

# فهرست

## آمار و احتمال

۷	فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات
۸	درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
۲۰	درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه
۲۲	درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها
۳۰	فصل دوم: احتمال
۳۱	درس اول: مبانی احتمال
۳۵	درس دوم: احتمال غیر هم‌شانس
۴۱	درس سوم: احتمال شرطی
۴۷	درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته
۵۰	فصل سوم: آمار توصیفی
۵۱	درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها
۵۹	درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
۶۴	درس سوم: معیارهای پراکندگی
۷۲	فصل ۴: آمار استنباطی
۷۳	درس اول: گردآوری داده‌ها
۷۷	درس دوم: برآورد
۸۵	آزمون‌های جامع

## ریاضیات گسسته

۹۶	فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد
۹۷	درس اول: استدلال ریاضی
۹۸	درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح
۱۱۳	درس سوم: هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها
۱۳۵	فصل دوم: گراف و مدل‌سازی
۱۳۶	درس اول: معرفی گراف
۱۵۴	درس دوم: مدل‌سازی با گراف
۱۶۲	فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)
۱۶۳	درس اول: مباحثی در ترکیبیات
۱۷۶	درس دوم: روش‌هایی برای شمارش
۱۸۷	آزمون‌های جامع و کنکورهای سراسری ۹۸

# آمار و احتمال

« درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

« درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه

« درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها

فصل اول:

## آشنایی با مبانی ریاضیات

نکته

قاعدهٔ رشد: بچه‌های عزیز! توی ریاضیات به قاعده‌ای داریم که نشون می‌ده بعضی از توابع معروف وقتی  $n$  از یک تا بی‌نهایت زیاد میشه، با چه سرعتی زیاد می‌شن یا در اصطلاح رشد می‌کنن. به این قاعده، قاعدهٔ سرعت رشد می‌گن که برای توابع معروف به صورت زیر هست: (ایشالا روزی به دردتون بخوره!)

$$\sin n \ll \cos n \ll \log n \ll \sqrt{n} \ll n^c \ll n! \ll n^n$$

$c$  یک عدد ثابت است.

کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

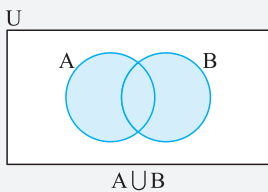
- ۱)  $\{n \mid n^3 > n\}$     ۲)  $\{n \mid n^2 \geq 2^n\}$     ۳)  $\{n \mid 2^n > n^3\}$     ۴)  $\{n \mid 2^n > n^2\}$

گزینهٔ ۲

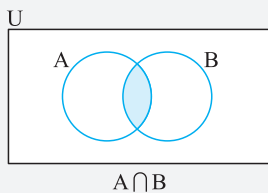
پاسخ: اگر چه برای حل این سؤال، می‌توان از عددگذاری هم استفاده کرد و روند هر کدام از توابع را تشخیص داد، ولی با توجه به نکتهٔ فوق، تنها مجموعهٔ مربوط به گزینهٔ ۲ می‌تواند متناهی باشد.

جبر مجموعه‌ها (قسمت اول)

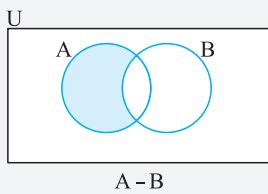
درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها



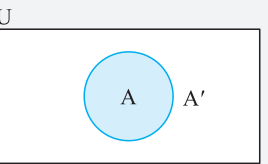
**اجتماع مجموعه‌ها ( $\cup$ ):** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، اجتماع دو مجموعه یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام اعضای  $A$  و  $B$  باشد.



**اشتراک مجموعه‌ها ( $\cap$ ):** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، اشتراک دو مجموعه یعنی مجموعه‌ای که شامل تمام اعضای مشترک  $A$  و  $B$  باشد.



**تفاضل مجموعه‌ها:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند،  $A - B$  یعنی اعضایی که در  $A$  باشد ولی در  $B$  نباشد.



اگر مجموعهٔ مرجع را با نماد  $U$  و مجموعهٔ تهی را با نماد  $\emptyset$  نمایش دهیم، داریم:

- ۱)  $A \cup U = U$     ۲)  $A \cup A' = U$     ۳)  $A \cap A' = \emptyset$     ۴)  $A \cap U = A$

تعداد اعضای مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $A - B$  را به صورت  $n(A \cup B)$  و  $n(A - B)$  نمایش می‌دهیم و داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

گاهی در اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، ممکن است با بیش از دو مجموعه سروکار داشته باشیم که به صورت زیر آن‌ها را نمایش می‌دهیم:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

مثال

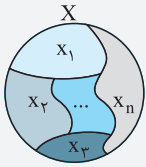
اگر  $A_n = [0, \frac{1}{n}]$  باشد، حاصل  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$  را به دست آورید.

$$(A_1 = [0, 1]) \cap (A_2 = [0, \frac{1}{2}]) \cap \dots \cap (A_n = [0, \frac{1}{n}]) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

توجه کنید که برای  $n$  های خیلی خیلی بزرگ ( $n \rightarrow +\infty$ )،  $[0, \frac{1}{n}] = \{0\}$  است.

پاسخ

**افراز یک مجموعه:** اگر  $X$  یک مجموعه ناتهی باشد و  $X_1, X_2, \dots, X_n$  زیرمجموعه‌های  $X$  باشند، می‌گوییم مجموعه  $X$  به  $n$  زیرمجموعه  $X_1, X_2, \dots, X_n$  افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:



$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq n; X_i \neq \emptyset \\ \forall i, j (i \neq j); X_i \cap X_j = \emptyset \\ X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = \bigcup_{i=1}^n X_i = X \end{aligned}$$

۱- همه زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند، یعنی:

۲- هر دو زیرمجموعه  $X$  مجزا باشند، یعنی:

۳- اجتماع همه زیرمجموعه‌ها برابر خود  $X$  باشد، یعنی:

**۵۷** اگر مجموعه مرجع به صورت  $U = \{\Delta x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$  فرض شود و  $A = \{x \in U \mid x > 2\}$  باشد، آن‌گاه  $A'$  چند عضو دارد؟

- گزینه «۳»  صفر  ۲  ۳  ۴  بی‌شمار

**پاسخ:** مجموعه‌ها را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

$$U = \{\Delta x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{3, 8, 13, 18, 23, \dots\}, \quad A = \{x \in U \mid x > 2\} = \{23, 28, \dots\} \Rightarrow A' = U - A = \{x \in U \mid x \leq 2\} = \{3, 8, 13, 18\}$$

بنابراین  $A'$  دارای ۴ عضو می‌باشد.

**۵۸** اجتماع دو مجموعه  $A = \{\{\emptyset\}, \{a\}, a\}$  و  $B = \{a, \emptyset\}$  چند عضو دارد؟

- گزینه «۱»  ۳  ۴  ۲  ۳  ۴

**پاسخ:** با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه، داریم:

$$\begin{aligned} A = \{\{\emptyset\}, \{a\}, a\} \\ B = \{a, \emptyset\} \Rightarrow A \cup B = \{a, \emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, a\} \Rightarrow n(A \cup B) = 3 \end{aligned}$$

**۵۹** کدام یک از گزینه‌های زیر یک افراز از مجموعه {فاطمه، حسین، حسن، علی} است؟

- گزینه «۱»  {فاطمه، حسن، حسین، علی}، {حسن، علی}  {فاطمه، حسین، حسن، علی}، {حسن، علی}  {فاطمه، حسین، حسن، علی}، {حسن، علی}  {فاطمه، حسین، حسن، علی}، {حسن، علی}

**پاسخ:** گزینه (۴) صحیح می‌باشد، حال سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): اشتراک دو زیرمجموعه تهی نیست. زیرا «حسن» در دو مجموعه مشترک است.

گزینه (۲): یکی از زیرمجموعه‌ها تهی است.

گزینه (۳): اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها با خود  $A$  برابر نیست. زیرا «حسین» در هیچ یک از زیرمجموعه‌ها نیامده است.

(ریاضی دافل ۹۴)

**۶۰** اگر  $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ،  $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$  و  $C = \{1, 2, 3\}$  باشند، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

- گزینه «۱»   $A - B = C$   ۲   $B - C = \emptyset$   ۳   $B - C = \{1, 2\}$   ۴   $A - B = \{C\}$

**پاسخ:** بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):  $A - B = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\} - \{1, 2, 3, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2, 3\}\} = \{C\} \neq C$  **گزینه (۲):**  $B - C = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\} - \{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}\} \neq \emptyset$

گزینه (۳):  $B - C = \{\{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$  **گزینه (۴):**  $A - B = \{C\}$  طبق گزینه (۱)

بنابراین تنها گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

**۶۱** اگر  $n(A \cap B) = 3$  باشد، آنگاه حاصل  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$  کدام است؟ (  $n(A)$  تعداد اعضای مجموعه  $A$  است.)

- گزینه «۱»  ۴  ۲  ۳  ۱

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

**پاسخ:** می‌دانیم که رابطه مقابل بین اعضای مجموعه‌ها برقرار است:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 2$$

بنابراین داریم:

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

**نکته** با توجه به تعریف فاکتوریل می‌دانیم که:

برای افراز یک مجموعه  $n$  عضوی به  $k$  زیرمجموعه داریم: (  $n(A)$  به معنای تعداد اعضای مجموعه  $A$  است.)  $n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k) = n$

$$\text{تعداد حالات افراز} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

**مالت اول:** تعداد عضوهای زیرمجموعه‌های  $A_1$  تا  $A_k$  دوه‌دو متمایز باشند:

« درس اول: مبانی احتمال

« درس دوم: احتمال غیر هم‌شانس

« درس سوم: احتمال شرطی

« درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

فصل دوم:

احتمال

درس اول: مبانی احتمال

مقایسه علم آمار و علم احتمال: علم احتمال دقیقاً نقطه مقابل علم آمار می‌باشد به طوری که در علم احتمال جامعه برای ما معلوم است و ما به دنبال به دست آوردن اطلاعاتی در مورد نمونه‌ای از آن هستیم ولی در علم آمار عکس این حالت رخ می‌دهد و ما با استفاده از نمونه به دست آمده می‌خواهیم در مورد کل جامعه تصمیم‌گیری کنیم.

**نکته** عبارت‌هایی همانند «چقدر امکان دارد»، «چقدر ممکن است» و ... یعنی «احتمال اینکه ...»، بنابراین مربوط به علم احتمال است.

مثال

کدام یک از عبارت‌های زیر مربوط به علم احتمال می‌باشد؟

- ۱- «در یک نمونه ۱ متر مکعبی از هوای تهران ۲٪ سرب وجود دارد. سرب موجود در هوای تهران چقدر است؟»
- ۲- «می‌دانیم هوای تهران ۲٪ سرب دارد. اگر یک متر مکعب از آن را برداریم، چقدر امکان دارد سرب داخل آن نباشد؟»

پاسخ

عبارت دوم، چون جامعه معلوم است و ما در پی یافتن اطلاعاتی در مورد نمونه‌ای از آن هستیم.

برای بیان مفهوم احتمال ابتدا چند تعریف زیر را مطرح می‌کنیم.

**آزمایش تصادفی:** در نظریه احتمال، هر پدیده‌ای که نتوان قبل از وقوع آن به طور قطع در مورد نتیجه آن نظر داد را آزمایش تصادفی می‌گوییم. فضای نمونه‌ای، به مجموعه تمام حالاتی که ممکن است در یک آزمایش تصادفی رخ دهد، فضای نمونه‌ای می‌گویند و آن را با نماد «S» نمایش می‌دهند.

**پیشامد:** هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد می‌گویند.

**اعمال جبری روی پیشامدها:** از آن جایی که پیشامد، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است و ما در فصل قبل به تفصیل در مورد اعمال جبری روی مجموعه‌ها  $(\cup, \cap, -)$  بحث کردیم، از تکرار مکررات پرهیز می‌کنیم. برآمد: به هر عضو از فضای نمونه‌ای، یک برآمد می‌گویند.

**پیشامد ساده:** پیشامدی که تک عضوی باشد را یک پیشامد ساده می‌گوییم (پیشامد یک برآمد).

دوستان عزیز! اگرچه در کتاب درسی صحبتی از ترکیبیات (آنالیز ترکیبی) نشده است ولی بیان خلاصه نکات آن برای حل مسائل احتمال، خالی از لطف نیست. (۱) اصل ضرب: اگر عملی به n طریق و بلافاصله عمل دیگری به m طریق صورت گیرد، تعداد کل حالات ممکن برای انجام توأم این دو عمل برابر با  $n \times m$  طریق است.

(۲) جایگشت: اگر بخواهیم n شیء متمایز را در یک ردیف قرار دهیم، تعداد کل حالات قرارگیری آن‌ها کنار هم n! می‌باشد ولی اگر همین n شیء متمایز را بخواهیم دور میز گرد قرار دهیم، تعداد حالات قرارگیری آن‌ها برابر  $(n-1)!$  است. (چرا؟)

دو تعریف خیلی مهم در بحث آنالیز ترکیبی وجود دارد که انتخاب r شیء از n شیء متمایز می‌باشد.  $(n \geq r)$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(۴) ترتیب: ترتیب انتخاب اشیاء مهم است.  $\Leftarrow$

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

(۳) ترکیب: ترتیب انتخاب اشیاء مهم نیست.  $\Leftarrow$

عبارت‌های «میزان سود یک شرکت در سال گذشته چقدر بوده است؟» و «چقدر تولید داشته باشیم که حداقل ۵۰٪ از بازار سهم ما باشد؟» به ترتیب مربوط به علوم ..... و ..... می‌باشند.

- ۱) آمار - آمار      ۲) آمار - احتمال      ۳) احتمال - آمار      ۴) احتمال - احتمال

**پاسخ:** در عبارت اول می‌خواهیم اطلاعاتی در مورد جامعه به دست آوریم، بنابراین مربوط به علم آمار است ولی در عبارت دوم چون می‌خواهیم در مورد نمونه‌ای از جامعه (سهم ما در بازار) بحث کنیم، مربوط به علم احتمال است.

کدام یک از گزینه‌های زیر مربوط به علم آمار می‌باشد؟

- ۱) یک نمونه ۱۰ تایی به تصادف از نمره دانش‌آموزان مدرسه باقرالعلوم در اختیار ما می‌باشد. چند درصد از کل دانش‌آموزان مدرسه باقرالعلوم نمره بالای ۱۸ دارند؟
- ۲) لیست نمرات دانش‌آموزان مدرسه باقرالعلوم در دست ماست. تعداد دانش‌آموزان با معدل بالاتر از ۱۸ در این مدرسه چقدر است؟

۳) لیست نمرات دانش‌آموزان مدرسه باقرالعلوم را داریم. سؤال اینجاست که تعداد دانش‌آموزان با معدل ۱۸ تا ۱۸/۵ بیشتر می‌باشند یا با معدل ۱۸/۵ تا ۲۰؟

۴) لیست نمرات دانش‌آموزان مدرسه باقرالعلوم را داریم. از بین دانش‌آموزان معدل ۱۸ بالا، چقدر امکان دارد که شخصی را انتخاب کنیم که معدل او از ۱۹ نیز بیشتر باشد؟

**پاسخ:** تنها در گزینه (۱) می‌خواهیم از نمونه به جامعه برسیم.

(ریاضی دافل ۹۶)

دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

- گزینه «۱»   $\frac{3}{8}$       گزینه «۲»   $\frac{5}{8}$       گزینه «۳»   $\frac{5}{12}$       گزینه «۴»   $\frac{7}{12}$

پاسخ: با تعریف پیشامدهای A و B به صورت مقابل داریم:

$$A \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{1}{4}$$

احتمال «رو» آمدن هر دو سکه

$$B \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

احتمال ۶ ظاهر شدن در پرتاب تاس

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{6+4-1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

و در نهایت:

صورت سوال  $P(A \cup B)$  را از ما می‌خواهد:

حال چون پرتاب تاس و دو سکه، مستقل از یکدیگر می‌باشند، داریم:

تیپ چهارم: مسائل روز تولد

اگر چهار دانش‌آموز یک کلاس بر روی یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آنان یکسان است؟

- گزینه «۱»   $\frac{19}{48}$       گزینه «۲»   $\frac{41}{96}$       گزینه «۳»   $\frac{55}{144}$       گزینه «۴»   $\frac{11}{12}$

پاسخ: با استفاده از رابطه محاسبه احتمال پیشامد متمم داریم:

$$P(\text{ماه تولد همه متفاوت باشد}) = 1 - P(\text{ماه تولد حداقل ۲ نفر یکسان باشد})$$

$$P(\text{ماه تولد حداقل ۲ نفر یکسان باشد}) = 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12 \times 12 \times 12 \times 12} = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

(ریاضی دافل ۸۳)

احتمال اینکه روز تولد ۳ نفر در روزهای مختلف هفته باشد، چقدر است؟

- گزینه «۱»   $\frac{24}{35}$       گزینه «۲»   $\frac{23}{35}$       گزینه «۳»   $\frac{30}{49}$       گزینه «۴»   $\frac{21}{49}$

پاسخ: با توجه به تعداد روزهای هفته برای فضای نمونه‌ای داریم:

برای حالت مطلوب (A)، چون روزها باید با یکدیگر متفاوت باشد، اولین نفر ۷ انتخاب، دومی ۶ انتخاب و سومی ۵ انتخاب دارد:

$$n(A) = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{30}{49}$$

تیپ پنجم: مسائل اصل شمول و عدم شمول

نکته

تعداد اعضای بخش پذیر بر k در مجموعه  $\{n, n+1, \dots, m\}$  ( $n, m \in \mathbb{N}, m > n, k > 0$ ) برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$$

از بین مجموعه اعداد متوالی  $\{0, 30, \dots, 52, 51\}$  عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۶ یا ۷ بخش پذیر است ولی

(ریاضی دافل ۹۵)

مضرب ۴۲ نیست؟

- گزینه «۱»   $0/24$       گزینه «۲»   $0/26$       گزینه «۳»   $0/28$       گزینه «۴»   $0/31$

پاسخ: اگر مضارب ۶ را به عنوان پیشامد A و مضارب ۷ را به عنوان پیشامد B قرار دهیم، داریم:

$$n(A) = \left\lfloor \frac{50}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{0}{6} \right\rfloor = 42$$

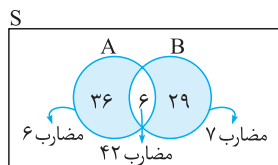
تعداد مضارب ۶

$$n(B) = \left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{0}{7} \right\rfloor = 35$$

تعداد مضارب ۷

$$n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{50}{42} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{0}{42} \right\rfloor = 6$$

تعداد مضارب ۴۲



از نمودار و متوجه می‌شویم که باید  $n(A \cap B)$  را از  $n(A)$  و  $n(B)$  کم کنیم:

$$P = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب مسئله}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{36 + 29}{250} = 0/26$$

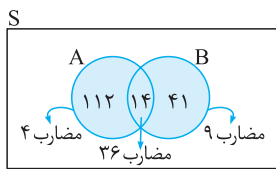
و در نهایت احتمال مورد نظر برابر است با:

از مجموعه اعداد  $\{0, 10, 100, \dots, 60, 600, 6000, \dots\}$  عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ است؟

- گزینه «۱»   $\frac{2}{9}$       گزینه «۲»   $\frac{1}{4}$       گزینه «۳»   $\frac{1}{3}$       گزینه «۴»   $\frac{13}{36}$

پاسخ: اگر مضارب ۴ را به عنوان پیشامد A و مضارب ۹ را به عنوان پیشامد B قرار دهیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد مضارب ۴: } n(A) &= \left[ \frac{600}{4} \right] - \left[ \frac{99}{4} \right] = 150 - 24 = 126 \\ \text{تعداد مضارب ۹: } n(B) &= \left[ \frac{600}{9} \right] - \left[ \frac{99}{9} \right] = 66 - 11 = 55 \\ \text{تعداد مضارب ۳۶: } n(A \cap B) &= \left[ \frac{600}{36} \right] - \left[ \frac{99}{36} \right] = 16 - 2 = 14 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$\text{تعداد مضارب ۹ یا ۴: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 126 + 55 - 14 = 167$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{167}{501} = \frac{1}{3}$$

و در نهایت اگر  $n(S)$  تعداد اعضای فضای نمونه‌ای باشد، داریم:

از مجموعه اعداد  $\{251, 252, \dots, 600\}$  یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۹ می‌باشد یا مضرب ۱۲ و ۱۵ است؟

(۴)  $\frac{6}{350}$

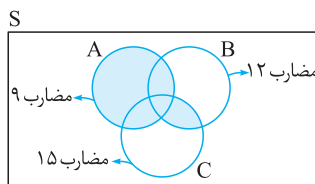
(۳)  $\frac{30}{350}$

(۲)  $\frac{39}{350}$

(۱)  $\frac{43}{350}$

پاسخ: اگر مضارب ۹، مضارب ۱۲ و مضارب ۱۵ را به ترتیب به عنوان پیشامدهای A، B و C در نظر بگیریم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد مضارب ۹: } n(A) &= \left[ \frac{600}{9} \right] - \left[ \frac{250}{9} \right] = 39 \\ \text{تعداد مضارب ۱۲: } n(B) &= \left[ \frac{600}{12} \right] - \left[ \frac{250}{12} \right] = 30 \\ \text{تعداد مضارب ۱۵: } n(C) &= \left[ \frac{600}{15} \right] - \left[ \frac{250}{15} \right] = 24 \\ \text{تعداد مضارب ۱۲ و ۱۵: } n(B \cap C) &= \left[ \frac{600}{60} \right] - \left[ \frac{250}{60} \right] = 6 \\ \text{تعداد مضارب ۹، ۱۲ و ۱۵: } n(A \cap B \cap C) &= \left[ \frac{600}{180} \right] - \left[ \frac{250}{180} \right] = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



با توجه به نمودار بالا متوجه می‌شویم که احتمال مطلوب،  $P(A \cup (B \cap C))$  می‌باشد، داریم:

$$n(A \cup (B \cap C)) = n(A) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 39 + 6 - 2 = 43$$

$$P(A \cup (B \cap C)) = \frac{n(A \cup (B \cap C))}{n(S)} = \frac{43}{350}$$

و در نهایت اگر  $n(S)$  تعداد اعضای فضای نمونه‌ای باشد، داریم:

تیپ ششم: مسائل شکست و پیروزی

نکته

اگر بخواهیم در n بازی به k پیروزی برسیم، داریم: (شانس برد و باخت یکسان و برابر  $\frac{1}{2}$  است.)

$$P(\text{پیروزی}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

(تقریبی دائل ۹۰)

در یک خانواده ۴ فرزندی، با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

(۴)  $\frac{3}{4}$

(۳)  $\frac{5}{8}$

(۲)  $\frac{9}{16}$

(۱)  $\frac{3}{8}$

پاسخ: با توجه به نکته فوق داریم:

$$P(\text{مطلوب سوال}) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} + \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

شخصی آنقدر سکه‌ای را پرتاب می‌کند تا «رو» بیاید. با کدام احتمال حداکثر در پرتاب چهارم نتیجه حاصل می‌شود؟

(۴)  $\frac{10}{16}$

(۳)  $\frac{8}{16}$

(۲)  $\frac{15}{16}$

(۱)  $\frac{1}{16}$

پاسخ: با کمک رابطه محاسبه احتمال پیشامد متمم داریم:  $P(\text{در چهار پرتاب «رو» نیاید}) = 1 - P(\text{حداکثر در چهارمین پرتاب «رو» بیاید})$

$$P(\text{مطلوب}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}}{2^4} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$



« درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها  
« درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز  
« درس سوم: معیارهای پراکندگی

فصل سوم:

## آمار توصیفی

درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها

**متغیر:** هر ویژگی از اشیا یا اشخاص که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را متغیر می‌گوییم و عددی که به آن ویژگی نسبت داده می‌شود را مقدار متغیر یا مشاهده می‌گوییم.

متغیرها به دو دسته کیفی و کمی دسته‌بندی می‌شوند:

**متغیرهای کمی:** متغیری است که مقادیر عددی به خود می‌گیرد. مثل وزن، قد و ...

**متغیر کیفی:** متغیری است که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا به کار می‌رود. مثل رنگ چشم دانش‌آموزان یک کلاس و ...

**انواع متغیرهای کمی:**

(۱) **متغیر کمی پیوسته:** به متغیری کمی گفته می‌شود که اگر دو مقدار  $a$  و  $b$  را بپذیرد، بتواند اعداد بین مقادیر  $a$  و  $b$  را نیز اختیار کند. مانند قد دانشجویان یک دانشگاه، معدل دانش‌آموزان یک کلاس و ...

(۲) **متغیر کمی گسسته:** به متغیری کمی که پیوسته نباشد، گسسته می‌گوییم. به عبارت دیگر، متغیرهایی که فقط قابل شمارش باشند را کمی گسسته می‌گوییم. مثل تعداد دانش‌آموزان یک کلاس، تعداد فرزندان و ...

**انواع متغیرهای کیفی:**

(۱) **متغیر کیفی ترتیبی:** متغیرهای کیفی که در آن‌ها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد. مثل مراحل تحصیل افراد، مراحل رشد انسان و ...

(۲) **متغیر کیفی اسمی:** به متغیری کیفی که ترتیبی نباشد، متغیر کیفی اسمی می‌گوییم. در این نوع متغیرها هیچ ترتیب طبیعی وجود ندارد. مثل رنگ چشم افراد، نوع بیماری و ...

دسته‌بندی متغیرها را می‌توان با نمودار روبه‌رو نشان داد:



**۱ کدام یک از گزینه‌های زیر متغیر نمی‌باشد؟**

گزینه «۳»  (۱) قد دانش‌آموزان کلاس سوم مدرسه ابوریحان

(۲) مراحل تحصیلی دانش‌آموزان

(۳) ماشین‌هایی که از کنار مدرسه ابوریحان عبور می‌کنند.

**پاسخ:** در گزینه (۳) در مورد هیچ ویژگی از این جامعه (ماشین‌های عبوری) صحبتی نشده است. به عنوان نمونه ممکن است نوع، تعداد، وزن یا هر ویژگی دیگری از ماشین‌های عبوری مورد نظر باشد. پس این عبارت، متغیر نمی‌باشد.

**۲ نوع کدام متغیر با سایرین متفاوت است؟**

گزینه «۴»  (۱) طول مکالمات تلفنی کارمندان یک اداره

(۲) میزان حقوق دریافتی مدیران یک شهر

(۳) تعداد مراجعه‌کنندگان به یک سوپرمارکت در طول روز

(۴) وضعیت تحصیلی کارمندان یک شرکت

**پاسخ:** هر سه گزینه اول، متغیر کمی می‌باشند ولی گزینه (۴)، متغیر کیفی است.

**۳ گروه خونی افراد، کدام نوع متغیر است؟**

گزینه «۱»  (۱) کیفی اسمی

(۲) کیفی ترتیبی

(۳) کمی پیوسته

(۴) کمی گسسته

**پاسخ:** گروه خونی قابل تفسیر با عدد نیست (قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد)، بنابراین یک متغیر کیفی می‌باشد و از طرفی ترتیبی در آن وجود ندارد، بنابراین کیفی اسمی است.

**۴ «نوع آلاینده‌گی هوا» و «میزان آلودگی هوا» به ترتیب چگونه متغیری می‌باشند؟**

گزینه «۳»  (۱) کمی پیوسته - کیفی اسمی

(۲) کمی گسسته - کیفی ترتیبی

(۳) کیفی اسمی - کمی پیوسته

(۴) کیفی ترتیبی - کمی گسسته

**پاسخ:** نوع آلاینده‌گی هوا قابل شمارش و اندازه‌گیری نبوده و ترتیبی نیز ندارد، بنابراین متغیری از نوع کیفی اسمی است. اما میزان آلودگی هوا قابل اندازه‌گیری بوده و هر عددی را می‌تواند اختیار کند، بنابراین متغیری از نوع کمی پیوسته است.

اگر در داده‌های آماری ۸، ۹، ۱۴، ۱۲، ۲a+b، ۴a-b، ۱۰، ۱۶، ۸، مد فقط ۱۲ باشد، حاصل a+۲b کدام است؟

- گزینه «۲»  
 ۱۰ (۱)     ۱۲ (۲)     ۱۴ (۳)     ۱۶ (۴)

پاسخ: چون در داده‌ها ۲ تا ۸ داریم، اگر بخواهیم فقط ۱۲ مد جامعه باشد، باید فراوانی آن حداقل ۳ باشد، داریم:

$$\begin{cases} 4a - b = 12 \\ 2a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + 2b = 4 + 2 \times 4 = 12$$

**نکته** می‌دانیم هر تغییری در داده‌ها ایجاد شود، همان تغییر نیز در میانگین ایجاد می‌شود. حال با توجه به این ویژگی و برای سرعت بخشیدن به محاسبات مربوط به میانگین، می‌توانیم ابتدا تمام داده‌ها را بر مقدار مشخصی تقسیم کنیم و یا از تمام داده‌ها مقدار مشخصی را کم کنیم و بعد از محاسبه میانگین داده‌های جدید، همان مقدار را در میانگین به دست آمده ضرب یا به میانگین به دست آمده اضافه کنیم.

(ریاضی دافل ۸۸)

در جدول فراوانی زیر، میانگین به صورت  $\bar{x} = 12 + 2\bar{a}$  محاسبه شده است.  $\bar{a}$  کدام است؟

x	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
f	۲	۵	۵	۹	۳

- گزینه «۱»  
 ۰/۲۵ (۱)     ۰/۳۶ (۲)     ۰/۴۵ (۳)     ۰/۵۴ (۴)

x جدید	-۲	-۱	۰	۱	۲
f	۲	۵	۵	۹	۳

پاسخ: کافی است برای سرعت بخشیدن به محاسبات، از تمام داده‌ها ۱۲ واحد کم کرده و سپس آن‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. با این کار، میانگین داده‌های جدید نیز برابر  $\bar{a}$  می‌شود. داریم:

$$\frac{\bar{x} - 12}{2} = \bar{a} = \frac{2(-2) + 5(-1) + 5(0) + 9(1) + 3(2)}{2 + 5 + 5 + 9 + 3} = \frac{-4 - 5 + 0 + 9 + 6}{24} = \frac{1}{4} = 0/25$$

(تجربی دافل ۹۰)

در جدول زیر، اگر میانگین داده‌ها برابر ۱۸/۴ باشد، آن‌گاه در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به (۲۱، ۲۵) چند درجه است؟

حدود دسته	۹-۱۳	۱۳-۱۷	۱۷-۲۱	۲۱-۲۵	۲۵-۲۹
فراوانی	۳	۴	۷	a	۱

- گزینه «۴»  
 ۶۰° (۱)     ۸۰° (۲)     ۸۰° (۳)     ۹۰° (۴)

مرکز دسته	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷
فراوانی	۳	۴	۷	a	۱

پاسخ: ابتدا مرکز دسته‌ها را تعیین می‌کنیم:

حال برای سرعت بخشیدن به محاسبات، از مرکز دسته‌ها ۱۹ واحد کم می‌کنیم. با این کار از میانگین نیز ۱۹ واحد کم می‌شود. داریم:

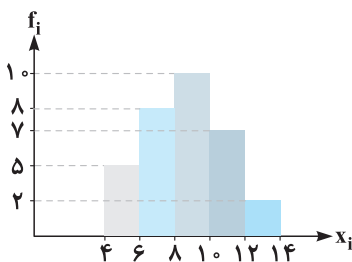
مرکز دسته	-۸	-۴	۰	۴	۸
فراوانی	۳	۴	۷	a	۱

میانگین داده‌های جدید برابر  $18/4 - 19 = -0/6$  است. داریم:

$$\bar{x} = \frac{3 \times (-8) + 4 \times (-4) + 7 \times (0) + a \times (4) + 1 \times (8)}{3 + 4 + 7 + a + 1} = -\frac{6}{10} \Rightarrow \frac{4a - 32}{15 + a} = -\frac{6}{10} \Rightarrow a = 5$$

حال با استفاده از رابطه  $\alpha = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$  داریم:  $\alpha = \frac{1}{15+5} \times 360^\circ = \frac{1}{20} \times 360^\circ = 18^\circ$

با توجه به نمودار مستطیلی مقابل، میانگین داده‌ها کدام است؟



- گزینه «۲»  
 ۸/۴۲ (۱)     ۸/۵۶ (۲)     ۸/۶۵ (۳)     ۸/۷۵ (۴)

پاسخ: ابتدا جدول فراوانی داده‌ها را رسم می‌کنیم:

حدود دسته	۴-۶	۶-۸	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
مرکز دسته	۵	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۵	۸	۱۰	۷	۲

حال برای کاهش حجم محاسبات، از مرکز دسته‌ها ۹ واحد کم می‌کنیم. با این کار از میانگین داده‌های اولیه نیز ۹ واحد کم می‌شود.

مرکز دسته جدید	-۴	-۲	۰	۲	۴
فراوانی	۵	۸	۱۰	۷	۲

حال داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{5 + (-4) + 8 \times (-2) + 10 \times 0 + 7 \times 2 + 2 \times 4}{5 + 8 + 10 + 7 + 2} = \frac{-14}{32}$$

$$\bar{x}_{\text{اولیه}} = \bar{x}_{\text{جدید}} + 9 = -\frac{14}{32} + 9 = 8.56$$

و در نهایت میانگین داده‌های اولیه برابر است با:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i - \bar{x}) = 0$$

انحراف داده  $x_i$  از میانگین، برابر  $x_i - \bar{x}$  است و همواره مجموع انحرافات داده‌ها از میانگین برابر صفر است. (چرا؟)

نکته

(تیمی قارچ ۸۵)

جدول زیر مقادیر انحراف از میانگین داده‌های آماری دسته‌بندی شده را مشخص می‌کند. فراوانی دسته ششم چقدر است؟

انحراف از میانگین	-۴	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
فراوانی	۵	۱۱	۹	۴	۸	x	۳

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

پاسخ: می‌دانیم که همواره مجموع انحرافات داده‌ها از میانگین برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^y f_i(x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow 5 \times (-4) + 11 \times (-2) + 9 \times (-1) + 4 \times 0 + 8 \times 1 + x \times 2 + 3 \times 3 = 0 \Rightarrow x = 17$$

در کارنامه علی معدل ۱۸/۷ ثبت شده است. با توجه به جدول نمرات زیر، نمره زبان او چقدر است؟

نام درس	فیزیک	شیمی	ریاضی	زبان	فارسی
ضریب درس	۳	۲	۳	۱	۱
نمره	۱۸	۱۹/۵	۱۸/۵	a	۲۰

۱۹/۵ (۱)

۲۰ (۲)

۱۸ (۳)

۱۸/۵ (۴)

پاسخ: نمره هر درس ( $x_i$ ) به تناسب ضریب آن ( $w_i$ ) در میانگین مؤثر است. بنابراین با توجه به رابطه میانگین موزون داده‌ها داریم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^5 w_i x_i}{\sum_{i=1}^5 w_i} = \frac{3 \times 18 + 2 \times 19.5 + 3 \times 18.5 + a + 20}{3 + 2 + 3 + 1 + 1} \Rightarrow 18.7 = \frac{168.5 + a}{10} \Rightarrow 187 = 168.5 + a \Rightarrow a = 18.5$$

سعی کنید این سؤال را به روش میانگین سریع نیز حل کنید.

اگر میانگین داده‌های  $x_1 - 1, x_2 - 2, \dots, x_n - n$  برابر  $\bar{x}$  باشد، میانگین داده‌های  $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$  کدام است؟

۲ $\bar{x}$  (۴)

$\bar{x} + \frac{n+1}{2}$  (۳)

$\bar{x} + \frac{n(n+1)}{2}$  (۲)

$\bar{x} + n + 1$  (۱)

پاسخ: با کمی دقت میانگین مربوط به داده‌های  $x_1 - 1, x_2 - 2, \dots, x_n - n$  را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 - 1 + x_2 - 2 + \dots + x_n - n}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (1 + 2 + \dots + n)}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - \frac{n(n+1)}{2}}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} - \frac{n+1}{2}$$

همچنین میانگین مربوط به داده‌های  $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$  را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{y} = \frac{x_1 + 1 + x_2 + 2 + \dots + x_n + n}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} + \frac{(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}_{\bar{x}} - \frac{n+1}{2} + (n+1) \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + n + 1$$

و در نهایت رابطه بین  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  برابر می‌شود با:

# ریاضیات گسسته

« درس اول: استدلال ریاضی

« درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح

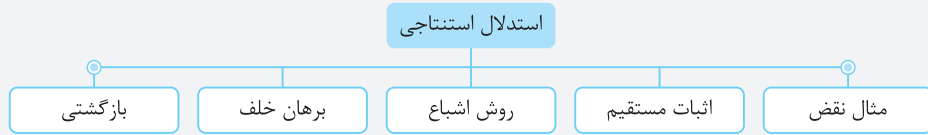
« درس سوم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

فصل اول:

## آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

استدلال استنتاجی: اگر برای اثبات درستی یک گزاره از حقایق استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع زیر است:



**تذکر** برای اثبات یک گزاره به روش اثبات مستقیم ابتدا باید گزاره داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. موارد زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضی کمک مهمی به شما می‌کند:

- |                                 |                                   |                                 |   |
|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---|
| ۱. عدد زوج $2k$                 | ۲. عدد فرد $2k+1$                 | ۳. دو عدد زوج $2k, 2k'$         | ۴. دو عدد فرد $2k+1, 2k'+1$                               |
| ۵. عدد مضرب ۳ $3k$              | ۶. دو عدد فرد متوالی $2k-1, 2k+1$ | ۷. دو عدد زوج متوالی $2k, 2k+2$ | ۸. عدد مربع کامل $k^2$                                    |
| ۹. عدد فرد مربع کامل $(2k+1)^2$ | ۱۰. سه عدد متوالی $k-1, k, k+1$   | ۱۱. وارون عدد $\frac{1}{a}$     | ۱۲. عدد گویا $\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ |

درستی کدام گزینه با استفاده از استدلال استنتاجی قابل استدلال نیست؟

۱. مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است.
۲. مربع هر عدد فرد به شکل  $8q+1$  است.
۳. مجموع هر سه عدد متوالی بر ۳ بخش پذیر است.
۴. مجموع ۲ عدد زوج متوالی مضرب ۴ است.

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):  $(2k+1) + (2k+3) = 4k+4 = 4(k+1)$  صحیح است.

گزینه (۲):  $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 8q + 1$  صحیح است.

گزینه (۳):  $k + (k+1) + (k+2) = 3k+3 = 3(k+1) = 3k'$  صحیح است.

گزینه (۴):  $(2k) + (2k+2) = 4k+2 \neq 4k'$  نادرست است.

روش‌های اثبات

۱. **حکم کلی:** اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند.

**تذکر** احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر هر، همه، تمام یا هیچ بیان می‌شوند.

۲. **مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

**تذکر** با ارائه مثال نقض نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد. بلکه فقط برای بیان نادرستی یک حکم، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۳. **روش اشباع:** گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همه حالت‌های ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را روش اشباع می‌نامند.

۴. **برهان خلف:** یک روش اثبات غیرمستقیم برای اثبات درستی احکام کلی است. برای استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم داده شده نادرست است، سپس نشان می‌دهیم که این فرض باطل، حقایق دانسته شده را نقض می‌کند. حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

۵. **بازگشتی:** گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها، مخصوصاً در مورد تساوی‌ها و نامساوی‌ها با فرض درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند وگرنه درستی اثبات، تأیید نمی‌شود.

درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض نمی‌توان رد کرد؟

۱. برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.
۲. مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۳. برای هر دو عدد طبیعی  $x$  و  $y$  همواره  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
۴. اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه  $4k+1$  مربع کامل است.

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): اگر  $n=4$  باشد،  $2^4 - 1 = 15$  می‌باشد که عددی مرکب است.

گزینه (۲): می‌دانیم  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  هر دو گنگ هستند، اما مجموع آن‌ها برابر صفر است که یک عدد گویا است.

گزینه (۳): اگر  $x=1$  و  $y=1$  باشد، آن‌گاه  $\sqrt{2} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$ .

گزینه (۴): این گزاره درست است و با مثال نقض رد نمی‌شود:

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k+1 = 4(n)(n+1)+1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

کدام گزاره برای تمام اعداد طبیعی درست است؟

- گزینه «۱»
- (۱) عبارت  $n^2 + 3n$  همواره مضرب ۴ است.
- (۲) عبارت  $n^2 + 3n + 5$  همواره فرد است.
- (۳) عبارت  $n^2 + n^2$  همواره مضرب ۳ است.
- (۴) عبارت  $n^2 + 3n$  به ازای هیچ مقداری از  $n$  مربع کامل نیست.

پاسخ:

گزینه (۱):  $n = 3 \Rightarrow n^2 + 3n = 9 + 9 = 18 \neq 4k$

گزینه (۲):  $n^2 + 3n + 5 = n(n+3) + 5 = 2k + 5 =$  فرد

۳ واحد اختلاف دارند بنابراین همواره یکی زوج و یکی فرد است

گزینه (۳):  $n = 1 \Rightarrow n^2 + n^2 = 2 \neq 3k$

گزینه (۴):  $n = 1 \Rightarrow n^2 + 3n = 4 =$  مربع کامل

درستی کدام گزاره را نمی‌توان به کمک برهان خلف، اثبات کرد؟

- گزینه «۱»
- (۱) بی‌شمار عدد اول وجود دارد.
- (۲)  $\sqrt{3}$  عددی گنگ است.

(۳) اگر دو عدد  $a$  و  $b$  گنگ باشند  $\sqrt{ab}$  نیز گنگ است.

(۴) حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

پاسخ: اگر  $a = \sqrt{2} - 1$  و  $b = \sqrt{2} + 1$  باشد، آن‌گاه  $\sqrt{ab}$  برابر است با:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Q}$$

بنابراین گزاره گزینه (۳) با مثال نقض رد شده و با برهان خلف قابل اثبات نیست.

در اثبات نامساوی  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$  به کمک اثبات بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی زیر خواهیم رسید؟

- گزینه «۱»
- (۱)  $(x - xz + y)^2 \geq 0$
- (۲)  $(x - yz)^2 + (yz - z)^2 \geq 0$
- (۳)  $(x + yz + z)^2 \geq 0$
- (۴)  $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$

پاسخ: طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0 \Rightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

### بخش‌پذیری

### درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تعریف: عدد صحیح  $a$  را بر عدد صحیح  $b \neq 0$  بخش‌پذیر می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند  $q$  یافت شود به طوری که:

$$a = bq$$

در این صورت می‌نویسیم  $b | a$  و می‌خوانیم  $b$  عاد می‌کند (می‌شمارد)  $a$  را. به‌عنوان مثال:

$$6 = 2 \times 3 \Rightarrow 2 | 6, 3 | 6$$

برای رابطه  $b | a$  چند تعبیر مختلف می‌توان به کار برد:

۱.  $b$  شمارنده یا مقسوم‌علیه (عامل)  $a$  است.

۲.  $a$  مضرب  $b$  است.

۳.  $a$  بر  $b$  بخش‌پذیر است.

کدام گزینه صحیح نیست؟

- گزینه «۱»
- (۱)  $7 | 35$
- (۲)  $24 | 6$
- (۳)  $4 | 12$
- (۴)  $8 | 24$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):  $35 = 7 \times 5 \Rightarrow 7 | 35$

گزینه (۲):  $24 = 4 \times 6 \Rightarrow 6 | 24 \Rightarrow 24 \neq 6k$

گزینه (۳):  $12 = 4 \times 3 \Rightarrow 4 | 12$

گزینه (۴):  $24 = 3 \times 8 \Rightarrow 8 | 24$

« درس اوّل: معرفی گراف  
« درس دوم: مدل‌سازی با گراف

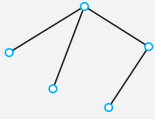
فصل دوم:

# گراف و مدل‌سازی



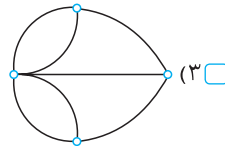
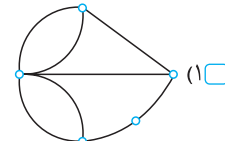
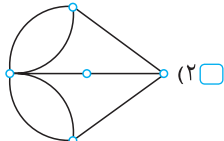
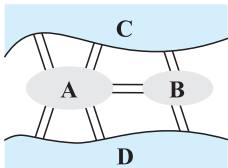
درس اول: معرفی گراف

**تعریف:** گراف در واقع مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها است به طوری که این نقطه‌ها توسط پاره‌خط‌ها به هم وصل شده‌اند. نقاط را **رأس‌های گراف** و خطوط را **یال‌های گراف** می‌نامند. به‌عنوان مثال، گراف مقابل دارای ۵ رأس و ۴ یال است:



**تذکر:** اگر ساده شده یک نقشه را با استفاده از نقاط و خطوط رسم کنیم، از مدل‌سازی مسئله توسط گراف استفاده کرده‌ایم.

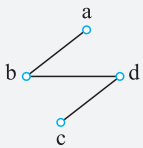
۱ کدام یک از گراف‌های زیر، مدل‌سازی مناسبی برای نقشه مقابل است؟



**پاسخ:** چون در نقشه داده شده چهار ناحیه A، B، C و D دیده می‌شود، بنابراین گراف دارای ۴ رأس است و چون ۷ پل وجود دارد، گراف دارای ۷ یال خواهد بود و برای رسم گراف کافی است ناحیه‌ها را با نقطه نمایش دهیم و به جای هر پل، یال متناظر با آن را بین نقاط (ناحیه‌ها) رسم کنیم.

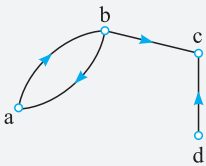
مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف

اگر  $G$  یک گراف باشد، مجموعه رأس‌های گراف  $G$  را با  $V(G)$  و تعداد رأس‌ها را با  $|V(G)|$  یا  $n(V(G))$  مشخص می‌کنند. همچنین مجموعه یال‌های گراف را با  $E(G)$  و تعداد یال‌ها را با  $|E(G)|$  یا  $n(E(G))$  نشان می‌دهند.

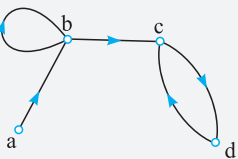


$$\Rightarrow \begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d\} \Rightarrow |V(G)| = 4 \\ E(G) = \{ab, bd, cd\} \Rightarrow |E(G)| = 3 \end{cases}$$

۱ اگر یال‌های گراف جهت‌دار باشند، باید یال‌ها را به صورت زوج مرتب نشان دهیم.



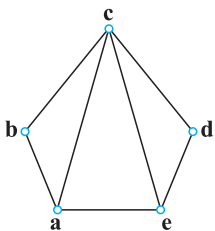
$$\Rightarrow \begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d\} \\ E(G) = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, c)\} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d\} \\ E(G) = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, d), (d, c)\} \end{cases}$$

۲ در بعضی از گراف‌ها، یالی وجود دارد که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. این یال را **طوقه** می‌نامند.

۲ اگر نمودار گراف  $G$  به صورت مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟



۱   $|E(G)| = 7$  ,  $|V(G)| = 5$

۲   $|E(G)| = 8$  ,  $|V(G)| = 5$

۳   $|E(G)| = 5$  ,  $|V(G)| = 7$

۴   $|E(G)| = 12$  ,  $|V(G)| = 6$

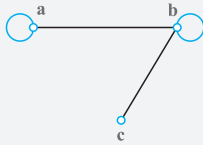
**پاسخ:** گراف دارای ۵ رأس است، بنابراین  $n(V(G)) = 5$  و همچنین گراف دارای ۷ یال است، بنابراین  $n(E(G)) = 7$ ، به عبارت دیگر:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow |V(G)| = 5$$

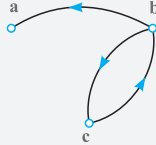
$$E(G) = \{ab, bc, cd, de, ea, ca, ce\} \Rightarrow |E(G)| = 7$$

**تعریف:** به گرافی که در شکل آن، یال جهت‌دار (a → b)، یال موازی (a ↔ b) و طوقه (a) وجود نداشته باشد، گراف ساده می‌گویند.

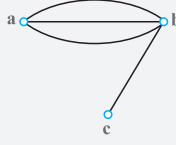
**تذکر:** گراف‌ها به چهار دسته کلی گراف جهت‌دار، گراف طوقه‌دار، گراف چندگانه و گراف ساده تقسیم‌بندی می‌شوند:



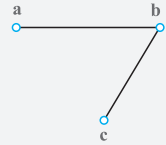
گراف طوقه‌دار



گراف جهت‌دار

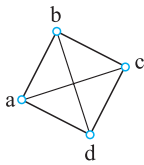


گراف چندگانه

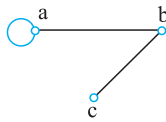


گراف ساده

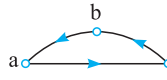
کدام یک از گراف‌های زیر، یک گراف ساده است؟



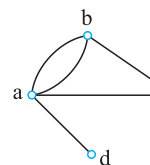
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

**پاسخ: بررسی گزینه‌ها:**

گزینه (۱): بین دو رأس a و b یال‌های موازی وجود دارد؛ بنابراین گراف ساده نیست.

گزینه (۲): یال‌های گراف جهت‌دار هستند؛ بنابراین گراف ساده نیست.

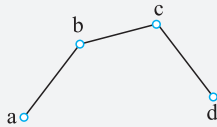
گزینه (۳): رأس a دارای طوقه است؛ بنابراین گراف طوقه‌دار است و ساده نیست.

گزینه (۴): گراف ساده است، چون بین هر دو رأس متمایز حداکثر یک یال وجود دارد و گراف، طوقه و یال جهت‌دار ندارد.

مرتبه و اندازه گراف

**مرتبه:** تعداد رأس‌های گراف G یعنی  $|V(G)|$  را مرتبه گراف G می‌گوییم و با  $p(G)$  نمایش می‌دهیم.

**اندازه:** تعداد یال‌های گراف G یعنی  $|E(G)|$  را اندازه گراف G می‌گوییم و با  $q(G)$  نمایش می‌دهیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} V(G) = \{a, b, c, d\} \Rightarrow p(G) = |V(G)| = 4 \\ E(G) = \{ab, bc, cd\} \Rightarrow q(G) = |E(G)| = 3 \end{cases}$$

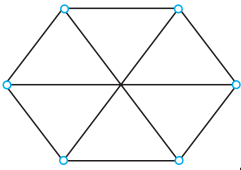
در گراف شکل مقابل اگر مرتبه را با  $p(G)$  و اندازه را با  $q(G)$  نشان دهیم، حاصل  $q(G) - p(G)$  کدام است؟

(۲) ۳

(۱) -۳

(۴) ۶

(۳) -۶



**پاسخ:** در این گراف ۶ رأس وجود دارد؛ بنابراین  $p(G) = 6$  و همچنین تعداد یال‌ها برابر ۹ است؛ در نتیجه  $q(G) = 9$ ، پس داریم:

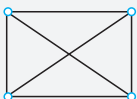
$$q(G) - p(G) = 9 - 6 = 3$$

رابطه p و q

اگر مرتبه یک گراف ساده p و اندازه آن q باشد، آنگاه رابطه روبه‌رو بین p و q برقرار است.

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

به‌عنوان مثال، یک گراف با ۴ رأس، حداکثر  $\frac{4 \times 3}{2} = 6$  یال را می‌تواند در خود جای دهد:



« درس اوّل: مباحثی در ترکیبیّات  
« درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

فصل سوم:  
ترکیبیّات  
(شمارش)

درس اول: مباحثی در ترکیبیات

اگر بخواهیم  $n$  نفر را در  $k$  جایگاه متمایز قرار دهیم به طوری که تعداد افراد قرار گرفته در جایگاه‌ها مشخص باشد، با استفاده از انتخاب ترکیب ابتدا تعداد افراد یکی از جایگاه‌ها را از میان کل افراد موجود انتخاب می‌کنیم، سپس تعداد افراد جایگاه بعدی را از میان باقی‌مانده افراد انتخاب می‌کنیم و همین منوال را ادامه می‌دهیم.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در اتاق‌های ۲ نفره، ۳ نفره و ۳ نفره جای داد؟

پاسخ

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \frac{8!}{2! \times 6!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{3!}{0! \times 3!} = \frac{8!}{2! \times 3! \times 3!} = 560$$

نکته

هر یک از اتاق‌های یک هتل (یا هر ساختمان دیگری در جهان!) در یک مختصات جغرافیایی منحصر به فرد قرار گرفته و به یقین، متفاوت از دیگری محسوب می‌شود.

به چند طریق می‌توان ۶ مهره متمایز را در ۳ ظرف متمایز قرار داد، به طوری که در هر ظرف، ۲ مهره قرار گیرد؟

۹۰ (۴)

۸۴ (۳)

۷۵ (۲)

۶۰ (۱)

پاسخ

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{2!}{0! \times 2!} = \frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

به چند طریق می‌توان ۸ جایزه متمایز را بین ۴ دانش‌آموز توزیع کرد، به طوری که به هر کدام دقیقاً دو جایزه برسد؟

۱۰۲۴ (۴)

۲۱۱۴ (۳)

۲۵۲۰ (۲)

۲۶۸۰ (۱)

پاسخ

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{2!}{0! \times 2!} = 2520$$

تیم‌بندی

وقتی صحبت از تیم‌های بدون نام می‌شود، صرفاً مسئله تقسیم‌بندی مطرح است؛ بدون آن که این افراد را بخواهیم در جایگاه مشخصی [همانند اتاق‌های یک هتل] قرار دهیم. بنابراین اگر تعداد اعضای دو یا چند تیم شبیه هم باشد، باید پس از انتخاب، جواب را بر جایگشت تعداد تیم‌های با اعضای یکسان تقسیم کرد.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به سه تیم ۲ نفره، ۳ نفره و ۳ نفره تقسیم کرد؟

پاسخ

ابتدا ۲ نفر از ۸ نفر را برای یک تیم انتخاب می‌کنیم، پس ۳ نفر بعدی را از ۶ نفر باقی‌مانده انتخاب کرده و ۳ نفر آخر را نیز برای تیم آخر انتخاب می‌کنیم. حال چون ۲ تیم ۳ نفره داریم، باید جواب را بر ۲! تقسیم کنیم:

$$\frac{\binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3}}{2!} = \frac{28 \times 20 \times 1}{2} = 280$$

تذکر

افراز کردن یک مجموعه، در واقع قرار دادن اشیای متمایز در جایگاه‌های یکسان است.

به چند طریق می‌توان ۶ نفر از کارمندان یک اداره را به ۳ گروه دو نفره تقسیم کرد؟

۱۱۵ (۴)

۹۰ (۳)

۷۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ

چون صرفاً مسئله تقسیم‌بندی مطرح است، داریم:

$$\frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{3!} = \frac{15 \times 6 \times 1}{6} = 15$$

۳

به چند طریق می‌توان یک مجموعه پنج عضوی را به ۳ زیرمجموعه افزایش کرد؟

گزینه «۳»

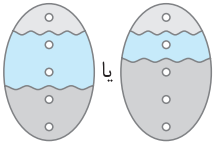
پاسخ:

۴۰ (۴)

۲۵ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)



$$\Rightarrow \text{تعداد افزایشها} = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} + \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{3}}{2!} = 15 + 10 = 25$$

۵

به چند طریق می‌توان یک مجموعه ۶ عضوی را به ۲ زیرمجموعه افزایش کرد؟

گزینه «۴»

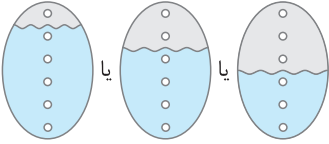
پاسخ:

۳۱ (۴)

۲۵ (۳)

۲۱ (۲)

۱۵ (۱)



$$\Rightarrow \text{تعداد افزایشها} = \binom{6}{1}\binom{5}{5} + \binom{6}{2}\binom{4}{4} + \frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!} = 6 + 15 + 10 = 31$$

توزیع اشیاء مشابه در ظرف‌های متمایز

برای پیدا کردن تعداد راه‌های توزیع  $n$  شیء کاملاً مشابه در  $k$  ظرف متمایز [یا ساختن یک دسته گل شامل  $n$  شاخه از  $k$  نوع گل متفاوت] باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

توجه

منظور از اعداد صحیح و نامنفی، اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

مثال آموزشی

به چند طریق می‌توان ۴ مهره مشابه را در ۳ ظرف خالی قرار داد؟

پاسخ:

فرض می‌کنیم  $x_1$  مهره در ظرف اول،  $x_2$  مهره در ظرف دوم و  $x_3$  مهره در ظرف سوم قرار گیرد. حال چون جمع این مهره‌ها باید ۴ باشد، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

تذکر

در سؤالات قرار دادن اشیاء در جایگاه‌های متفاوت، اگر اشیاء مشابه باشند، برای حل سؤال از معادلات استفاده می‌کنیم. توجه کنید که میوه‌ها [سیب، پرتقال و ...] و همچنین حیوانات [کبوتر، گنجشک و ...] و مواردی نظیر آن‌ها را مشابه در نظر می‌گیریم؛ اما انسان‌ها را همواره متمایز فرض می‌کنیم.

۶

به چند طریق می‌توان ۵ پرتقال را در ۳ سبد قرار داد؟

گزینه «۱»

پاسخ:

۴۲ (۴)

۳۵ (۳)

۲۴ (۲)

۲۱ (۱)

فرض می‌کنیم  $x_1$  پرتقال در سبد اول،  $x_2$  پرتقال در سبد دوم و  $x_3$  پرتقال در سبد سوم قرار گیرد. حال چون جمع این پرتقال‌ها باید ۵ شود، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{5+2}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

۷

به چند طریق می‌توان ۸ مهره کاملاً مشابه را در ۴ ظرف متمایز قرار داد؟

گزینه «۴»

پاسخ:

۱۶۵ (۴)

۹۴ (۳)

۷۲ (۲)

۵۶ (۱)

فرض می‌کنیم  $x_1$  مهره در ظرف اول،  $x_2$  مهره در ظرف دوم،  $x_3$  مهره در ظرف سوم و  $x_4$  مهره در ظرف چهارم قرار گیرد. حال چون جمع این مهره‌ها باید ۸ باشد، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{8+3}{3} = \binom{11}{3} = 165$$

۸

به چند طریق می‌توان از میان ۳ نوع گل متمایز، یک دسته گل شامل ۷ شاخه درست کرد؟ (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است.)

گزینه «۳»

پاسخ:

۴۵ (۴)

۳۶ (۳)

۲۸ (۲)

۲۱ (۱)

فرض می‌کنیم  $x_1$  شاخه از گل نوع اول،  $x_2$  شاخه از گل نوع دوم و  $x_3$  شاخه از گل نوع سوم انتخاب شده باشد. در این صورت داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{7+2}{2} = \binom{9}{2} = 36$$

۱. اگر  $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$  و  $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$  باشند، تعداد زیرمجموعه‌های  $A \cap B'$ ، کدام است؟  
 ۴ (۱)  ۸ (۲)  ۱۶ (۳)  ۳۲ (۴)

۲. در دو جعبه به ترتیب ۲ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب است؟  
 ۵/۲۴ (۱)  ۱۱/۴۸ (۲)  ۱۳/۴۸ (۳)  ۷/۲۴ (۴)

۳. در دو پیشامد مستقل  $A$  و  $B$ ، اگر  $P(A \cap B) = 0/6$  و  $P(A \cap B') = 0/2$ ، آن‌گاه  $P(A \cup B')$ ، کدام است؟  
 ۰/۷ (۱)  ۰/۷۵ (۲)  ۰/۸۵ (۳)  ۰/۹ (۴)

۴. نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات، کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

۱۴/۲ (۱)  ۱۴/۲۵ (۲)  ۱۴/۴ (۳)  ۱۴/۷۵ (۴)

۵. نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است، مقدار  $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$  کدام است؟

۱۲/۷، ۳۰/۲، ۱۰/۶، ۱۱/۹، ۱۰/۶، ۱۲/۳، ۱۱/۲، ۱۳/۵، ۱۲/۸، ۱۱/۵

۰/۲۲۵ (۱)  ۰/۱۲۵ (۲)  ۰/۱۷۵ (۳)  ۰/۲۷۵ (۴)

۶. اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۶۶، کدام است؟  
 ۲۹ (۱)  ۳۲ (۲)  ۴۰ (۳)  ۴۱ (۴)

۷. به ازای بعضی از مقادیر  $n \in \mathbb{N}$ ، اگر  $\alpha | 13n + 3$  و  $\alpha | 7n + 4$  و  $\alpha \neq 1$  باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد  $n$ ، کدام است؟  
 ۷ (۱)  ۸ (۲)  ۹ (۳)  ۱۰ (۴)

۸. قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا خریداری کرد؟

۱۰ (۱)  ۱۱ (۲)  ۱۲ (۳)  ۱۳ (۴)

۹. اگر عدد  $7^{13} + a$  بر ۲۳ بخش پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی  $a$ ، کدام است؟

۲ (۱)  ۳ (۲)  ۴ (۳)  ۵ (۴)

۱۰. یک گراف ساده ۶ رأسی ۴-منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۹ (۱)  ۱۰ (۲)  ۱۲ (۳)  ۱۵ (۴)

۱۱. به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۶۰ (۱)  ۱۸۰ (۲)  ۲۱۰ (۳)  ۲۲۰ (۴)

۱۲. تعداد توابع پوша از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، کدام است؟

۳۶۰ (۱)  ۴۵۰ (۲)  ۴۸۰ (۳)  ۵۴۰ (۴)

۱۳. از مجموعه اعداد  $\{1, 2, \dots, 65, 68, 71\}$  که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیرمجموعه حداقل چند عضو انتخاب شود تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آن‌ها ۸۲ باشد؟

۱۱ (۱)  ۱۲ (۲)  ۱۳ (۳)  ۱۴ (۴)

۱۴. گزاره  $(p \Rightarrow q) \sim$ ، با کدام گزاره زیر، هم‌ارزش است؟

$\sim p \vee q$  (۱)   $p \vee \sim q$  (۲)   $\sim p \wedge q$  (۳)   $p \wedge \sim q$  (۴)

پاسخنامهٔ آزمون جامع (۱)

با استفاده از قضیهٔ ترکیب خطی داریم:

$$\begin{aligned} a \mid b+c &\Rightarrow a \mid 2(b+c) - 2c \Rightarrow a \mid 2b \\ a \mid 2c &\end{aligned}$$

۲ می‌دانیم  $55 = 5 \times 11$  است، پس عدد  $\overline{a52b}$  هم مضرب ۵ بوده و هم مضرب ۱۱. حال چون این عدد مضرب ۵ است، پس  $b$  باید یا صفر باشد یا ۵. از آن جایی که عدد  $\overline{a52b}$  فرد است، پس  $b = 5$  می‌باشد و داریم:

$$\overline{a525} \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 5 - 2 + 5 - a \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a \equiv 8 \pmod{5} \Rightarrow a = 8 \Rightarrow \overline{8855} \equiv 8 + 8 + 5 + 5 \equiv 8 \pmod{11}$$

۳ عدد سه‌رقمی مورد نظر را  $a$  می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{5} \\ a \equiv 3 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 2 \pmod{5} \\ a \equiv -3 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow a \equiv 117 \pmod{5} \\ \Rightarrow a \equiv 117 \pmod{11} \Rightarrow a = 210k + 117 \xrightarrow{\text{عدد سه‌رقمی}} k = 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \text{مقدار } 5$$

بنابراین ۵ عدد سه‌رقمی برای  $a$  وجود دارد.

۴ عدد ۱۱۱۰ نه بر ۱۲ بخش پذیر است و نه بر ۲۵ و حدس زدن جواب هم به سادگی مقدور نیست. بنابراین یکی از جواب‌های  $x$  را با کمک معادلهٔ هم‌نهشتی به دست می‌آوریم:

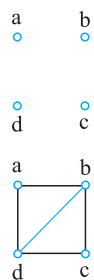
$$25x + 12y \equiv 1110 \pmod{1110} \Rightarrow x \equiv 12 \pmod{1110} \Rightarrow x \equiv 12 \pmod{1110} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{1110}$$

به جای  $x$  در معادله ۶ می‌گذاریم و  $y$  را پیدا می‌کنیم:

$$25(6) + 12y = 1110 \Rightarrow 12y = 960 \Rightarrow y = 80$$

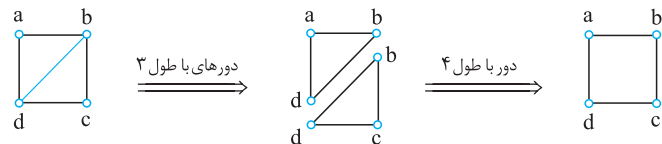
$$\begin{cases} x = 6 + 12k > 0 \\ y = 80 - 25k > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{80}{25} = \frac{16}{5} = 3.2 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{جواب طبیعی } 4$$

۵ ابتدا گراف  $G$  را رسم می‌کنیم. برای این منظور ۴ نقطه به صورت مقابل به عنوان رأس‌های  $a, b, c, d$  در نظر می‌گیریم. حال:



- (۱) چون  $N_G(a) = \{b, d\}$  است، رأس  $a$  را به رأس‌های  $b$  و  $d$  وصل می‌کنیم.
  - (۲) چون  $N_G(b) = \{a, c, d\}$  است، رأس  $b$  را به رأس‌های  $a, c, d$  وصل می‌کنیم.
  - (۳) چون  $N_G(c) = \{b, d\}$  است، رأس  $c$  را به رأس‌های  $b$  و  $d$  وصل می‌کنیم.
- بنابراین شکل گراف  $G$  به صورت مقابل است:

این گراف می‌تواند دورهایی با طول ۳ و ۴ داشته باشد که به صورت زیر هستند:



بنابراین گراف  $G$  مجموعاً دارای ۳ دور است.

۶ عدد احاطه‌گری هریک از گراف‌های داده شده را به دست می‌آوریم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): عدد احاطه‌گری گراف  $C_5$  برابر  $2 = \lceil \frac{5}{3} \rceil$  است.

گزینه (۲): گراف ۵-منتظم مرتبه ۶ همان گراف  $K_6$  است که عدد احاطه‌گری آن برابر ۱ است.

گزینه (۳): عدد احاطه‌گری گراف  $P_6$  برابر  $2 = \lceil \frac{6}{3} \rceil$  است.

گزینه (۴): عدد احاطه‌گری گراف ۱-منتظم مرتبه ۶ برابر  $3 = \frac{6}{2}$  است:

