

نام و نام خانوادگی: .....  
 مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی  
 نام پدر: .....  
 شماره داوطلب: .....  
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران  
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۳ تهران  
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد سیدخندان  
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: هندسه ۳  
 نام دبیر: آقای زمانی نژاد  
 تاریخ امتحان: ۱۰ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
 ساعت امتحان: ۰۸ : ۰۰ صبح / عصر  
 مدت امتحان : ۸۰ دقیقه

نام دبیر:	نام دبیر:	نمره به عدد:	نمره به حروف:	محل مهر و امضا: مدیر
		نمره به عدد:	نمره به حروف:	
نام دبیر:	نام دبیر:	تاریخ و امضا:	تاریخ و امضا:	
شماره	سؤالات	نمره	نمره	
۱	ماتریس های $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ به صورت زیر تعریف شده اند، ماتریس $AB$ را بیابید. $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ 2i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i + 2j & i > j \\ i - j + 1 & i < j \end{cases}$	۱,۵	۱	
۲	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^y$ را بیابید.	۱	۲	
۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ و $AB$ ماتریسی قطری باشد، $x$ و $y$ را بیابید.	۱	۳	
۴	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ، در تساوی $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ صدق می کنند، مقادیر $a$ و $b$ را بیابید.	۱	۴	
۵	حاصل دترمینان زیر را به روش بسط، بیابید. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	۱	۵	
۶	اگر $A = \begin{bmatrix}  A  & 3 \\ 2 &  A  \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $A$ را بیابید.	۱	۶	
۷	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، اعداد $\alpha$ و $\beta$ را چنان بیابید که $\alpha A + \beta I = A^{-1}$	۱,۵	۷	
۸	اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{bmatrix}$ برابر باشد، مقدار $m$ را بیابید.	۱,۵	۸	
۹	دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون، حل کنید. $\begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{7}{6} - \frac{y}{3} \\ x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$	۱,۵	۹	
۱۰	$A$ و $B$ دو ماتریس مربعی، هم مرتبه و وارون پذیرند که $A + B = AB$ ثابت کنید: $B = (I - A^{-1})^{-1}$	۱	۱۰	
۱۱	دو نقطه ی $A$ و $B$ و خط $l$ در صفحه مفروض اند، نقاطی را بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله بوده و از $l$ به فاصله ی $d$ باشند. ( $d > 0$ )	۲	۱۱	
۱۲	معادله ی دایره ای را بنویسید که دو نقطه ی $A(-1, 4)$ و $B(3, 2)$ دو سر یک قطر آن باشند.	۱	۱۲	

ردیف	ادامه ی سوالات	محل مهر یا امضاء مدیر	نمره
۱۳	شعاع دایره ی $ax^2 + y^2 + 2x + 4y - k = 0$ برابر ۲ می باشد، مقدار $k$ را بیابید.		۱
۱۴	حدود $m$ را چنان بیابید که نقطه ی $A(m, m - 1)$ داخل دایره ی $x^2 + y^2 = 5$ باشد.		۱
۱۵	دایره ای از دو نقطه ی $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ گذشته و خط $l: x - y = 2$ یک قطر آن است، معادله ی دایره را بیابید.		۱,۵
۱۶	وضعیت خط $l: 3x - 4y = 1$ و دایره ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$ را نسبت به هم مشخص کنید.		۱,۵
موفق و مؤید باشید زمانی نژاد			
صفحه ی ۲ از ۲			

جمع بارم : ۲۰ نمره



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۳ تهران  
 دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد سیدخندان  
**کلید** سوالات پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: هندسه ۳  
 نام دبیر: آقای زمانی نژاد  
 تاریخ امتحان: ۱۰ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
 ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر  
 مدت امتحان: ۸۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱		$A = \begin{bmatrix} \cdot & ۱ \\ ۳ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -۱ \\ ۴ & ۳ & \cdot \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & \cdot \\ ۱۲ & ۹ & -۳ \\ ۱۶ & ۱۲ & -۵ \end{bmatrix}$
۲		$A^T = \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix} = I$ $A^V = (A^T)^T \times A = I^T \times A = I \times A = A = \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & -۱ \end{bmatrix}$
۳		$AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲x \\ y & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-y & ۴x-۱ \\ ۱+y & ۲x+۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} ۴x-۱ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۴} \\ ۱+y = ۰ \rightarrow y = -۱ \end{cases}$
۴		$(A+B)(A-B) = A^T - B^T \rightarrow A^T - AB + BA - B^T = A^T - B^T \rightarrow AB = BA$ $\rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۳a-۸ & ۳b+۴ \\ ۲a+۱۲ & ۲b-۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳a+۲b & -۲a+۳b \\ ۸ & -۱۴ \end{bmatrix}$ $\rightarrow \begin{cases} ۲a+۱۲ = ۸ \rightarrow a = -۲ \\ ۲b-۶ = -۱۴ \rightarrow b = -۴ \end{cases}$
۵	بسط نسبت به سطر سوم را می نویسیم :	$\det A = ۱(-۱)^۴ \begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix} + ۵(-۱)^۶ \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix} = -۴ - ۳۵ = -۳۹$
۶		$ A  = -۲$ یا $ A  = ۳$
۷		$A^{-۱} = \frac{۱}{۸+۳} \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۱} & \frac{۱}{۱۱} \\ -\frac{۳}{۱۱} & \frac{۲}{۱۱} \end{bmatrix}$ $\alpha A + \beta I = A^{-۱} \rightarrow \begin{bmatrix} ۴\alpha & \alpha \\ -۳\alpha & ۲\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \cdot \\ \cdot & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۱} & \frac{۱}{۱۱} \\ -\frac{۳}{۱۱} & \frac{۲}{۱۱} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۱}{۱۱} \\ ۲\alpha + \beta = \frac{۲}{۱۱} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۱}{۱۱} \\ \beta = \cdot \end{cases}$
۸		$\begin{vmatrix} ۲ & \cdot & -۱ \\ ۱ & ۱ & \cdot \\ -۲ & m & ۳ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & \cdot & -۱ \\ ۱ & ۱ & \cdot \\ -۲ & m & ۳ \end{vmatrix} \rightarrow  A  = (۶ + \cdot - m) - (۲ + \cdot + \cdot) = ۴ - m$ $ B  = m - ۲ \rightarrow  B^{-۱}  = \frac{۱}{m-۲}$ $ A  =  B^{-۱}  \rightarrow ۴ - m = \frac{۱}{m-۲} \rightarrow ۴m - ۸ - m^2 + ۲m = ۱ \rightarrow m^2 - ۶m + ۹ = ۰ \rightarrow (m-۳)^2 = ۰$ $\rightarrow m = ۳$
۹	معادله ی اول را در ۶ و معادله ی دوم را در ۲ ضرب می کنیم :	$\begin{cases} ۹x = ۷ - ۳y \\ ۲x - y = ۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۹x + ۳y = ۷ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} ۹ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix}$

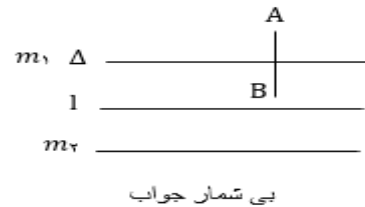
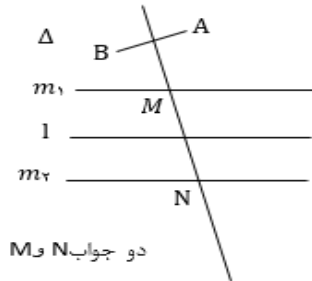
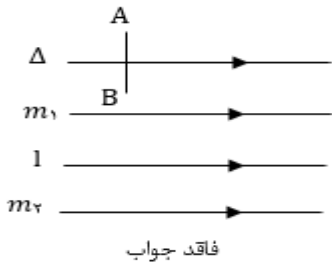
$$A^{-1} = \frac{1}{-9-6} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{3}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{-9}{15} \end{bmatrix} \quad X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{3}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{-9}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{15}{15} \\ \frac{-13}{15} \\ \frac{15}{15} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(A+B) = A^{-1}(AB) \rightarrow I + A^{-1}B = B \rightarrow I = B - A^{-1}B$$

$$I = (I - A^{-1})B \rightarrow (I - A^{-1})^{-1} = B$$

۱۰

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، خط  $\Delta$  عمود منصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله  $d$  باشند دو خط  $m_1$  و  $m_2$  به موازات A است، پس جواب مسأله، محل برخورد  $\Delta$  با  $m_1$  یا  $m_2$  است که وضعیت های زیر را داریم :

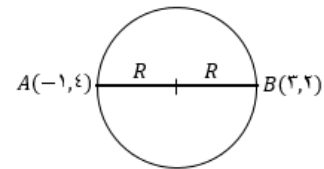


۱۱

$$O = \frac{A+B}{2} = (1, 3)$$

$$R = |OA| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{دایره : } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$$



۱۲

چون معادله ی داده شده، معادله ی دایره است  $a=1$ ، حال داریم :

$$\text{دایره : } x^2 + y^2 + 2x + 4y - k = 0 \rightarrow R = \sqrt{\frac{4+16+4k}{4}}$$

$$= \sqrt{5+k} \xrightarrow{R=2} \sqrt{5+k} = 2 \rightarrow 5+k = 4 \rightarrow k = -1$$

۱۳

$$x^2 + y^2 = 5 \rightarrow O = (0,0), R = \sqrt{5} \rightarrow |OA| = \sqrt{m^2 + (m-1)^2}$$

$$A \text{ درون دایره است } \rightarrow |OA| < R \rightarrow \sqrt{m^2 + (m-1)^2} < \sqrt{5} \rightarrow 2m^2 - 2m + 1 < 5 \rightarrow m^2 - m - 2 < 0$$

$$\rightarrow (m+1)(m-2) < 0 \rightarrow -1 < m < 2$$

۱۴

$$O \in l \rightarrow O = (\beta+2, \beta)$$

$$|OA| = |OB| \rightarrow \sqrt{(\beta+2)^2 + (\beta-1)^2} = \sqrt{(\beta-1)^2 + \beta^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{2\beta^2 + 2\beta + 5} = \sqrt{2\beta^2 - 2\beta + 1} \rightarrow 2\beta^2 + 2\beta + 5 = 2\beta^2 - 2\beta + 1 \rightarrow 4\beta = -4 \rightarrow \beta = -1$$

$$\rightarrow O = (1, -1), R = |OB| = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{دایره : } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$$

۱۵

$$\text{دایره : } x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \rightarrow O = (1, -2), R = \sqrt{\frac{4+16+12}{4}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{پس خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند } R > 2 = \frac{|3(1) - 4(-2) - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2 < R$$

۱۶

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح : فرزاد زمانی نژاد

جمع بارم : ۲۰ نمره