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=0$

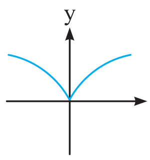
پس نمودار با شیب مثبت (صعودی) شروع شده، و برای این‌که در پایان بازه به شیب صفر برسد باید شیب آن از مثبت (صعودی) به منفی تبدیل شود (نزولی)، پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

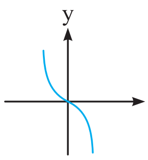
۱۱۶ نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

خارج تجربی ۹۱ | پاسخ: ۱

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

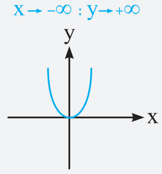
$$y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}=x^{\frac{3}{5}}(x-4)\Rightarrow y=(x-4)\sqrt[5]{x^3}$$

در تابع $\sqrt[5]{x^3}$ ریشه‌ی زیر رادیکال یعنی $x=0$ طول نقطه‌ی عطف قائم است. از آن‌جایی که عبارت $x-4$ به ازای $x=0$ منفی می‌شود، پس عطف قائم نزولی خواهیم داشت. بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۴ رسم نمودار توابع چند جمله‌ای

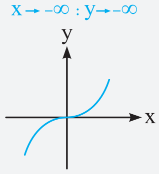
۱ برای یافتن ناحیه‌ای که نمودار تابع از آن ناحیه شروع می‌شود، باید x را به‌سمت $-\infty$ فرستاد و علامت y را یافت:

$x\to-\infty : y\to+\infty$



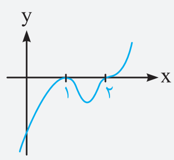
شروع از ناحیه‌ی دوم

$x\to-\infty : y\to-\infty$



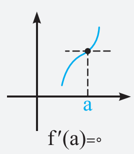
شروع از ناحیه‌ی سوم

۲ وجود عامل ضربی $(x-a)^{2n}$ نشان‌گر این است که تابع در $x=a$ دارای اکسترمم است، ولی وجود عامل ضربی $(x-a)^{2n+1}$ نشان می‌دهد که تابع در $x=a$ عطف دارد.

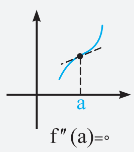


$$y=\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{x=1\\ \text{اکسترمم}}}\,\underbrace{(x-2)^3}_{\substack{x=2\\ \text{عطف}}}$$

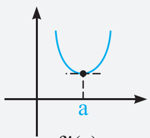
◀ **وایسا، نرو:** در تشخیص نمودار توابع چند جمله‌ای، چک کردن نقاط عطف و اکسترمم و یا مشخص کردن شیب خطوط مماس مشخص شده روی شکل، کارساز است.



$f'(a)=0$
$f''(a)=0$



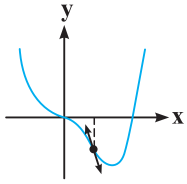
$f''(a)=0$



$f'(a)=0$

۱۱۷ نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟ مثال ص ۱۸۳

کتاب درسی دیفرانسیل | پاسخ: ۳



۱) $y=-x^۴-۴x^۲$ ۲) $y=-x^۴+۴x^۲$

۳) $y=x^۴-۴x^۳$ ۴) $y=x^۴+۴x^۳$

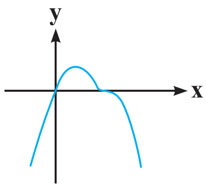
اولاً: نمودار از ربع دوم شروع شده، پس به ازای $x\to-\infty$ باید $y\to+\infty$ که گزینه‌های (۳) و (۴) صحیح هستند.

ثانیاً: این تابع دو نقطه عطف دارد که یکی $x=۰$ و دیگری دارای طول مثبت است که در بین گزینه‌های (۳) و (۴) فقط گزینه‌ی (۳) صحیح است، دقت کنید:

$$y=x^۴-۴x^۳\Rightarrow y'=۴x^۳-۱۲x^۲\Rightarrow y''=۱۲x^۲-۲۴x=۰\Rightarrow x=۰,۲$$

۱۱۸ ضابطه‌ی تابع نمودار مقابل کدام است؟

خارج ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۱



۱) $y=x(۱-x)^۳$ ۲) $y=x(x-۱)^۳$

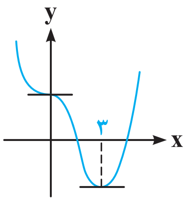
۳) $y=x(۱-x^۳)$ ۴) $y=x(x^۳-۱)$

با توجه به شکل وقتی $x\to-\infty$، داریم $f(x)\to-\infty$. بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است.

در گزینه‌ی (۱) عبارت $(۱-x)^۳$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد دارد، پس در $x=۱$ عطف دارد، یعنی گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۱۹ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۴+ax^۳+bx^۲+۲$ است. $a+b$ کدام است؟

داخل تجربی ۹۰ | پاسخ: ۱



۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

اولاً: در $x=۳$ که طول نقطه‌ی min است، خط مماس افقی بوده، پس شیب خط مماس صفر می‌باشد:

$$f'(x)=x^۳+۳ax^۲+۲bx\Rightarrow f'(۳)=۰\Rightarrow ۲۷+۲۷a+۶b=۰\ (I)$$

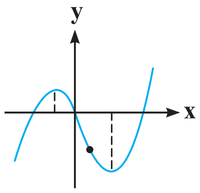
ثانیاً: طول نقطه‌ی عطف نمودار، $x=۰$ است، پس $f''(۰)=۰$ است:

$$f''(x)=۳x^۲+۶ax+۲b\Rightarrow f''(۰)=۰:۰+۰+۲b=۰\Rightarrow b=۰$$

بنابراین طبق (I) مقدار $a=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۱$ است.

۱۲۰ شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{۲}{۳}x^۳+ax^۲+bx$ است. زوج مرتب (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟

خارج تجربی ۸۸ | پاسخ: ۱



۱) $(-۱,-۴)$ ۲) $(-۱,۴)$

۳) $(۱,-۴)$ ۴) $(۱,۴)$

طبق نمودار، طول نقطه‌ی عطف عددی مثبت است، پس:

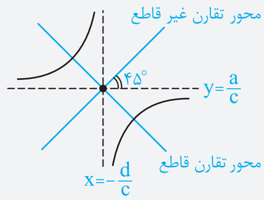
$$x=-\frac{a}{۳(\frac{۲}{۳})}>۰\Rightarrow a<۰\xRightarrow{\text{طبق گزینه‌ها}}a=-۱$$

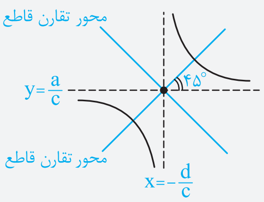
به ازای $a=-۱$ ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y=\frac{۲}{۳}x^۳-x^۲+bx$ خواهد بود. از آن‌جایی طول نقاط اکسترمم مختلف العلامت است (ماکزیمم در سمت چپ و می‌نیمم در سمت راست است) پس معادله‌ی $y'=۰$ ضرب ریشه‌هایش منفی خواهد بود:

$$y'=۰\Rightarrow ۲x^۲-۲x+b=۰\xRightarrow{x_۱x_۲<۰}\frac{b}{۲}<۰\Rightarrow b<۰\Rightarrow \text{گزینه‌ی (۱)}$$

۱۵ رسم نمودار تابع هموگرافیک

تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{b}{d}\neq\frac{a}{c}$ تابع هموگرافیک نام دارد. این تابع روی کل دامنه‌اش، نه صعودی است و نه نزولی (چون مجانب قائم دارد).





۱ محل برخورد مجانب‌ها یعنی نقطه‌ی $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$، مرکز تقارن تابع است.

۲ تابع هموگرافیک دو محور تقارن با شیب‌های ±۱ دارد که از مرکز تقارن تابع می‌گذرند که یکی از آن‌ها نمودار تابع را قطع می‌کند.

کلک: معادلات محور تقارن تابع هموگرافیک، از جمع و کم کردن معادلات مجانب‌ها به‌دست می آید. به عنوان مثال در تابع $y=\frac{۳x+۲}{x-۱}$:

مجانب افقی : $y=۳$ $\xrightarrow{+}$ $y+x=۳+۱\Rightarrow y+x=۴$ **غیر قاطع**

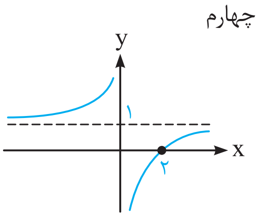
مجانب قائم : $x=۱$ $\xrightarrow{-}$ $y-x=۳-۱\Rightarrow y-x=۲$ **قاطع**

نکته‌ی جالب: چون دترمینان ضرایب، یعنی $\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}=-۵$ **منفی** است، پس محور تقارنی که علامت وسط x و y آن **منفی** است، نمودار تابع را قطع می‌کند.

۱۲۱ نمودار تابع $y=\frac{x-۲}{x}$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟   *تمرین در کلاس ص ۲۰۳*

۱) اول   ۲) دوم   ۳) سوم   ۴) چهارم

$$y=\frac{x-۲}{x}\Rightarrow\begin{cases}\text{مجانب افقی}: y=۱\\ \text{مجانب قائم}: x=۰\\ \text{محل برخورد با محور x ها}: x=۲\end{cases}$$



مشخص است که نمودار تابع از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.

کتاب درسی دیفرانسیل | پاسخ: ۳

۱۲۲ تابع با ضابطه‌ی $y=ax+b+\frac{x^۲}{۲x-۱}$ تابع هموگرافیکی است که محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

اولاً: $f(۰)=۱$ است، بنابراین: $۱=۰+b+۰\Rightarrow b=۱$

ثانیاً: تابع هموگرافیک است و بعد از مخرج مشترک‌گیری، صورت کسر باید از درجه‌ی یک یا صفر باشد، بنابراین:

$$y=ax+۱+\frac{x^۲}{۲x-۱}=\frac{(۲a+۱)x^۲+...}{۲x-۱}\Rightarrow ۲a+۱=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $a+b=(\frac{-۱}{۲})+۱=\frac{۱}{۲}$.

داخل ریاضی ۸۷ | پاسخ: ۳

۱۲۳ خط به معادله‌ی $y=x+۴$ محور تقارن منحنی تابع $y=\frac{(۲a-۱)x+۳}{۲x+a}$ است. عرض از مبدأ محور تقارن دیگر آن کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) ۲

محور تقارن از مرکز تقارن می‌گذرد، پس:

$$(-\frac{a}{۲},\frac{۲a-۱}{۲})\xRightarrow{y=x+۴}\frac{۲a-۱}{۲}=-\frac{a}{۲}+۴\Rightarrow a=۳$$

پس معادله‌ی تابع به‌صورت $y=\frac{۵x+۳}{۲x+۳}$ است و معادله‌ی محور تقارن‌های آن بدین صورت است:

مجانب قائم : $x=-\frac{۳}{۲}$ $\xrightarrow{-}$ $y-x=۴$

مجانب افقی : $y=\frac{۵}{۲}$ $\xrightarrow{+}$ $y+x=۱\Rightarrow$ عرض از مبدأ $=۱$

داخل ریاضی ۸۹ | پاسخ: ۳

۱۲۴ منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x+۱}{۱-۲x}$، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصله‌ی مرکز تقارن این منحنی از وتر AB کدام است؟   *برگرفته از مثال ص ۲۰۱*

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

ابتدا محل تلاقی نمودار تابع $y=\frac{x+۱}{۱-۲x}$ را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم:

$A(-۱,۰)$, $B(۰,۱)$

کتاب درسی دیفرانسیل | پاسخ: ۲

اکنون معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$y-0=\frac{0-1}{-1-0}(x-(-1))\Rightarrow y=x+1$$

مرکز تقارن منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x+1}{-2x+1}$، نقطه‌ی $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ است.

از آن‌جایی که فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$ برابر است با $D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$، پس:

فاصله‌ی نقطه‌ی $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ از خط $x-y+1=0$ برابر است با:

$$D=\frac{\left|\frac{1}{2}\times1-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

۱۶ رسم نمودار توابع کسری گویا

در بررسی نمودار توابع کسری گویا دقت کنید که:

۱ مجانب‌ها را بررسی کرده و محل تقاطع آن‌ها با محورهای مختصات و خود نمودار را بررسی کنید.

۲ اگر نمودار تابع $\frac{f}{g}$ بر خط $y=k$ مماس بود، باید معادله‌ی $\frac{f}{g}=k$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. (در حالت خاص وقتی f ریشه‌ی مضاعف دارد نمودار $\frac{f}{g}$ بر محور x مماس است)

۳ اگر نمودار تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ انفصال مضاعف داشت، باید تابع g دارای ریشه‌ی مضاعف باشد. (در حالت خاص اگر g درجه ۲ بود باید Δ صفر شود.)

مثال: در تابع $y=\frac{1}{x^2-6x+9}$ چون مخرج ریشه مضاعف دارد، پس نمودار تابع دارای انفصال مضاعف در $x=3$ است:

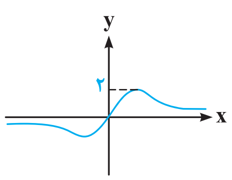
۴ طول نقاط اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر نمودار f ریشه‌های f' هستند.

۵ ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج f نقاط اکسترمم $\frac{f}{g}$ هستند، مانند $x=1$ در $y=\frac{(x-1)^2}{x}$.

۶ ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی فرد (بزرگ‌تر از یک) تابع f، نقاط عطف تابع $\frac{f}{g}$ هستند، مانند $x=1$ در $y=\frac{(x-1)^3}{x}$

۱۲۵ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ است. a کدام است؟

داخل تجربی ۸۸ | پاسخ: ۴



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

اولاً: نمودار تابع f از مبدأ می‌گذرد، پس:

$$f(0)=0\Rightarrow b=0$$

ثانیاً: نمودار تابع f بر خط $y=2$ مماس است، پس معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$\frac{ax}{x^2+1}=2\Rightarrow 2x^2-ax+2=0\xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف}}a^2-16=0\Rightarrow a=\pm4$$

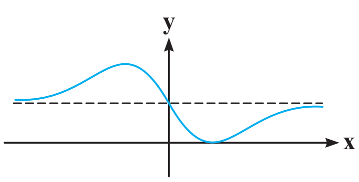
به ازای $a=-4$ معادله‌ی $2x^2-ax+2=0$ به‌صورت $2x^2+4x+2=0$ یا به عبارتی $2(x+1)^2=0$ خواهد بود که ریشه‌ی آن $x=-1$ است، ولی طبق شکل مشخص است که طول نقطه‌ی تماس، عددی مثبت است، پس $a=4$ صحیح است.

۱۲۶ شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

منبع: تمرین ۲ ص ۲۱۰ دیفرانسیل

داخل ریاضی ۹۱ | پاسخ: ۳

۱) $(1,-2)$
۲) $(2,4)$
۳) $(2,-4)$
۴) $(1,2)$



داریم $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$. پس $y=a$ مجانب افقی نمودار تابع f است. از طرفی نمودار تابع f مجانب افقی خود را روی محور yها قطع کرده است. بنابراین می‌توان نوشت:

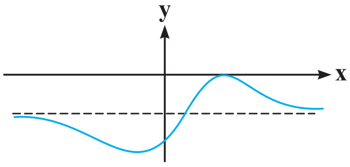
$$a=f(0)=2$$

هم‌چنین نمودار تابع f در سمت راست محور yها بر محور xها مماس است. پس داریم:

$$\begin{cases}\Delta\ (\text{صورت}) = 0 \\ \text{ریشه‌ی مضاعف} > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \dfrac{-b}{2a} > 0 \xRightarrow{a=2>0} b < 0 \end{cases} \Rightarrow b = -4 \Rightarrow (a,b) = (2,-4)$$

۱۲۷ شکل مقابل تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{ax^2 + 4x - 4}{x^2 + b}$ است. دوتایی مرتب (a,b) به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟

داخل ریاضی ۸۱ | پاسخ: ۲



۱) $(-2,5)$ ۲) $(-1,3)$

۳) $(-1,5)$ ۴) $(1,3)$

اولاً: نمودار بر محور x مماس است، پس صورت کسر ریشه‌ی مضاعف دارد:

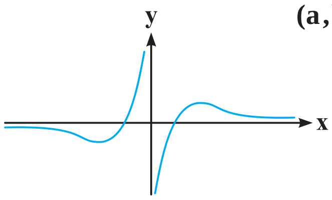
$$ax^2 + 4x - 4 = 0 \xRightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} 16 + 16a = 0 \Rightarrow a = -1$$

ثانیاً: محل برخورد تابع با محور yها زیر خط مجانب افقی $y = -1$ است، پس:

$$f(0) < -1 \Rightarrow -\frac{4}{b} < -1 \Rightarrow \frac{4}{b} > 1 \xRightarrow{\text{طبق گزینه‌ها } b>0 \text{ است}} b < 4 \xRightarrow{\text{طبق گزینه‌ها}} (a,b) = (-1,3)$$

۱۲۸ شکل مقابل نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{x^2 + ax - 3}{x^3 + b}$ می‌باشد. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

خارج ریاضی ۸۹ | پاسخ: ۱



۱) $(0,0)$ ۲) $(0,1)$

۳) $(1,0)$ ۴) $(2,0)$

با توجه به شکل داده شده، $x = 0$ خط مجانب قائم است، بنابراین ریشه‌ی مخرج کسر است، داریم:

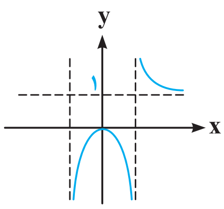
$$x^3 + b = 0 \xRightarrow{x=0} b = 0$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = \dfrac{x^2 + ax - 3}{x^3}$ بازنویسی می‌شود. با دقت در شکل داده شده می‌توان گفت که f تابعی فرد است (چون نسبت به نقطه‌ی $(0,0)$ متقارن است)، بنابراین $a = 0$ می‌باشد.

۱۲۹ نمودار تابع $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x^2 + c}$ در بازه‌ی $(-1,+\infty)$ به‌صورت زیر است. مقدار $f(2)$ کدام است؟

کتاب درسی دیفرانسیل | پاسخ: ۲

مثال ص ۲۰۳



۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{5}{3}$ ۴) ۲

اولاً: خط $y = 1$ مجانب افقی تابع است، پس $a = 1$ است.

ثانیاً: نمودار تابع در $(-1,+\infty)$ رسم شده، پس $x = -1$ مجانب قائم تابع است، در نتیجه:

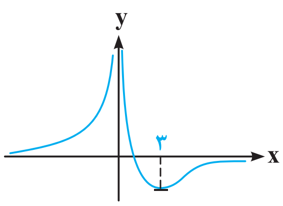
$$x^2 + c = 0 \xRightarrow{x=-1} 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

ثالثاً: نمودار تابع بر محور x مماس است، پس صورت کسر ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$x^2 + b = 0 \xRightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف}} 0 - 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{3}$$

۱۳۰ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{ax + 3}{x^2 + bx}$ است. دوتایی $(a\,,\,b)$ کدام است؟

داخل ریاضی ۹۰ | پاسخ: ۳



۱) $(-2,-2)$

۲) $(2,0)$

۳) $(-2,0)$

۴) $(2,2)$