فصل ۱

کل پیش‌نیازها و پایه‌های لازم برای ریاضی کنکور + کل تابع + قدر مطلق و جزء صحیح و بخش‌های لازم از درجه ۲

فهرست

واجبات: (مطالبی که باید بلد باشید)

- بخش ۱: حل انواع معادلات و نامعادلات و شناخت عبارت‌ها و اتحادهای جبری
- بخش ۲: تسلط بر رسم تمام نمودارها در هر سه کتاب به جز توابع مثلثاتی و لگاریتمی و نمایی (سرجای خودشون)
- بخش ۳: شناخت کامل روش انتقال و انبساط و انقباض نمودار توابع مختلف
- بخش ۴: بررسی تقاطع دو منحنی یا خط و منحنی و پیداکردن تعداد ریشه‌ها با روش تقاطع
- بخش ۵: تعیین دامنه توابع کسری، رادیکالی و محصولات اعمال روی این توابع (مثلثاتی و لگاریتمی فعلاً نیاز نیست) و تساوی دو تابع
- بخش ۶: تعریف، نحوه تعیین و شرایط تابع مرکب در ضابطه و زوج مرتب و یافتن دامنه آن
- بخش ۷: تشخیص یک به یک‌بودن از روی نمودار و تعیین ضابطه وارون یک تابع

بخش اول

حل انواع معادلات و نامعادلات و شناخت عبارت‌ها و اتحادهای جبری

۱.۱: اصلاً معادله چیه و فرق اتحاد با معادله معمولی؟

اولاً به هر تساوی یک معادله می‌گن، مثلاً $x-1=0$ یک معادله درجه یکه. جواب این معادله، یعنی پیداکردن x ای که توی این معادله صدق می‌کنه. کافیه عدد $\underline{-1}$ رو ببریم به سمت راست تساوی. پس می‌شه $\boxed{x=1}$. به این عدد جواب معادله یا ریشه گفته می‌شه. حالا اگه بگه $-x+2=0$. اینجا بهتره $\underline{-x}$ رو ببریم به سمت راست تساوی که می‌شه $x=2$ ولی چون ما x رو می‌خوایم، می‌نویسیم $x=2$.

هر معادله یا نامعادله‌ای یه سواله و وقتی می‌گه $x-1=0$ یعنی داره ازت می‌پرسه که x چنده؟

ممکنه x ضریب داشته باشه، مثلاً $2x-1=0$، حالا اول -1 رو می‌بریم به سمت راست که می‌شه $2x=1$ و حالا باید 2 رو که مزاحمه از بین ببریم. پس طرفین تساوی رو تقسیم بر 2 می‌کنیم. $\frac{2x}{2}=\frac{1}{2}$ سمت چپ 2 پایین و بالا با هم می‌رن و می‌شه $x=\frac{1}{2}$. پس این سه حالت کلی بود که تو معادله درجه 1 باهاش مواجه می‌شین.

حالا اگه دو تا درجه یک تو هم ضرب بشن چی می‌شه؟! خب معلومه دیگه درجه ۲!

$$(x-1)(-x+2)=0\Rightarrow \begin{cases} x-1=0\Rightarrow x=1 \\ -x+2=0\Rightarrow x=2 \end{cases}$$

خب وقتی ضرب دو عامل صفر شده یا کار اولی بوده و یا کار دومی و یا هر دو! پس تک تکشون رو مساوی صفر قرار می‌دیم ولی *آیا تو کنکور یا امتحان نهایی اینجوری به ما سوال می‌دن؟*

یعنی معادله رو همینجوری جدا جدا (تجزیه‌شده) و هلو برو تو گلو به ما تحویل می‌دن؟

متأسفانه باید بگم نه. معادله رو به صورت جمع چند عبارت به شما می‌دن و از شما می‌خوان خودتون زحمت تجزیه‌اش رو بکشین. مثلاً می‌گن $x^2-3x+2=0$. پس اینجا لازمه که بریم سراغ اتحادهای جبری و تجزیه‌کردن رو یاد بگیریم.

۱-۲: اتحادهای جبری

به هر چیزی به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...+z$ می‌گن یک چندجمله‌ای.

البته دو تا شرط داره، اولاً اون ضریب‌ها یعنی a، b و... و z که بهشون ضرایب چندجمله‌ای گفته می‌شه، صفر نباشن چون اون جمله رو از بین می‌بره و ثانیاً توان‌ها حتماً عدد طبیعی باشن. البته توان می‌تونه صفر هم باشد، مثلاً اینجا اون جمله آخر zx^0 بوده که چون عدد به توان صفر، یک می‌شه و دیگه تو ضرب عدد ۱ رو نمی‌نویسن (عضو خنثی) شده z خالی. (برای درجه n بودن کافیه $a\neq 0$) باشه.

$y=3x+5$ (دوجمله‌ای درجه ۱)، $y=-8x^2+2x-\frac{3}{2}$ (سه‌جمله‌ای درجه ۲)

$y=\sqrt{5}x^2-\frac{3}{4}x$ (دوجمله‌ای درجه ۲) ← ☹: *آقا مگه نگفتین رادیکالی و کسری نباشن؟!*

☺: *ضریبش مشکلی نداره عزیزم. اگر x زیر رادیکال یا تو مخرج بره خلاف تعریفمون عمل شده.*

حالا که فهمیدیم جمله تو ریاضی فعل و فاعل نداره، بریم سراغ اتحادها. اتحادها در واقع تساوی‌های معروف ریاضی هستن که سرعت محاسبات ما رو در کار با عبارت‌های جبری بالا می‌برن. مثلاً وقتی می‌گه $(x-1)^2$ شما دو راه داری:

روش اول:

$$(x-1)(x-1)=\underbrace{x.x}_{\text{مرحله ۱}}+\underbrace{x(-1)}_{\text{مرحله ۲}}+\underbrace{(-1)x}_{\text{مرحله ۳}}+\underbrace{(-1)(-1)}_{\text{مرحله ۴}}=x^2-x-x+1$$
$$=x^2-2x+1$$

تذکر ۱: به جای اینکه بنویسیم $x\times x$ می‌نویسیم $(x)(x)$ یا $x.x$ یا بهترش x^2.

به جای اینکه بنویسیم $x\times(-1)$ می‌نویسیم $(-1)x$ یا بهترش $-x$.

به جای اینکه بنویسیم -1×-1 که خیلی زشت و حتی غلطه، می‌نویسیم $(-1)(-1)$.

بنابراین از پرانتز به جای ضرب در عبارت‌های جبری استفاده می‌کنیم مخصوصاً برای اعداد منفی. ضمناً همیشه یادتون باشد $\ominus$ تو هر جمله تیزترین بچه اون جمله است و سریع می‌ره سر صف و در ابتدای جمله قرار می‌گیره. مثلاً: $(x)(4)(-2)=-8x$

حتی در کسرها هم این موضوع خیلی بدرد می‌خوره: مثلاً بجای $\frac{1}{-2}$ بهتره، بنویسیم $\frac{-1}{2}$ و یا تو حل معادله زیر در مخرج از یک منفی فاکتور بگیریم

$$\frac{1}{1-a}=a-1\Rightarrow\frac{1}{-(a-1)}=a-1\Rightarrow\frac{-1}{a-1}=a-1$$

همیشه سعی کنید عدد ثابت تو جمله‌بندی ریاضی آخر قرار بگیره و جملات رو از توان بزرگ به کوچیک مرتب کنید، یعنی مثلاً به جای $-1+3x+5x^2$ بنویسید: $5x^2+3x-1$.

روش دوم: با استفاده از اتحادهای جبری:

اول بنویسیم مثلاً $(a+b)^2$ که مساوی $a^2+2ab+b^2$ میشه از کجا اومده؟!

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

پس می‌تونیم از این اتحاد استفاده کنیم و $(x-1)^2$ رو به دست بیاریم.

$$\left(x+(-1)\right)^2=x^2+2x(-1)+(-1)^2=x^2-2x+1$$

البته می‌تونستیم از $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ استفاده کنیم که راحت‌تر بود: $(x-1)^2=x^2-2x+1$

پس این شد اتحاد اول: $\mathbf{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$

از چپ به راست می‌شه بسط دوجمله‌ای و از راست به چپ می‌شه، تجزیه!

بنابراین برای تجزیه‌کردن اول باید به اتحادها مسلط باشی، به این اتحاد می‌گن مربع دوجمله‌ای. (دوجمله به توان ۲) یا مجذور دوجمله‌ای (مجذور هم یعنی همون توان ۲، بچه‌ها).

چهار تا مربع مهم رو با هم ببینیم که من بهشون می‌گم مربع کامل‌های مهم و معروف:

۱) $(x\pm 1)^2=x^2\pm 2x+1$ ۲) $(x\pm 2)^2=x^2\pm 4x+4$

۳) $(x\pm 3)^2=x^2\pm 6x+9$ ۴) $(2x\pm 1)^2=4x^2\pm 4x+1$

همین جا می‌خوام اولین درس تجزیه رو بدم. این ۴ تا رو باید انقدر خوب بلد باشین که تا دیدین x^2+2x+1، سریع تجزیش کنین و بگین می‌شه $(x+1)^2$.

توجه: حالا چرا می‌گم مربع کامل؟! اعداد مربع کامل رو که بلدین؛ ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹ و...

یعنی اعدادی که از زیر رادیکال خارج می‌شن، مثلاً ۲۵ مربع کامله چون $\sqrt{25}=5$ ولی ۲۰ مربع کامل نیست چون:

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

عبارت‌های جبری هم همینجورین. **مربع کامل‌ها از زیر زندان رادیکال بیرون میان ولی با دستبند قدر مطلق!** یعنی $\sqrt{x^2}=x$ غلطه، چون ممکنه x ای که با توان ۲ اجازه حضور زیر رادیکال رو پیدا کرده، منفی بوده باشه. (زیر رادیکال فرجه زوج هیچوقت نباید منفی بشه).

مثلاً $\sqrt{2^2}=\sqrt{4}$ و $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}$ پس می‌گیم: $\sqrt{x^2}=|x|$ و می‌خونیم؛ قدر مطلق x = رادیکال x^2. حالا قدر مطلق x چیه؟ هر x مثبتی توش باشه، خودش میاد بیرون و هر x منفی قرینش که مثبت بشه.

$$|x|=\begin{cases}x & , x\ge 0\\ -x & , x<0\end{cases}$$

این فقط مخصوص x خالی نیست. هر عبارتی از x هم که تو ریاضی بهش می‌گیم، u این شرایط رو داره یعنی داریم:

$$|u|=\begin{cases}u & , u\ge 0\\ -u & , u<0\end{cases}$$

مثلاً $\rightarrow$ $|x-1|=\begin{cases}x-1 & , x\ge 1\\ -(x-1) & , x<1\end{cases}$ یا مثلاً $|2x-3|=\begin{cases}2x-3 & , x\ge \frac{3}{2}\\ -(2x-3) & , x<\frac{3}{2}\end{cases}$

تو دو تا مثال بالا به اعداد ۱ و $\frac{۳}{۲}$ که ریشه عبارت داخل قدر مطلق هستن نقطه گوشه‌ای یا مرزی گفته می‌شه. حالا بریم استفاده اول از اتحاد اول در تجزیه رو ببینیم:

این کار بسیار لازم و مهمه در محاسبتون

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x^۲-۲x+۱}&=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|\\ \sqrt{۴x^۲+۴x+۱}&=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

حالا می‌رسیم به اتحاد دوم یعنی اتحاد مزدوج:

$$\boxed{(a-b)(a+b)\underset{\text{تجزیه}}{\overset{\text{بسط}}{\rightleftharpoons}}a^۲-b^۲}$$

این اتحاد هم که به شدت در تجزیه عبارت‌های دوجمله‌ای درجه دوم و حل معادلات درجه دوم ناقص به درد می‌خوره، به مثال‌های خوب زیر توجه کنید:

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow(x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}\quad،x^۲-۴=۰\Rightarrow(x-۲)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\x=-۲\end{cases}$$

$$۹x^۲-۱=۰\Rightarrow(۳x-۱)(۳x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۳}\\x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

سومی هم که دوجمله‌ای به توان ۳ یا مکعب دوجمله‌ای

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^۳&=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳\\(a-b)^۳&=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳\end{aligned}\right\rangle(a\pm b)^۳=a^۳\pm۳a^۲b+۳ab^۲\pm b^۳$$

معروف‌ترین و پُرکاربردترینش هم $(x\pm۱)^۳$ هستن:

$$(x+۱)^۳=x^۳+۳x^۲+۳x+۱\qquad,\qquad(x-۱)^۳=x^۳-۳x^۲+۳x-۱$$

به خاطر رسالتی که تو این بخش دارم بر خودم واجب می‌دونم عبارت‌ها را تا حد امکان به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسم و از کوچیک‌ترین مطلب اضافه و حاشیه‌ای پرهیز کنم تا همه عزیزانم حتی دوستانی که ریاضیشون به شدت ضعیفه و فکر می‌کنن باید از پنجم دبستان شروع کنن هم به سادگی هر چه تمام‌تر مطالب را به بهترین شکل ممکن یاد بگیرن. بچه‌های عزیزم توجه داشته باشید تا مطلبی رو با تمام وجود یاد نگیرید نمی‌تونید ازش تستی رو تو کنکور جواب بدید. پس این مرحله رو خیلی جدی بگیرید. افرادی که دنبال عددگذاری و حذف و میانبر رفتن، همگی متحمل شکست‌های سنگینی شدن. امیدوارم شما عزیزان درس بگیرید و اون اشتباه تکراری و تاریخی رو مرتکب نشید.

چند تا مثال خوب دیگه از بسط دوجمله‌ای به توان ۳ و تجزیه این عبارت‌ها رو با هم ببینیم:

بسط: $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

تجزیه: $\Rightarrow x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$

اشتباه رایج: دقت داشته باشید این اتحاد رو با اتحادی که مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله رو نشون می‌ده اشتباه نگیرید یعنی مثلاً x^3+8 یا x^3-1 که با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌شن که اتحاد بعدی ماست!

چهارم اتحاد چاق و لاغر یا مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله

$$\underbrace{(a\oplus b)}_{\text{لاغر}}\ \underbrace{(a^2-ab+b^2)}_{\text{چاق}}=\underbrace{a^3\oplus b^3}_{\text{مجموع مکعبات (توان ۳ها) دو جمله}}$$

مرحله اول: $(a+b)(a^2\bigcirc b^2)\xrightarrow{\text{مرحله دوم}}(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

حالا اگه بخوایم a^3-b^3 به وجود بیاد با توجه به حالت بالا، باید علامت بین a و b منفی باشه و در عوض علامت جمله‌ی وسط تو عامل چاقمون مثبت.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

معروف‌ترین مثال از این اتحاد رو در تجزیه عبارت‌هایی مثل x^3-1 و x^3-8 می‌بینید:

اول x^3-8 رو بریم که بهتر می‌شه فهمید چون x^3-1 رو شاید متوجه نشید اولش! به این خاطر که یک به توان ۳ همون یکه!

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$$

$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$$

اتحاد پنجم و آخر میشه اتحاد جمله مشترک که قطعاً پُراستفاده‌ترین اتحاد در تجزیه سه جمله‌ای‌های درجه دومه:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(\underbrace{a+b}_{\text{اول جمع}})x+\underbrace{ab}_{\text{بعداً ضرب}}$$

تذکر **مهم:** درسته که بالا نوشتیم اول جمع؛ بعداً ضرب، ولی شما تو تجزیه باید اول به ضرب توجه کنی.

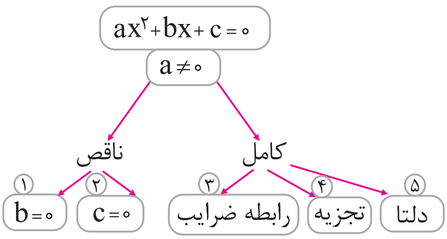
بریم دو تا مثال خوب با هم ببینیم: $x^2+5x+6=(x+...)(x+...)$

دنبال دو تا عدد می‌گردیم که ضربشون ۶ باشه. خب هم ۶ و ۱ درسته و هم ۲ و ۳ ولی چون لازمه که جمعشون ۵ باشه، ۲ و ۳ رو قبول می‌کنیم. پس داریم: $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

حالا اگر $x^2-5x+6=0$ بود، می‌شد $(x-2)(x-3)$ و اگر x^2+5x-6 بود، می‌شد $(x+6)(x-1)$ و حالت آخر هم که خودت باید حدس بزنی: $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$

۱-۳: روش‌های حل انواع معادله درجه ۲

حالا که با اتحادهای جبری هم آشنا شدیم، وقتشه که با انواع معادله درجه دوم و بهترین روش‌ها برای حلش هم آشنا بشیم. اول به شکل روبرو توجه بفرمایید:



حالا شروع می‌کنیم به بررسی پنج حالت معادله درجه دوم:

۱. معادله درجه دوم ناقصی که $b=0$ باشه یا جواب نداره و یا دو تا جواب قرینه داره، حتماً باید عدد ثابت رو ببری اون ور.

این معادله جواب نداره چون می‌دونین که اعداد توان زوج هیچ وقت منفی نمی‌شن $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{\text{جذر از طرفین}} \sqrt{x^2}=\sqrt{4} \Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2$

۲. معادله درجه دوم ناقصی که $c=0$ باشه حتماً دو تا ریشه داره که یکیش صفره. همه سمت چپ و بعد از یک x فاکتور می‌گیری. $x^2-7x=0 \Rightarrow x(x-7)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=7$

۳. اگر معادله کامل بود اولین و بهترین راه دیدن رابطه بین ضرایبه. اگر جمع ضرایب صفر بود، یکی از ریشه‌ها یکه و اون یکی $\frac{c}{a}$ و اگر $a+c=b$ بود یکی -1 و اون یکی هم $\frac{-c}{a}$.

مثال‌ها را ببینید.

$$x^2-5x+4=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} x_1=1, x_2=4$$

$$3x^2-8x+5=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} x_1=1 \ , x_2=\frac{5}{3}$$

$$3x^2+10x+7=0 \xrightarrow{a+c=b} x_1=-1 \ , \ x_2=\frac{-7}{3}$$

$$x^2+5x+4=0 \xrightarrow{a+c=b} x_1=-1 \ , x_2=-4$$

پس حواست باشه تا رابطه بین ضرایب هست تجزیه هم حماقته، چه برسه به Δ!

۴. معادله درجه دوم کاملی که رابطه‌ای بین ضرایبش وجود نداره و ضریب x^2 هم یکه. بهترین کار، تجزیه است.

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)=0 \Rightarrow x_1=-2 \quad , \quad x_2=-3$$

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0 \Rightarrow x_1=3 \quad , \quad x_2=4$$

$$x^2-18x+72=(x+a)(x+b)=?$$

اینجا همونطور که تو اتحاد آخر گفتیم، برای پیداکردن a و b اول می‌ریم سراغ ضرب، یعنی ۷۲! خب تنها اعدادی که تو جدول ضرب ۷۲ رو می‌سازن ۸ و ۹ هستن که به هیچ عنوان توان تولید (۱۸-) رو تو جمع ندارن. پس بریم سراغ دورقمی‌ها: $11\times ...=72$!؟ $12\times 6=72$. آفرین. درسته.

پس دو تا عددمون می‌شن ۱۲- و ۶- که ضربشون ۷۲+ و جمعشون ۱۸- باشه:

$$x^2-18x+72=(x-6)(x-12)=0 \Rightarrow x=6 \ , x=12$$

۵. معادله درجه دوم کاملی که شرایط ۳ و ۴ رو نداشته باشه، چاره‌ای برامون باقی نمی‌ذاره جز این روش. برای به دست‌آوردن x_1 و x_2 یعنی ریشه‌های معادله به این طریق عمل می‌کنیم که اول $\Delta=b^2-4ac$ (دلتا) رو به دست میاریم و بعد: $x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثلاً معادله مقابل که من اسمشو گذاشتم دوسلدورف! بخاطر ضراییش که به ترتیب ۲، ۳، ۲ هستن: $2x^2-3x-2=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(-2)=25$$

$$x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2(2)} \begin{cases} x_1=\frac{3+5}{4}=2 \\ x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

توجه ۱: اگر تو همین معادله یه تغییر خیلی کوچولو ایجاد کنیم و علامت آخر رو مثبت کنیم، چی می‌شه؟!

$$2x^2-3x+2=0 \ \Rightarrow \ \Delta=(-3)^2-4(2)(2)=-7$$

اگر که a و c هم‌علامت شد، اول شک کن، بعداً چک کُن! $ax^{۲}+bx+c=۰$

چون فقط در این حالته که ممکنه $۴ac$ بیشتر از $b^{۲}$ بشه و Δ رو منفی کنه.

مسلماً اگه a و c مختلف العلامت باشن Δ قطعاً مثبته و معادله دو تا ریشه متمایز داره. (تو فصل ۸ می‌خونین که مختلف‌العلامت هم هستن)

توجه ۲: در مربع کامل‌های مهم و معروف و هر عبارت دیگه‌ای که دو ریشه یکسان داشته باشه، $\Delta=۰$ می‌شه و به اون ریشه می‌گیم ریشه مضاعف.

$$x^{۲}-۱۰x+۲۵=(x-۵)(x-۵)=(x-۵)^{۲}=۰\Rightarrow x=۵ \quad \text{مضاعف}$$

۱-۱۴: اصول نامساوی‌ها و حل انواع و اقسام نامعادلات درجه ۱

به $a>b$ یک نامساوی می‌گن و می‌خونن a بزرگتر از b. حالا همین نامساوی رو می‌تونی اینجوری هم نشون بدی که $b<a$ یعنی b کوچیکتر از a. حالا می‌خوایم ببینیم وقتی $a>b$ و علامتشون هم مهم نیست، چه تغییراتی می‌شه روش اعمال کرد.

۱. طرفین رو با هر عددی جمع و یا تفریق کنیم، جهت هیچ تغییری نمی‌کنه: $a\pm c>b\pm c$

۲. طرفین رو در هر عدد مثبتی ضرب یا تقسیم کنیم، هم همینطور: $ac>bc\ ,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

۳. توان فرد و فرجه فرد بی‌آزارن و هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کنن.

یعنی جهت عوض نمی‌شه ولی برای توان زوج و فرجه زوج محدودیت داریم. هر دو مثبت باشن توان زوج و فرجه زوج، جهت رو عوض نمی‌کنه ولی اگر هر دو منفی باشن با توان زوج رسوندن طرفین، جهت عوض می‌شه. ضمناً مسلّمه که در این حالت آخر، فرجه زوج نداریم چون اعداد منفی جذر ندارن و اجازه ورود به زیر رادیکال براشون صادر نمی‌شه.

۴. آخرین حالت معکوس‌کردن طرفین نامعادله است که اگر طرفین هم‌علامت باشن، جهت عوض می‌شه!

الان دیگه می‌تونیم وارد انواع و اقسام نامعادلات درجه ۱ بشیم:

۱) $ax+b>c$

۲) $ax+b>cx+d$

۳) $cx+d<ax+b<ex+f$

حالت اول:

مثال ۱:

$$۲x-۱>۰\Rightarrow ۲x>۱\Rightarrow x>\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲:

$$۳x-۵>۱\Rightarrow ۳x>۶\Rightarrow x>\frac{۶}{۳}\Rightarrow x>۲$$

مثال ۳:

$$۳x+۷>۴\Rightarrow ۳x>-۳\Rightarrow x>\frac{-۳}{۳}\Rightarrow x>-۱$$

مثال ۴:

$$-۵x+۱<۶\Rightarrow ۵x>-۵\Rightarrow x>-۱$$

دقت کردین که تو مثال ۴ چیکار کردم؟! به منظور پیشگیری از فراموشی تعویض جهت، $-۵x$ رو به سمت راست منتقل کردم و ۶ رو بردم به سمت چپ، یعنی در واقع شد: $-۶+۱<۵x$ که به صورت $۵x>-۵$ نشون می‌دیم. دقت داشته باشید که من جهت رو عوض نکردم. مثل گوینده خبر که می‌تونه نتیجه دربی پایتخت رو اینجوری اعلام کنه:

تیم فوتبال استقلال برای چهارمین بار متوالی با گل فرهاد مجیدی، پرسپولیس را شکست داد. پرسپولیس < استقلال.

یا اینکه بگه: تیم پرسپولیس برای چهارمین بار متوالی با گل فرهاد مجیدی از استقلال شکست خورد: استقلال > پرسپولیس

دقت داشته باشید جهت عوض نشده و این گونه بود که عدد ۴ دیده به جهان گشود!! ☺

شوخی کردم. حالا پرسپولیسا ناراحت نشن. قصدم این بود که یه خورده حال و هواتون عوض شه.

بعداً هر جا تونستم از پرسپولیس هم تعریف می‌کنم. ☺

حالت دوم:

در دو طرف نامعادله عبارت درجه ۱ داریم، به طور کلی سیاستمون اینه؛ طوری جابه‌جایی رو انجام بدیم که ضریب x مثبت باشه:

مثال ۱:

$$۳x-۵>۲x+۱ \Rightarrow ۳x-۲x>۵+۱ \Rightarrow x>۶$$

مثال ۲:

$$۲x-۵>۳x-۴ \Rightarrow ۴-۵>۳x-۲x \Rightarrow -۱>x \Rightarrow x<-۱$$

دقت داشته باشید $x<-۱$ فرم صحیح نمایش نامعادله آخره و $-۱>x$ زیاد جالب نیست یعنی همیشه اول متغیر رو بیان می‌کنیم همونطور که تو بخش اول درس هم بهتون گفتم.

حالت سوم:

دو تا نامساوی همزمان داریم که اون هم خودش دو مدله. تو مدل اول فقط وسط متغیر داریم و طرفین عدد هستن ولی در مدل دوم بیش از یک سمت متغیر داریم:

مثال ۱:

$$۳<۲x-۱<۵ \xrightarrow{(+۱)} ۴<۲x<۶ \xrightarrow{\div(۲)} \frac{۴}{۲}<\frac{۲x}{۲}<\frac{۶}{۲} \Rightarrow ۲<x<۳$$

مثال ۲:

$$\frac{۵}{۳}<۲x-\frac{۱}{۳}<\frac{۸}{۳} \xrightarrow{(+\frac{۱}{۳})} \frac{۶}{۳}<۲x<\frac{۹}{۳} \Rightarrow ۲<۲x<۳ \xrightarrow{\div(۲)} ۱<x<\frac{۳}{۲}$$

مثال ۳:

$$۱<\frac{۲x-۱}{۳}<۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳<۲x-۱<۶ \xrightarrow{(+۱)} ۴<۲x<۷ \xrightarrow{(\div ۲)} ۲<x<\frac{۷}{۲}$$

پس تو این مدل دیدیم که باید مزاحم‌های اطراف x رو حذف کنیم، مثلاً وقتی یه (۱-) تو مثال (۱) مزاحم بود طرفین رو (۱+) کردیم و وقتی یه ضریب (۲) مزاحم بود، طرفین رو تقسیم بر ۲ کردیم. بریم سراغ مدل دوم:

مثال ۱:

$$\underbrace{x-۱<۲x-۵}_{(I)}<۳x+۲ \qquad x-۱<\overbrace{۲x-۵<۳x+۲}^{II}$$

اینجا دیگه باید جداجدا دو تا نامعادله رو حل کنیم و بعد اشتراک بگیریم:

$$\mathrm{I}: x-۱<۲x-۵ \Rightarrow ۵-۱<۲x-x \Rightarrow \boxed{x>۴}$$

$$\mathrm{II}: ۲x-۵<۳x+۲ \Rightarrow -۲-۵<۳x-۲x \Rightarrow \boxed{x>-۷}$$

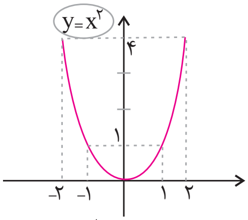
$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{x>۴}$$

دیگه نمی‌تونستیم طرفین رو با یه عدد ثابتی جمع و تفریق کنیم.

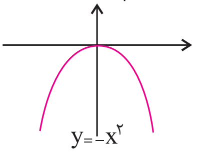
تذکر مهم: این سوال رو می‌تونن به فرم هندسی بیان کنن یعنی بگن در کدام بازه خط $۲x-۵$ بالاتر از خط $x-۱$ و پایین‌تر از خط $۳x+۲$ اســت. بالاتر یعنی بزرگتر و پایین‌تر یعنی کوچکتر. راســتی اگه گفتن خط $۲x-۳$ از خط $۵x+۷$ بالاتر نیست یعنی کوچکتر یا مساوی: $۲x-۳\leq ۵x+۷$

۵.۱: نامعادلات درجه ۲ و تعیین علامت

وقتی می‌گه $x^2-3x+2=0$ این یک خبر نیست عزیزم. این معادله یا سه جمله‌ای درجه ۲ یک سواله! داره از شما می‌پرسه x^2-3x+2 کجا صفره؟! داره از شما می‌پرسه نمودار این تابع محور xها رو در چه x یا xهایی قطع می‌کنه. خب شما یاد گرفتین که چون این معادله کامله، اول باید رابطه بین ضرایبش رو چک کنی. چون جمع ضرایب صفره، یکی از ریشه‌هاش ۱ و اون یکی $\frac{c}{a}$ میشه یعنی ۲. پس نمودار این تابع داره محور xها رو در نقاط ۱ و ۲ قطع می کنه. چقدر خوبه که همین جا بریم نمودار توابع درجه دوم رو یاد بگیریم. همونطور که به احتمال خیلی زیاد بلدی نمودار یک تابع درجه دوم به شکل کله قنده که در اصطلاح بهش سهمی هم گفته می‌شه، یعنی ∪ یا ∩.
اگر ضریب x^2 مثبت باشه، سهمی رو به بالاست (∪) و اگه منفی باشه رو به پایین (∩). دقت داشته باشید سهمی به شکل حرف U در الفبای انگلیسی نیست، چون دهانه حرف U در ادامه که رو به بالا قرار می‌گیره، به موازات محور yها میشه ولی در سهمی هر چه به سمت بیرون حرکت می‌کنیم، دهانه سهمی بازتر می‌شه.

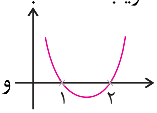


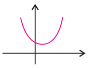
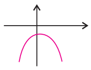
معروف‌ترین سهمی‌ها $y=x^2$, $y=-x^2$ هستند که نمودارهاشون رو می‌بینیم.



در نمودار اول $y\geq 0$ و در حالت دوم $y\leq 0$. این دو سهمی، دارای یک ریشه مضاعف به طول صفر هستن $(\Delta=0)$. حالا دو حالت دیگر هم وجود داره، ممکنه اصلاً ریشه نداشته باشن $\Delta<0$ و یا دو تا ریشه مختلف داشته باشن $(\Delta>0)$.

البته حالت‌های Δ رو برای بیان حالت‌های کلی سهمی گفتم و همونطور که در حل معادله دیدین برای حل لزوماً نیازی به Δ ندارید. پس اگر یک سهمی رو به بالا، دو تا ریشه داشته باشه بین دو ریشه زیر محور xها قرار می‌گیره و در واقع می‌شه کوچکتر از صفر. می‌گن علامت سهمی بین دو ریشه منفی می‌شه چون علامت y تعیین کننده‌ی علامته نه x.
پس در این حالت می‌گیم $y<0$. الان دیگه می‌تونیم یه نامعادله درجه دوم رو حل کنیم. می‌گن $x^2-3x+2<0$ رو حل کن. اولاً همونطور که گفتم این یک خبر نیست بلکه یک سواله و داره از ما می‌پرسه سهمی به معادله x^2-3x+2 کجاها منفی می‌شه و نمودارش زیر محور xها قرار می‌گیره. برای این کار اول باید ببینیم کجاها صفره یعنی در گام اول معادله رو حل کنیم. چون جمع ضرایب صفره ریشه‌ها می‌شه ۱ و ۲.
چون ضریب x^2 مثبته سهمی رو به بالاست پس اگر نمودارش رو تو ذهنمون تصور کنیم، می‌بینیم که بین دو ریشه منفی می‌شه

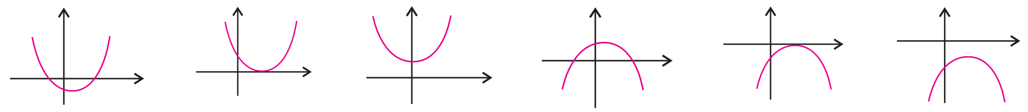
(۱،۲)  و خارج دو ریشه مثبت یعنی اگر آزمون می‌پرسید $x^2-3x+2>0$ یعنی نمودار این سهمی کجاها بالای محور xهاست جواب می‌شه، خارج دو ریشه یعنی: $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

حالا اگر $\Delta<0$ باشه، معادله ریشه نداره. پس یا بالاست  (همواره مثبت) و یا پایینه  یعنی همواره منفی. مثلاً وقتی ازت می‌پرسن $x^2-2x+3>0$ یعنی این سهمی کجاها مثبته؟ شما اول می‌ری که $x^2-2x+3=0$ رو حل کنی و می‌بینی $\Delta<0$ و معادله ریشه نداره. حالا چون ضریب x^2 مثبته سهمی رو به بالا و همواره بالای محور xهاست یعنی همیشه مثبته. جواب نامعادله می‌شه $\mathbb{R}$ ولی اگه برعکسش رو ازت می‌پرسید یعنی

می‌گفت $x^2-2x+3<0$ یعنی این سهمی کجاها منفی می‌شه، جواب می‌شد تهی $(\varnothing)$ یعنی هیچ جا. حالا حالت‌های کلی یعنی ۶ کد اصلی و مهم سهمی رو با چند تا مثال خوب با هم ببینیم:

مهم‌ترین نامعادله تو کنکور نامعادله‌ی درجه دوم که قبلش باید به انواع فرم‌های سهمی مسلط باشی.

۱) $a>0$، $\Delta>0$ — ۲) $a>0$، $\Delta=0$ — ۳) $a>0$، $\Delta<0$ — ۴) $a<0$، $\Delta>0$ — ۵) $a<0$، $\Delta=0$ — ۶) $a<0$، $\Delta<0$



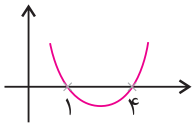
بین دو ریشه منفی — همواره نامنفی — همواره مثبت — بین دو ریشه مثبت — همواره نامثبت — همواره منفی

مثال ۱:

$x^2-5x+4<0$

معادلش: گام اول $\rightarrow x^2-5x+4=0 \xrightarrow{\text{جمع‌ضرایب‌صفر}} x=1$ ، $x=4$

سهمی: گام دوم $\rightarrow$



$1<x<4$

مثال ۲: $x^2-5x+4>0 \Rightarrow x<1 \text{ or } x>4$

مثال ۳: $x^2+4x+5>0 \Rightarrow x\in\mathbb{R} \rightarrow$ چون همواره مثبته

بـه این کارهایی که الان انجام دادیم می‌گن تعیین علامت. پس تعیین علامت یعنی مشـــخص‌کردن علامت y که کمک می‌کنه به حل نامعادلات.

پس الان وقتشه که یک نگاهی به تعیین علامت عبارت‌هایی که توان کلی‌شون نهایتاً ۲ میشه داشته باشیم با دو سوال خیلی خوب.

سوال اول: نامعادله $x-2>0$ با $\frac{1}{x-2}>0$ از نظر علامت چه فرقی دارد؟

جواب: هیچی، هر دو تا جوابش می‌شه $x>2$.

چون تو کسر $\frac{1}{x-2}$، صورت کسر تأثیری نداره. حالا اگه صورت منفی بود جواب چی می‌شه، مثلاً $\frac{-1}{x-2}>0$ حالا دیگه صورت منفیه و برای مثبت‌بودن کل کسر، لازمه که مخرج هم منفی باشه یعنی داریم: $x-2<0 \Rightarrow x<2$

سوال دوم: نامعادلات $(x-1)(x-2)<0$ یا $\frac{x-1}{x-2}<0$ چه فرقی با هم دارند؟

جواب: باز هم هیچی. وقتی ضـرب دو عبارت منفیه پس قطعاً مختلف‌العلامتن و تقسـیمشـون هم منفی میشـه. بنابراین می‌تونیم بگیم علامت $\frac{a}{b}$ میشه همون علامت ab.

$$(x-1)(x-2)<0 \Rightarrow 1<x<2$$

$$\frac{x-1}{x-2}<0 \Rightarrow (x-1)(x-2)<0 \Rightarrow 1<x<2$$

تذکر ۱: اگه می‌گفت $\frac{x-1}{x-2}\le 0$ قضـیه یه کوچولو فرق می‌کرد چون صورت کسر می‌تونه صفر باشد ولی مخرج نه و جواب می‌شد $1\le x<2$.

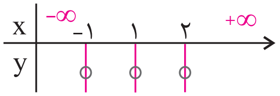
* اگر درجه کلی عبارت بیشتـر از ۲ بود ناچاریم که جدول تعیین علامت رسـم کنیم، الان روش کار رو بهتون یاد می‌دم، مثلاً از شما می‌خوان نامعادله زیر رو حل کنید:

$$(x+1)(x^2-3x+2)<0$$

گام اول: کل عبارت باید تجزیه بشه و ریشه‌ها مشخص بشن: $(x+۱)(x-۱)(x-۲)<۰$

گام دوم: الان سه تا ریشه درجه اول داریم که بهشون می‌گن ریشه ساده.

ریشــه‌ها رو به ترتیب روی محور xها مشخص می‌کنیم و یه محور خیلی کوتاه در سمت چپ جایی که منفی بی‌نهایت داریم، به محور xها عمود می‌کنیم.

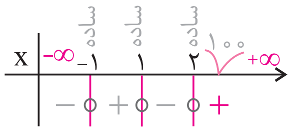


گام سوم: حالا باید علامت ۴ تا خونه رو مشخص کنیم. کافیه یه عددی که بزرگتر از ۲ باشه، تو تابع اصلی جاگذاری کنیم ببینیم جوابش مثبت می‌شه یا منفی.

مثلاً ۳ یا ۴ یا ۵ یا اصلاً ۱۰۰ که دیگه خیالمون راحت باشه، هیچ محاسبه‌ای نداریم:

علامت خونه آخر مثبته $\Leftarrow (۱۰۰+۱)(۱۰۰-۱)(۱۰۰-۲)>۰$

حالا یکی یکی که برمی‌گردیم عقب و به ریشه‌های ساده برخورد می‌کنیم علامت رو عوض می‌کنیم: چون قبل و بعد از ریشه ساده علامت عوض می‌شه.



گام آخر: صورت سوال از ما خواسته بود بگیم کجاها منفیه. پس جواب می‌شه بازه‌هایی که تو جدول yشون منفی هستن:

$(-\infty,-۱)\cup(۱,۲)$

تذکر ۱: اگر همین سـوال بالا به صـورت $\dfrac{x+۱}{(x-۱)(x-۲)}<۰$ بود هم باز همینطوری حل می‌شد، چون علامت تقسیم همون ضرب علامت‌هاست. با این تفاوت که چون $x=۱,۲$ ریشه‌های مخرج کسر هستن به جای این که جواب رو صفر کنن باید از دامنه خارج بشن. البته چون نامساوی به صورت $\leq$ نیست جواب نهایی هم یکسانه ولی اگر به این صورت بود، جواب‌ها متفاوت می‌شد:

۱) $(x+۱)(x-۱)(x-۲)\leq ۰ \Rightarrow (-\infty,-۱]\cup[۱,۲]$

۲) $\dfrac{x+۱}{(x-۱)(x-۲)}\leq ۰ \Rightarrow (-\infty,-۱]\cup(۱,۲)$

تذکر ۲: اگر در تعیین علامت ریشه درجه دوم (مضاعف) یا ریشه‌ای داخل قدرمطلق داشته باشیم علامت در اطراف این دو نوع ریشه تغییر نمی‌کنه. به مثال روبرو توجه بفرمایید:

$$\frac{(x+۴)^۳(x^۲+۴x+۳)(x+۵)^۲}{|x-۳|(-x^۲+۳x-۲)}\geq ۰$$

الان با ۴ نوع ریشه مواجه هستیم که تک تک اون‌ها رو براتون بررسی می‌کنم:

ریشه مکرر فرد که از نظر علامتی مثل ساده عمل می‌کنه: $(x+۴)^۳=۰\Rightarrow x+۴=۰\Rightarrow x=-۴$

هر دو ساده: $x^۲+۴x+۳=۰\Rightarrow (x+۱)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۱, x=-۳ \Rightarrow$

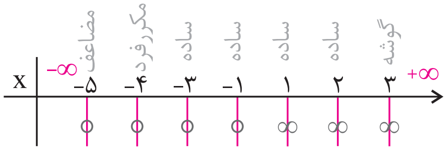
ریشه مضاعف که علامت رو عوض نمی‌کنه: $(x+۵)^۲=۰\Rightarrow x+۵=۰\Rightarrow x=-۵\Rightarrow$

$|x-۳|=۰\Rightarrow x-۳=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow$

ریشه داخل قدرمطلق هم علامت رو عوض نمی‌کنه؛ کتابتون به این نقاط می‌گه گوشه:

این هم دو تا ریشه ساده: $-x^۲+۳x-۲=۰\Rightarrow ۰=$ جمع ضرایب $\Rightarrow x_۱=۱ \;,\; x_۲=۲\Rightarrow$

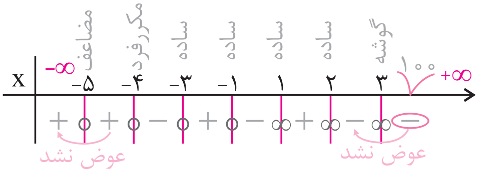
حالا ریشه‌ها رو به ترتیب می‌ریزیم روی محور xها، اونایی که صورت رو صفر می‌کنن زیرش ۰ و اونایی که مخرج رو صفر می‌کنن، زیرش ∞ می‌ذاریم.



حالا کافیه با همون عدد ۱۰۰ علامت خونه آخر رو تعیین کنیم. پس به جای xهای عبارتمون ۱۰۰ می‌ذاریم. توجه کنید فقط علامت پرانتزها مهمه نه مقدار دقیقشون. ضمناً تو درجه دوم‌ها کافیه جمله پُرتوان یعنی همون x^2 یا $-x^2$ رو در نظر بگیریم.

پس خونه آخر علامتش منفی شد: $x=100 \Rightarrow \dfrac{(\oplus)^3(\oplus)(\oplus)^2}{|\oplus|(\ominus)}<0 \Rightarrow$

حالا یکی یکی بر می‌گردیم به سمت عقب. فقط تو $x=3$ و $x=-5$ علامت رو عوض نمی‌کنیم و بقیه جاها علامت رو عوض می‌کنیم:



مرحله آخر اعلام جواب نهاییه. از ما پرسیده بود کجاها بزرگتر مساوی صفره؟! $(-\infty,-4]\cup[-3,-1]\cup(1,2)$

۶ـ۱: نامعادلات گویا

بعد از این مطالب خوبی که تو دو صفحه اخیر یاد گرفتین وقت جمع‌بندی و دسته‌بندیه. این نامعادلات رو براتون به دو دسته تقسیم می‌کنم. دسته اول نامعادلات گویایی هستند که یک طرف نامعادله صفره؛ که خودش سه حالت داره:

۱) صورت معلوم العلامت و مخرج درجه ۱ ← کافیه علامت مخرج رو تعیین کنی.

۲) صورت و مخرج هر دو درجه ۱ ← علامت $\dfrac{a}{b}$ علامت ab!

۳) مجموع درجات صورت و مخرج بیشتر از ۲ ← جدول تعیین علامت.

چند مثال از حالت ۱:

مثال ۱: $\dfrac{1}{x-2}>0 \xrightarrow{\text{صورت که}+} x-2>0 \Rightarrow x>2$

مثال ۲: $\dfrac{x^2+1}{x-2}<0 \xrightarrow{\text{صورت}+} x-2<0 \Rightarrow x<2$

مثال ۳: $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}>0 \xrightarrow{\text{صورت همواره}+} x-2>0 \Rightarrow x>2$

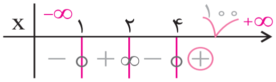
چند مثال از حالت ۲:

مثال ۱: $\dfrac{x+1}{x-2}<0 \Rightarrow (x+1)(x-2)<0 \Rightarrow -1<x<2$

مثال ۲: $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-3x+2}<0 \Rightarrow \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}<0 \Rightarrow (x-1)(x-2)<0 \Rightarrow 1<x<2$

حواستون باشه همیشه می‌تونید صورت و مخرج کسر رو با هم ساده کنید ولی اگر لازم بود باید ریشه مخرج رو از دامنه خارج کنید.

مثال از حالت ۳:



جواب آخر: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-2}\le 0 \Rightarrow (-\infty,1]\cup(2,4]$

دسته دوم نامعادلاتی که هیچ طرف صفر نداریم و سمت راست نامعادله یک عدد غیر صفر و یا یک عبارت xدار قرار می گیره. قبل از اینکه وارد حالت‌های ۴، ۵ و ۶ بشم می‌خوام عبارت‌های همواره نامنفی مهم و معروف رو براتون بگم. راستی فرق همواره مثبت با همواره نامنفی اینه که تو همواره مثبت $y>0$ و هیچ وقت صفر نمیشه ولی تو همواره نامنفی $y\ge 0$ و گاهی هم صفر می‌شه. البته هر همواره نامنفی که با یک مقدار مثبت ثابت جمع بشه، تبدیل به همواره مثبت می‌شه، پس همواره مثبت‌ها رو با هم ببینیم.

همواره مثبت‌ها

۱. هر چیزی که به توان زوج و یا فرجه زوج برسه نامنفیه و وقتی با یک مقدار مثبت جمع بشه، می‌شه همواره مثبت.
۲. هر چیزی که داخل قدرمطلق باشه، همواره نامنفیه و وقتی با یک مقدار مثبت جمع بشه همواره مثبت می‌شه.
۳. تمام درجه دوم‌هایی که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشه همواره مثبت هستن.
۴. تمام عبارت‌های نمایی به صورت a^x همواره مثبت هستن.

تذکر ۱: هر همواره مثبتی که پشتش منفی بیاد، میشه همواره منفی!

تذکر ۲: تو حل نامعادلات گویا می‌تونیم طرفین کسرها رو در عبارات همواره مثبت ضرب کنیم و جهت عوض نمیشه. اگر در همواره منفی ضرب کنیم براساس اصولی که تو نامساوی‌ها خوندیم، جهت عوض می‌شه. طرفین وسطین‌کردن تو نامعادلات کسری در واقع همین ضرب طرفین در مخرج‌هاست. مثلاً وقتی نامعادله $\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$ رو به ما می‌دن مخرج همواره مثبته و می‌تونیم طرفین رو تو (x^2+4) ضرب کنیم: $(x^2+4)\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2(x^2+4)$ حالا اون (x^2+4) تو صورت و مخرج سمت چپ با هم می‌رن و انگار که طرفین وسطین کردیم.

راستی طرفین وسطین چی بود؟ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. به a، d طرفین و به c، d وسطین می‌گیم و داریم: $\boxed{ad = bc}$

حالا می‌تونم با خیال راحت حالت‌های ۴ تا ۶ رو بهتون یاد بدم. همونطور که گفتیم تو این دسته هیچ کدوم از طرفین نامعادله صفر نیست.

۴) مخرج همواره مثبت؛ طرفین وسطین واجب و جهت عوض نمی‌شه.
۵) مخرج همواره منفی؛ طرفین وسطین واجب و جهت عوض می‌شه.
۶) مخرج دارای علامت متغیر؛ طرفین وسطین حرومه. همه رو میاریم سمت چپ و مخرج مشترک می‌گیریم.

مثال از حالت ۴:

$$\frac{2x^2-x}{x^2+2} > 1 \Rightarrow 2x^2 - x > x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{گام‌اول}: x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2 \\ \text{گام دوم}: \text{جواب میشه خارج دو ریشه} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2 \end{cases}$$

مثال از حالت ۵:

$$\frac{x^2-2}{-3x^2-1} > 1 \Rightarrow x^2 - 2 < -3x^2 - 1 \Rightarrow 4x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

مثال از حالت ۶: اینجا دیگه مخرج درجه اوله و جزء همواره مثبت‌ها نیست.

مثال ۱:

$$\frac{x^2+1}{x-1} < 2$$

پس دیگه طرفین وسطین حرومه و باید ۲ رو بیاریم سمت چپ و مخرج مشترک بگیریم:

$$\frac{x^2+1}{x-1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x^2+1-2(x-1)}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x+3}{x-1} < 0$$

رسیدیم به یکی از سه حالت اول این حالت شماره چنده بچه‌ها؟! اشتباه نکنین این حالت ۳ نیست چون صورت دلتاش منفیه و همواره مثبته. این حالت شماره‌ی یکه و داریم: کسری که صورتش مثبته زمانی منفی می‌شه که مخرجش منفی باشه و تمام! $x - 1 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 1}$

مثال ۲:

$$\frac{x^2-2}{x}\le 1\Rightarrow \frac{x^2-2}{x}-1\le 0\Rightarrow \frac{x^2-2-x}{x}\le 0\Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x}\le 0\Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x}\le 0\xrightarrow{\text{حالت‌شماره۳}}$$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	

جواب آخر: $(-\infty,-1]\cup(0,2]$

پس همونطور که دیدیم تو حالت ۶ بعد از مخرج مشترک‌گیری با یکی از حالت‌های ۳ گانه اول مواجه می‌شیم و به یکی از اون سه راه، حلش می‌کنیم.

۱.۷: معادلات گویا

به هر معادله‌ای که به صورت کسری باشه و البته متغیر یعنی x تو مخرج کسر حضور داشته باشه می‌گن معادله گویا.

مثلاً معادله‌ی $\frac{2x+1}{3}=x-1$ گویا نیست و یک معادله درجه اوله. کافیه طرفین رو در عدد ۳ ضرب کنیم:

$$2x+1=3x-3\Rightarrow \boxed{x=4}$$

حالا اگه تو همین معادله یکی از xها می‌رفت تو مخرج، یه معادله گویا داشتیم و لازم بود که عملیات طرفین وسطین رو برای خروج از بحران کسر انجام بدیم: $\frac{x+2}{x}=x$

$$x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0\xrightarrow{a+c=b}\underline{x_1=-1}\ ,\ \underline{x_2=2}$$

حتماً بعد از حل هر معادله گویا چک کنید که جواب یا جواب‌های به دست‌اومده مخرج کسرتون رو صفر نکنن که اینجا مشکلی نیست.

مثال ۲:

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x}$$

گام اول: سمت چپ مخرج مشترک:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x(x-1)}\Rightarrow \frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2-x}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{4x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2-x}{x(x-1)}$$

گام دوم: حالا که به دو تا کسر که حالت مطلوبمونه رسیدیم چک کنیم ببینیم آیا ساده‌سازی داریم؟! بله؛ عبارت‌های $x-1$ تو مخرج‌ها رو می‌تونیم با هم ساده کنیم. پس داریم: $\frac{4x-2}{x+1}=\frac{2-x}{x}$

گام سوم: حالا دیگه هیچ دو عبارت یکسانی برای ساده‌شدن نداریم و آماده‌شده برای طرفین وسطین، البته بهتره که به جای $2-x$ بنویسیم: $-x+2$

$$(4x-2)x=(x+1)(-x+2)\Rightarrow 4x^2-2x=-x^2+2x-x+2\Rightarrow 5x^2-3x-2=0$$

$$\xrightarrow[\text{ضرایب صفره}]{\text{جمع}}\begin{cases}x_1=1 & \times\\ x_2=\frac{-2}{5} & \checkmark\end{cases}$$

فقط حواست باشه که $x=1$ قبول نیست، چون مخرج رو صفر می‌کنه.

مثال ۳:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}=\frac{x^2-16}{x-6}$$

تذکر مهم: همونطور که تو گام دوم مثال قبلی گفتم اول باید تا حد امکان عبارت‌های یکسان رو ساده کنیم. پس

گام اول میشه تجزیه:

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-6)}=\frac{(x-4)(x+4)}{x-6}$$

همونطور که تو بخش قبل دیدیم، صورت و مخرج رو تو نامعادلات هم می‌تونستیم با هم ساده کنیم. تو معادلات بیشتر از این‌ها جای ساده‌سازی داریم، یعنی علاوه بر صورت و مخرج!

سه حرکت مهم بزن‌بزن در ساده‌سازی معادلات گویا:
۱) صورت و مخرج بزن‌بزن خداحافظی با ریشه!
۲) مخرج و مخرج بزن‌بزن خداحافظی با ریشه!
۳) صورت و صورت بزن‌بزن ولی ریشه رو نگهدار!

حالا بریم این موارد سه‌گانه رو تو مثال خوب خودمون ببینیم:

۱) از تو صورت و مخرج کسر سمت چپ $(x-1)$ ها رو با هم ساده می‌کنیم و با $x=1$ هم به عنوان ریشه مخرج حداحافظی می‌کنیم.

۲) داخل مخرج‌ها هر دو $(x-6)$ رو با هم می‌زنیم و از $x=6$ که ریشه مخرج‌هامونه هم خداحافظی می‌کنیم.

۳) $\frac{(x-4)(x+4)}{1}=\frac{x-4}{1}$ باقی مونده که $(x-4)$ ها رو با هم می‌زنیم ولی دیگه با $x=4$ مثل دو حالت قبلی خداحافظی نمی‌کنیم بلکه به عنوان یک جواب معادله اون رو حفظ می‌کنیم.

پس تا اینجا یک جواب معادله شد $x=4$ و معادله به صورت $x+4=1$ باقی موند که جوابش میشه $\boxed{x=-3}$

دقت داشته باشید وقتی عبارت‌ها رو به شکل ضرب ساده می‌کنیم، عدد ۱ باقی می‌مونه به جاشون نه صفر!

پس معادلمون دو تا جواب داشت: $x=4\,,\,-3$ که هر دو قبولن چون هیچ کدوم مخرج‌ها رو صفر نمی‌کنن!

۸ـ۱: معادلات گنگ یا رادیکالی

برای حل این معادلات کافیه رادیکال رو یک طرف معادله تنها گیرش بندازی و بعد طرفین رو به توان ۲ برسونی. البته حتماً باید حواست باشه که اون طرف نامنفی باشه و با این شرط به توان ۲ برسونی. اگر دو طرف رادیکال داشتی هم که دیگه بهتر چون شرط لازم نداره. ضمناً دامنه رادیکال هم فراموش نشه، زیر رادیکال نباید منفی باشه.

مثال ۱:

$$2\sqrt{x}=\sqrt{3x-3}\xrightarrow{\text{طرفین توان ۲}}4x=3x-3\Rightarrow x=-3$$

این جواب قبول نیست، چون زیر رادیکال‌ها رو منفی می‌کنه. پس این معادله جواب نداره!

مثال ۲: اول رادیکال رو میاریم این طرف که هم تنها بشه و هم ضریبش مثبت باشه:

$$2x=1-\sqrt{2-x}$$
$$\sqrt{2-x}=1-2x$$

حالا با شرایط $1-2x\geq 0$ یعنی $x\leq\frac{1}{2}$ طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم:

$$2-x=(1-2x)^2\Rightarrow 2-x=4x^2-4x+1$$
$$\Rightarrow 4x^2-3x-1=0\xrightarrow{a+b+c=0}x_1=1\;,\;\;x_2=\frac{-1}{4}$$

$x_1=1$ قبول نیست چون تو شرطمون یعنی $x\leq\frac{1}{2}$ صدق نمی‌کنه ولی $x_2=\frac{-1}{4}$ قبوله چون هم تو شرطمون صدق می‌کنه و هم زیر رادیکال رو منفی نمی‌کنه.

مثال ۳:

$$x+\sqrt{x}=۶$$

اول x رو میاریم سمت راست که $\sqrt{x}$ تنها بشه:

$$\sqrt{x}=۶-x$$

حالا با شرط $۶-x\geq ۰$ یعنی $x\leq ۶$ طرفین به توان ۲:

$$x=x^{۲}-۱۲x+۳۶$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰\Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=۴\\ x_{۲}=۹\end{cases}$$

$\boxed{x_{۲}=۹}$ قبول نیست چون تو شرطمون صدق نمی‌کنه، پس جواب می‌شه، فقط $\boxed{x=۴}$.

۹.۱: معادلات و نامعادلات قدرمطلق

اولاً مهم‌ترین و حیاتی‌ترین ویژگی قدرمطلق اینه که اگر عبارت داخلش مثبت باشه، خودش و اگر منفی باشه، قرینش از داخل قدرمطلق خارج می‌شه. البته این مطلب رو تو صفحه ۸ هم دیدی ولی اینجا مفصل بررسی می‌کنیم.

$$|u|=\begin{cases} u\ ,\ u\geq ۰\\ -u\ ,\ u<۰\end{cases}$$

* در واقع قدرمطلق همیشه از ما علامت می‌خواد که بره کنار.

بر همین اساس داریم:

$$|x|=\begin{cases} x\ ,\ x\geq ۰\\ -x\ ,\ x<۰\end{cases}\quad ,\quad |x-۱|=\begin{cases} x-۱\ ,\ x\geq ۱\\ -(x-۱)\ ,\ x<۱\end{cases}$$

مثلاً وقتی می‌گه برای xهای بازه (۳ ، ۱) حاصـل عبارت $|x-۱|+x|x-۵|$ کدام است چیکار می‌کنیم؟ تو بازه (۳ ، ۱) عدد ۲ رو انتخاب می‌کنیم و تو قدرمطلق‌های داده‌شده قرار می‌دیم.

$|\underbrace{x-۱}_{\oplus}|+x|\underbrace{x-۵}_{\ominus}|$. پس اولی خودش بیرون میاد و دومی قرینش:

$$x-۱-x(x-۵)$$

البته با همین ویژگی می‌شه تمام معادلات و نامعادلات قدرمطلقی رو حل کرد ولی راه‌های بهتری هم داریم. به طور کلی ۵ حالت وجود داره:

* قدر همو می‌دونن با همدیگه می‌مونن، با خوب و بد هم می‌سازن، بدون شرط $\boxed{\text{Tip۱}}\ |f|=|g|\Rightarrow f=\pm g$

مثال ۱:

$$|x-۱|=|۲x-۵|\Rightarrow x-۱=\pm(۲x-۵)\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۲x-۵\Rightarrow x=۴\\ x-۱=-۲x+۵\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

* اینجا فرض می‌کنیم مثل بالاست ولی شرط می‌ذاریم که g نباید منفی بشه: $\boxed{\text{Tip۲}}\ |f|=g\Rightarrow f=\pm g$

مثال ۲:

$$|x-۱|=\underbrace{۲x-۵}_{g}\Rightarrow \text{مثل بالا}\Rightarrow \begin{cases} x=۴\rightarrow g(۴)=۲(۴)-۵>۰\Rightarrow \text{پس قبوله}\\ x=۲\rightarrow g(۲)=۲(۲)-۵<۰\Rightarrow \text{پس قبول نیست}\end{cases}$$

مثال ۳:

$$\boxed{\text{Tip۳}}\ |u|<a\Rightarrow -a<u<a$$

$$|x-۱|<۲\Rightarrow -۲<x-۱<۲\Rightarrow -۱<x<۳$$

مثال ۴:

$$\boxed{\text{Tip۴}}\ |u|>a\Rightarrow u>a\ \text{ یا }\ u<-a$$

$$|x-۱|>۲\Rightarrow x-۱>۲\ \text{ یا }\ x-۱<-۲\Rightarrow x>۳\ \text{ یا }\ x<-۱$$

این تنها حالتیه که طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم: $\boxed{\text{Tip۵}}\ |u|>|v|\rightarrow u^{۲}>v^{۲}$

مثال ۵:

$$|x-۱|>|x-۲|\Rightarrow (x-۱)^{۲}>(x-۲)^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱>x^{۲}-۴x+۴\Rightarrow ۲x>۳\Rightarrow \boxed{x>\frac{۳}{۲}}$$

۱.۱۰: معادلات براکتی (جزء صحیح)

همونطور که قدرمطلق همیشه از ما علامت می‌خواست که کنار بره، براکت هم از ما عدد می‌خواد که کنار بکشه. یعنی داریم:

$$[u]=\begin{cases} \text{خودش}(u) & , \quad u\in\mathbb{Z} \\ \text{عددصحیح‌قبلیش} & , \quad u\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

یعنی مثلاً $[۲]=۲$ ولی $[۲/۵]=۲$ یا $[۳/۹]=۳$, $[-۲/۵]=-۳$

دو ویژگی و موضوع تو براکت خیلی اهمیت داره:

۱) اگر $[u]=k$ شده باشه $k\le u<k+۱$ بوده.

۲) عدد صحیح می‌تونه از براکت خارج بشه اگر به شکل جمع و تفریق باشه. (عدد صحیح بیرون بیا، بیرون بیا این براکته!)

بریم مثال بزنیم بچه‌ها:

مثال ۱: $[x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳$

مثال ۲: $[۲x-۱]=۳\Rightarrow [۲x]-۱=۳\Rightarrow [۲x]=۴\Rightarrow ۴\le ۲x<۵\Rightarrow ۲\le x<\frac{۵}{۲}$

مثال ۳: $[x+[x]]=۲\Rightarrow [x]+[x]=۲\Rightarrow [x]=۱\Rightarrow ۱\le x<۲$

$[x]$ چون صحیح بود مثل عدد (۱-) تو مثال ۲ از داخل براکت بیرون اومد.

یک مقایسه مهم و بسیار زیبا بین ویژگی‌های قدر مطلق و براکت

قدر مطلق	براکت
عدد صحیح به شکل ضرب و تقسیم بیرون میاد لزوماً درست نیست $\lvert x+۲\rvert\ne\lvert x\rvert+۲$	عدد صحیح به شکل جمع و تفریق بیرون میاد $[x\pm۲]=[x]\pm۲$
برعکس حالت بالا بهش می‌گیم jumping $\lvert ۲x\rvert=\lvert ۲\rvert\lvert x\rvert=۲\lvert x\rvert$	برعکس حالت بالا $[۲x]\ne۲[x]$
تک تک بزرگتره، وقتی هم‌علامتن مساویه $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert\ge\lvert x+y\rvert$	تک تک کوچیکتره، وقتی جمع اعشاریا به یک نمی‌رسه مساویه! $[x]+[y]\le[x+y]$

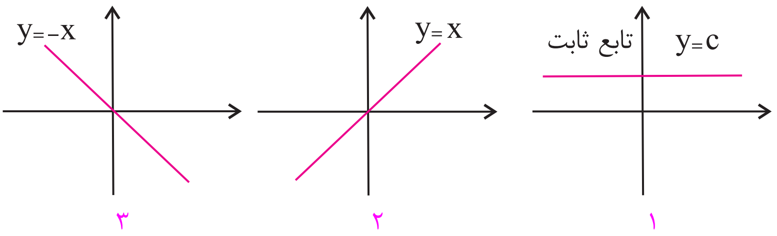
❋ دو تابع بسیار مهم براکتی: تابع $x-[x]$ معروف به جزء اعشاریه و همیشه بین صفر و یکه. تابع دوم $[x]+[-x]$ که تو Xهای عضو Z صفر می‌شه و تو بقیه جاها (۱-)

بخش دوم

تسلط بر رسم تمام نمودارها در هر سه کتاب به جز توابع مثلثاتی و لگاریتمی و نمایی

۱.۲: نمودارهای درجه ۱

نمودار توابع خطی به ۳ صورت مقابل است:

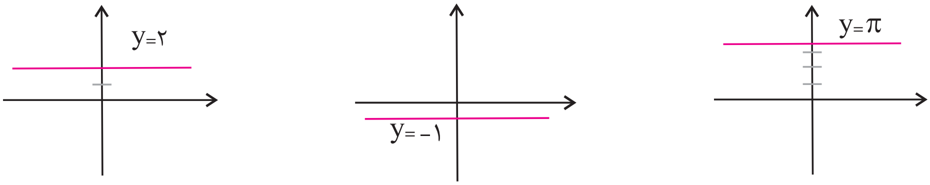


دسته اول توابع ثابت که معادله آن‌ها به صورت $y = \text{Constant}$ یعنی یک عدد ثابت است.

دسته دوم توابع خطی با شیب مثبت که به نمایندگی همه $y = x$ یعنی نیمساز ناحیه اول و سوم رو گذاشتم.

دسته سوم هم توابع خطی با شیب منفی که به نمایندگی از طرف همه $y = -x$ یعنی نیمساز ناحیه دوم و چهارم رو گذاشتم.

حالا بریم مثال‌هایی از تابع ثابت ببینیم و بعد بپردازیم به رسم خطوطی که شیب دارن.

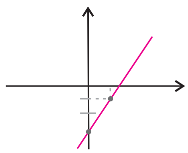


برای رسم خطوطی که شیب دارن دو راه وجود داره. **روش اول** اینه که دو تا نقطه از تابع رو به دست بیاری و به هم وصل کنی. پس برای کشیدن خط با این روش، جلوی معادلش یه صلیب باز می‌کنی و به x عدد می‌دی و y رو به دست میاری. البته نقاط تلاقی با محورها بهترین نقاط هستند.

مثال ۱:

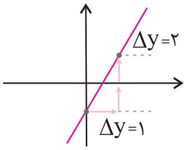
$$y = ۲x - ۳ \rightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline ۱ & -۱ \rightarrow y = ۲(۱) - ۳ = -۱ \\ ۰ & -۳ \rightarrow y = ۲(۰) - ۳ = -۳ \end{array}$$

حالا دو نقطه (۱- و ۱) و (۳- و ۰) رو به هم وصل می‌کنیم:



روش دوم: یک خط به فرم $y = ax + b$ رو در نظر بگیر. a شیب و b عرض از مبدأ این خطه. عرض از مبدأ که اسمش روشه و فاصله عرضی تا مبدأ مختصات، شیب هم که همون $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یعنی $\frac{\text{تغییرات عرضی}}{\text{تغییرات طولی}}$ یا صبر کنید به یک زبون ساده‌تر بهتون بگم. اگه Δx رو کلاً یک در نظر بگیریم شیب می‌شه همون Δy یا تغییرات عرضی. یعنی چی؟ مثلاً وقتی می‌گه شیب ۲ باشه، یعنی شما از هر نقطه‌ای که شروع می‌کنی یک واحد برو جلو و دو واحد برو بالا.

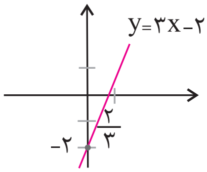
مثال ۱: $y = ۲x - ۱$

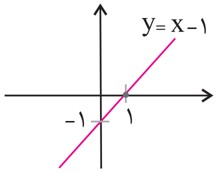


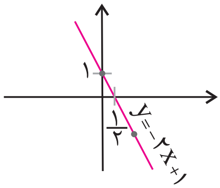
عرض از مبدأ چنده؟ (۱-). پس می‌شینم تو $y=-۱$ روی محور yها.
شیبمون شده ۲ یعنی اگر از نقطه $(۰,-۱)$ یک واحد بریم جلو خط ما رو ۲ واحد بالا می‌بره:

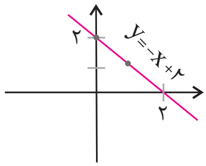
پس روش رسم خط اینجوری شد که تو عرض از مبدأ می‌شینیم و با شیب حرکت می‌کنیم. اگر شیبمون (۳) بود یه دونه جلو سه تا بالا و اگر شیبمون (۲-) بود یه دونه جلو ۲ تا پایین.

بریم ۴ تا خط با هم بکشیم و یاد بگیریم:



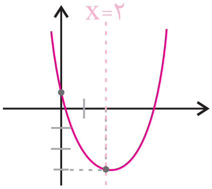






۲ـ۲: درجه ۲

قبلاً تو بخش اول نمودار درجه دو رو به صورت تقریبی دیدین و فقط به منظور تعیین علامت.
حالا بریم سراغ رسم دقیق درجه دوم. مثلاً می‌خوایم $y=x^{۲}-۴x+۱$ رو رسم کنیم.

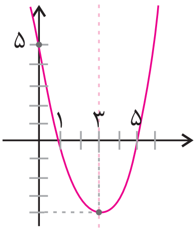


گام اول: رأس سهمی رو پیدا می‌کنیم. طول رأس میشه $x_s=\frac{-b}{۲a}$ که اینجا میشه $\frac{-(-۴)}{۲(۱)}=۲$ و بعد با جاگذاری تو خود معادله عرض رأس هم به دست میاد.

$y_s=(۲)^{۲}-۴(۲)+۱=-۳$ مختصات رأس $s=(۲,-۳)$

گام دوم: عرض از مبدأ یعنی، عدد ثابت هم که مشخصه نقطه $(۰,۱)$. این دو نقطه رو به هم وصل می‌کنیم و بعد قرینه این شکل رو در سمت راست می‌کشیم.

همونطور که می‌بینید سهمی نسبت به خط $x=۲$ متقارنه که به این خط می‌گن محور تقارن سهمی.
تو مثالی که الان رسم کردیم محل برخورد منحنی با محور xها یا همون ریشه‌های معادله مشخص نیست؛ چون اعداد صحیحی نیستند. بریم یه مثال با هم ببینیم که اینطور باشه.



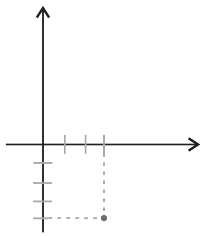
$$y=x^{۲}-۶x+۵ \Rightarrow \begin{cases} x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۶)}{۲(۱)}=۳ \\ y_s=(۳)^{۲}-۶(۳)+۵=-۴ \end{cases} \Rightarrow s(۳,-۴)$$

عرض از مبدأ سهمی هم که نقطه $(۰,۵)$ و چون ضریب $x^{۲}$ مثبته سهمی رو به بالاست. پس اول نیمه سمت چپ رو رسم می‌کنیم و بعد قرینه نسبت به خط $x=۳$ به سمت راست.

❊ اینجا برخلاف مثال قبل، ریشه‌های معادله هم مشخصه: $x^{۲}-۶x+۵=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=۵ \end{cases}$

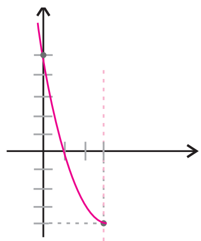
توجه برای عزیزانی که خوب متوجه نشدن یک بار مرحله به مرحله رسم رو نشون می‌دم که ایشالله یاد بگیرن.

مرحله اول: رأس



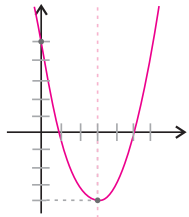
S (۳ و -۴)

مرحله دوم: وصل رأس به عرض از مبدأ



S (۳ و -۴)

مرحله سوم: رسم قرینه خط نسبت به محور تقارن یعنی خط $x=۳$. ریشه‌ها هم می‌تونن کمک کنن یعنی نقاط $(۵,۰)$ و $(۱,۰)$

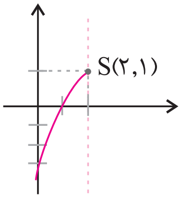


S (۳ و -۴)

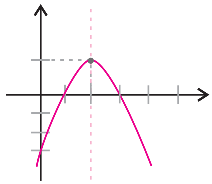
اگر ضریب $x^۲$ منفی باشه رو به پایین رسم می‌شه. مثلاً $-x^۲+۴x-۳$.

$$x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=۲$$

$$y_s=-۴+۴(۲)-۳=۱\Rightarrow s(۲,۱)$$



حالا نسبت به خط $x=۲$ قرینه می‌کنیم به سمت راست محور تقارن. ریشه سمت راست محورمون هم نقطه $x=۳$ می‌شه



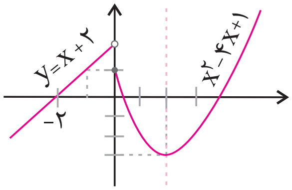
۳ـ۲: نمودارهای دو یا سه ضابطه‌ای

گاهی اوقات توابع رو به صورت چند ضابطه‌ای از شما می‌خوان که به همون شکلی که تو دو درسنامه‌ی قبلی بهتون یاد دادم، رسم می‌کنید با این تفاوت که هر نمودار در دامنه خودش! به چند تا مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۴x+۱ & , \quad x\geq ۰\\ x+۲ & , \quad x<۰\end{cases}$$

سهمی تو xهای مثبت و خط تو xهای منفی. (همین سهمی تو مثال ۱ در درسنامه‌ی قبلی رسم شد.)



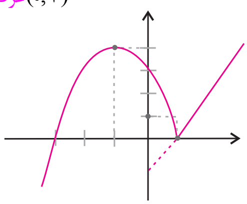
مثال ۲:

$$f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x+۳ & , \ x\leq ۱\\ x-۱ & , \ x>۱\end{cases}$$

اول سهمی $\Rightarrow \begin{cases}x_s=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{-(-۲)}{۲(-۱)}=-۱\\ y_۲=-(-۱)^۲-۲(-۱)+۳=۴\end{cases}$

$$-x^۲-۲x+۳=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x_۱=۱\\ x_۲=-۳\end{cases}$$

عرض از مبدا سهمی $(۰,۳)$

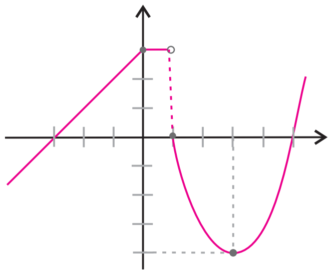


توجه اگر دقت کنید تو مثال ۱ نقطه مرزی $x=0$ بود و خط و منحنی تو مرز هم عرض نشدن و به هم نرسیدن (اصطلاحاً تابع ناپیوسته شد) ولی تو مثال ۲ که نقطه مرزی‌مون $x=1$ بود هر دو تو نقطه $x=1$ دارای عرض صفرشدن (اصطلاحاً منحنی تو مرز پیوسته شد).

وقتی پیوستگی اتفاق می‌افته دیگه اون نقطه کلاً توپُر می‌شه و مهم نیست که مال کدوم ضابطه است.

مثال ۳:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+5 & , \ x\ge 1 \\ 3 & , \ 0<x<1 \\ x+3 & , \ x\le 0 \end{cases}$$

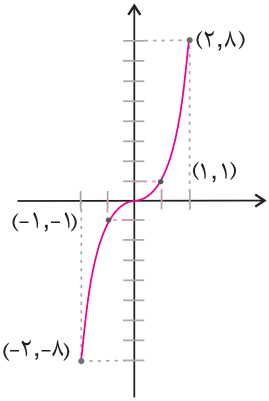


سهمی رو که تو مثال دوم درسنامه قبلی رسمش کردیم و اینجا فقط تو Xهای بزرگتر مساوی یک می‌خوایمش.

بین صفر و یک تابع ثابت $y=3$ و تو X های منفی خط $y=x+3$. تو مرز صفر پیوسته و تو مرز یک ناپیوسته.

۲-۴: نمودارهای درجه ۳ (البته در حد کتاب)

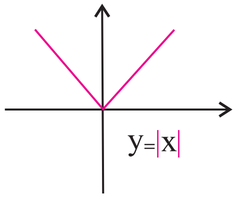
متأسفانه یا خوشبختانه برعکس نظام قدیم که تابع درجه ۳ به شدت مورد بحث و بررسی قرار می‌گرفت در نظام جدید به جز یک تابع درجه ۳ که در صفحه ۱۰۷ کتاب ریاضی ۳ اون هم در فصل کاربرد مشتق اومده سایر نمودارها فقط به شکل «لُر» یعنی درجه سوم بسیار ساده هستند. یک بار این تابع رو با نقطه‌یابی براتون رسم می‌کنم تا با مختصات نقاط مختلف و شکل کلی اون آشنا بشید. به خاطر شکلی که این تابع داره و شبیه به کلمه «لر» به شکل نستعلیق و فارسی شکسته در میاد در اصطلاح معلم‌های قدیمی ریاضی کنکور بهش «لُر» گفته می‌شه. دقت کنید که تو بخش ۵ یاد می‌گیرید x^3 دامنش $\mathbb{R}$ می‌شه ولی اینجا تابع رو در دامنه $[-2,2]$ رسم کردیم و بردش تو این بازه می‌شه $[-8,8]$.



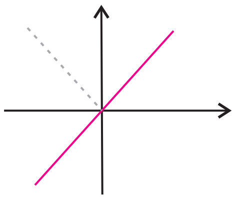
انواع و اقسام فرم‌های انتقال‌یافته این تابع رو در بخش بعدی با هم می‌بینیم.
البته تو فصل چهارم به تمام فرم‌های درجه ۳ می‌پردازم و همش رو براتون توضیح خواهم داد.

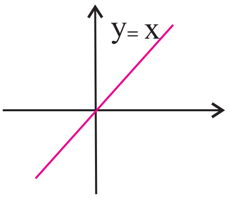
۲-۵: نمودارهای قدرمطلقی مهم

این نمودارها در کل ۵ دسته هستن که دو دسته به شدت اهمیت داره در درس شما. دسته اول توابعی که به صورت $|f(x)|$ هستن یعنی کل تابع داخل قدرمطلق قرار می‌گیره. برای رسم این توابع اول خود تابع $f(x)$ رو رسم می‌کنیم و کل قسمت‌هایی رو که زیر محور Xهاست به بالا قرینه می‌کنیم. به مثال‌های زیر که خیلی هم مهم هستن توجه کنید:

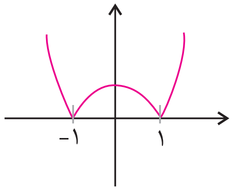


مرحله آخر) حذف پایین

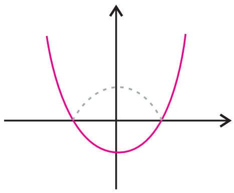

مرحله ۲) قرینه به بالا

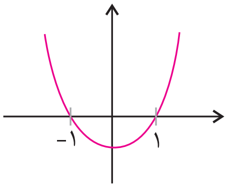


مرحله ۱) خودش

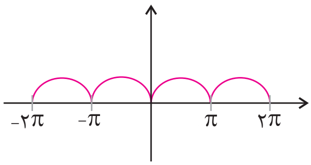


۳) حذف پایین $y=|x^۲-۱|$

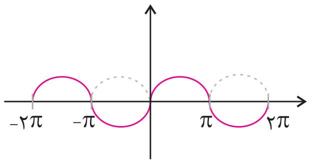

۲) قرینه قسمت‌های پایینی به بالا



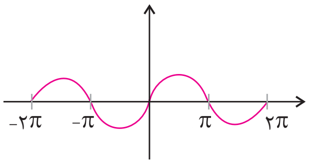
۱) اول خودش $y=x^۲-۱$



۳) حذف پایین $y=|\sin x|$



۲) قرینه قسمت‌های پایین به بالا



۱) اول خودش $y=\sin x$

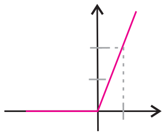
❋ دقت کنید تابع $\sin x$ دامنش $\mathbb{R}$ یعنی کل اعداد حقیقیه ولی ما در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسمش کردیم.

دسته دوم توابع قدرمطلقی بسیار مهمی هستن که اتفاقاً کاربردشون از بالایی‌ها هم بیشتره.

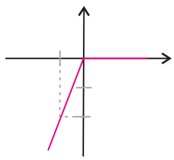
در این توابع یک بخش دارای قدرمطلق و یک بخش فاقد قدرمطلقه. مهم‌ترین این توابع رو براتون رسم می‌کنم.

اساس رسم این توابع مهم‌ترین خاصیت قدرمطلقه که تو درسنامه نهم بخش یک یاد گرفتین:

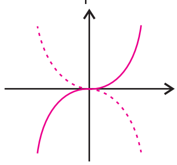
$$|u|=\begin{cases}u & , \ u\geq ۰\\ -u & , \ u<۰\end{cases}$$



مثال ۱: $f(x)=x+|x|=x+\begin{cases}x & , \ x\geq ۰\\ -x & , \ x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲x & , \ x\geq ۰\\ ۰ & , \ x<۰\end{cases}$

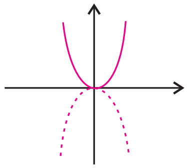


مثال ۲: $f(x)=x-|x|=x-\begin{cases}x & , \ x\geq ۰\\ -x & , \ x<۰\end{cases}=\begin{cases}۰ & , \ x\geq ۰\\ ۲x & , \ x<۰\end{cases}$



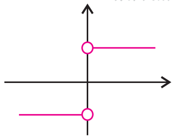
مثال ۳: $f(x)=x|x|=x.\begin{cases}x & , \ x\geq ۰\\ -x & , \ x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۲ & , \ x\geq ۰\\ -x^۲ & , \ x<۰\end{cases}$

تذکر مهم ۱: اکثر بچه‌ها این تابع رو با لِر یعنی $x^۳$ اشتباه می‌گیرن ولی غافلند از اینکه این از لر چاق‌تره و بر همین اساس ما اسمشو گذاشتیم لر چاق!



مثال ۴: $f(x)=x^2|x|=x^2.\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^3 & , x\geq 0 \\ -x^3 & , x<0 \end{cases}$

تذکر مهم ۲: از قضا بچه‌های عزیزمون این رو هم با x^2 اشتباه می‌گیرن ولی باید بدونید که x^2 از ایشون تپل‌تر تشریف دارن!

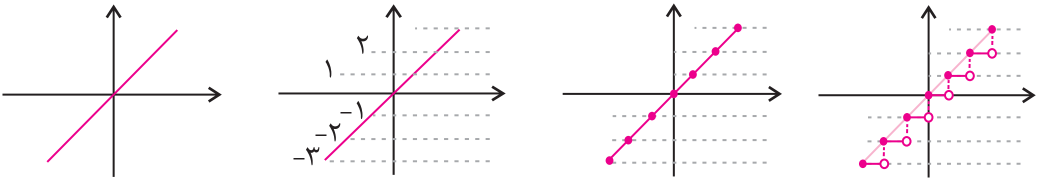


مثال ۵: $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} \dfrac{x}{x}=1 & , x>0 \\ \dfrac{x}{-x}=-1 & , x<0 \end{cases}$

۲-۶: نمودار تابع $f(x)=[x]$

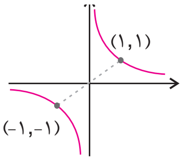
برای رسم این نمودار به روش زیر عمل می‌کنیم:

اول خودش یعنی $y=x$ — دوم داربست یعنی خطوط $y=k$ — سوم پرکردن تقاطع‌ها — آخرین مرحله شرّه‌کردن نمودار روی داربست پایینی



قطعاً همتون با من موافقید که نمودار این تابع شبیه پلکانه و به همین خاطر بهش میگن تابع پلّه‌ای!

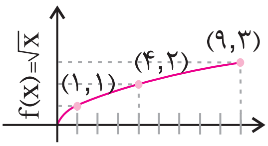
۲-۷: تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$



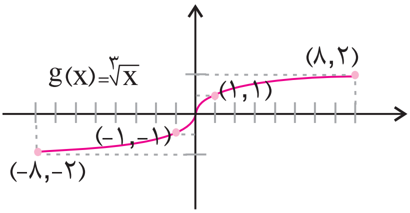
این تنها تابع هموگرافیکه که کتاب درسی شما بهش پرداخته و البته در فصل حد $\dfrac{1}{x-2}$ هم آورده شـده که انتقال یافته همین تابع اسـت و تو انتقال بررســی می‌کنیم. فعلاً فقط می‌تونیم شکلش رو حفظ کنیم و هیچ کمکی از دستم بر نمیاد براتون تا ایشالله تو فصل حد با دلیل!

۲-۸: تابع $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$

تو بخش تابع معکوس یاد می‌گیریم که اینا چه جوری تولید شدن و در واقع از کجا اومدن. فعلاً مثل تابع هموگرافیک علی‌الحساب با شکلش آشنا بشیم و دلایل و مستندات بماند برای بخش آخر این فصل یعنی تابع وارون.



※ دقت کنید برای سادگی دامنه و برد تابع محدود شد: دامنه : $[0,9]$, برد $=[0,3]$



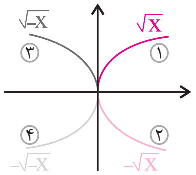
دامنه و برد محدودشده $D=[-8,8]$, برد $=[-2,2]$

بخش سوم

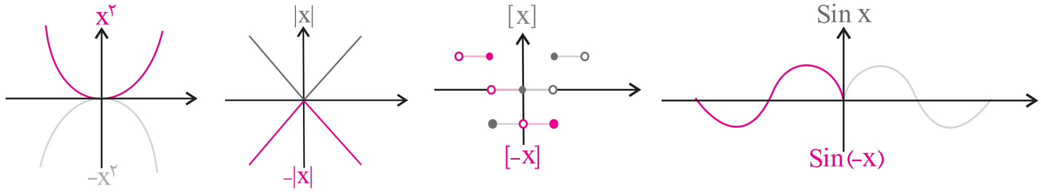
روش انتقال و انبساط و انقباض نمودار توابع مختلف

۳ـ۱: قبل از اینکه درس رو به طور مفصل شروع کنم می‌خوام تأثیر منفی رو در قسمت‌های مختلف تابع بررسی کنم و به عنوان بهترین مثال از تابع $\sqrt{x}$ استفاده می‌کنم.

لطفاً تصویر مقابل رو با دقت ببینید تا بتونیم ازش استفاده کنیم.



نمودار شماره ۱ که $\sqrt{x}$ خودمونه. اگه منفی پشت $\sqrt{x}$ بیاد بردش کلاً منفی می‌شه و قرینه نسبت به محور xها یعنی نمودار شماره ۲ ولی اگر منفی داخل رادیکال بره دامنش عوض می‌شه و نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شه و نمودار شماره ۳ به وجود میاد. اگر هم هر دو تغییر اعمال بشه که هر دو اتفاق می‌افته و نمودار شماره ۴ تشکیل می‌شه. چند نمودار خوب دیگه رو با هم ببینیم:



حالا برسیم به اصل درس. روی تابع $f(x)$، ۴ تغییر اصلی می‌تونیم اعمال کنیم.

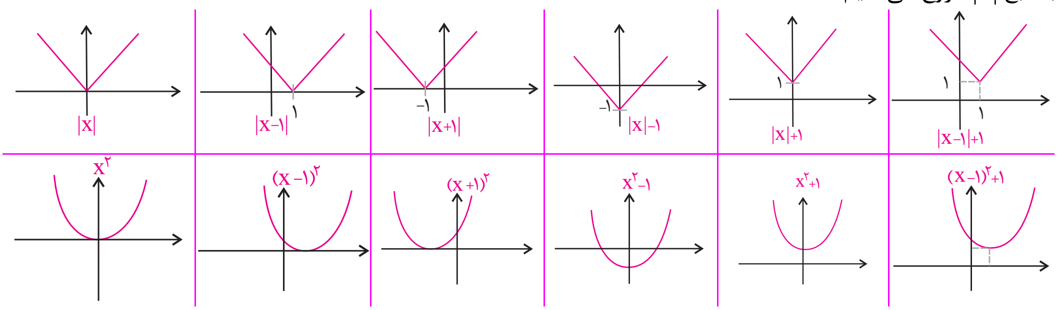
$$a\,f(bx\pm c)\pm d$$

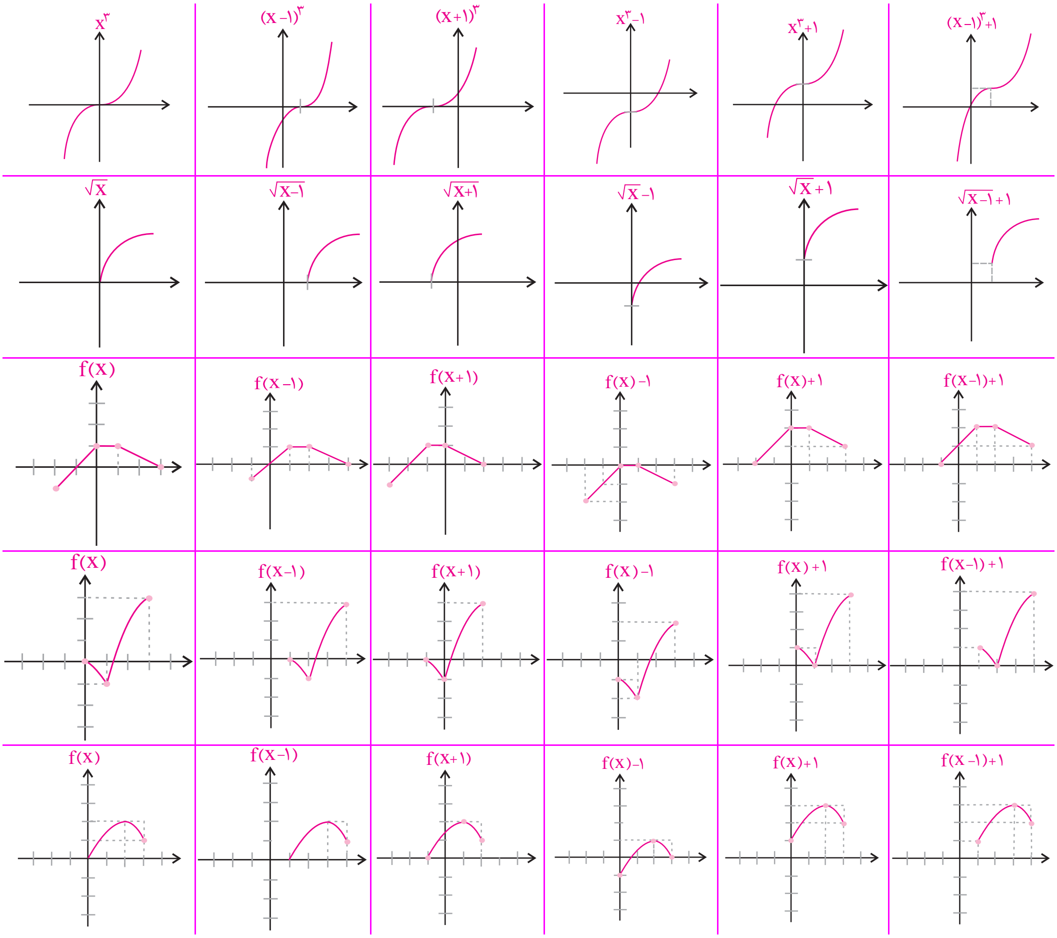
انبساط‌وانقباض   انتقال

۳ـ۲: انتقال

به طور کلی در انتقال شکل اصلی تابع حفظ می‌شه و فقط تغییر مکان انجام می‌شه. بنابراین شیب‌ها و خواص فیزیکی ثابت بوده و تنها جابه‌جایی داریم؛ c تغییر در دامنه و در راستای محور xها ولی d تغییر بر بُرد و در راستای محور yهاست.

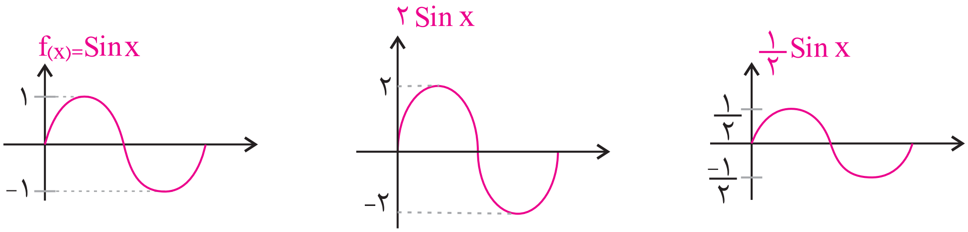
با تابع $|x|$ شروع می‌کنیم:

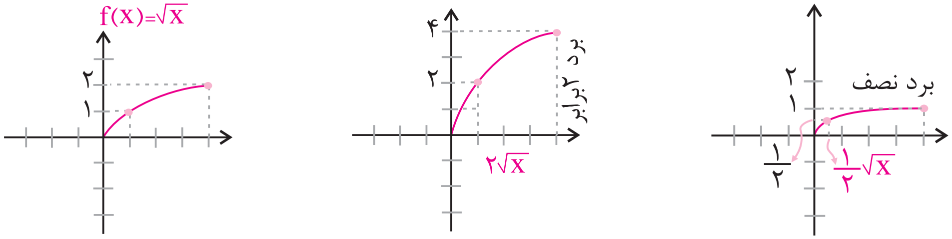


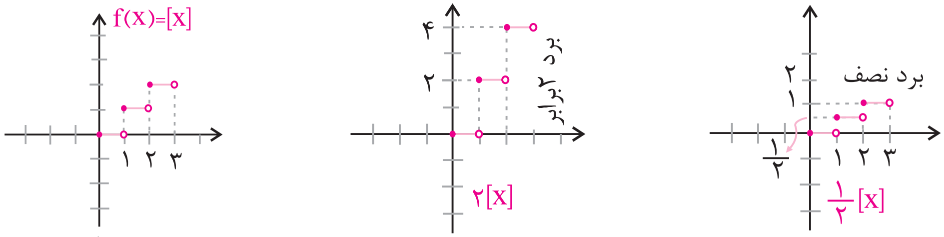


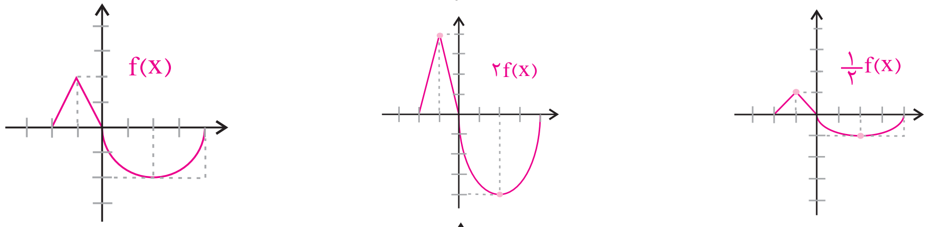
۳-۳: انبساط و انقباض

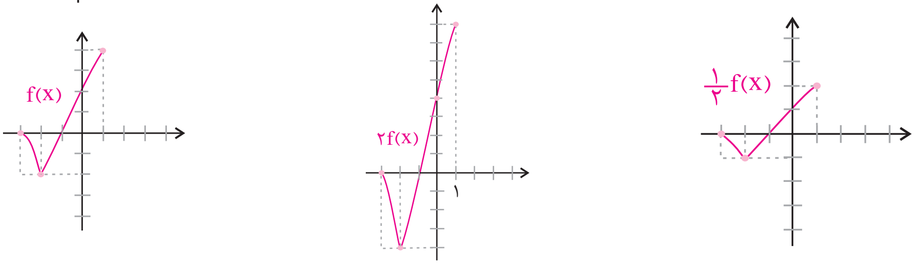
حالا نوبت به تغییرات a و b تو فرم $af(bx \pm c) \pm d$ رسید. همونطور که تو بخش قبلی c روی دامنه و d روی برد تأثیر داشت اینجا b روی دامنه و a روی برد اثر داره. بریم روی بهترین مثال‌های ممکن تغییرات رو مشاهده کنیم و از a شروع کنیم:



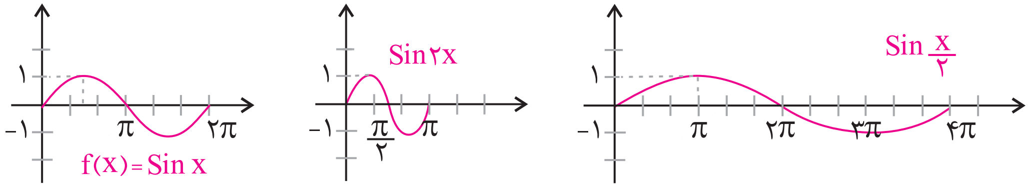


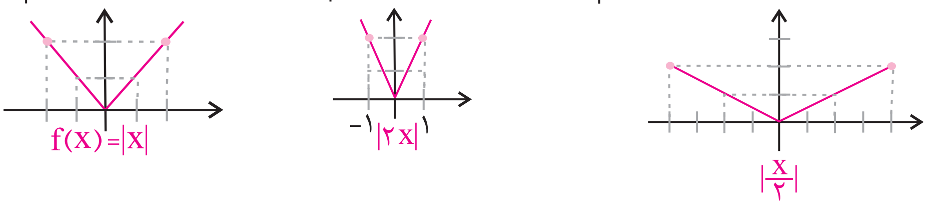


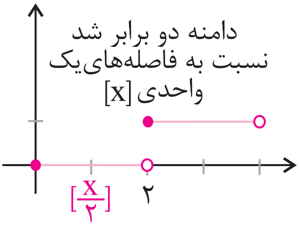


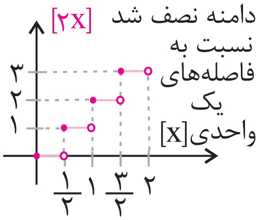


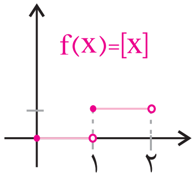
❋ اگر دقت کرده باشین تو هر ۵ تابع فقط $2f(x)$ و $\frac{1}{2}f(x)$ رو بررسی کردیم و با تغییرات روی برد دیدیم که دامنه کوچک‌ترین تغییری نداشت. حالا بریم سراغ تغییرات انقباضی و انبساطی بر دامنه یعنی b.

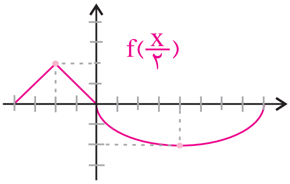


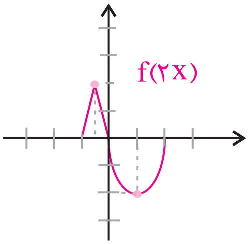


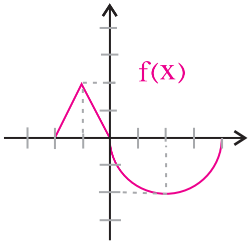


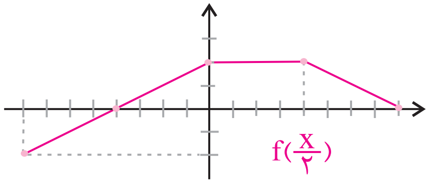


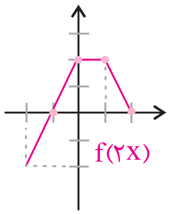


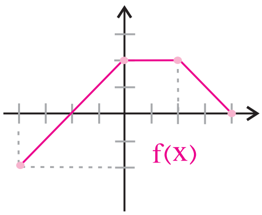




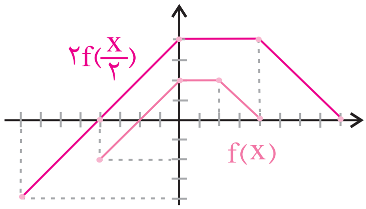


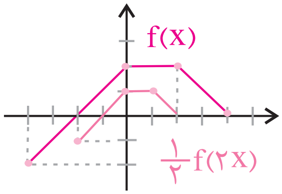






❋ و حالا ترکیب حالت‌های a و b:

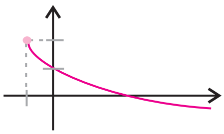




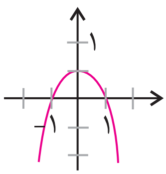
در فصل بعدی یعنی مثلثات هم شاهد سوالات و نمودارهای زیبایی از انبساط و انقباض خواهیم بود. فعلاً برای این قسمت کافیه!

❋ به عنوان آخرین نمونه‌های انتقال می‌تونیم ترکیب چند حالت با منفی‌ها رو هم با هم ببینیم:

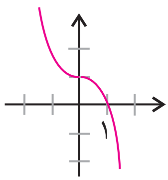
$y=-\sqrt{x+۱}+۲$



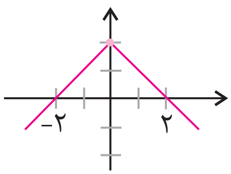
$y=-x^۲+۱$



$y=-x^۳+۱$



$y=-|x|+۲$



بخش چهارم

تقاطع دو منحنی و خط و منحنی و تعداد ریشه

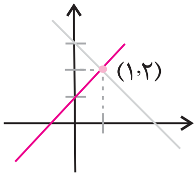
۱۴-۱: اولین تقاطع زندگیمون یعنی دستگاه دو معادله دو مجهول

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

این دستگاه که سال‌ها پیش خوندینش در واقع تقاطع دو تا خط توی یک صفحه است و به این ترتیب انجام میشه که

$$\begin{cases} y = \text{این} \\ y = \text{اون} \end{cases} \to \text{این} = \text{اون} \Rightarrow x + 1 = -x + 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

این مختصاتی که به دست اومده یعنی نقطه $(1,2)$ محل برخورد دو خط که بهش می‌گن جواب دستگاه. خوبه که نمودارش رو هم با هم ببینیم:



۱۴-۲: تقاطع خط و سهمی

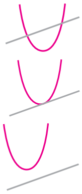
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \text{این} \\ y = \text{اون} \end{cases} \to \text{اون} = \text{این} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + h \Rightarrow ax^2 + \underbrace{bx - mx} + \underbrace{c - h} = 0$$

کافیه برای تبدیل معادله به یک درجه دوم مرتب، تو جملات دوم و سوم از x فاکتور بگیریم:

$$\boxed{ax^2 + (b-m)x + c - h = 0} \to$$

به این معادله می‌گیم معادله تقاطع که سه حالت داره:



۱) اگه $\Delta > 0$ باشه یعنی خط و سهمی تو دو تا نقطه همدیگرو قطع می‌کنن.

۲) اگر $\Delta = 0$ باشه یعنی خط و سهمی تو یک نقطه به هم مماسن.

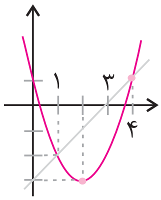
۳) اگر $\Delta < 0$ باشه یعنی خط و سهمی همدیگرو قطع نمی‌کنن.

مثال ۱: می‌خوایم وضعیت سهمی $f(x) = x^2 - 4x + 1$ رو با خط به معادله $g(x) = x - 3$ بررسی کنیم. پس اول با هم قطع می‌دیم:

$$x^2 - 4x + 1 = x - 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1,\ x_2 = 4$$

پس خط و سهمی دارن تو دو تا نقطه همدیگرو قطع می‌کنن. نمودارش رو هم حتماً ببینید:



مثال ۲: به ازای کدام مقادیر m سهمی به معادله $y=۲x^۲+۱۷x+۸$ با خطوط $y=mx$ نقطه مشترکی ندارد؟

باز هم اول با هم قطع می‌دیم: $۲x^۲+۱۷x+۸=mx$

معادله تقاطع $\Rightarrow ۲x^۲+۱۷x-mx+۸=۰ \Rightarrow \boxed{۲x^۲+(۱۷-m)x+۸=۰}$

حالا چون گفته قطع نکنن Δ باید منفی باشه؛ پس داریم: $b^۲-۴ac<۰$

$$(۱۷-m)^۲-۴(۲)(۸)<۰ \Rightarrow (m-۱۷)^۲<۶۴$$

اولاً $(a-b)^۲=(b-a)^۲$ و چون $(m-۱۷)^۲$ از $(۱۷-m)^۲$ بهتر بود تغییر دادم.

ثانیاً چون نامعادله ناقص بود عدد ثابت رو به سمت راست منتقل کردم. حالا کافیه از طرفین جذر بگیرم.

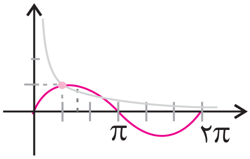
$$\Rightarrow \sqrt{(m-۱۷)^۲}<\sqrt{۶۴} \Rightarrow |m-۱۷|<۸ \Rightarrow -۸<m-۱۷<۸ \Rightarrow \boxed{۹<m<۲۵}$$

۴ـ۳: روش تقاطع برای پیداکردن تعداد ریشه‌های معادله

تو این روش برای حل معادله $f(x)=g(x)$ دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ رو در یک دستگاه رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تقاطع دو منحنی، تعداد جواب‌های معادله رو بهمون می‌ده.

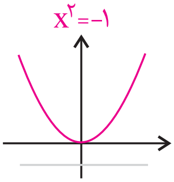
مثال ۱: تعداد ریشه‌های معادله $\frac{۱}{x}-\text{Sinx}=۰$ رو در بازه $[۰,۲\pi]$ پیدا کنید.

اول معادله رو به صورت $\text{Sinx}=\frac{۱}{x}$ می‌نویسیم که بتونیم دو طرف رو تو یک دستگاه رسم کنیم:

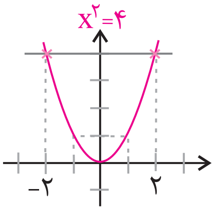


طبق نمودار می‌بینید که تا قبل از ۲π دو منحنی همدیگرو تو دو تا نقطه قطع کردن پس معادله دو تا جواب داره.

مثال ۲: چرا معادله $x^۲+۱=۰$ ریشه نداره و $x^۲-۴=۰$ دو تا ریشه قرینه داره؟!



همدیگرو هیچ جا قطع نمی‌کنن



تو دو نقطه ۲ و ۲- دارن همدیگرو قطع می‌کنن.

بخش پنجم

تعیین دامنه، اعمال روی توابع و تساوی دو تابع

۵-۱: تعیین دامنه

تو بحث تعیین دامنه و یا ورودی‌های مجاز باید بدونید که اولاً مخرج هیچوقت نباید صفر بشه و ثانیاً زیر رادیکال با فرجه زوج هیچوقت نباید منفی بشه. بریم چند تا مثال خوب با هم ببینیم:

اول توابع کسری: مخرج رو مساوی صفر قرار می‌دیم و ریشه‌های مخرج رو از دامنه خارج می‌کنیم، دامنه توابع زیر رو مشخص می‌کنیم:

$$۱)\ y=\frac{x}{x-۱}\rightarrow \mathbb{R}-\{۱\} \qquad ۲)\ y=\frac{x}{x^۲-۳x+۲}\rightarrow \mathbb{R}-\{۱,۲\}$$

$$۳)\ y=\frac{x}{x^۲-۱}\rightarrow \mathbb{R}-\{\pm۱\} \qquad ۴)\ y=\frac{x}{x^۲+۱}\rightarrow x^۲+۱\neq ۰\Rightarrow \mathbb{R}$$

حالا توابع رادیکالی با فرجه زوج:

$$۱)\ y=\sqrt{x}\Rightarrow x\geq ۰ \qquad ۲)\ y=\sqrt{x-۲}\Rightarrow x\geq ۲$$

$$۳)\ y=\sqrt{-x}\Rightarrow -x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۰ \qquad ۴)\ y=\sqrt{\frac{x}{x-۲}}\Rightarrow \frac{x}{x-۲}\geq ۰\xrightarrow{\frac{a}{b}} x(x-۲)\geq ۰\Rightarrow x\leq ۰ \text{ یا } x>۲$$

چون ۲ریشه مخرجه!

$$۵)\ y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-۲}}\Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ \\ x>۲ \end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۲$$

توجه: یک نتیجه‌گیری مهم و ورود به بحث **تساوی دو تابع:**

برای اینکه دو تابع مساوی باشن دو شرط لازمه:

۱) ضابطه‌ها یکی باشن $f=g$

۲) دامنه‌ها یکی باشن $D_f=D_g$

با توجه به دو شرط بالا، دو تابع مثال ۴ و ۵ با هم مساوی نیستن چون علی‌رغم دارابودن شرط $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ در قوانین رادیکال‌ها به دلیل عدم داشتن دامنه‌های یکسان دو تابع مساوی محسوب نمی‌شن.

این بحث رو در توابع خاص که بهشون می‌رسیم مثل مثلثاتی (تو فصل مثلثات)، کسری‌های خاص (تو فصل حد) و لگاریتمی‌ها (تو فصل لگاریتم) مفصل بررسی می‌کنیم.

۵-۲: اعمال بر روی توابع و تعیین دامنه محصول

وقتی دو تابع f و g با هم جمع بشن، از هم کم بشن، در هم ضرب بشن یا بر هم تقسیم بشن ۴ تا محصول جدید تولید می‌شه که دامنه محصول اشتراک دامنه‌هاست. البته در حالت آخر یعنی $\frac{f}{g}$ باید حواسمون باشه که مخرج صفر نشه و این موضوع رو هم در اشتراک در

نظر بگیریم. به عنوان مثال اگر داشته باشیم $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $g(x)=\sqrt{x-2}$ دامنه f می‌شه $x>1$ و دامنه g هم $x\geq 2$.

پس دامنه $f\pm g$ و $f\times g$ می‌شه اشتراک دامنه‌ها، یعنی $x\geq 2$ ولی دامنه $\frac{f}{g}$ ، میشه $x\geq 2-\{2\}$ که میشه $x>2$.

یا یه مثال خیلی قشنگ $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $g(x)=\frac{x+2}{x-2}$ که دامنه سه محصول اول میشه اشتراک دامنه‌ها یعنی $\mathbb{R}-\{-1,2\}$

ولی تو دامنه $\frac{f}{g}$ مجبوریم عدد {-۲} رو هم خارج کنیم چون درسته که {-۲} برای g مشکلی ایجاد نمی‌کنه ولی وقتی $g(x)$ وارد مخرج میشه نباید صفر بشه و مجبوریم بگیم $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-1,2,-2\}$ پس همونطور که دیدیم برای اینکه دو تابع بتونن با هم جمع بشن یا از هم کم بشن یا در هم ضرب بشن و به هم تقسیم بشن باید دامنه مشترک داشته باشن و همین قضیه رو میشه تو زوج مرتب هم نشون داد.

مثلاً دو تابع $f=\{(1,5),(2,4)\}$ با $h=\{(5,6),(7,4)\}$ هیچ اشتراکی تو دامنه‌هاشون ندارن چون $D_f=\{1,2\}$ و $D_h=\{5,7\}$ پس با هم هیچ محصولی نمی‌تونن بدن ولی اگر داشته باشیم $f=\{(1,5),(2,4)\}$ و $g=\{(1,-3),(2,0)\}$ حالا دیگه می‌تونیم محصولاتی داشته باشیم که دارای دو زوج مشترک هستن. x رو از دامنه می‌نویسیم و اعمال چهارگانه رو بر yها یعنی مولفه دوم انجام می‌دیم، مثلاً تو $f+g$ اگر زوج $(1,5)$ رو با زوج $(1,-3)$ جمع کنیم جوابش می‌شه $(1,5+(-3))$ یعنی $(1,2)$. پس چهار محصول این دو تابع رو با هم ببینیم:

$$f+g=\{(1,2),(2,4)\}\ ,\ f-g=\{(1,8),(2,4)\}\ ,\ f\times g=\{(1,-15),(2,0)\}\ ,\ \frac{f}{g}=\left\{(1,\frac{5}{-3})\right\}$$

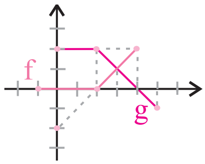
※ چرا $\frac{f}{g}$ اونجوری شد؟! چون اگر می‌خواستیم $(2,4)$ رو به $(2,0)$ تقسیم کنیم، می‌شه $(2,\frac{4}{0})$ که قبول نبود ولی برعکسش رو می‌تونستیم داشته باشیم یعنی:

$$\frac{g}{f}=\left\{\frac{(1,-3)}{(1,5)},\frac{(2,0)}{(2,4)}\right\}=\left\{(1,\frac{-3}{5}),(2,0)\right\}$$

※ راستی اگه مثلاً $2f$ یا $g+1$ رو آزمون خواست هم تغییرات فقط روی y انجام می‌شه:

$$2f=\{(1,10),(2,8)\}\ ,\ g+1=\{(1,-2),(2,1)\}$$

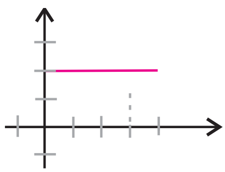
※ جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دو تابع رو می‌شه روی نمودار هم نشون داد. دقیقاً همون اتفاق قبلی میفته. دامنه‌ها باید اشتراک داشته باشن و yها هم که با هم! مثال زیر رو با هم ببینیم:



$$\begin{matrix}D_f=[-1,4]\\ D_g=[0,5]\end{matrix}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_{f+g}=[0,4]$$

حالا کافیه تو بازه‌ی $[0,4]$ yهاشون رو با هم جمع کنیم:

بهترین راه برای تعیین دقیق $f+g$ اینه که ضابطه‌ای حرکت کنیم:



$$f=\begin{cases}0\ ,\ 0\leq x\leq 2\\ x-2\ ,\ 2\leq x\leq 4\end{cases}\quad ,\quad g=\begin{cases}2\ ,\ 0\leq x\leq 2\\ -x+4\ ,\ 2\leq x\leq 4\end{cases}$$

$$\Rightarrow f+g=\begin{cases}2\ ,\ 0\leq x\leq 2\\ 2\ ,\ 2\leq x\leq 4\end{cases}\Rightarrow f+g=2$$

※ می‌تونستیم نقطه به نقطه عرض‌ها رو با هم جمع کنیم. مثلاً تو بازه $[0,2]$ که خیلی راحته و ۲ میشه!

تو نقطه ۲/۵ عرض f میشه $\frac{۱}{۲}$ و عرض g میشه، $\frac{۳}{۲}$ که باز هم جمعشون ۲ میشه.

تو نقطه ۳ عرض هر دوشون برابر یکه که باز هم جمعشون ۲ میشه تو نقطه ۳/۵ عرض f، $\frac{۳}{۲}$ و عرض g ؛ $\frac{۱}{۲}$ و باز هم جمعشون میشه ۲!

*** راستی اینو یادم رفته بود بهتون بگم، اون روز یکی از بچه‌ها تو کلاس پرسید مثلاً وقتی $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۲}$ با هم جمع و تفریق می‌شن چه شکلی میشه؟ اینم با هم ببینیم:**

$$f\pm g=\sqrt{x}\pm\frac{x}{x-۲}\quad,\quad f\times g=\sqrt{x}(\frac{x}{x-۲})=\frac{x\sqrt{x}}{x-۲}\quad,\quad \frac{f}{g}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{۱}}{\frac{x}{x-۲}}=\frac{\sqrt{x}(x-۲)}{x}$$

و سوال آخر اینکه الان وقتی تو $\frac{f}{g}$، $x-۲$ اومده تو صورت دیگه $x=۲$ تو دامنه هست؟ که جوابمون منفیه و کماکان $x\neq ۲$!

پس یک بار دیگه تعیین دامنه $\frac{f}{g}$ رو با هم ببینیم:

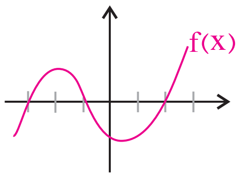
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x}\to D_f: x\geq ۰ \\ g(x)=\frac{x}{x-۲}\to D_g: x\neq ۲\end{array}\right\}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=\left\{x|x\in[۰,+\infty)-\{۰,۲\}\right\}=(۰,+\infty)-\{۲\}$$

پس آقای $g(x)$ باید حواست باشه که نمی‌تونی $x=۰$ رو داشته باشی. وقتی میای تو مخرج حق نداری صفر بشی و باید شرایط مخرج کسر رو رعایت کنی.

* یکی از مثال‌هایی که تو بحث دامنه از روی شکل بسیار اهمیت داره اینه که وقتی دو تابع در هم ضرب می‌شن و زیر رادیکال می‌رن باید ضربشون مثبت باشه یا هم‌علامت باشن که بچه‌های من به این مسائل می‌گن سوالات اصغر آقا! حالا بریم ببینیم جریان چی چیه و اصغر آقا کیه؟!

مثال ۱: نمودار تابع $f(x)$ داده شده.

ما تو محلمون به $f(x)$ می‌گیم، اصغر آقا. حالا بریم سراغ سوالات!



۱) دامنه‌اصغرآقا=$\mathbb{R}$ کلاً اصغر آقا هیچ مشکلی نداره یعنی نمودارش هیچ جا قطع نشده پس دامنش میشه $\mathbb{R}$!

تو فصل حد یاد می‌گیریم این مسائل رو که اصلاً تابع پیوسته چیه و از این حرفها! ضمناً بد نیست الان بدونید این اصغر آقا یک تابع درجه سوم بوده که تو فصل کاربرد مشتق نمودارش رو بهتون یاد می‌دم. کلاً چندجمله‌ای‌ها دامنشون میشه $\mathbb{R}$!

۲) $\sqrt{f(x)}$ یا $\sqrt{\text{اصغرآقا}}$

اینجا درسته که خود اصغر مشکلی نداره ولی رادیکال به اصغر آقا می‌گه؛ *اصغر آقا بفرما، آله بالایی بفرما!*

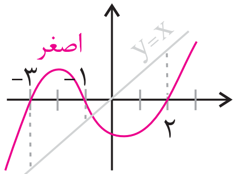
یعنی جاهایی که اصغر زیر محور xها رفته برای رادیکال مورد قبول نیست. پس جواب می‌شه: $[-۳,-۱]\cup[۲,+\infty)$

شاید با خودت بگی ای بابا از ۳- تا ۱- که xهامون منفی هستن! در جوابت باید بگم همونطور که قبلاً هم اشاره کردیم علامت x مهم نیست بلکه علامت y اهمیت داره. تو اون بازه yها مثبت هستن.

۳) $\sqrt{x.f(x)}$ یا $\sqrt{x(\text{اصغرآقا})}$

حالا اصغر آقا با خانوم x ازدواج می‌کنه و دوتایی با هم باید برن زیر سقف رادیکال.

بنابراین لازمه که هم‌علامت (هم‌دل) باشن که بتونن زیر سقف جدید زندگی خوبی رو با هم داشته باشن.



بهترین راه برای حل اینجور مسائل رسم نموداره. نمودار اصغر یا همون $f(x)$ رو که خودش بهمون داده. نمودار $y=x$ رو هم که بلدیم خودمون. حالا جفتش رو تو یه دستگاه رسم می‌کنیم.

همونطور که تو نمودار می‌بینید قبل از -۳ هر دو پایین و منفی هستن. هم اصغر و هم خانومش! پس منفی در منفی می‌شه + و می‌تونن زیر رادیکال برن.

بین $[-۳,-۱]$ قبول نیست چون اصغر بالا و خانومش پایینه! دوباره $[-۱,۰]$ قبوله چون هر دو پایین هستن. بین $[۰,۲]$ هم که قبول نیست چون اصغر پایینه و خانومش بالا! ۲ به بعد هم هر دو مثبتن و اجازه ورود دو نفره به زیر رادیکال رو دارن! پس جواب آخر:

$(-\infty,-۳]\cup[-۱,۰]\cup[۲,+\infty)$

۴) $\sqrt{\dfrac{x}{f(x)}}$

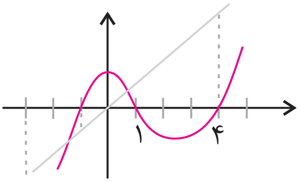
با توجه به اینکه تو بخش تعیین علامت بهت گفتم علامت $\dfrac{a}{b}$ علامت آبیه (ab)! پس جواب این سوال مثل حالت قبلیه با این تفاوت ناچیز که $f(x)$ نباید صفر باشه. پس ریشه‌های $f(x)$ از بازه خارج می‌شن:

$(-\infty,-۳)\cup(-۱,۰]\cup(۲,+\infty)$

دقت داشته باشید $x=۰$ هست و بازه رو باید بست چون صورت رو صفر می‌کنه نه مخرج!

۵) $\sqrt{x\ f(x-۲)}$

حالا اصغر آقا یا همون $f(x)$ باید ۲ واحد بره جلو و بعد با خانوم x ازدواج کنه.



بنابراین نمودار جدید رو رسم می‌کنیم: جواب $=(-\infty,-۱]\cup[۰,۱]\cup[۴,+\infty)$

بخش ششم

تعریف، نحوه تعیین و شرایط تابع مرکب در ضابطه و زوج مرتب و یافتن دامنه آن

۶-۱: مفهوم تابع مرکب و زوج مرکب

مامانامون که می‌خوان برای فردا ظهر ناهار درست کنن آخر شب گوشت و مرغ رو از تو فریزر می‌ذارن بیرون که دماش پایین بیاد (بگذریم از اینکه مامان زحمتکش خودم تا غروب تو بیمارستان مشغول پرستاری بود و وقتی میومد خونه، تازه باید شام و غذای فردامون رو درست می‌کرد و همون لحظه گوشت رو میاورد بیرون و با پلاستیک می‌ذاشتش تو آب جوش که یخش باز بشه). خلاصه با گذشت زمان دمای گوشت افزایش پیدا می‌کنه. اگر بخوایم برای افزایش دما بر حسب زمان **یک تابع معرفی کنیم، اینجوری می‌شه:** $d(t)=۳t+۱$

این یک تابع خطیه و معنیش اینه که تو $t=۰$ دمای گوشت $۱^\circ C$ است و مثلاً با گذشت یک ساعت یعنی به ازای $t=۱$ می‌شه $d=۴^\circ C$ و بعد از گذشت دو ساعت می‌شه $d=۷^\circ C$ و همینطور دمای گوشت افزایش پیدا می‌کنه.

از اون طرف شما بهتر از من می‌دونید که با افزایش دمای مواد غذایی تعداد باکتری‌های موجود در اون هم افزایش پیدا می‌کنه و تا یه دمایی و یک زمان محدودی می‌تونیم غذا رو بیرون و در دمای محیط نگهداری کنیم و اگر تعداد باکتری‌ها از یه حد مشخصی بیشتر بشه اون غذا می‌تونه مسمومیت ایجاد کنه.

تابعی که برای تعداد باکتری‌ها بر حسب دما داده می‌شه یک تابع درجه دومه: $n(d)=۵d^۲-۲۰d+۱۰۰۰$

یعنی در دمای ۰ درجه سانتی‌گراد تعداد باکتری‌ها ۱۰۰۰ بوده و البته در رأس سهمی یعنی دمای $\frac{-b}{۲a}=\frac{۲۰}{۱۰}=۲^\circ C$

تعداد در min حالت خودش یعنی $n(۲)=۵(۲)^۲-۲۰(۲)+۱۰۰۰=۹۸۰$ قرار داره. بعدش که min رو رد می‌کنیم با افزایش دما تعداد باکتری‌ها هم روند صعودی می‌گیره. حالا اگر ما زمان بیرون‌موندن گوشت از فریزر رو داشته باشیم با ترکیب این دو تابع $d(t)$ و $n(d)$ می‌تونیم تعداد باکتری‌ها رو در هر لحظه تعیین کنیم. اول t وارد تابع $d(t)$ می‌شه و بعد d وارد تابع $n(d)$ میشه و می‌شه تابع $n\big(d(t)\big)$ که بهش می‌گن nod یا تابع مرکب.

زمان $\xrightarrow{d(t)}$ دما $\xrightarrow{n(d)}$ تعدادباکتری‌ها $\qquad t\to d(t)\to n(d)\to n\big(d(t)\big)=nod$

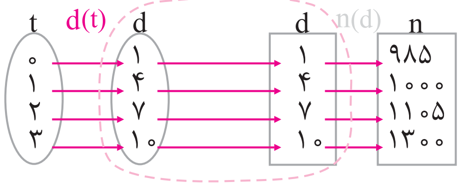
حالا می‌تونیم به طور کلی‌تر این تابع مرکب رو نامگذاری کنیم چون متغیر مستقل تو ریاضی، x بوده و هست، پس داریم:

$$x\to \underset{\text{تابع داخلی}}{\boxed{g(x)}}\to \underset{\text{تابع اصلی (خارجی)}}{\boxed{f(x)}}\to f\big(g(x)\big)=\underset{\text{تابع مرکب}}{\boxed{fog}}$$

پس همونطور که می‌بینید تو تابع مرکب fog یا $f\big(g(x)\big)$، x باید اول وارد g بشه پس شرطش اینه که عضو دامنه g باشه و بعدش $g(x)$ می‌خواد بره تو f پس لازمه که $g(x)$ عضو دامنه f باشه. بنابراین داریم: $D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

❉ دامنه تابع مرکب رو فقط با این روش به دست میاریم، نه تابع‌سازی.

همین مثال تعداد باکتری بر حسب دما رو تو نمودار وِن با هم ببینیم:



$t=۰\xrightarrow{d=۳t+۱}d(۰)=۱\xrightarrow{n=۵d^۲-۲۰d+۱۰۰۰}n(۱)=۹۸۵$

$t=۱\to d(۱)=۴\to n(۴)=۱۰۰۰$

$t=۲\to d(۲)=۷\to n(۷)=۱۱۰۵$

$t=۳\to d(۳)=۱۰\to n(۱۰)=۱۳۰۰$

حالا می‌خوام براتون دو تابع دیگه مثال بزنم. ببینید همیشه اینجوری نیست که هر چی از بیضی دوم بیرون اومد تو مستطیل اول باشه!

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\sqrt{x+۱} \to D_g = x \geq -۱ \\ f(x)=\sqrt{۴-x} \to D_f = x \leq ۴ \end{array}\right\rangle fog = f\left(g(x)\right) \to$$

یعنی x اول میاد تو g و بعد $g(x)$ می‌ره تو f

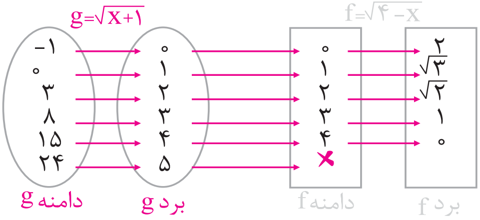
$$x=-۱ \xrightarrow{g=\sqrt{x+۱}} g(-۱)=۰ \xrightarrow{f=\sqrt{۴-x}} f(۰)=\sqrt{۴}=۲$$

$$x=۰ \to g(۰)=۱ \xrightarrow{f(۱)} \sqrt{۳}$$

$$x=۳ \to g(۳)=۲ \xrightarrow{f(۲)} \sqrt{۲}$$

$$x=۸ \to g(۸)=۳ \xrightarrow{f(۳)} ۱$$

$$x=۱۵ \to g(۱۵)=۴ \xrightarrow{f(۴)} ۰$$



$$x=۲۴ \to g(۲۴)=۵ \xrightarrow{f(۵)} \sqrt{۴-۵}=\sqrt{-۱} \otimes$$

همونطور که دیدید ۲۴ عضو دامنه g بود ولی $g(۲۴)$ یعنی ۵ عضو دامنه f نبود. پس هر x ای عضو دامنه تابع مرکب نیست و باید شرایطش رو داشته باشه.

همین حالت رو می‌تونید به صورت زوج مرتبی هم ببینید:

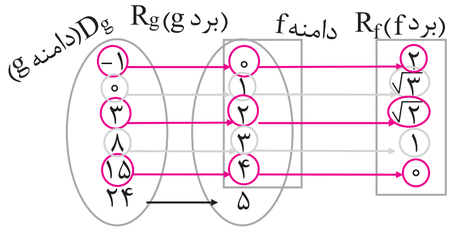
$$g=\{(-۱,۰),(۰,۱),(۳,۲),(۸,۳),(۱۵,۴),(۲۴,۵)\}$$

$$f=\{(۰,۲),(۱,\sqrt{۳}),(۲,\sqrt{۲}),(۳,۱),(۴,۰)\} \quad \times$$

همونطور که بالا هم گفتیم ۲۴ عضو دامنه g بود ولی چون $f(۲۴)$ یعنی ۵؛ عضو مولفه‌های اول f یعنی دامنه f نبود تابع مرکب تشکیل نشد. حالا تابع مرکبمون چی شد؟ x از تابع داخلی یعنی g، y از تابع اصلی یعنی f.

$$fog = f\left(g(x)\right) = \left\{(-۱,۲),(۰,\sqrt{۳}),(۳,\sqrt{۲}),(۸,۱),(۱۵,۰)\right\}$$

الان می‌تونیم روی نمودار وِن کل ماجرا رو ببینیم (دامنه رو با D[1] و بُرد رو با R[2] نشون می‌دیم).



۶-۲: ساخت ضابطه تابع مرکب و تعیین دامنه آن

تو این قسمت می‌خوام بهتون یاد بدم تابع $f\left(g(x)\right)$ چه جوری ساخته می‌شه بچه‌ها.

خُب قبلاً $f(x)$ داشتیم. مثلاً می‌گفتیم $f(x)=\sqrt{x}$ حالا اگه بخوایم $f\left(g(x)\right)$ رو داشته باشیم، باید تو f به جای x، بذاریم $g(x)$ یعنی $f\left(g(x)\right)=\sqrt{g(x)}$ و $g(x)$ هر تابعی می‌تونه باشه. مثلاً اینجا اگر $g(x)=Sinx$ بود $f\left(g(x)\right)$ می‌شه $\sqrt{Sinx}$. اگر $g(x)=x^۲-۳x$ بود $f\left(g(x)\right)$ می‌شد $\sqrt{x^۲-۳x}$. اگر $g(x)=x^۲$ بود؛ $f\left(g(x)\right)=\sqrt{x^۲}=|x|$. حالا اگه تو همین مثال $f(x)$ و $g(x)$ جاشون عوض می‌شد یعنی:

$$f(x)=x^۲, g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f\left(g(x)\right)=(\sqrt{x})^۲=x \to \left|(\sqrt{x})^۲=x \text{ ولی } \sqrt{x^۲}=|x|\right|$$

---

۱. Domain
۲. Range

همونطور که می‌دونید تابع x هیچ مشکلی نداره یعنی نه مخرجی داره که بخواد صفر بشه و نه رادیکال فرجه زوجی داره که بخواد زیرش منفی بشه، پس دامنش می‌شه $\mathbb{R}$ ولی این جواب برای دامنه fog غلطه و دامنه fog تو این حالت $\mathbb{R}$ نیست.

دامنه fog رو فقط باید با توجه به تعریف قسمت قبلی تعیین کنیم:

$$D_{fog}=D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

حالا کافیه موارد بالا رو جاگذاری کنیم:

$$D_g: x\geq ۰\ ,\ D_f=\mathbb{R}\Rightarrow D_{fog}=\{x\geq ۰ \mid \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}$$

$\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ که حل نمی‌خواهد پس کافیه: $x\geq ۰$ باشه. بنابراین دامنه fog شد $[۰,+\infty)$.

حالا بریم چند تا مثال خوب از ساخت و تعیین دامنه تابع مرکب با هم ببینیم:

مثال ۱:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x-۱} \\ g(x)=\dfrac{x+۱}{x+۲}\end{array}\right\rangle fog=f(g(x))=\sqrt{\dfrac{x+۱}{x+۲}-۱}\ ,\ D_f=x\geq ۱\quad ,\quad D_g: x\neq -۲$$

$$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{\underbrace{x\neq -۲}_{\mathrm{I}}\ \middle|\ \underbrace{\frac{x+۱}{x+۲}\geq ۱}_{\mathrm{II}}\right\}$$

حالا برای اینکه بتونیم از I و II اشتراک بگیریم باید اول جواب II رو به دست بیاریم. تو نامساوی‌ها حالت شماره چند بود؟! آفرین. حالت شماره ۶. عدد ۱ رو میاریم این ور و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+۱}{x+۲}-۱\geq ۰\Rightarrow\frac{x+۱-x-۲}{x+۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{-۱}{x+۲}\geq ۰\xrightarrow{\text{رسیدیم به حالت ۱}}x+۲<۰\Rightarrow\boxed{x<-۲}$$

جواب آخر همینه چون خودبه‌خود $x=-۲$ هم از دامنه خارج شد.

مثال ۲:

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt{x-۲} \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x+۹}{۱-x}}\end{cases}\rightarrow gof=g(f(x))=\sqrt{\sqrt{\frac{x+۹}{-x+۱}}-۲}\quad (۱-x=-x+۱)$$

$$D_f=\frac{x+۹}{-x+۱}\geq ۰\xrightarrow{\text{شماره ۲}}-۹\leq x<۱\ ,\ D_g: x\geq ۲$$

$$D_{gof}=D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\left\{\underbrace{-۹\leq x<۱}_{\mathrm{I}}\ \middle|\ \underbrace{\sqrt{\frac{x+۹}{-x+۱}}\geq ۲}_{\mathrm{II}}\right\}$$

$$\mathrm{II}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{x+۹}{-x+۱}\geq ۴\xrightarrow{\text{شماره ۳'}}\frac{x+۹}{-x+۱}-۴\geq ۰\Rightarrow\frac{x+۹+۴x-۴}{-x+۱}\geq ۰$$

$$\Rightarrow\frac{۵x+۵}{-x+۱}\geq ۰\Rightarrow\frac{۵(x+۱)}{-x+۱}\geq ۰\xrightarrow{\text{شماره ۲}}\boxed{-۱\leq x<۱}\xrightarrow{\text{اشتراک II,I}}\boxed{-۱\leq x<۱}$$

مثال ۳:

$$f(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x$$

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\left\{x\neq ۰\ \middle|\ \underbrace{\frac{۱}{x}\neq ۰}_{\text{این که همیشه برقراره}}\right\}\Rightarrow D_{fof}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

مثال ۴:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{9-x^2} \to 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ g(x)=\sqrt{x+1} \to x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \end{cases}$$

$$fog = f(g(x)) = \sqrt{9-(x+1)} = \sqrt{8-x}$$

$$D_{fog} = D(g(x)) = \{x \in Dg | g(x) \in D_f\} = \left\{ \underbrace{x \geq -1}_{I} \middle| \underbrace{-3 \leq \sqrt{x+1} \leq 3}_{II} \right\}$$

باز هم باید (II) رو حل کنیم و اشتراک بگیریم با (I). $-3 \leq \sqrt{x+1}$ که بدیهیه.

کافیه $\sqrt{x+1} \leq 3$ رو حل کنیم. طرفین رو به توان ۲ می‌رسونیم: $x+1 \leq 9 \Rightarrow \boxed{x \leq 8}$ حالا که با (I) اشتراک بگیریم جواب می‌شه: $\boxed{-1 \leq X \leq 8}$

۶ـ۳: تعیین تابع داخلی وقتی مرکب و اصلی رو داریم:

تا اینجا f و g رو داشتیم و از روشون fog و gof می‌نوشتیم. حالا اگه fog و f رو بهمون داده باشن چه جوری تابع داخلی رو به دست بیاریم. خب اولاً خیالمون راحته که اصلش دستمونه و مطمئنیم که fog از کجا اومده. از fog می‌پرسیم که f(g) کی بودی تو؟! و fog جواب می‌ده: بگفتا من fی ناچیز بودم؛ بگفتا من fی با x بودم؛ ولیکن مدتی با g نشستم. حالا این مرکبی هستم که هستم. پس می‌گه تو f به جای xهاش g گذاشتن که به این شکل در اومده. بریم مثال رو ببینیم و یاد بگیریم:

مثال ۱: $f(x)=x-1 \quad , \quad f(g(x))=2x+5$

f(g) چه جوری به وجود اومده؟ اول f(x) بوده که به جای xش؛ g گذاشتن:

$$g-1=f(g(x)) \Rightarrow g-1=2x+5 \Rightarrow g=2x+6$$

مثال ۲: $f(x)=3x+1 \quad , \quad f(g(x))=6x+4$

f(g) تو چه جوری به وجود اومدی؟

f(g) می‌گه من اول $f(x)$ بودم و به جای xم؛ g گذاشتن، شدم $6x+4$ یعنی الان باید به جای x تو f، g بذاریم و جوابش بشه $6x+4$

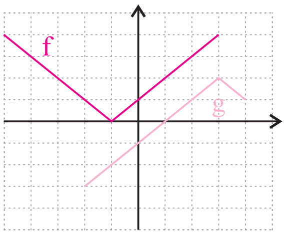
$$3g+1=6x+4 \Rightarrow 3g=6x+3 \Rightarrow g=2x+1$$

مثال ۳: $f(x)=3x-4 \quad , \quad f(g(x))=3x^2-6x+14$

f(g) کی بودی تو؟ f(g): بگفتا من fای ناچیز بودم، بگفتا من fای با x بودم. ولیکن مدتی با g نشستم (منظورش اینه که به جای xش تو f؛ g گذاشتن)

$$\Rightarrow 3g-4=3x^2-6x+14 \Rightarrow 3g=3x^2-6x+18 \Rightarrow g=x^2-2x+6$$

مثال آخر: با توجه به نمودار مقابل موارد خواسته‌شده رو به دست بیارید؟



الف) $f(g(0))=$

ب) $f(g(4))=?$

پ) $g(f(3))=$

ت) $g(f(-4))=?$

الف) $f(g(0)) \quad \underline{g(0)=-1} \quad f(-1)=0$

ب) $f(g(4)) \quad \underline{g(4)=1} \quad f(1)=2$

پ) $g(f(3)) \quad \underline{f(3)=4} \quad g(4)=1$

ت) $g(f(-4)) \quad \underline{f(-4)=3} \quad g(3)=2$

بخش هفتم

تشخیص یک به یک‌بودن از روی نمودار و تعیین ضابطه وارون یک تابع

۱-۷: تابع‌بودن یا نبودن!؟ مسأله این است.

۱ ـ زوج مرتب: دی ماه هزار و سیصد و نود و هفت و روزهای تقریباً سرد و بارونی تهران، از ساعت ۱ ظهر که به سمت غروب می‌ریم دمای هوا کم می‌شه یا زیاد؟! قاعدتاً باید جوابتون این باشه که با نزدیک‌شدن به شب، هوا سردتر می‌شه و دما پایین میاد. در ساعت‌های ۱، ۲، ۳ تا ۸ شب، دما رو اندازه‌گیری کردیم و اعداد زیر به دست اومد که اونها رو به صورت زوج مرتب براتون می‌نویسم. زوج مرتب یعنی مؤلفه اول ساعت (زمان) و مؤلفه دوم دمای هوا که دقیقاً در رأس اون ساعت اندازه‌گیری شده. اسم این مجموعه رو میذارم A:

$$A=\{(۱,۱۸),(۲,۱۸),(۳,۱۷),(۴,۱۷),(۵,۱۷),(۶,۱۵),(۷,۱۳),(۸,۱۰)\}$$

همونطور که می‌بینید ساعت ۱ و ۲ دمای تهران $۱۸^\circ C$ بوده و ساعت ۳ تا ۵ هم $۱۷^\circ C$. ساعت ۶ دو درجه کم شد؛ ساعت ۷ هم دو درجه نسبت به ساعت قبلش و نهایتاً در ساعت ۸ دما به $۱۰^\circ C$ رسید. اعداد کاملاً منطقی و معقول و گویا هستن.
یه بنده خدایی هم یه آماری از دمای هوای شهر خودشون برامون فرستاده. اسم مجموعه ایشون رو میذاریم B:

$$B=\{(۱,۲۰),(۱,۱۵),(۲,۱۷),(۲,۱۳),(۲,۱۰),(۳,۱۱),(۴,۱۵),(۵,۱۵)\}$$

به نظر شما این ممکنه؟! یعنی ساعت ۱ دما هم $۲۰^\circ C$ باشه و هم $۱۵^\circ C$ یا ساعت ۲ بعد از ظهر یه بار هوا $۱۷^\circ C$ باشه و دوباره تو همون ساعت ۲ بعد از ظهر همون روز $۱۳^\circ C$ و یا $۱۰^\circ C$؟!

این درست نیست! قطعاً این اعداد با عقل جور در نمیاد. منطقی نیست. به زبون ریاضی چی بگیم؟! می‌گیم این مجموعه تابع نیست!

پس همین الان تابع بودن رو از نظر زوج مرتبی بررسی کردیم. مؤلفه اول یکسان نداریم. بچه‌ها اگر داشتیم دومیش هم باید با زوج قبلی یکسان باشه. البته دو تا زوج (۲۰ و ۱) و (۲۰ و ۱) پشت سر هم یه ذره کدر هست! ولی غلط نیست ☺

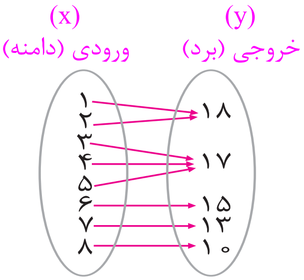
مثال ۱: به ازای کدام مقدار a مجموعه $A=\{(۱,۲),(۱,a^۲+a),(۲,۵),(a+۱,۷)\}$ نمایش یک تابع است؟

همونطور که الان گفتم وقتی ساعت ۱ بعد از ظهر دمای هوا $۲^\circ C$ شده دوباره تو ساعت ۱ که اعلام می‌کنیم باید همون $۲^\circ C$ باشه یعنی داریم:

$$a^۲+a=۲\Rightarrow a^۲+a-۲=۰ \begin{cases} a=۱ \\ a=-۲ \end{cases}$$

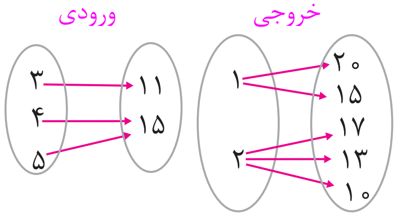
حالا کدومش رو قبول کنیم؟! اگر $a=۱$ رو قبول کنیم زوج مرتب آخریمون می‌شه (۷ و ۲) و چون (۵ و ۲) رو هم تو زوج سوم داریم پس اومدیم ابروشو درست کنیم، زدیم چشمشو کور کردیم، بنابراین $a=۱$ قبول نیست و فقط $\boxed{-۲}$ قبوله!

۲ ـ نمودار وِن: دقیقاً همون حرفایی رو که تو زوج مرتب زدم می‌خوام با یک نمودار وِن نشون بدم که اتفاقاً بهتر و واضح‌تر هم هست! اول مجموعه A رو با هم ببینیم.



مجموعه A همونطور که گفتیم تابع است. می‌بینید که هیچ دو شاخه‌ای از چپ به راست نداریم!

حالا بریم سراغ مجموعه B که گفتیم تابع نیست. اینجا از سمت چپ به راست دو شاخه و حتی سه شاخه هم داریم که نشان‌دهنده‌ی تابع‌نبودن این نمودار وِن است.



۳ـ ضابطه: حتماً بارها و بارها شنیدین که فلان سازمان تو کشور هیچ ضابطه‌ای نداره منظورشون از این حرف اینه که نظم و مقررات خاص و یکسانی حاکم نیست و در برابر یک عمل یکسان عکس‌العمل‌های مختلفی دیده می‌شه. یکی از شرایط خوبی که در توابع برقراره، داشتن ضابطه است. مثلاً می‌خوام یه مجموعه C برای همون قضیه دما معرفی کنیم:

$$C=\{(1,15),(2,13),(3,11),(4,9),\dots\}$$

همونطور که می‌بینی هر یک ساعت که می‌گذره دمای هوا داره $2^\circ C$ کاهش پیدا می‌کنه، یعنی یه نظم خاصی داره و می‌تونیم براش ضابطه تعریف کنیم. ضوابط توابع معروف رو قبلاً زیاد دیدی، درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳، رادیکالی، قدرمطلقی، براکتی، مثلثاتی و...

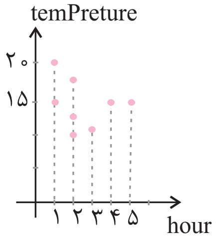
$y=x$, $y=3x-5$, $y=x^2$, $y=x^2-2x$, $y=|x|$, $y=[x]$, $y=\sin x$ و ...

ولی هیچوقت تابعی به صورت $x=y^2$, $x=|y|$, $x=[y]$ و یا ... ندیدی.

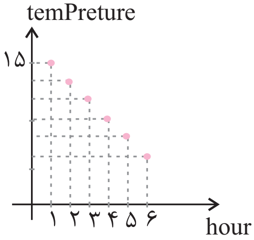
پس شناخت تابع از روی ضابطه هم معمولاً چشمی و براساس تجربیات خیلی کم، امکان‌پذیره. فقط اینو بدون ضوابطی که y^2 , $|y|$, $[y]$ یا نسبت مثلثاتی از y دارن، معمولاً ضابطه یک تابع نیستن مگر در شرایط خاص که در محدوده درس شما نیست!

۴ـ نمودار: می‌خوام نمودار مجموعه‌های A، B و C رو براتون بکشم تا خودتون به نتیجه برسین که چه نموداری می‌تونه نمودار یک تابع باشه:

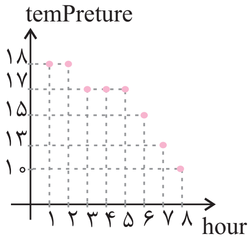
مجموعه B



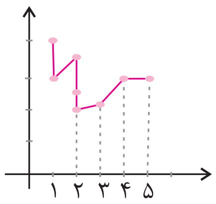
مجموعه C



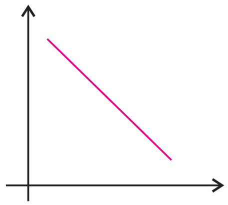
مجموعه A



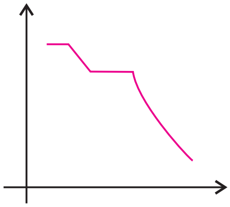
⇓ اگر پیوسته بشه



(۳)



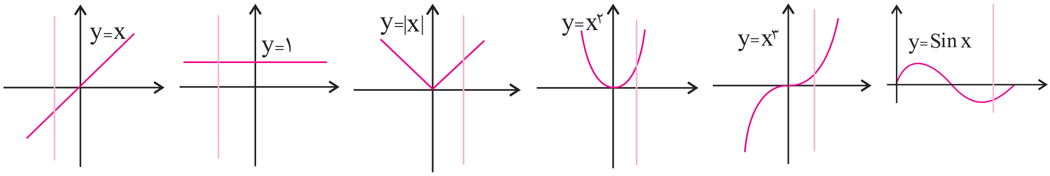
(۲)



(۱)

نمودارهای پیوسته (۱) و (۲) نمایش تابع هستن ولی نمودار (۳) نمایش یک تابع نیست.

به احتمال خیلی زیاد هر چقدر هم که تا حالا کم ریاضی خونده باشید با یک نگاه متوجه شدید که نمودار سوم شبیه هیچکدام از توابعی که تا به حال دیده بودید نیست. پس مهم‌ترین عاملی که اینجا می‌تونه به شما کمک کنه نمودار توابع مختلفیه که می‌شناسید. تو همه این نمودارها یک موضوع مشترکه و اون اینه که خطوط موازی محور yها منحنی رو در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کنه.



این هم تشخیص تابع‌بودن از روی نمودار. بریم سراغ شرایط یک به یک‌بودن!

۲ـ۷: یک به یک‌بودن

تمام شرایطی که تو تابع‌بودن دیدی رو برعکسش کنی، می‌شه شرایط یک به یک‌بودن.

۱ــ نمودار وِن ← اونجا دو شاخه از چپ به راست تابع نبود ولی از راست به چپ مشکلی نداشت.
اینجا از راست به چپ تابع هست ولی دیگه یک به یک نیست، پس کلاً واسه یک به یک‌بودن تو نمودار وِن نباید هیچ دو شاخه‌ای داشته باشیم. فقط تک به تک!

۲ــ زوج مرتب ← اولاً برای تابع‌بودن نباید مولفه اول تکراری داشتیم ولی مولفه دوم یکسان مشکلی نداشت. اینجا مولفه دوم یکسان هم ممنوعه. یعنی برای یک به یک‌بودن علاوه بر مولفه اول، مولفه دوم تکراری هم نباید باشه.

۳ــ ضابطه ← توابعی که تو ضابطشون $x^۲$, $|x|$, $[x]$ یا نسبت مثلثاتی از x داشته باشن معمولاً یک به یک نیستن چون این ۴ حالت یک به یک‌بودن رو به هم می‌زنه ولی بهترین راه برای تشخیص یک به یک‌بودن، نمودار تابع است.

۴ــ نمودار ← تو تابع‌بودن می‌گفتیم شرطش اینه که خطوط موازی محور yها بیش از یک نقطه قطع نکنه ولی اینجا تو یک به یک‌بودن می‌گیم که خطوط موازی محور xها هم نباید بیش از یک نقطه منحنی رو قطع کنه که اگر چنین شد، دیگه تابع ما یک به یک نیست!

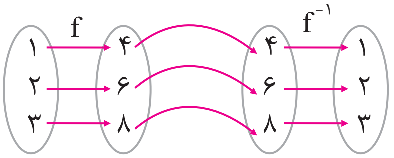
۳ـ۷: تابع وارون

اگه ازتون بخوان که یک عدد رو وارون کنید، می‌برینش تو مخرج، مثلاً وارون ۲ میشه $\frac{۱}{۲}$ یا وارون ۳- می‌شه $\frac{-۱}{۳}$. حالا آیا می‌تونیم به همین ترتیب بگیم که وارون $x^۲$ هم می‌شه $\frac{۱}{x^۲}$ یا وارون $x^۳$ می‌شه $\frac{۱}{x^۳}$؟!

قطعاً جواب منفیه. راستی دلیلش چیه بچه‌ها ؟! دلیلش اینه که هر عدد یک مولفه بیشتر نداره و وارون‌شدن عدد، همون معکوس شدنه ولی تو تابع هر نقطه شامل دو مولفه است. (x و y) و ضمناً وارون تابع $y=x^۲$ می‌شه $x=y^۲$ و یا وارون $y=x^۳$ می‌شه $x=y^۳$.

پس وارون‌شدن تو تابع به معنای عوض‌شدن جای x و y هستش. مثلاً اگر داشته باشیم:

$f=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۸)\}$ تابع وارون f که با $f^{-۱}$ نمایش داده می‌شه، به این صورته $f^{-۱}=\{(۴,۱),(۶,۲),(۸,۳)\}$ حالا اگه $f, f^{-۱}$ رو با هم ترکیب کنیم، چی می‌شه بچه‌ها:



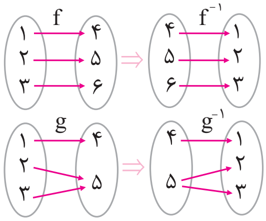
$$f^{-۱}(f(x))=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

یعنی هر x ای وارد f بشه و بعد وارد f^{-1} دوباره خودش خارج می‌شه و داریم:

هر چی f زحمت کشیده و رشته؛ تو f^{-1} پنبه می‌شه. $f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow x \to \boxed{f} \to \boxed{f^{-1}} \to x$

به همین ترتیب $f(f^{-1}(x)) = x$ یعنی:

ـ وارون از روی نمودار وِن

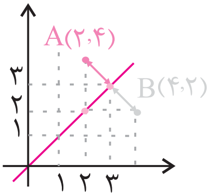


به دو نمودار وِن مقابل و وارون آن‌ها توجه کنید. هم f و هم g هر دو تابع هستند، با این تفاوت که وارون f یعنی f^{-1} تابع شده ولی وارون g یعنی g^{-1} تابع نشده. دلیلش رو هم که قطعاً فهمیدین. دلیلش اینه که g یک به یک نبوده و وقتی وارون شده وارونش تابع نشده.

پس می‌تونیم نتیجه‌گیری کنیم که هر تابعی رو می‌شه وارون کرد و جای x و yهاش رو با هم عوض کرد ولی هر وارونی تابع نمی‌شه. برای اینکه وارون یک تابع، خودش یک تابع بشه لازمه که خود تابع، یک به یک باشه.

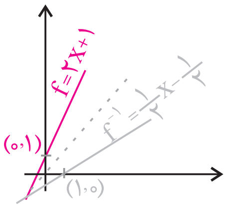
ـ وارون از روی نمودار

همونطور که مستحضر هستید روی خط $y=x$ یعنی نیمساز ناحیه اول و سوم x و yها با هم برابرن و همان x ای که وارد تابع $y=x$ می‌شه همان y هم ازش خارج می‌شه. به همین خاطرِ که به $y=x$ می‌گن تابع همانی.



در نمودار مقابل نقطه (۳ و ۳) رو در نظر بگیرید. اگر از این نقطه به سمت بالا حرکت کنیم y زیاد می‌شه و x کم می‌شه و برعکس، اگر به سمت پایین حرکت کنیم x زیاد می‌شه و y کم! حالا اگر به شکل عمود بر نیمساز و به یک اندازه حرکت کنیم دقیقاً جای x و y عوض می‌شه.

یعنی یک پله بریم بالا به نقطه $A(۲,۴)$ می‌رسیم و اگه یک پله بیاییم پایین، نقطه $B(۴,۲)$ در واقع نقطه B معکوس نقطه A است و برعکس. یک تابع از نقاط بی‌شماری تشکیل شده که اگر این کار رو با تک تک نقاط انجام بدیم، نمودار تابع وارون شکل می‌گیره. پس اگر نمودار یک تابع رو نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی خط $y=x$ قرینه کنیم، می‌شه نمودار تابع وارون. مثال‌های زیر رو با هم ببینیم:



مثال ۱: وارون توابع درجه یک.

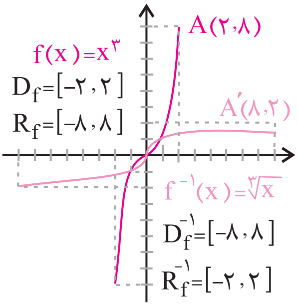
وقتی یک خط نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه می‌شه؛ شیبش معکوس می‌شه.

مثلاً اگر شیب خطی ۲ بوده به ازای هر یک واحد به جلو، ۲ واحد بالا می‌ره ولی اگر جای x و y رو عوض کنیم، به ازای هر ۲ واحدی که جلو بره یک واحد بالا می‌ره.

پس چون شیب خط $f(x)$؛ ۲ بود پس تو f^{-1} می‌شه $\frac{۱}{۲}$. حالا کافیه یک نقطه از f^{-1} رو هم داشته باشی که بتونی معادلش رو بنویسی. بله! وقتی $(۰,۱)$ روی f صدق می‌کنه پس نقطه $(۱,۰)$ روی تابع وارونشه. حالا با شیب $\frac{۱}{۲}$ و نقطه $(۱,۰)$ معادله خط وارون رو می‌نویسیم: معادله خط چه جوری می‌نویسن؟!

$$\left.\begin{array}{l} \text{نقطه } A:(x_۱,y_۱) \\ \text{شیب } = m \end{array}\right\} \to y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(۱,۰) \\ m = \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \to y - ۰ = \frac{۱}{۲}(x-۱) \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

مثال ۲: وارون یک تابع درجه سه

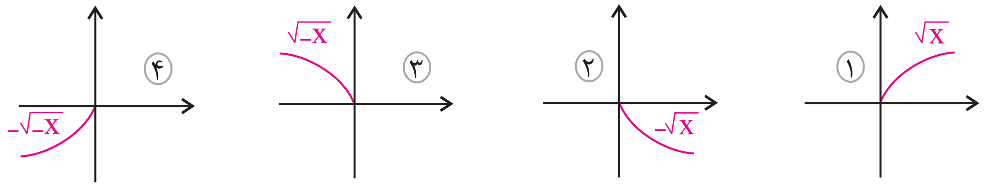


تابع بسیار معروف لر یا x^3 رو در دامنه $[-2,2]$ رسم می‌کنیم. دو نقطه مهم f رو در نظر بگیرید $f=\{(1,1),(2,8)\}$ پس $f^{-1}=\{(1,1),(8,2)\}$. حدس بزنید کدوم ضابطه می‌تونه ۸ رو بگیره و ۲ بده؟! آفرین. $\sqrt[3]{x}$ پس وارون درجه ۳ می‌شه فرجه ۳! همونطور که ملاحظه می‌کنید جای دامنه و برد هم در تابع وارون عوض می‌شه.

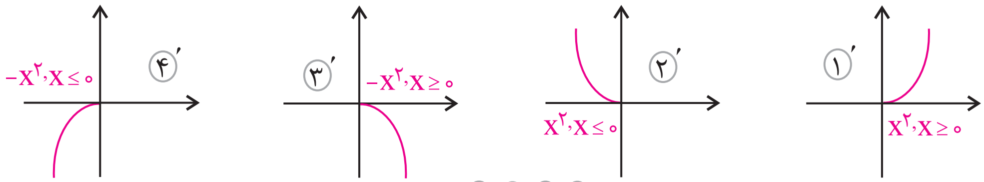
ـ وارون تابع درجه ۲

تابع درجه ۲ طبق صحبت‌هایی که تو قسمت قبلی داشتیم وارون‌پذیر نیست چون یک به یک نیست. ولی ما می‌تونیم دامنش رو محدود کنیم تا یک به یک و وارون‌پذیر بشه. این محدودیت می‌تونه بعد از رأس و یا قبل از رأس باشه. اول درس هم گفتیم معکوس x^2 نمی‌شه $\frac{1}{x^2}$! معکوس درجه ۳ می‌شد فرجه ۳ و معکوس درجه ۲ هم می‌شه فرجه ۲. x^2 به ازای ۲ می‌ده ۴ و تابع وارونش باید به ازای ۴ بده ۲، که $\sqrt{x}$ این کار رو انجام می‌ده.

اگه یادتون باشه تو بخش انتقال بهتون گفتم چهار تا $\sqrt{x}$ داریم و نمودارشون رو اونجا دیدین. حالا اینجا می‌خوایم بریم ببینیم اون ۴ تا $\sqrt{x}$ معکوس چه توابعی هستن. اول اون چهار تا $\sqrt{x}$ رو با هم ببینیم:



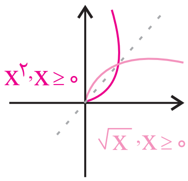
حالا بریم سراغ ۴ تا x^2؛

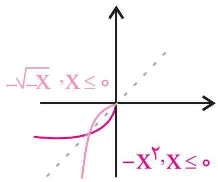


دقیقاً حالت‌های ①′،②′،③′و④′ معکوس حالت‌های ①،②،③و④ هستن.

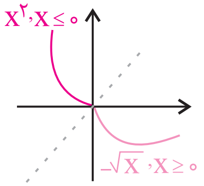
دقت داشته باشید چون تو تابع معکوس نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه‌سازی انجام می‌شه اگر نمودار تو این دو ناحیه یعنی ناحیه اول یا سوم باشه، معکوسش هم تو همون ناحیه قرار می‌گیره (شماره‌های ① و ④) و اگر نمودار تابع تو ناحیه دوم یا چهارم باشه، وارونش روبروش قرار می‌گیره. مثلاً ②′ تو ناحیه دومه و وارونش میره تو ناحیه ۴ یا ③′ که تو ناحیه چهارمه و معکوسش میفته تو ناحیه ۲.

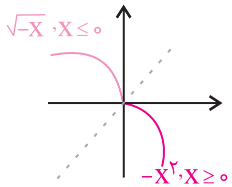
اول شماره ۱ و ۴ رو ببینیم که هر دو تابع صعودی و در ناحیه اول و سوم هستن:





حالا بریم سراغ ۲ و ۴ که چون نزولی هستن و در نواحی ۲ و ۳، وارونش میفته تو ناحیه روبروش.





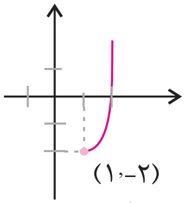
* حالا بریم سراغ ضابطه وارون درجه دوم‌های دیگه.

مثال ۱: می‌خوایم $f(x)=x^2-2x-1$ رو وارون کنیم. بهترین روش برای این کار از روی نمودار و نهایتاً انتقاله.

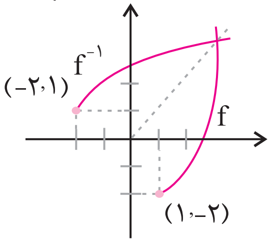
گام اول: رأس سهمی رو پیدا می‌کنیم: $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-2)}{2(1)}=1 \Rightarrow y_S=f(1)=-2$

پس مختصات رأس شد $S(1,-2)$

گام دوم: نیمه دوم نمودار رو از رأس به سمت راست رسم می‌کنیم:

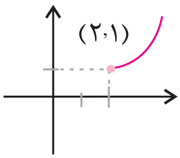


گام سوم: وارون نقطه $(1,-2)$ یعنی نقطه $(-2,1)$ می‌شه رأس تابع وارون که یک رادیکال فرجه ۲ انتقال یافته است. (دو واحد به عقب و یک واحد به بالا) و ضابطش می‌شه $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}+1$. دقت داشته باشید اگر ضابطه وارون برای قبل از رأس خواسته شد، فقط یک منفی پشت رادیکال می‌ذاریم: $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+2}+1$.

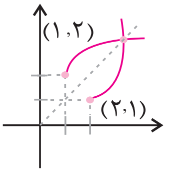


مثال ۲: با محدودکردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید:

گام اول: $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(1)}=2 \rightarrow y_S=f(2)=(2)^2-4(2)+5=1 \Rightarrow s\ (2,1)$



گام دوم: رسم سهمی بعد از رأس

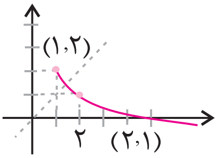


گام سوم: وارون‌کردن نقطه (۱، ۲) و رسم نمودار تابع وارون

ضابطه وارون رادیکال x ایه که یک واحد جلو و دو واحد بالا رفته یعنی

$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$

حالا اگه f رو در بازه‌ی $(-\infty,۲)$ در نظر بگیریم وارونش اینجوری می‌شه



$x^۲+۴x+۵$

$f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۱}+۲$

این هم ضابطه وارون برای xهای قبل از رأس که دامنه f، $(-\infty,۲]$ بود و همین بازه شد برد تابع $f^{-۱}$. برد f هم که $[۱,+\infty)$ بود شد دامنه تابع وارون.

ـ به دست‌آوردن ضابطه وارون

برای تعیین ضابطه وارون بدون رسم به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: ضابطه تابع که به صورت $\boxed{f(x)=\text{هرچی}}$ داده شده باشه رو به شکل $\boxed{y=\text{هرچی}}$ می‌نویسیمش (من در اصطلاح به این کار می‌گم ضابطه رو به شکل لری و بی‌شیله پیله می‌نویسیم).

گام دوم: بعد از اینکه تابع رو به صورت لری نوشتیم جای x و yها رو عوض می‌کنیم یعنی به جای xهامون، y و به جای yها، x می‌ذاریم.

گام آخر: حالا ضابطه به دست اومده ضابطه تابع وارون هست ولی فرمش ضمنی هستش و صریح نیست. برای تعیین فرم صریح مجبوریم y رو بر حسب x به دست بیاریم.

پس کار سه مرحله‌ای شد: اول لری، دوم تعویض، سوم y بر حسب x !

بریم چند تا مثال خوب با هم حل کنیم و ضابطه وارون توابع زیر رو به دست بیاریم:

مثال ۱: $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}$

خب اولاً این ضابطه همون خط $y=-۴x+\dfrac{۳}{۲}$ هستش و فکر نکنین هموگرافیکه!

$$\text{اول لری}: y=\frac{-۸x+۳}{۲}\rightarrow \text{دوم تعویض}: x=\frac{-۸y+۳}{۲}\rightarrow \text{سوم }y\text{ بر حسب }x: ۲x=-۸y+۳\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۸y=-۲x+۳\Rightarrow y=\frac{-۲x}{۸}+\frac{۳}{۸}\Rightarrow \boxed{y=\frac{-۱}{۴}x+\frac{۳}{۸}}\text{ضابطه وارون}$$

مثال ۲: $f(x)=\dfrac{۷}{۲}x-۳$

$$\text{اول لری}: y=-\frac{۷}{۲}x-۳\rightarrow \text{دوم تعویض}: x=-\frac{۷}{۲}y-۳\rightarrow \text{سوم }y\text{ بر حسب }x: \frac{۷}{۲}y=-x-۳\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۲}{۷}}\boxed{y=-\frac{۲}{۷}x-\frac{۶}{۷}}(f)^{-۱}\text{ضابطه وارون}$$

مثال ۳: $f(x)=-\sqrt{x-۸}$

$$\text{اول لری}: y=-\sqrt{x-۸}\rightarrow \text{دوم تعویض}: x=-\sqrt{y-۸}\rightarrow \text{سوم }y\text{ بر حسب }x:$$

$$:\sqrt{y-۸}=-x\xrightarrow{\text{توان ۲}}y-۸=x^۲\Rightarrow y=x^۲+۸$$

مثال ۴: $f(x)=x^۲+۴x+۳$

$$\text{اول لری}: y=x^۲+۴x+۳\rightarrow \text{دوم تعویض}: x=y^۲+۴y+۳\rightarrow \text{سوم }y\text{ بر حسب }x$$

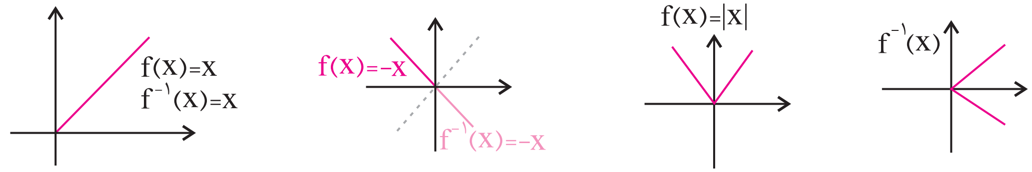
$x+۱=y^{۲}+۴y+۴ \Rightarrow (y+۲)^{۲}=x+۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |y+۲|=\sqrt{x+۱}$ $\frac{\text{کافیه(۱+)بدیم به طرفین}}{\text{تا y مربع کامل وبعدتنهابشه}}$

$\longrightarrow y+۲=\pm\sqrt{x+۱} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x+۱}-۲ \rightarrow \text{ضابطه وارون برای xهای بعد از راس} \\ y=-\sqrt{x+۱}-۲ \rightarrow \text{ضابطه وارون برای xهای قبل از راس} \end{cases}$

مثال ۵: $f(x)=|x|$

این هم وارون‌پذیر نیست و مثل $x^{۲}$ باید دو تیکه بشه، قبل از صفر و بعد از صفر. $\Rightarrow y=\begin{cases} x \quad , \quad x\geq ۰ \\ -x \;, \quad x<۰ \end{cases}$

$y=x$ که نیمساز ناحیه اول و سومه و وارونش خودشه. اتفاقاً تو xهای منفی هم وارونش همون ضابطه $(-x)$ می‌شه ولی میوفته تو ناحیه چهارم. اگه نمودارها رو ببینیم خیلی بهتر می‌فهمین:



دیدید که وارونش تابع نیست چون $|x|$ یک به یک نیست!

بخش اول: معادلات و نامعادلات

۱- مجموعه جواب نامعادله‌ی $-1<\frac{3x+1}{x-3}<3$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $x<\frac{1}{2}$ ۲) $x<3$ ۳) $-\frac{1}{2}<x<3$ ۴) $\frac{1}{2}<x<3$

۲- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{x-3}>\frac{1}{x-1}$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۳)

۱) $x<3$ ۲) $1<x<3$ ۳) $2<x<3$ ۴) $-2<x<3$

۳- در مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{x-2}<\frac{x}{5+2x}$، چند عدد صحیح قرار می‌گیرد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۴- نامعادله‌ی $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\le 1$ در بازه‌ی $(-\infty,a]$ برقرار است، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۵- نامعادله‌ی $-1<\frac{2x-9}{|x^2+1|}$ در کدام بازه، برقرار است؟

۱) $(2,6)$ ۲) $(-4,2)$ ۳) $(-2,4)$ ۴) $(-1,5)$

۶- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x+|x|\le\frac{1}{2}x+3$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۵ خارج)

۱) $[-4,2]$ ۲) $[-6,1]$ ۳) $[-6,2]$ ۴) $[-2,6]$

۷- نمودار تابع $y=4-|x|$ در بازه‌ی (a ،b) بالاتر از خط به معادله‌ی $2y+x=5$ قرار دارد. بزرگترین مقدار b-a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸- مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|>1$ به صورت کدام بازه‌ها است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $(-3,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ ۲) $(-2,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1)$

۳) $(-3,-\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

۹- مجموعه جواب نامعادله $x^2-2x<|x-2|$ به صورت کدام بازه‌ها است؟ (تجربی ۹۲ خارج)

۱) (۱، ۲-) ۲) (۱، ۱-) ۳) (۲، ۱-) ۴) (۲، ۱)

۱۰- تعداد جواب‌های معادله‌ی $|x-3|-\sqrt{x-1}=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱- معادله‌ی $\frac{x}{x-2}+\frac{2(x+1)}{x-4}=3$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲- معادله‌ی $x=2+\sqrt{2x^2-5x+2}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

۱۳- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{7}{\sqrt{x-3}+1}+\sqrt{x-3}=7$ کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۸ ۳) ۳۹ ۴) ۱۹

۱۴- اگر $x^۲+x<۰$ باشد، حاصل $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کدام است؟ (تجربی ۸۵ خارج)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) $+۱$

۱۵- اگر $[x]=۱$ باشد آنگاه حاصل $\sqrt{x^۲-۴x+۴}+\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $۲x-۳$

۱۶- اگر مجموعه جواب معادله‌ی $[|x|+۱]=۱$ به صورت بازه‌ی (a,b) باشد، آن‌گاه $b-a$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷- مجموع جواب معادله‌ی $[x+۳]+[x-۱]=۱۰$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[۳,۴)$ ۲) $[۴,۵)$ ۳) $[۵,۶)$ ۴) $[۹,۱۰)$

۱۸- مجموع جواب نامعادله‌ی $|x^۲+۱|>|x-۲|-۲x+۱$، به صورت کدام بازه‌ها است؟ (تجربی ۹۵ خارج)

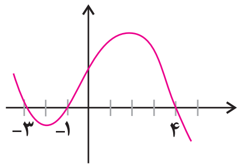
۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۱,۲)$

بخش دوم: نمودارها و انتقال

۱- قرینه نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده. سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۷ خارج)

۱) -۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

۲- شکل روبرو، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (تجربی ۹۴ خارج)



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$

۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۳- نمودار تابع $y=x-[x], x\in[-۲,۳)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه‌ی L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟ (تجربی ۸۳)

۱) $(۴,۱)$ ۲) $(۴,\sqrt{۲})$ ۳) $(۵,۱)$ ۴) $(۵,\sqrt{۲})$

۴- از معادله‌ی $[x]+[-x]=x-[x]$ کدام مقادیر برای x قابل قبول است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۵- نمودار تابع $x\in[-۲,۶)$ و $y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱$ از چند پاره‌خط مساوی هم، تشکیل شده است؟ (تجربی ۸۶ خارج)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- نمودار تابع $y=[x^۲]$ روی بازه $x\in(-۲,۲)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است؟ (تجربی ۹۱ خارج)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

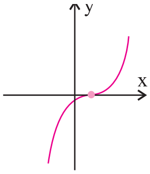
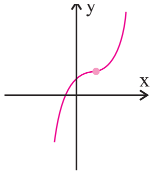
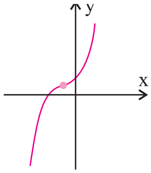
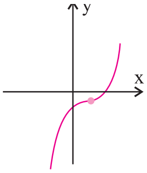
۷- مساحت محدود به نمودار تابع $f(x)=۲[x]+۱$ و محور xها در بازه‌ی $[-۱,۲)$ چقدر است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

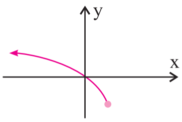
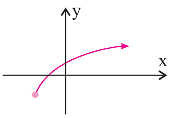
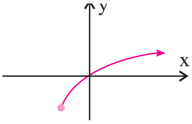
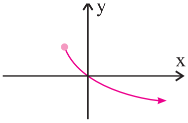
۸- نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{2}x\right|-2$ را ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-3/5$ ۲) -3 ۳) $-2/5$ ۴) -2

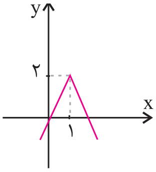
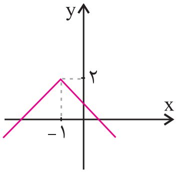
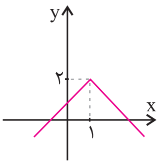
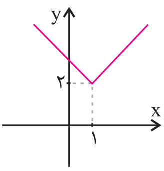
۹- نمودار تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$ کدام است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

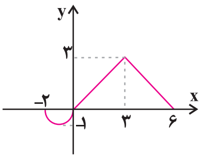
۱۰- نمودار تابع $f(x)=-2+\sqrt{x+4}$ به صورت کدام یک از شکل‌های زیر است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۱- نمودار تابع $y=-|x-1|+2$ کدام است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۲- شکل مقابل نمودار تابع $y=3f(x+2)$ است. نمودار تابع $y=f(x)$ در چند نقطه نمودار تابع $y=1$ را قطع می‌کند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

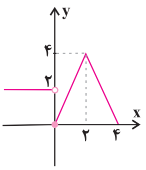
۱۳- نمودار $y=|x|$ را ابتدا دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. در پایان، نمودار حاصل را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع به وجود آمده کدام است؟

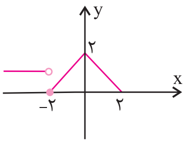
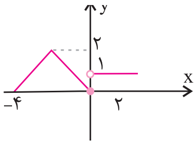
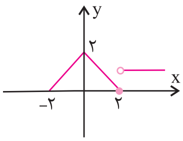
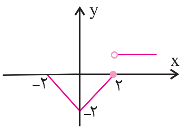
۱) $y=|x-2|-1$ ۲) $y=1-|x-2|$ ۳) $y=1-|x+2|$ ۴) $y=-1-|x+2|$

۱۴- اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=-x^3+2$ بازه‌ی $[-1,3]$ باشد، برد آن به صورت $[a,b]$ می‌باشد. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۱۵- شکل زیر نمودار تابع $y=2f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(2-x)$ کدام است؟



۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۶- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=2-|x|$، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

بخش سوم:

تابع‌بودن، اعمال روی توابع و ترکیب توابع

۱- اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) x^2-x+3 ۲) x^2-2x-1 ۳) x^2-2x+1 ۴) x^2-x+1

۲- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$ باشند، جواب معادله $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۷ خارج)

۱) $-1,-7$ ۲) $1,-7$ ۳) $-1,7$ ۴) ۱ ، ۷

۳- اگر $f(x)=\frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x)=\frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g\big(f(x)\big)$ کدام است؟ (تجربی ۹۶ خارج)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-1$ ۴) $x+1$

۴- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{2x-x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟ (تجربی ۹۶ خارج)

۱) $\left[\frac{2}{3},2\right]$ ۲) $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$ ۳) $\left[-\frac{2}{3},0\right)\cup(0,2]$ ۴) $\left[-\frac{2}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{2}{3}\right]$

۵- دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{-4x^2-3x+1}$ کدام است؟

۱) $\left[-1,\frac{1}{4}\right]$ ۲) $[2,3]$ ۳) $\left[-2,\frac{5}{3}\right]$ ۴) $[0,1]$

۶- اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$، کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[1,3]$

۷- اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $(-4,1)$ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(4,-1)$

۸- اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $\xrightarrow{x}\boxed{f}\longrightarrow\boxed{g}\longrightarrow 2x$ باشند و $g(x)=3x+4$ مقدار $f(5)$ کدام است؟ (تجربی ۹۱ خارج)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2[x]$ مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

۱۰- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g\big(f(a)\big)=5$ باشد، عدد a کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱- اگر $f=\{(2,5),(3,4),(0,-2)\}$ و $g=\{(-1,2),(0,3),(2,4),(3,0)\}$ ، تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\{(2,7),(3,4),(0,-2)\}$ ۲) $\{(2,7),(3,4)\}$

۳) $\{(2,9),(3,4)\}$ ۴) $\{(2,9),(3,4),(0,1)\}$

۱۲- اگر $f=\{(۲,۴),(۴,۶),(۵,۰)\}$ و $g=\{(۵,-۲),(۷,۰),(۶,۱),(۲,۰)\}$ ، تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $\{(۲,۴),(۵,۰),(۰,۵)\}$ ۲) $\{(۲,۲),(۵,-۲)\}$

۳) $\{(۲,۰),(۵,۰)\}$ ۴) $\{(۰,۲),(۱,۵),(۲,۶)\}$

۱۳- اگر $f=\{(۲,۰),(۴,۵),(۳,۱۰)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۲,۱),(۴,۲),(۵,۳)\}$ ، برد تابع $\frac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x}$ و $g=\{(۵,۱),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$ باشد، دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- کدام گزینه در مورد دامنه و برد یک تابع نادرست است؟

۱) دامنه و برد یک تابع می‌تواند نامتناهی باشد.

۲) دامنه‌ی تابع می‌تواند شامل سه عضو و برد آن شامل دو عضو دارد.

۳) دامنه‌ی آن می‌تواند نامتناهی و برد آن شامل یک عضو باشد.

۴) دامنه‌ی آن می‌تواند شامل دو عضو و برد آن شامل سه عضو باشد.

۱۶- در مورد تابع خطی f می‌دانیم $f(۲)=۵$ و $f(-۱)=-۱$. این تابع محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۷- برد تابع $y=\begin{cases} x^۲-۴x & x>۱ \\ ۲x-۳ & x<-۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۵)\cup(-۴,+\infty)$ ۲) $(-۵,-۴]$

۳) $(-\infty,-۵)\cup[-۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۵)\cup[-۴,+\infty)$

۱۸- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$، دامنه‌ی تابع gof شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۹- اگر $D_g=[-۲,۳]$ و $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ ، دامنه‌ی تابع $y=gof(x)$ کدام است؟

۱) $[-۷,۲۷]$ ۲) $[-۷,۲۸]$ ۳) $[-۲۷,۸]$ ۴) $[-۳,۸]$

۲۰- اگر $g(f(x))=\frac{۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲}{۷-x}$ ، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) -۱

۲۱- f تابعی ثابت و g تابع همانی است. اگر دامنه‌ی این دو تابع $\mathbb{R}$ باشد و $f(-۱)=۳$ ، حاصل $f(g(۲))+g(f(۳))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

۲۲- اگر $f(x)=[x]$ مجموعه‌ی مقادیر $f\left(x-f(x)\right)$ کدام است؟ (تجربی ۸۴ خارج)

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{-۱,۰,۱\}$

۲۳- اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^x-۱$ از دو نقطه $A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $B(۱,۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟ (تجربی ۸۳)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۴- رابطه‌ی $\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟ (تجربی ۸۵ خارج)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

۲۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y+۲x=b$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور xها متقاطع‌اند، طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر این منحنی و خط، کدام است؟ (تجربی ۸۹)

۱) $-۱,۲$ ۲) $-۱,۳$ ۳) $۰,-۱$ ۴) $۰,۲$

۲۶- برای هر عدد طبیعی $n>۲$ حاصل $[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]-۲[\sqrt{n^۲-۲n}]$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

بخش چهارم: یکنوایی و یک به یک بودن و تابع وارون

۱- قرینه خط به معادله $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$ خط d می‌نامیم، عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۲- دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱)(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند، اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۳- دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ (تجربی ۹۶ خارج)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

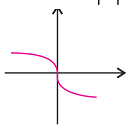
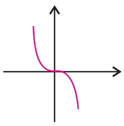
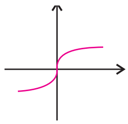
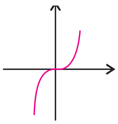
۴- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$ تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟ (تجربی ۸۵)

۱) $\{(۱,۳),(۰,۰)\}$ ۲) $\{(۲,۴),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$ ۴) $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

۵- ضابطه وارون تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $y=\frac{x}{۱-|x|},|x|<۱$ ۲) $y=\frac{۱-|x|}{|x|},|x|>۱$ ۳) $y=\frac{x}{|x|-۱},|x|>۱$ ۴) $y=\frac{|x|-۱}{x},|x|<۱$

۶- اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۷- ضابطه وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\geq ۰\\ -\sqrt{-x}, x<۰\end{cases}$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-x^۲$ ۲) $x^۲$ ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

۸- ضابطه وارون تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ , & x\leq ۰\\ -x^۲ , & x>۰\end{cases}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

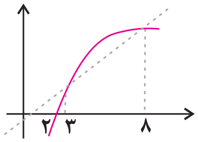
۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & ,x<۰\\ \sqrt{x} & ,x\geq ۰\end{cases}$

۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x},x\geq ۰\\ \sqrt{-x},x<۰\end{cases}$

۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & ,x<۰\\ -\sqrt{x} & ,x\geq ۰\end{cases}$

۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ,x<۰\end{cases}$

۹- شکل روبرو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)



۱) $(۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

۱۰- در تابع خطی $f(x)$ داریم $f(۱)=۳$ و $f(۰)=۲$. ضابطه‌ی وارون این تابع کدام است؟

۱) $y=x-۱$ ۲) $y=۲x-۵$ ۳) $y=x-۲$ ۴) $y=x+۳$

۱۱- با فرض $x\leq ۳$ ، ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=x^۲-۶x+۱$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۳-\sqrt{x+۸}$ ۲) $f^{-۱}(x)=-۳+\sqrt{x+۸}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۳+\sqrt{x+۸}$ ۴) $f^{-۱}(x)=-۳-\sqrt{x+۸}$

۱۲- اگر تابع $f=\{(۱,m),(۵,۷m+۲),(۳,۲m+۱)\}$ صعودی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $[-۱,+\infty)$ ۲) $[-\frac{۱}{۵},+\infty)$ ۳) $[-۱,-\frac{۱}{۵})$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۱۳- اگر $f=\{(۱,-۱),(-۱,a),(۲,۳a),(۴,۵)\}$ ، $g=\{(۲,-۳),(۱,۲a),(۴,-a),(۰,۲)\}$ و تابع $f+g$ نزولی باشد، کدام گزینه در مورد a درست است؟

۱) $a\geq ۲$ ۲) $a=۲$ ۳) $a\leq ۲$ ۴) $a\in R$

۱۴- اگر تابع $f(x)=x^۲-۶x-۱$ در بازه‌ی $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۵- اگر تابع $f(x)=\{(۱,a^۲),(a^۲+۱,۳),(a^۳,-a),(a-۱,۰),(۵,۳)\}$ یک‌به‌یک باشد، مجموعه‌ی مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) $\{۲,-۲\}$ ۲) $\{۲\}$ ۳) $\{-۲\}$ ۴) $\varnothing$

۱۶- اگر ضابطه‌ی تابع f به صورت
$$f(x)=\begin{cases}-x^۲+۶x-۵ & , \quad x>۳\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۸}{۵} & , \quad -۲\leq x\leq ۳\\ x^۲+۶x+۸ & , \quad x<-۲\end{cases}$$
باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$ اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۷- تابع $y=۲x+\frac{|x|}{x}$ در دامنه‌ی خود چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) هم صعودی و هم نزولی ۴) غیر یکنوا

۱۸- تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ مفروض است. در کدام یک از بازه‌های زیر، برای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو این بازه رابطه‌ی $x_۱<x_۲\Leftrightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$ برقرار است؟

۱) $(-۳,-۱)$ ۲) $(-۲,۰)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۰,۱)$