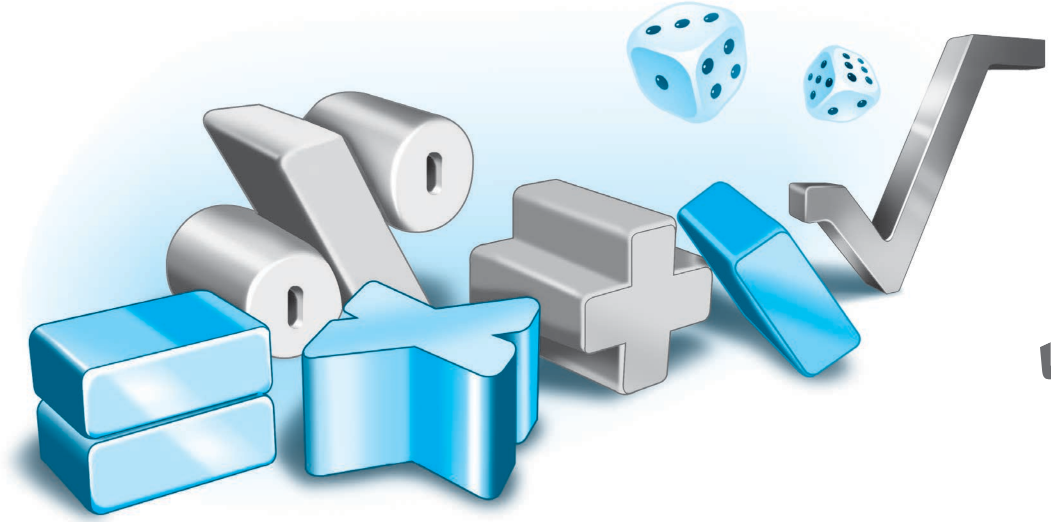
فهرست



فصل اول:

مجموعه‌ها

مجموعه

مجموعه: یکی از مفاهیم تعریف‌نشده در ریاضیات است که معمولاً آن را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم $(A,B,C,\cdots)$ و اعضای آن را داخل آکولاد می‌گذاریم. به‌عنوان مثال مجموعهٔ $A=\{۲,۶,۸\}$ ، سه عضو دارد و زیر مجموعه‌های آن به‌صورت زیر است:

$A_۱=\varnothing\ ,\ A_۲=\{۲\}\ ,\ A_۳=\{۶\}\ ,\ A_۴=\{۸\}\ ,\ A_۵=\{۲,۶\}\ ,\ A_۶=\{۲,۸\}\ ,\ A_۷=\{۶,۸\}\ ,\ A_۸=\{۲,۶,۸\}$

تذکر مجموعهٔ تهی را با دو نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم و می‌دانیم $\varnothing$ زیر مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

نکته تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی، ۲^n است.

مجموعه‌های مهم و پرکاربرد در ریاضیات به‌صورت زیر هستند:

۱) مجموعهٔ اعداد طبیعی $=\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\cdots\}$

۲) مجموعهٔ اعداد حسابی $=\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,\cdots\}$

۳) مجموعهٔ اعداد صحیح $=\mathbb{Z}=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\cdots\}$

۴) مجموعهٔ اعداد گویا $=\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\,|\,m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\}$ (هر عدد گویا از تقسیم دو عدد صحیح به‌دست می‌آید.)

۵) مجموعهٔ اعداد گنگ $=\mathbb{Q}'=$ مجموعهٔ همهٔ اعداد غیرگویا را گنگ می‌نامیم. (مثلاً $\sqrt{۲}\,,\,\sqrt{۳}\,,-\pi$ همگی اعدادی گنگ هستند.)

۶) مجموعهٔ اعداد حقیقی $=\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نکته همواره داریم: $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}\quad,\quad \mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

۱ کدام گزینه درست است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$　　۲) $\{\varnothing\}\in\varnothing$

۳) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$　　۴) $\{\{\varnothing\}\}\in\{\{\varnothing\},\varnothing\}$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $\{\varnothing\}$ عضو مجموعهٔ $\{\{\varnothing\}\}$ است نه $\varnothing$.

گزینهٔ (۲): مجموعهٔ $\varnothing$ هیچ عضوی ندارد، پس $\{\varnothing\}\notin\varnothing$.

گزینهٔ (۳): می‌دانیم $\varnothing$ زیر مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است، پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴): اعضای مجموعهٔ $\{\varnothing\,,\{\{\varnothing\}\}\,,\{\varnothing\}\}$ ، $\{\varnothing\}$ و $\varnothing$ هستند نه $\{\{\varnothing\}\}$.

۲ مجموعه‌های $A=\{۲\}$ ، $B=\{۳,۵,\{۲\}\}$ و $C=\{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}$ مفروض است، کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

گزینهٔ «۲»

۱) $A\in B$　　۲) $A\in C$　　۳) $B\in C$　　۴) $A\subseteq C$

پاسخ: تنها گزینهٔ نادرست، گزینه (۲) است، زیرا مجموعهٔ C تنها دو عضو دارد که $\{\{۲\},۳,۵\}$ و ۲ هستند و $A=\{۲\}$ عضو آن نیست، پس $A\notin C$.

۳ اگر $A\cup\{۱,۲,۴\}=\{۱,۲,۳,\dots,۸\}$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعهٔ A وجود دارد؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۱۶ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: اگر $B=\{۱,۲,۴\}$ و $C=\{۱,۲,۳,\dots,۸\}$ باشند، پس طبق فرض می‌توان نوشت $A\cup B=C$.
برای تعیین اعضای A باید توجه کنیم که همهٔ اعدادی که در C هستند و در B نیستند باید در A باشند؛ یعنی اعداد ۳,۵,۶,۷,۸ حتماً در مجموعهٔ A هستند، پس هر کدام از این اعضا تنها یک حالت دارند از طرفی هر یک از اعداد ۱,۲,۴ ممکن است در مجموعهٔ A باشند یا نباشند، یعنی برای هر کدام از این اعضا دو حالت داریم. پس در کل، تعداد حالت‌های موجود برای اعضای A برابر $۸=۲\times۲\times۲\times۱\times۱\times۱\times۱\times۱$ حالت است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها را از نظر تعداد اعضا به دو دستهٔ مقابل تقسیم می‌کنیم: ۱ متناهی ۲ نامتناهی

مجموعهٔ متناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن عددی حسابی باشد، مانند مجموعهٔ همهٔ انسان‌های روی کره‌زمین (با اینکه خیلی زیاد هستن ولی بالاخره متناهی هستند.)

مجموعهٔ نامتناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن از هر عددی بزرگ‌تر باشد، مانند مجموعهٔ اعداد طبیعی.

نکته اگر $A\subseteq B$ باشد ⇐
- A نامتناهی باشد ⇐ B نامتناهی است.
- B متناهی باشد ⇐ A متناهی است.
- A متناهی باشد ⇐ B متناهی یا نامتناهی است.
- B نامتناهی باشد ⇐ A متناهی یا نامتناهی است.

۴ اگر $A\subseteq B$، B نامتناهی و A ناتهی باشد، A کدام مجموعهٔ زیر نمی‌تواند باشد؟

گزینهٔ «۴»

۱) $\{x\mid x\in\mathbb{R}, |x|<۱\}$ ۲) $\{x\mid x\in\mathbb{Z}, |x|<۱\}$
۳) $\{x\mid x\in\mathbb{R}, |x|>-۱\}$ ۴) $\{x\mid x\in\mathbb{R}, |x|<-۱\}$

پاسخ: می‌دانیم $A\subseteq B$ و B نامتناهی است، یعنی A می‌تواند متناهی و یا نامتناهی باشد، پس مجموعه A هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد به‌جز تهی (طبق فرض تست)، تنها گزینه‌ای که معادل $\varnothing$ است گزینهٔ (۴) است، زیرا می‌دانیم قدرمطلق همواره بزرگ‌تر و مساوی صفر است، پس مجموعه $\{x\mid x\in\mathbb{R}, |x|<-۱\}$ هیچ عضوی ندارد.

تذکر در مورد گزینه (۳)، توجه کنید که این گزینه معادل $\mathbb{R}$ است، زیرا همواره $|x|>-۱$ می‌باشد، پس جواب‌های قابل قبول برای x، مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌شود.

۵ اگر مجموعه‌های $A=\{\frac{۱}{x}\mid x\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{\frac{x}{۸}\mid x\in\mathbb{N}\}$ مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $A-B$ ۲) $B-A$
۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

پاسخ: نمایش دو مجموعهٔ A و B با اعضا به‌صورت زیر است:

$$A=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۸},\dots\}\ ,\ B=\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۸},\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸},\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۸},۱,\frac{۹}{۸},\dots\}$$

همان‌طور که می‌بینید، اعضای مجموعهٔ A مدام کوچک می‌شوند ولی اعضای مجموعهٔ B مدام بزرگ می‌شوند، پس این دو مجموعه بی‌شمار عضو غیرمشترک دارند، پس تنها گزینه‌ای که متناهی است $A\cap B$ و نمایش آن به‌صورت $A\cap B=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸}\}$ می‌باشد.

۶ اگر A مجموعهٔ اعداد اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

گزینهٔ «۴»

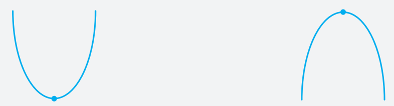
۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $B-A$ ۴) $A-B$

پاسخ: مجموعه‌های A و B به‌صورت مقابل‌اند: $A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,\dots\}\ ,\ B=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,\dots\}$

همان‌طور که می‌دانید A و B هر دو نامتناهی‌اند و همچنین همهٔ اعداد اول (به‌جز ۲)، اعدادی فرد هستند، پس در بین گزینه‌ها تنها مجموعهٔ متناهی، $A-B$ است که نمایش مجموعه‌ای آن به‌صورت $A-B=\{۲\}$ می‌باشد.

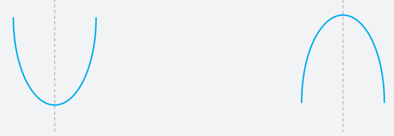
تابع درجه دوم

تابع درجه دوم: تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ که در آن $a\neq ۰$ باشد را تابع درجه دوم یا سهمی می‌نامیم و نمودارش با توجه به علامت a به یکی از دو صورت مقابل است:



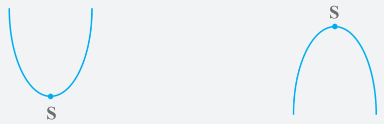
$a>۰$ (مینیمم دارد) $\qquad$ $a<۰$ (ماکزیمم دارد)

نکات ۱ محور تقارن سهمی، خط $x=\frac{-b}{۲a}$ است:



$x=-\frac{b}{۲a}$ $\qquad$ $x=-\frac{b}{۲a}$

۲ نقطهٔ رأس سهمی (S)، محل برخورد نمودار با محور تقارن است، پس طول رأس سهمی $x_S=\frac{-b}{۲a}$ می‌باشد و برای محاسبهٔ عرض رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$ را در f جایگذاری می‌کنیم، پس مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(\frac{-b}{۲a},f(\frac{-b}{۲a}))$ است.



تذکر ۱ $f(\frac{-b}{۲a})$ برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ است که همان عرض ماکزیمم و یا مینیمم سهمی است.

۲ برای رسم تقریبی سهمی، مختصات S را به‌دست آورده و با توجه به علامت a ، سهمی را رسم می‌کنیم.

مثـال آموزشی

معادلهٔ حرکت یک موشک نسبت به متغیر زمان از رابطهٔ $h(t)=-۲t^{۲}+۲۸t$ به‌دست می‌آید. ماکزیمم ارتفاع موشک و زمانی که موشک به زمین برخورد می‌کند را به‌دست آورید. (t بر حسب ثانیه و h برحسب متر است). *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

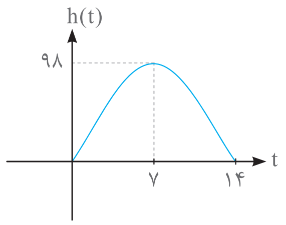
پاسخ بیشترین ارتفاع موشک وقتی رخ می دهد که $x_S=\frac{-b}{۲a}$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$x_S=\frac{-۲۸}{-۴}=۷\Rightarrow$ بیشترین ارتفاع موشک $=y_S=h(۷)=-۲(۷)^{۲}+۲۸(۷)=-۹۸+۱۹۶=۹۸$ متر

و همچنین زمانی موشک به زمین برخورد می‌کند که ارتفاع آن برابر صفر باشد؛ یعنی:

$$h(t)=۰\Rightarrow -۲t^{۲}+۲۸t=۰\Rightarrow ۲t(-t+۱۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۰\\t=۱۴\end{cases}$$

پس در ثانیهٔ ۱۴ موشک به زمین برخورد می‌کند:



نکته

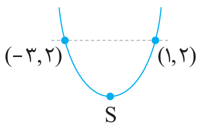
اگر دو نقطهٔ هم‌عرض مانند $A(x_A,\bigcirc)$ و $B(x_B,\bigcirc)$ از یک سهمی را داشته باشیم، معادلهٔ محور تقارن سهمی $x=\frac{x_A+x_B}{۲}$ است.

۱۷ اگر $(۱,۲)$ و $(-۳,۲)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، فاصلهٔ مبدأ مختصات از محل برخورد محور تقارن سهمی و خط $y=۲x-۱$ کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) $۲\sqrt{۲}$ $\qquad$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ $\qquad$ ۳) $\sqrt{۲}$ $\qquad$ ۴) $\sqrt{۶}$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



همان‌طور که می‌بینید چون دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۳,۲)$ عرض‌هایشان برابر است، پس نقطهٔ S وسط این دو نقطه است، بنابراین x_S میانگین طول‌های این دو نقطه است؛ یعنی $x_S=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$. پس معادلهٔ محور تقارن سهمی $x=-۱$ است که برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد آن با خط $y=۲x-۱$ داریم:

$$y=۲x-۱\xRightarrow{x=-۱}y=-۳\Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}=A(-۱,-۳)$$

پس فاصلهٔ A تا O برابر با $AO=\sqrt{(-۳-۰)^{۲}+(-۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۱۰}$ است.

۱۸ به‌ازای کدام مقدار a، نقطهٔ ماکزیمم تابع با ضابطهٔ $y = ax^۲ - ۲x + a$ بر روی خط $y = ۱$ قرار دارد؟

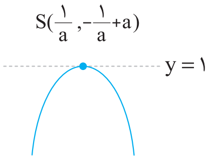
گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) -۱

پاسخ: نقطهٔ ماکزیمم تابع همان رأس سهمی است که طول و عرض آن به‌صورت زیر است:

$$x_S = \frac{۲}{۲a} = \frac{۱}{a} \; , \; y_S = f(\frac{۱}{a}) = a(\frac{۱}{a})^۲ - ۲(\frac{۱}{a}) + a = -\frac{۱}{a} + a$$

از طرفی مطابق شکل مقابل داریم:



$$-\frac{۱}{a} + a = ۱ \xrightarrow{\times a} -۱ + a^۲ = a \Rightarrow a^۲ - a - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۱)^۲ - ۴(۱)(-۱) = ۵ \Rightarrow a_۱ = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \; , \; a_۲ = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

و در نهایت توجه کنید که برای آنکه تابع ماکزیمم داشته باشد باید ضریب $x^۲$ یعنی a منفی باشد پس تنها $a = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول است.

۱۹ اگر نقطهٔ مینیمم تابع $f(x) = ۲x^۲ + mx + ۱$ روی نیمساز ربع اول و سوم قرار داشته باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

گزینهٔ «۲»

۱) $\{-۲,۴\}$ ۲) $\{-۲\}$ ۳) $\{-۴\}$ ۴) $\{-۳\}$

پاسخ: نقطهٔ مینیمم تابع همان رأس سهمی است که طول و عرض آن به‌صورت زیر است:

$$x_S = -\frac{m}{۲} , y_S = f(-\frac{m}{۲}) = ۲(-\frac{m}{۲})^۲ + m(-\frac{m}{۲}) + ۱ = \frac{m^۲}{۲} - \frac{m^۲}{۲} + ۱ = ۱$$

پس $S(-\frac{m}{۲}, ۱)$ رأس سهمی است و از آن‌جایی‌که این نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم است $(y = x)$ می‌توان نوشت:

$$-\frac{m}{۲} = ۱ \Rightarrow m = -۲$$

۲۰ نقطهٔ $S(۱,۲)$ رأس سهمی $y = ax^۲ + ۲bx + c$ است. اگر این سهمی از نقطهٔ $(-۱,۱)$ بگذرد، عرض نقطه به طول $x = ۲$ کدام است؟

گزینهٔ «۴»

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

پاسخ: نقطهٔ $S(۱,۲)$ رأس سهمی است پس درون سهمی صدق می‌کند، یعنی:

$$a + ۲b + c = ۲ \quad (۱)$$

می‌دانیم محور تقارن سهمی $x_S = ۱$ است و از طرفی به کمک ضابطهٔ سهمی داریم:

$$x_S = \frac{-۲b}{۲a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a} = ۱ \Rightarrow b = -a \quad (۲)$$

همچنین سهمی از نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌گذرد، پس می‌توان نوشت:

$$a - ۲b + c = ۱ \quad (۳)$$

به کمک سه معادلهٔ (۱)، (۲) و (۳)، a، b و c را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a + ۲b + c = ۲ \\ a - ۲b + c = ۱ \end{cases} \xRightarrow{\text{اولی منهای دومی}} ۴b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۴} \xRightarrow{b=-a} a = -\frac{۱}{۴}$$

با جایگذاری $a = -\frac{۱}{۴}$ و $b = \frac{۱}{۴}$ در یکی از معادلات داریم:

$$a + ۲b + c = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + c = ۲ \Rightarrow c = \frac{۷}{۴}$$

پس سهمی به‌صورت $y = -\frac{۱}{۴}x^۲ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۴}$ است که به‌ازای $x = ۲$ داریم:

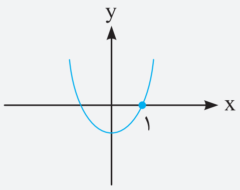
$$y(۲) = -\frac{۱}{۴}(۲)^۲ + \frac{۱}{۲}(۲) + \frac{۷}{۴} = -۱ + ۱ + \frac{۷}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

صفرهای تابع

صفرهای تابع: ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ را صفرهای تابع $f(x)$ می‌نامیم.

نکته اگر $x = \alpha$ یکی از صفرهای تابع $y = f(x)$ باشد، $x - \alpha$ را یک فاکتور یا عامل $f(x)$ می‌نامیم و برای به‌دست آوردن فاکتورهای دیگر، $f(x)$ را بر $x - \alpha$ تقسیم می‌کنیم.

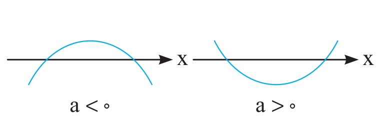
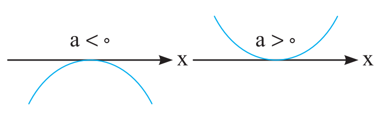
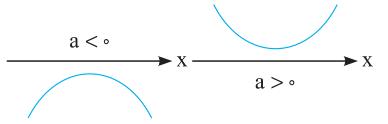
تعبیر هندسی ریشه: اگر α ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۰$ باشد، تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول α محور x ها را قطع می‌کند.



برای مثال $x = ۱$ ریشهٔ معادله $x^۲ - ۱ = ۰$ است و تابع $y = x^۲ - ۱$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند.

وضعیت تابع درجه دوم و محور x ها

جدول زیر وضعیت نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را نسبت به محور x ها نمایش می‌دهد:

توضیح	تابع محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند.	تابع بر محور x ها مماس است.	تابع محور x ها را قطع نمی‌کند.
نمودار			
شرایط	$\Delta > ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta < ۰$

به کمک جدول صفحهٔ قبل نکات زیر را نتیجه می‌گیریم:

نکات ۱) شرط آن‌که تابع درجه دوم همواره مثبت و یا همواره منفی باشد به صورت زیر است:

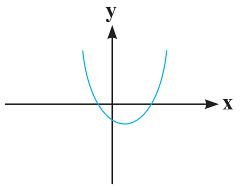
همواره منفی $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^۲+bx+c \\ a<۰\,,\,\Delta<۰ \end{cases}$ همواره مثبت $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^۲+bx+c \\ a>۰\,,\,\Delta<۰ \end{cases}$

۲) شرط آن‌که تابع درجه دوم از **همهٔ** ناحیه‌های مختصاتی عبور کند آن است که $P<۰$ باشد.

تذکر به کمک جدول صفحهٔ قبل و اطلاعاتمان از تابع درجه دوم، می‌توانیم برای نمودار هر تابع درجه دوم علامت a، b، c، P،S و Δ را به‌دست آوریم.

مثـال آموزشی

شکل مقابل نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ است. علامت a،b،c،Δ،S و P را تعیین کنید.



پاسخ سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $\Delta>۰$ است و همچنین دهانهٔ سهمی روبه بالا است، پس $a>۰$ می‌باشد. از طرفی یکی از ریشه‌های معادله منفی و دیگری مثبت است (از روی شکل واضح است که ریشهٔ مثبت از نظر قدرمطلق از ریشهٔ منفی بیشتر است.)، پس داریم:

$$P=\frac{c}{a}<۰ \xrightarrow{a>۰} c<۰\,,S=-\frac{b}{a}>۰ \xrightarrow{a>۰} -b>۰\Rightarrow b<۰$$

۲۱ **نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^۲-۳x-۱۰$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟** *(تجربی خارج ۹۳)*

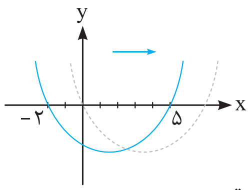
گزینهٔ «۳»

۱) ۱   ۲) ۱/۵   ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ: نقاط برخورد این تابع از معادلهٔ $x^۲-۳x-۱۰=۰$ به‌دست می‌آیند:

$$x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow(x+۲)(x-۵)=۰\Rightarrow x=-۲,x=۵$$

از طرفی ضریب $x^۲$ مثبت است، پس نمودار سهمی به‌صورت مقابل است:



حالا برای آنکه طول نقاط تلاقی نمودار با محور x ها غیرمنفی باشد (صفر به بعد باشد)، حداقل نمودار را باید دو واحد به راست ببریم.

۲۲ **به‌ازای چند مقدار m، نمودار $y=(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)$ مماس بر محور x ها است؟**

گزینهٔ «۲»

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

پاسخ: شرط آن‌که تابع $y=(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)$ بر محور x ها مماس باشد آن است که معادلهٔ $(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)=۰$ دو ریشهٔ برابر داشته باشد، پس می‌توان نوشت:

$$(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)=۰ \xrightarrow{ab=۰\Rightarrow a=۰ \text{ یا } b=۰} \begin{cases} ۳-\frac{x}{m}=۰\Rightarrow x=۳m \\ mx-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{m} \end{cases}$$

حال باید هردو x به‌دست آمده با هم برابر باشند، یعنی:

$$۳m=\frac{۱}{m}\Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس دو مقدار برای m وجود دارد که تابع $y=(۳-\frac{x}{m})(mx-۱)$ بر محور x ها مماس شود.

۲۳ **اگر عبارت $(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱$ به‌ازای هرمقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه متعلق است؟**

گزینهٔ «۳»

۱) $\{a:۱<a<۵\}$ ۲) $\{a:a<۱\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: شرط آن‌که یک عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ همواره منفی باشد آن است که $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} a-۱<۰\Rightarrow a<۱ \\ \Delta=(a-۱)^۲-۴(a-۱)<۰\Rightarrow(a-۱)((a-۱)-۴)<۰\Rightarrow(a-۱)(a-۵)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱<a<۵ \end{cases}$$

از اشتراک دو ناحیهٔ به‌دست آمده $a\in\varnothing$ است.

۲۴ به‌ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y=(۱-m)x^۲+x+m-۲$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

۱) $m<۱$ ‏ ۲) $m>۲$ ‏ ۳) $۱<m<۲$ ‏ ۴) $-۱<m<۲$

گزینهٔ «۳»

پاسخ: شرط آن‌که سهمی از چهار ناحیه عبور کند این است که $P=\frac{c}{a}<۰$ باشد: $\frac{m-۲}{۱-m}<۰ \xRightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱<m<۲$

از طرفی برای آن‌که سهمی دارای ماکزیمم باشد باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، یعنی $۱-m<۰$، پس $m>۱$ است. در نهایت از اشتراک دو مجموعه جواب به‌دست آمده $۱<m<۲$ است.

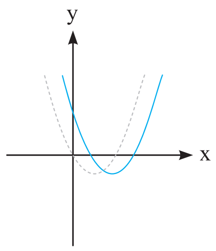
۲۵ به‌ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y=mx^۲+(m-۱)x$ فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات **نمی‌گذرد**؟

۱) $m<۱$ ‏ ۲) $۰<m<۱$ ‏ ۳) $m>۱$ ‏ ۴) $۱<m<۲$

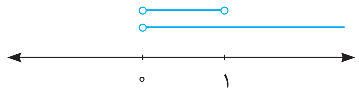
گزینهٔ «۲»

پاسخ: برای آن‌که سهمی فقط از ناحیهٔ سوم مختصات نگذرد، باید دارای مینیمم باشد، یعنی $m>۰$. حال با توجه به شکل رسم شده نتیجه می‌گیریم که $P\geq ۰$ ، $S>۰$ و $\Delta>۰$ باشند، داریم:

$$\begin{cases} x^۲\text{ضریب}>۰ \Rightarrow m>۰ \\ P\geq ۰ \Rightarrow \frac{۰}{m}\geq ۰ \Rightarrow ۰\geq ۰ \quad \checkmark \\ S>۰ \Rightarrow \frac{-m+۱}{m}>۰ \Rightarrow ۰<m<۱ \\ \Delta>۰ \Rightarrow (m-۱)^۲-۴(m)(۰)>۰ \Rightarrow (m-۱)^۲>۰ \Rightarrow m\in\mathbb{R} \end{cases}$$



حال از جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم، پس داریم: $\Rightarrow ۰<m<۱$



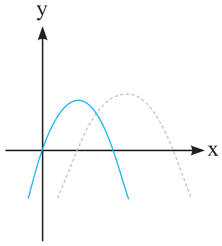
۲۶ به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a ،نمودار تابع $f(x)=(a-۳)x^۲+ax-۱$ فقط از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات **نمی‌گذرد**؟ *(ریاضی خارج ۹۲ با تغییر)*

۱) $a\leq ۲$ ‏ ۲) $۰<a\leq ۲$ ‏ ۳) $۲<a<۳$ ‏ ۴) $۰<a<۳$

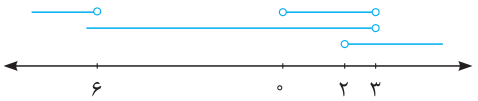
گزینهٔ «۳»

پاسخ: برای آن‌که نمودار $f(x)=(a-۳)x^۲+ax-۱$ فقط از ناحیهٔ دوم نگذرد، باید سهمی دارای ماکزیمم باشد و مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن مثبت باشد، داریم:

$$\begin{cases} x^۲\text{ضریب}<۰ \Rightarrow a-۳<۰ \Rightarrow a<۳ \\ S>۰ \Rightarrow \frac{-a}{a-۳}>۰ \Rightarrow ۰<a<۳ \\ P\geq ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a-۳}\geq ۰ \Rightarrow a-۳<۰ \Rightarrow a<۳ \\ \Delta>۰ \Rightarrow a^۲-۴(a-۳)(-۱)>۰ \Rightarrow a^۲+۴a-۱۲>۰ \\ \Rightarrow (a+۶)(a-۲)>۰ \Rightarrow a<-۶ \text{ یا } a>۲ \end{cases}$$

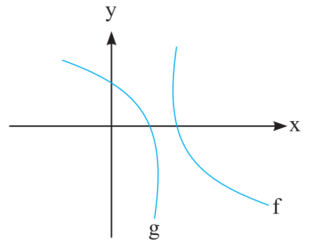
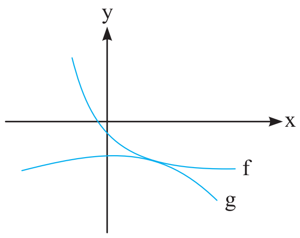
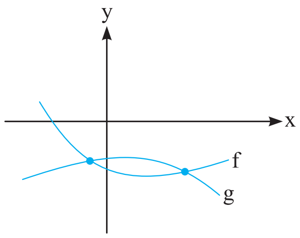


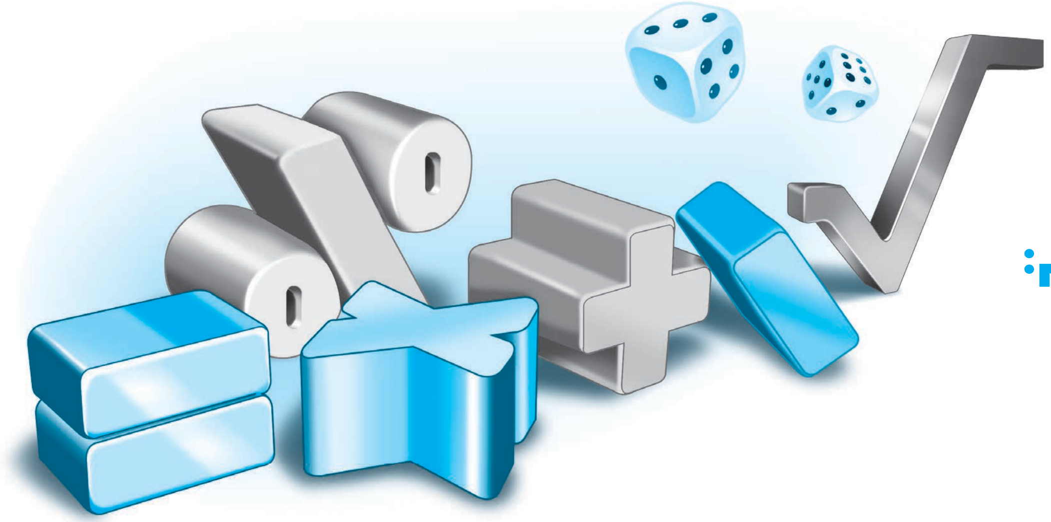
حال از جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم، پس داریم: $\Rightarrow ۲<a<۳$



وضعیت دو نمودار نسبت به‌هم

دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را داریم. فرض کنید می‌خواهیم بدانیم این دو تابع نسبت به یکدیگر چه وضعی دارند، بنابراین ابتدا معادلهٔ $f(x)=g(x)$ (معادلهٔ تقاطع) را تشکیل می‌دهیم و یک معادلهٔ درجه دوم می‌سازیم. سه حالت زیر رخ می‌دهد:

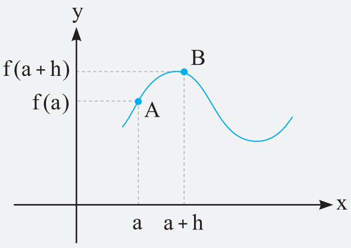
وضعیت	f و g همدیگر را قطع نکنند.	f و g بر هم مماس شوند.	f و g همدیگر را قطع کنند.
راهکار	در معادلهٔ تقاطع، $\Delta<۰$ است.	در معادلهٔ تقاطع $\Delta=۰$ است.	در معادلهٔ تقاطع $\Delta>۰$ است.
نمودار			

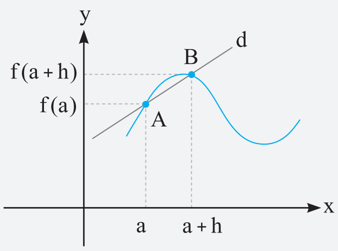


فصل یازدهم:
مشتـــق

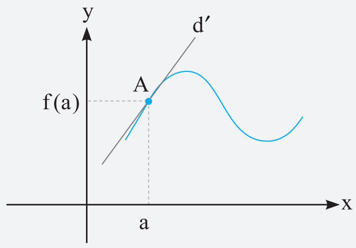
مشتق

مفهوم مشتق: تابع $y=f(x)$ و نقطهٔ $A(a,f(a))$ را روی آن در نظر بگیرید. از نقطهٔ a به‌اندازهٔ h جابه‌جا می‌شویم و نقطهٔ حاصل روی f را B می‌نامیم.
حالا اگر h مدام کوچک و کوچک‌تر شود و به‌سمت صفر میل کند $(h \to ۰)$، نقطهٔ B به A نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و اطلاعات زیر به‌دست می‌آیند:





$\xrightarrow{h \to ۰}$



d را خط قاطع منحنی در نقاط A و B می‌نامیم.

$$(\text{قاطع})\ m_d = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

d' را خط مماس بر منحنی در $x=a$ می‌نامیم.

$$(\text{مماس})\ m_{d'} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته شیب خط مماس بر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و به آن مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ می‌گوییم و به یکی از صورت‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$(۱)\quad f'(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$(۲)\quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تذکر معمولاً در بین دو رابطهٔ بالا برای محاسبهٔ مشتق از رابطهٔ (۲) استفاده می‌کنیم، مگر آن‌که طراح تست خودش از رابطهٔ (۱) استفاده کند. برای مثال منظور از $\lim_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = ۳$ این است که شیب خط مماس بر تابع f در $x=۲$ برابر ۳ است $(f'(۲)=۳)$.

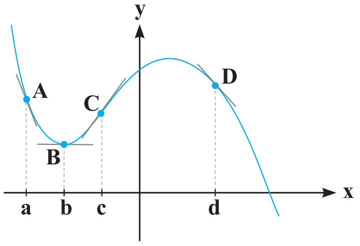
نکته گاهی اوقات تعریف مشتق را دچار پیچیدگی‌هایی می‌کنند که برای حل تست‌های این بخش بهتر است به رابطهٔ زیر را مسلط باشید:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{ph} = \frac{m-n}{p} f'(a)$$

به‌عنوان مثال منظور از $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۴-h)-f(۴+۲h)}{۳h}$ همان $\frac{-۱-۲}{۳} \times f'(۴) = -f'(۴)$ است.

مثال آموزشی

با توجه به نمودار مقابل، مقدار مشتق را برای نقاط داده شده به‌ترتیب از کوچک به بزرگ مشخص کنید.



پاسخ می‌دانیم علامت مشتق، همان علامت شیب خط مماس است، پس با کشیدن خطوط مماس بر منحنی داده شده به راحتی علامت مشتق در نقاط C,B,A و D را به‌دست می‌آوریم. همان‌طور که می‌بینید شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A و D منفی است، در نقطهٔ B برابر صفر و در نقطهٔ C مثبت است، پس برای مقایسهٔ مقادیر مشتق تابع در این چهار نقطه، باید شیب خط مماس را در نقاط A و D مقایسه کنیم. همان‌طور که می‌بینید شیب در نقطه D ملایم‌تر از نقطهٔ A است و این یعنی شیب خط مماس در نقطهٔ A منفی‌تر از شیب خط مماس در نقطهٔ D است، پس می‌توان نوشت:

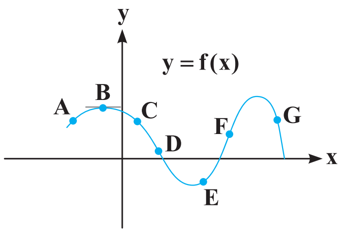
$$f'(a) < f'(d) < \underbrace{f'(b)}_{0} < f'(c)$$

تذکر همهٔ تست‌های مربوط به نکتهٔ بالا، به کمک قاعدهٔ هوپیتال (HOP) که در بحث حد خدمتتان عرض کردم به راحتی قابل حل هستند.

۱ **با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ و جدول زیر، شیب خط مماس در کدام نقطه نادرست است؟** (مشابه تمرین کتاب درسی)

گزینهٔ «۳»

نقطه	A	B	D
شیب	۱	۰	-۴



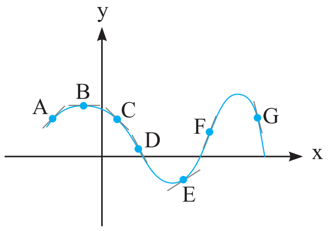
۱) $m_C = -۲$

۲) $m_E = \frac{۱}{۲}$

۳) $m_G = -۳$

۴) $m_F = ۲$

پاسخ: خطوط مماس بر نمودار تابع را در نقاط مشخص‌شده رسم می‌کنیم. به‌کمک جدول بالا نتایج زیر به‌دست می‌آیند:



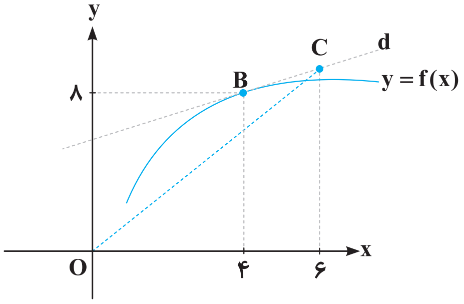
$$m_A = ۱, m_B = ۰, m_C < ۰, m_D = -۴ \qquad m_E > ۰, m_F > ۰, m_G < ۰$$

همچنین از روی نمودار واضح است که $m_E < m_A < m_F$ و $m_G < m_D < m_C$ می‌باشد، پس داریم: $m_E < ۱ < m_F$ و $m_G < -۴ < m_C$

حالا با توجه به گزینه‌ها $m_C = -۲$، $m_E = \frac{۱}{۲}$ و $m_F = ۲$ قابل قبول‌اند، اما m_G باید از -۴ کم‌تر باشد. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲ **شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)$ است و داریم $f(۴) = ۸$ و $f'(۴) = \frac{۱}{۲}$. فاصلهٔ نقطهٔ C تا مبدأ مختصات کدام است؟** (مشابه تمرین کتاب درسی)

گزینهٔ «۳»



۱) $\sqrt{۱۱۴}$

۲) ۱۱

۳) $\sqrt{۱۱۷}$

۴) $\sqrt{۱۲۲}$

پاسخ: با توجه به شکل بالا به کمک نقطهٔ $B(۴,۸)$ و شیب خط d به راحتی می‌توانیم معادلهٔ خط d را بنویسیم. فقط توجه کنید $f'(۴)$ همان شیب خط d است، پس می‌توان نوشت:

$$\text{معادلهٔ خط } d \Rightarrow y - y_۰ = m(x - x_۰) \xrightarrow{B(۴,۸),\, m=\frac{۱}{۲}} y - ۸ = \frac{۱}{۲}(x - ۴) \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ۶$$

حالا با جایگذاری $x = ۶$ روی خط $y = \frac{۱}{۲}x + ۶$ مختصات نقطهٔ C به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{۱}{۲}x + ۶ \xrightarrow{x=۶} y = ۹ \Rightarrow C(۶,۹)$$

فاصلهٔ نقطه C تا مبدأ مختصات (OC) برابر است با:

$$OC = \sqrt{(۶-۰)^۲ + (۹-۰)^۲} = \sqrt{۳۶+۸۱} = \sqrt{۱۱۷}$$

۳ اگر $\frac{1}{2} = \lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{3x+9}$ باشد، شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-3$ کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: می‌دانیم $f'(-3) = \lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$ است، پس با کمی ساده کردن عبارت داده‌شده می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{3(x+3)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}f'(-3) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(-3) = \frac{3}{2}$$

همچنین می‌دانیم منظور از شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در $x=-3$ همان $f'(-3)$ است که مقدارش $\frac{3}{2}$ است.

۴ اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{2h} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ باشد، شیب خط مماس بر f در ۳ $x=$ کدام است؟

گزینهٔ «۲»

۱) $\frac{4}{3\sqrt{10}}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ۳) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ۴) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

پاسخ: طبق نکتهٔ گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{ph} = \left(\frac{m-n}{p}\right)f'(a)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{2h} = \frac{(2-(-1))}{2}\times f'(x) = \frac{3}{2}f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt{x^2+1}}$$

$$\xrightarrow{x=3} f'(3) = \frac{6}{3\sqrt{9+1}} = \frac{2}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

فرمول‌های مشتق و تکنیک‌های آن

استفاده از رابطهٔ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ برای محاسبهٔ مشتق کار سختی است، پس برای محاسبهٔ سریع مشتق برخی از توابع، می‌توانید از جدول زیر کمک بگیرید:

تابع	$y=c$	$y=ax^n$	$y=\sqrt{ax+b}$	$y=\sqrt[3]{ax+b}$
مشتق	$y'=0$	$y'=anx^{n-1}$	$y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$y'=\frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$

حالت‌های خاص و پرکاربرد جدول بالا را هم بلد باشید:

$$y=ax \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=a \ ,\ y=\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\frac{-1}{x^2} \ ,\ y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \ ,\ y=\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

همچنین باید بدانیم زمانی‌که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با هم جمع، تفریق و یا ضرب و تقسیم می‌کنیم چه بلایی سر مشتق آن‌ها می‌آید:

تابع	$y=f(x)\pm g(x)$	$y=f(x)\times g(x)$	$y=\frac{f(x)}{g(x)}$
مشتق	$y'=f'(x)\pm g'(x)$	$y'=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$	$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

تذکر ۱ برای محاسبهٔ عبارت‌هایی که دارای ضریب (a) هستند، ضریب را نگه می‌داریم و از بقیهٔ جملات مشتق می‌گیریم، به‌عنوان مثال می‌توان نوشت:

$y=2f(x)+3g(x) \Rightarrow y'=2f'(x)+3g'(x)$

۲ برای محاسبهٔ مشتق توابع رادیکالی، توصیه می‌کنم عبارت رادیکالی را به عبارتی با توان کسری تبدیل کنید و سپس از آن مشتق بگیرید.

۳ در محاسبهٔ حدهایی که مشابه تعریف مشتق هستند از HOP استفاده می‌کنیم.

مثال آموزشی

مشتق هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{2x+1}$　　ب) $g(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x-4}$　　پ) $h(x)=\dfrac{4\sqrt[3]{x-1}+1}{(x-1)(x^2+1)}$

پاسخ مشتق هر یک از توابع را با توجه به رابطه‌های گفته شده به‌دست می‌آوریم:

الف) $f'(x)=\dfrac{(x^3-x)'(2x+1)-(2x+1)'(x^3-x)}{(2x+1)^2}\xrightarrow[(2x+1)'=2]{(x^3-x)'=3x^2-1}f'(x)=\dfrac{(3x^2-1)(2x+1)-(2)(x^3-x)}{(2x+1)^2}$

ب) $g'(x)=(\sqrt{x-1})'+(\sqrt[3]{2x-4})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}}$

پ) $h'(x)=\dfrac{(4\sqrt[3]{x-1}+1)'(x-1)(x^2+1)-((x-1)(x^2+1))'(4\sqrt[3]{x-1}+1)}{((x-1)(x^2+1))^2}$

$\xrightarrow[((x-1)(x^2+1))'=(1)(x^2+1)+(2x)(x-1)]{(4\sqrt[3]{x-1}+1)'=4\times\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+0}h'(x)=\dfrac{\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\times(x-1)(x^2+1)-((x^2+1)+(2x)(x-1))(4\sqrt[3]{x-1}+1)}{((x-1)(x^2+1))^2}$

تکنیک‌های مشتق‌گیری: چهار تکنیک بسیار مهم برای مشتق گرفتن داریم که به‌صورت زیر هستند:

۱ ساده کردن　۲ مشتق عامل صفرشونده　۳ تداعی مشتق　۴ مشتق تابع $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

۱ **ساده کردن:** در صورت امکان، ابتدا عبارت داده شده را به کمک فاکتورگیری و اتحادها ساده کنید و سپس مشتق بگیرید.

مثال آموزشی

اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+2}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^2+2}$ باشند، مشتق تابع $y=f(x)\times g(x)$ در نقطهٔ $x=3$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا به کمک اتحاد مزدوج عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم، سپس مشتق می‌گیریم:

$y=f(x)\times g(x)\Rightarrow(x+\sqrt{x^2+2})(x-\sqrt{x^2+2})=x^2-(x^2+2)\Rightarrow y=-2$

پس مشتق تابع y برابر است با: $y=-2\Rightarrow y'=0$

توجه کنید که y' به‌ازای هر مقداری صفر می‌شود از جمله $x=3$، یعنی $y'(3)=0$ است.

۲ **مشتق عامل صفرشونده:** اگر $f(x)=g(x)\times h(x)$ و $g(a)=0$ باشد، در این صورت برای محاسبهٔ $f'(a)$، از عامل صفرشونده یعنی $g(x)$ مشتق می‌گیریم و سایر جملات را به همان صورت در نظر می‌گیریم، پس می‌توان نوشت: $f'(a)=g'(a)\times h(a)$

مثال آموزشی

مشتق تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\times(x^3-x)}{2x-4}$ را در نقطهٔ $x=1$ به‌دست آورید.

پاسخ عبارت x^3-x در $x=1$ صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، پس برای ساده شدن در مشتق گرفتن تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$، تنها از x^3-x مشتق می‌گیریم و سایر جملات را به همان صورت می‌نویسیم:

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\times(x^3-x)}{2x-4}\xrightarrow{(x^3-x)'=3x^2-1}f'(1)=\dfrac{\sqrt{1}\times(3(1)^2-1)}{2(1)-4}=\dfrac{2}{-2}=-1$

تذکر برای استفاده از تکنیک مشتق عامل صفرشونده تابع $h(x)$ باید در $x=a$ پیوسته باشد.

۳ **تداعی مشتق:** عکس فرمول‌های مشتق را هم بلد باشید:

$f'g+g'f\xrightarrow{\text{تداعی مشتق}}(f\times g)'$,　$f'g-g'f\xrightarrow{\text{تداعی مشتق}}(\dfrac{f}{g})'\times g^2$,　$f+xf'\xrightarrow{\text{تداعی مشتق}}(xf)'$, ...

مثال آموزشی

اگر $f(x)=x-1$ و $g(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ باشند، حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ را در $x=4$ به‌دست آورید.

پاسخ به کمک تداعی مشتق می‌توان فهمید که $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f(x)\times g(x))'$ است، پس ابتدا دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در هم ضرب می‌کنیم، سپس مشتق می‌گیریم و در نهایت $x=3$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$(f\times g)'=((x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1))'\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}((x^2-1)(x^2+1)(x^4+1))'$

$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}((x^4-1)(x^4+1))'\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(x^8-1)'=8x^7\xrightarrow{x=4}8\times4^7=8\times2^{14}=2^3\times2^{14}=2^{17}$

۴) **مشتق تابع** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$: برای محاسبهٔ سریع مشتق تابع مقابل می‌توان نوشت:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

به‌عنوان مثال مشتق تابع $y=\frac{2x+1}{-x-1}$ برابر با $y'=\frac{(2)(-1)-(1)(-1)}{(-x-1)^2}=\frac{-1}{(-x-1)^2}$ است.

۵ **اگر $f(2)=f'(2)=2$ و $2g(2)=g'(2)=1$ باشند، شیب خط مماس بر تابع $y=(f(x)+1)(g(x))$ در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟**

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

گزینهٔ «۱»

پاسخ: منظور از شیب خط مماس همان مشتق است، پس باید مشتق تابع $y=(f(x)+1)(g(x))$ را در $x=2$ به‌دست آوریم:

$$y'=((f'(x)+0)(g(x))+g'(x)(f(x)+1)\xrightarrow{x=2}y'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)(f(2)+1)$$

حالا با جایگذاری اطلاعات تست در رابطهٔ به‌دست آمده داریم:

$$y'(2)=2\times(\frac{1}{2})+1\times(2+1)=1+3=4$$

۶ **مشتق تابع $y=\frac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$ در نقطهٔ $x=4$ کدام است؟**

۱) ۵ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{13}{72}$ ۴) $\frac{5}{12}$

گزینهٔ «۴»

پاسخ: برای آن‌که از این تابع راحت‌تر مشتق بگیریم، در صورت کسر از عبارت $\sqrt{x}\times\sqrt{x+5}$ فاکتور می‌گیریم، پس می‌توان نوشت:

$$y=\frac{\overbrace{\sqrt{x}\times\sqrt{x+5}}^{\cancel{\sqrt{x^2+5x}}}(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})}{\cancel{\sqrt{x^2+5x}}}\Rightarrow y=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\xrightarrow{x=4}\frac{1}{2\sqrt{4}}+\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$$

۷ **اگر $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟**

(تجربی خارج ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

گزینهٔ «۲»

پاسخ: با جایگذاری $\Delta x=0$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. حال به‌کمک هوپیتال داریم:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(-1+\Delta x)-0}{1}=f'(-1)$$

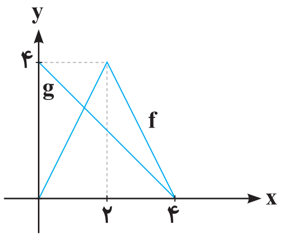
بنابراین کافیست مشتق تابع f را در $x=-1$ بیابیم و برای ساده‌تر شدن در مشتق گرفتن بهتر است به جای $\sqrt[3]{x^2}$ از $x^{\frac{2}{3}}$ استفاده کنیم:

$$f(x)=(x-2)\times x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-2\times\frac{2}{3}\times x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\xrightarrow{x=-1}f'(-1)=\frac{5}{3}\times(1)-\frac{4}{3\times(-1)}=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3$$

۸ **با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، مشتق تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطهٔ $x=3$ کدام است؟**

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) صفر

گزینهٔ «۴»

پاسخ: ابتدا مشتق تابع $y=\frac{g(x)}{f(x)}$ را در $x=3$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'(3)=\frac{g'(3)\times f(3)-f'(3)\times g(3)}{f^2(3)}\quad(*)$$

حالا باید معادلهٔ خط g و همچنین معادلهٔ خط f در $2\le x\le 4$ را به‌دست آوریم:

معادلهٔ خط g با دو نقطهٔ $(0,4)$ و $(4,0)$ $\Rightarrow y-0=\frac{0-4}{4-0}(x-4)\Rightarrow y=-x+4\Rightarrow g(x)=-x+4$

$$\Rightarrow g'(3)=-1\ ,\ g(3)=-3+4=1$$

معادلهٔ خط f با دو نقطهٔ $(2,4)$ و $(4,0)$ $\Rightarrow y-0=\frac{0-4}{4-2}(x-4)\Rightarrow y=-2x+8\Rightarrow f(x)=-2x+8$

$$f'(3)=-2\ ,\ f(3)=(-2)(3)+8=2$$

با جایگذاری اطلاعات به‌دست آمده در رابطهٔ $(*)$ می‌توان نوشت:

$$y'(3)=\frac{(-1)(2)-(-2)(1)}{(2)^2}=\frac{-2+2}{4}=0$$

۲۳ **مینیمم مطلق تابع $f(x)=۲x\sqrt{۱-x^۲}$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ کدام است؟** *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۴»

۱) صفر ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

پاسخ: ابتدا طول نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲\times\sqrt{۱-x^۲}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^۲}}\times۲x=۲\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=۰$$

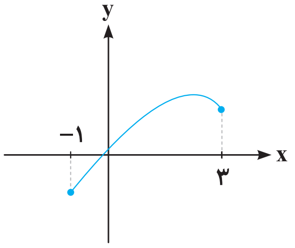
$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱-x^۲}=\frac{۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}\Rightarrow ۱-x^۲=x^۲\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲},x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ مشتق صفر می‌شود، پس بحرانی‌اند، اما ریشه‌های مخرج $x=-۱$ و $x=۱$ هستند که ابتدا و انتهای دامنه بوده و بحرانی محسوب نمی‌شوند.

$$\begin{cases}f(-۱)=۰\\ f(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۲(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sqrt{۱-(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=-۱\Rightarrow \text{min مطلق}\\ f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=۱\Rightarrow \text{max مطلق}\\ f(۱)=۰\end{cases}$$

۲۴ **شکل زیر، نمودار تابع $y=x+\sqrt{-x^۲+ax+b}$ است. مقدار ماکزیمم مطلق تابع کدام است؟** *(ریاضی خارج ۹۷ با تغییر)*

گزینهٔ «۴»



۱) $۱+\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۱+\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}+۱$

پاسخ: با توجه به نمودار داده شده، دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۱,۳]$ است، از طرفی از روی ضابطهٔ تابع، محدودهٔ دامنه از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$-x^۲+ax+b\geq۰\Rightarrow x\in[-۱,۳]$$

پس $x=-۱$ و $x=۳$ ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲+ax+b=۰$ هستند، یعنی:

$$\begin{cases}x=-۱\Rightarrow -(-۱)^۲+a(-۱)+b=۰\Rightarrow b-a=۱\\ x=۳\Rightarrow -(۳)^۲+a(۳)+b=۰\Rightarrow ۳a+b=۹\end{cases}\xrightarrow{\times۳}\begin{cases}۳b-۳a=۳\\ ۳a+b=۹\end{cases}\Rightarrow b=۳,a=۲$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=x+\sqrt{-x^۲+۲x+۳}$ است، همچنین برای پیدا کردن ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$، ابتدا باید نقاط بحرانی را به‌دست آوریم:

$$f'(x)=۱+\frac{\overbrace{-۲x+۲}^{\cancel{۲}(۱-x)}}{\cancel{۲}\sqrt{-x^۲+۲x+۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{-x^۲+۲x+۳}-x+۱}{\sqrt{-x^۲+۲x+۳}}=۰\Rightarrow\sqrt{-x^۲+۲x+۳}=x-۱\quad(*)$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}-x^۲+۲x+۳=x^۲-۲x+۱\Rightarrow ۲x^۲-۴x-۲=۰\xrightarrow{\div۲}x^۲-۲x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱+\sqrt{۲}\\ x=۱-\sqrt{۲}\end{cases}$$

$x=۱-\sqrt{۲}$ در معادلهٔ $(*)$ صدق نمی‌کند، پس تنها $x=۱+\sqrt{۲}$ قابل قبول است. با توجه به شکل، ماکزیمم مطلق در $x=۱+\sqrt{۲}$ رخ می‌دهد و داریم:

$$y=x+\sqrt{-x^۲+۲x+۳}\xrightarrow{x=۱+\sqrt{۲}}y=۱+\sqrt{۲}+\sqrt{-(۱+\sqrt{۲})^۲+۲(۱+\sqrt{۲})+۳}$$

$$\Rightarrow y=۱+\sqrt{۲}+\sqrt{-(۱+۲+۲\sqrt{۲})+۲+۲\sqrt{۲}+۳}=۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}+۱$$

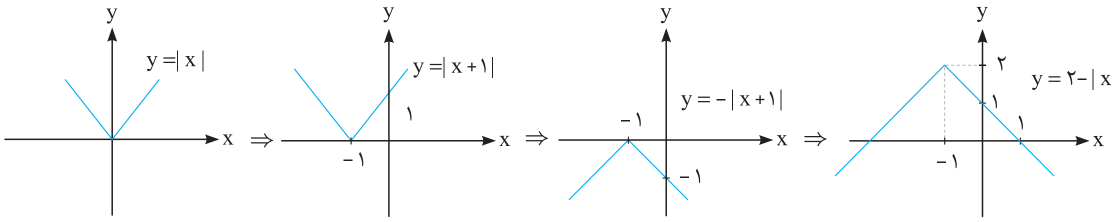
پس بیشترین مقدار این تابع $۲\sqrt{۲}+۱$ است.

۲۵ **ماکزیمم مطلق تابع $y=۲-|x+۱|$ کدام است؟**

گزینهٔ «۲»

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: روش اول: برای پیدا کردن اکسترمم مطلق توابعی که شامل قدرمطلق هستند، رسم نمودار توصیه می‌شود:



از روی نمودار تابع $y=2-|x+1|$ به‌راحتی می‌توان دید که ماکزیمم مطلق این تابع برابر ۲ است.

روش دوم: برد تابع y را به‌صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$|x+1|\geq 0 \xRightarrow{\times(-1)} -|x+1|\leq 0 \xRightarrow{+2} 2-|x+1|\leq 2 \Rightarrow y\leq 2$$

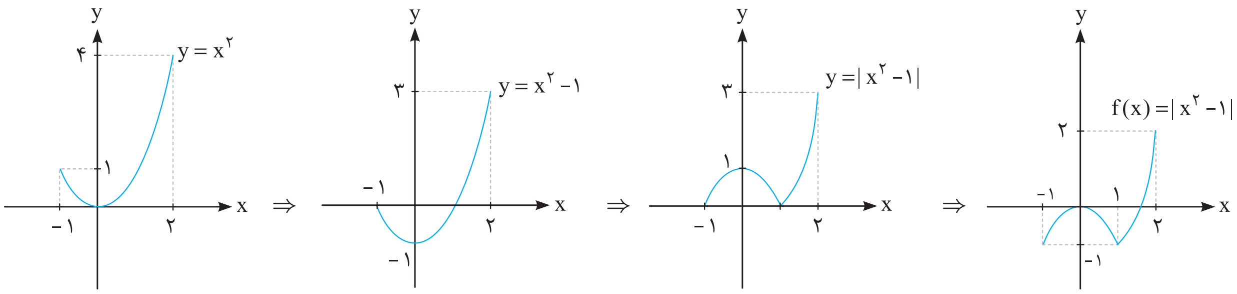
پس ماکزیمم مطلق تابع y برابر ۲ است.

۲۶ اختلاف اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=|x^2-1|-1$ در بازهٔ $[-1,2]$ چند واحد است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

گزینهٔ «۲»

پاسخ: تابع $f(x)$ قدرمطلق دارد، پس بهترین راه برای تعیین اکسترمم‌های مطلق آن، رسم نمودار است:



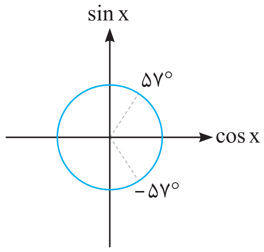
پس ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)$ به‌ترتیب ۲ و ۱- هستند که اختلاف آن‌ها ۳ واحد است.

۲۷ ماکزیمم مقدار تابع $f(x)=-|x|\cos x$ در بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟ *(ریاضی داخل ۸۶)*

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\cos 1$ ۴) ۱

گزینهٔ «۱»

پاسخ: می‌دانیم ۱ رادیان، تقریباً 57° است، پس بازهٔ $[-1,1]$ تقریباً معادل بازهٔ $[-57^\circ,57^\circ]$ است. از طرفی می‌دانیم در این بازه (زیرمجموعه‌ای از ربع ۴ و ۱) مقدار $\cos x>0$ است، پس داریم:



$$f(x)=-\underbrace{|x|}_{+}\underbrace{\cos x}_{+}\Rightarrow f(x)\leq 0$$

پس ماکزیمم مقدار تابع $f(x)=-|x|\cos x$ در بازهٔ $[-1,1]$، صفر است.

۲۸ کمترین مقدار تابع $y=\sin x-2\sqrt{\sin x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱-

گزینهٔ «۴»

پاسخ: طبق آخرین نکتهٔ گفته شده در درسنامه، برای پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق توابع مثلثاتی در رشتهٔ تجربی از اتحادها و روش مربع کامل استفاده می‌کنیم، یعنی:

$$y=\sin x-2\sqrt{\sin x}\Rightarrow y=(\sqrt{\sin}-1)^2-1$$

از طرفی به‌راحتی می‌توان برد تابع y را به‌دست آورد:

$$(\sqrt{\sin x}-1)^2\geq 0 \xRightarrow{-1} (\sqrt{\sin x}-1)^2-1\geq -1\Rightarrow y\geq -1$$

پس کمترین مقدار تابع $y=\sin x-2\sqrt{\sin x}$ برابر ۱- است.

اکسترمم نسبی

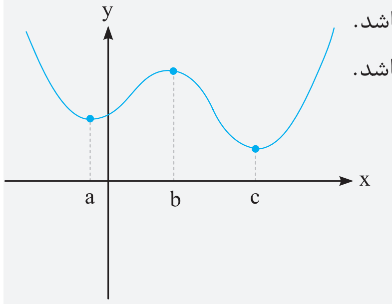
ماکزیمم نسبی: نقطه‌ای را ماکزیمم نسبی گوییم، هرگاه عرض آن نقطه، بیشتر یا مساوی عرض نقاط همسایه‌اش باشد.

مینیمم نسبی: نقطه‌ای را مینیمم نسبی گوییم، هرگاه عرض آن نقطه، کمتر یا مساوی عرض نقاط همسایه‌اش باشد.

برای مثال به نمودار مقابل توجه کنید:

$x=a$ و $x=c$ طول نقاط مینیمم نسبی‌اند.

$x=b$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.



تذکر

۱) نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمی‌توانند ابتدا و انتهای دامنه باشند.

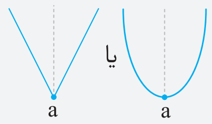
۲) اگر $f(x)$ در $x=a$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد، می‌گوییم $f(x)$ در $x=a$ اکسترمم نسبی دارد.

۳) برای پیدا کردن اکسترمم نسبی توابع شامل قدر مطلق، جزء صحیح و چند ضابطه‌ای از رسم نمودار کمک می‌گیریم.

پیدا کردن اکسترمم نسبی توابع پیوسته

ابتدا از تابع $y=f(x)$ مشتق می‌گیریم و $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای جدول تعیین علامت $f'(x)$ سه حالت زیر رخ می‌دهد:

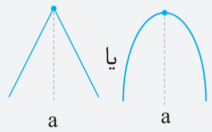
۱) مانند نمودار



$x=a$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی است.

x		a	
$f'(x)$	−		+
$f(x)$	نزولی ↘	بحرانی	صعودی ↗

۲) مانند نمودار



$x=a$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

x		a	
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	صعودی ↗	بحرانی	نزولی ↘

۳) زمانی‌که $f'(x)$ در $x=a$ تغییر علامت ندهد، نقطهٔ به طول a، نه ماکزیمم نسبی است نه مینیمم نسبی.

x		a	
$f'(x)$	−		−
$f(x)$	نزولی ↘	بحرانی	نزولی ↘

یا

x		a	
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	صعودی ↗	بحرانی	صعودی ↗

مثلاً می‌خواهیم نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=3x^5-5x^3$ را به‌دست آوریم:

ابتدا باید $f'(x)$ را پیدا کرده و آن را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=3x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=15x^4-15x^2=0 \Rightarrow 15x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	۲ max	↘	۰	↘	−۲ min	↗	

پس $A(-1,2)$ و $B(1,-2)$ به‌ترتیب ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع $f(x)$ هستند. (توجه کنید تابع $f'(x)$ در $x=0$ تغییر علامت نداده است، پس اکسترمم نسبی نیست.)

مثال آموزشی

اکسترمم نسبی تابع $f(x)=-2x^3-x$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا $f'(x)$ را پیدا می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=-2x^3-x \Rightarrow f'(x)=-6x^2-1<0$$

تابع $f'(x)$ همواره منفی است، پس تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است و اکسترمم نسبی ندارد.

نکته اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ باشد، داریم: ۱) $f(\alpha)=\beta$ ۲) $f'(\alpha)=0$

مثال آموزشی

اگر نقطهٔ $(2,1)$، اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b و d را پیدا کنید.

پاسخ طبق نکتهٔ گفته شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(2)=1 \Rightarrow (2)^3+b(2)^2+d=1 \Rightarrow 4b+d=-7 \quad (*) \\ f'(2)=0 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2bx \xrightarrow{x=2} 3(2)^2+2b(2)=0 \Rightarrow b=-3 \end{cases}$$

با جایگذاری $b=-3$ در معادلهٔ $(*)$ داریم:

$$4(-3)+d=-7 \Rightarrow d=5$$

۲۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; & -1\le x<1 \\ x & ; & 1\le x<2 \end{cases}$ ....

گزینهٔ «۳»

۱) یک max و یک min نسبی دارد.
۲) دو max نسبی دارد و min نسبی ندارد.
۳) دو min نسبی دارد و max نسبی ندارد.
۴) max و min نسبی ندارد.

۱۱ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به‌طور تصادفی پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شمارهٔ فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟ (تجربی داخل ۹۲)

گزینهٔ «۱»

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

پاسخ: مهره‌ها را پی‌درپی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. پس فضای نمونه‌ای برابر با $۵! = \binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۱} = n(S)$ است.

از طرفی برای آن‌که مهره‌های فرد متوالیاً خارج نشود پس تنها حالت مطلوب به‌صورت (فرد زوج فرد زوج فرد) است، یعنی مهره‌های فرد و زوج باید یکی در میان بیرون بیایند، پس طبق جایگشت‌های یک در میان، تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با: $n(A) = ۳!\times ۲!$

پس می‌توان نوشت: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳!\times ۲!}{۵\times ۴\times ۳!} = \frac{۱}{۱۰}$

مسائل شمارش

۱۲ در جایگشت‌های حروف کلمهٔ «جهانگردی» چقدر احتمال دارد که حروف «د» و «ی» کنار هم قرار بگیرند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

گزینهٔ «۲»

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با جایگشت‌های این ۸ حرف است، یعنی: $n(S) = ۸!$

از طرفی برای شمارش حالت‌های مطلوب، دو حرف «د» و «ی» باید کنار هم قرار بگیرند که به !۲ حالت جابه‌جا می‌شوند، پس آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم و داریم:

$\underbrace{\overset{۲!}{\boxed{\text{د ی}}}\text{ ، ر، گ، ن، ا، هـ، ج}}_{۷!} \Rightarrow n(A) = ۷!\times ۲!$ ، $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷!\times ۲!}{۸!} = \frac{۷!\times ۲!}{۸\times ۷!} = \frac{۱}{۴}$

۱۳ در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آن‌ها به‌صورت تصادفی انتخاب شوند، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

پاسخ: برای سادگی حل این تست از روش متمم کمک می‌گیریم.

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با $n(S) = \binom{۷}{۲}$ است.

حال پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که آزمایش بر روی هیچ‌یک از دو موش انتخابی انجام نگرفته باشد، پس داریم: $n(A) = \binom{۴}{۲}$

بنابراین: $P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = ۱ - \frac{۶}{۲۱} = \frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۵}{۷}$

۱۴ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به‌تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ (تجربی داخل ۹۱)

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: روش اول: رنگ کارت اول را نمی‌دانیم، پس یک بار فرض می‌کنیم رنگ کارت اول سبز و یک بار دیگر فرض می‌کنیم رنگ آن سفید باشد پس می‌توان نوشت:

$$\text{احتمال همرنگ بودن دو کارت} = (\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}) + (\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}) = \frac{۱۲}{۴۲} + \frac{۶}{۴۲} = \frac{۱۸}{۴۲} = \frac{۳}{۷}$$

کارت اول سبز، کارت دوم هم سبز، کارت اول سفید، کارت دوم هم سفید

روش دوم: رنگ کارت اول را نمی‌دانیم، پس اینکه هر دو کارت را با هم خارج کنیم، هیچ فرقی ندارد با حالتی که کارت‌ها را پشت‌سر هم خارج کنیم. پس با فرض همزمان خارج کردن هر دو کارت تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$n(S) = \binom{۷}{۲} = \frac{۷\times ۶}{۲} = ۲۱$

از طرفی تعداد حالت‌هایی که هردو کارت همرنگ باشند برابر است با:

$n(A) = \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{هردو کارت سفید}} + \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{هردو کارت سبز}} = ۳ + \frac{۴\times ۳}{۲} = ۳ + ۶ = ۹$

پس احتمال همرنگ بودن هر دو کارت خارج شده برابر است با:

$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$

۱۵ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شود. به‌تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

گزینهٔ «۴»

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

پاسخ: با توجه به متوالی برداشتن موش‌ها تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با $n(S)=\binom{۸}{۱}\times\binom{۷}{۱}\times\binom{۶}{۱}=۳۳۶$ است.

از طرفی برای شمارش تعداد اعضای مطلوب، برای انتخاب موش دوم، ۲ حالت داریم، پس، می‌توان نوشت:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{موش اول سفید}}\times\overbrace{\binom{۴}{۱}}^{\text{موش دوم سفید}}\times\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{موش سوم سیاه}}+\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{موش اول سفید}}\times\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{موش دوم سیاه}}\times\overbrace{\binom{۲}{۱}}^{\text{موش سوم سیاه}}=۶۰+۳۰=۹۰$$

پس داریم:
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹۰}{۳۳۶}=\frac{۳۰}{۱۱۲}=\frac{۱۵}{۵۶}$$

۱۶ دانش‌آموزی به ۵ پرسش تستی سه گزینه‌ای، به‌تصادف پاسخ می‌دهد. احتمال این‌که فقط به ۳ پرسش، پاسخ درست بدهد، کدام است؟ (به همهٔ پرسش‌ها پاسخ داده است.)

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۱۰}{۲۴۳}$ ۲) $\frac{۲۰}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۴۰}{۲۴۳}$ ۴) $\frac{۸۰}{۲۴۳}$

پاسخ: برای هر پرسش ۳ حالت داریم، پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=۳^۵$ است.

از طرفی دانش‌آموز باید به ۳ پرسش از ۵ پرسش پاسخ درست بدهد و دو پرسش دیگر را حتماً نادرست پاسخ بدهد، یعنی:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب سه پرسش درست از ۵ پرسش}}\times\underbrace{۲\times۲}_{\text{در ۲ پرسش دیگر باید گزینه‌های نادرست انتخاب شود.}}=۴۰$$

پس احتمال مطلوب برابر است با:
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۰}{۲۴۳}$$

۱۷ هر یک از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به‌تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟ *(تجربی داخل ۹۵)*

گزینهٔ «۲»

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

پاسخ: پنج کارت با اعداد ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به $\frac{۳}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۵}{}$ حالت می‌توان کنار هم قرار داد. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=۶۰$ است.

از طرفی برای آن‌که این عدد ۳ رقمی مضرب ۳ باشد، باید مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد. پس حالت‌های ممکن به‌صورت زیر است:

$\{۱,۲,۳\},\{۱,۳,۵\},\{۲,۳,۴\},\{۳,۴,۵\}$

که هر یک از حالت‌های زیر !۳ جایگشت دارد، پس داریم: $n(A)=۴\times۳!$

پس می‌توان نوشت:
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴\times۳!}{۵\times۴\times۳}=\frac{۴}{۱۰}$$

سکه یا فرزند

۱۸ احتمال این‌که در یک خانوادهٔ چهار فرزندی تعداد فرزندان دختر و پسر برابر باشد، کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

پاسخ: این خانواده چهار فرزند دارد پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S)=۲^۴=۱۶$

برابر بودن تعداد فرزندان دختر و پسر یعنی ۲ فرزند پسر و دو فرزند دختر داشته باشیم. حالا برای آن‌که این خانوادهٔ چهار فرزندی، ۲ پسر داشته باشد ابتدا با انتخاب $\binom{۴}{۲}$ پسرها را انتخاب می‌کنیم و دو فرزند دیگر را حتماً از بین دخترها انتخاب می‌کنیم. پس داریم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ فرزند پسر}}\times\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ فرزند دختر}}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{۱۶}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

۱۹ در پرتاب ۵ سکهٔ سالم با هم، احتمال آن‌که فقط دو سکه رو بیاید یا فقط چهار سکه پشت بیاید، کدام است؟ (تجربی داخل ۹۵ با تغییر)

گزینهٔ «۲»

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۲}$

پاسخ: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب ۵ سکهٔ سالم برابر $n(S)=۲^۵$ است. از طرفی پیشامد آن‌که دو سکه رو بیاید یا فقط ۴ سکه پشت بیاید برابر $n(A)=\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۴}$ است. پس می‌توان نوشت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۴}}{۲^۵}=\frac{۱۰+۵}{۳۲}=\frac{۱۵}{۳۲}$$

قوانین احتمال

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌کمک احتمال مقدماتی، روابط زیر به‌دست می‌آیند:

توضیح	فرمول	فرم نمایش
احتمال آن‌که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.	-	$P(A\cap B)$
احتمال آن‌که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد.	$P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	$P(A\cup B)$
احتمال آن‌که پیشامد A رخ بدهد و B رخ ندهد.	$P(A)-P(A\cap B)$	$P(A-B)$
احتمال آن‌که فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد.	$P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$	$P(A-B)+P(B-A)$
احتمال آن‌که هیچ‌یک از دو پیشامد A و B رخ ندهد.	$۱-P(A\cup B)$	$P(A'\cap B')$

تذکر ۱) رابطهٔ $P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$ به‌کمک قانون دمرگان به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$P(A'\cap B')\underset{\text{دمرگان}}{=}P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$$

۲) در تمامی روابط بالا اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند $P(A\cap B)=۰$ است. به‌عنوان مثال:

A و B ناسازگارند. $A:\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{۰}=P(A)+P(B)$

۲۰ ۳۰٪ از دانش‌آموزان یک کلاس در والیبال و ۵۵٪ در فوتبال مهارت دارند. اگر ۷۰٪ آن‌ها حداقل در یکی از دو ورزش مهارت داشته باشند، چند درصد فقط در فوتبال مهارت دارند؟

گزینهٔ «۲»

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳

پاسخ: پیشامد دانش‌آموزان ماهر در فوتبال: B و پیشامد دانش‌آموزان ماهر در والیبال: A

با توجه به آن‌که ۷۰٪ دانش‌آموزان حداقل در یکی از دو ورزش مهارت دارند، پس می‌توان نوشت:

$$P(A\cup B)=۰/۷\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۷=۰/۳+۰/۵۵-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱۵$$

در نهایت خواستهٔ تست، دانش‌آموزانی است که فقط در فوتبال مهارت دارند یعنی $P(B-A)$. پس می‌توان نوشت:

$$P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=۰/۵۵-۰/۱۵=۰/۴$$

۲۱ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که $P(A)=۰/۴$ و $P(B)=۰/۳$، حاصل $P(A'\cap B)+P(B'\cap A)$ کدام است؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۵

پاسخ: A و B دو پیشامد ناسازگارند، پس $P(A\cap B)=۰$ است.

از فصل مجموعه‌ها می‌دانیم: $B-A=B\cap A'$ و $A-B=A\cap B'$. پس سادهٔ شدهٔ عبارت $P(A'\cap B)+P(B'\cap A)$ به‌صورت زیر است:

$$P(B\cap A')+P(A\cap B')=P(B-A)+P(A-B)\xrightarrow[P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)]{P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)}P(B)-P(A\cap B)+P(A)-P(A\cap B)$$

از طرفی $P(A\cap B)=۰$ است، پس می‌توان نوشت:

$$P(A\cap B')+P(B\cap A')=P(A)+P(B)=۰/۴+۰/۳=۰/۷$$