

پاسخ تشریحی کنکور خارج از کشور تجربی ۹۹

سؤال ۱۲۶: حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}} + (۲-\sqrt{۳})^{-۱}$ کدام است؟

- (۱) $۱+۲\sqrt{۳}$ (۲) $۲\sqrt{۳}$ (۳) $۱+\sqrt{۳}$ (۴) ۱
- پاسخ:

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}} + (۲-\sqrt{۳})^{-۱}$$

❖ راه اول

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}} \times \frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}} = \frac{(۳\sqrt{۳}-۱)(۴-\sqrt{۳})}{۱۶-۳} = \frac{۱۲\sqrt{۳} + \sqrt{۳} - ۹ - ۴}{۱۳}$$

$$= \frac{۱۳\sqrt{۳} - ۱۳}{۱۳} = \frac{۱۳(\sqrt{۳}-۱)}{۱۳} = \sqrt{۳}-۱$$

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱} = \frac{۱}{۲-\sqrt{۳}} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۲+\sqrt{۳}}{۱} \Rightarrow \sqrt{۳}-۱ + (۲+\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳} + ۱$$

❖ راه دوم

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}} + (۲-\sqrt{۳})^{-۱}$$

تقسیم پاق اتمار پاق و لاغر $۴+\sqrt{۳} = (\sqrt{۳})^۲ + (\sqrt{۱})^۲ + \sqrt{۳} \times \sqrt{۱}$

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{(\sqrt{۳})^۲ + (\sqrt{۱})^۲ + \sqrt{۳} \times \sqrt{۱}} + \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱} = \frac{(\sqrt{۲۷}-۱)(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۲۷}-۱} = \sqrt{۳}-۱$$

پاق و لاغر

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱} = \frac{۱}{۲-\sqrt{۳}} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۲+\sqrt{۳}}{۱} \Rightarrow (\sqrt{۳}+۱) + (۲+\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳} + ۱$$

سؤال ۱۲۷: جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدر نسبت

دنباله هندسی، کدام است؟

- (۱) $\frac{۴}{۳}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

❖ راه اول

$$a_3, a_7, a_{16}$$

$$(a + 2d), (a + 6d), (a + 10d) \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow (a + 6d)^2 = (a + 2d)(a + 10d)$$

$$a^2 + 12ad + 36d^2 = a^2 + 10ad + 20d^2 \Rightarrow 6d^2 = 2ad \Rightarrow \underline{6d = 2a}$$

$$\text{قدر نسبت دنباله} = \frac{a + 6d}{a + 2d} = \frac{a + 5a}{a + \frac{5a}{3}} = \frac{6a}{\frac{8a}{3}} = \frac{18a}{8a} = \frac{9}{4}$$

❖ راه دوم

اگر a_m, a_n, a_k جمله‌های غیرمتوالی از یک دنباله حسابی باشند که کنار یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می‌دهند.

$$q = \frac{m - n}{n - k} \Rightarrow 9 = \frac{16 - 7}{7 - 3} = \frac{9}{4}$$

سؤال ۱۲۸: فرض کنید باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی مانده

تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- ۱) ۷ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۱

$$p(4) = 3$$

$$p(-2) = 1$$

باقیمانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، $p(4) + 4p(-2)$ است یعنی: $3 + 4(1) = 7$

سؤال ۱۲۹: معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m کدام است؟

- ۱) $(-4, 0)$ ۲) $(-4, -2)$ ۳) $(-6, 0)$ ۴) $(-6, -4)$

پاسخ: گزینه ۴

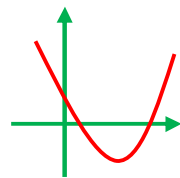
$$b < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$c > 0 \Rightarrow m + 6 > 0 \Rightarrow \boxed{-6 < m < 0} \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m + 6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\Rightarrow (m - 12)(m + 4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 12 \\ m < -4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \boxed{-6 < m < -4}$$



سؤال ۱۳۰: مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{2x - 1}{x + 1} < -1$ کدام است؟

- ۱) $(0, +\infty)$ ۲) $(4, +\infty)$ ۳) $R - [-4, 0]$ ۴) $R - [-4, -1]$

پاسخ: گزینه ۴ ❖ راه اول

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3$$

از طرفین نامساوی $\frac{-1+3}{2} = 1$ را کم می کنیم:

$$-2 < \frac{2x-1}{x+1} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x-1-x-1}{x+1} < 2 \Rightarrow \left| \frac{x-2}{x+1} \right| < 2 \Rightarrow |x-2| < |2x+2|$$

$$\Rightarrow (x-2+2x+2)(x-2-2x-2) < 0 \Rightarrow (3x)(-x-4) < 0$$

$$\frac{-4}{-} \quad \circ \quad \frac{0}{+} \Rightarrow R \quad -[-4, 0]$$

❖ راه دوم

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} = -1 \Rightarrow 2x-1 = -x-1 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} = 3 \Rightarrow 2x-1 = 3x+3 \Rightarrow x = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{\checkmark} \quad \circ \quad \frac{0}{\checkmark}$$

سؤال ۱۳۱: فرض کنید رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از

کدامیک از نقاط زیر می گذرد؟

- (۱) $(5, -7)$ (۲) $(5, -9)$ (۳) $(2, 5)$ (۴) $(1, 5)$

پاسخ: گزینه ۲

$$y = a(x+1)^2 + 9$$

$$y(3) = 1 \Rightarrow 1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow -8 = 16a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$$

$(5, -9)$ از تابع می گذرد.

سؤال ۱۳۲: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x; (x > 1)$ مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x

ها را ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از

مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad x > 1$$

قرینه نمودار نسبت به محور x ها $\rightarrow -(x-1)^2 + 1$ $\xrightarrow{۱۶ واحد به سمت بالا}$ $\rightarrow -(x-1)^2 + 17$

$$(x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \Rightarrow (x-1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow x = \begin{cases} 4 & x > 1 \\ -2 \end{cases} \rightarrow x = 4$$

$$f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8$$

$$\text{فاصله از مبدأ: } \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{4^2(1+2^2)} = 4\sqrt{5}$$

سؤال ۱۳۳: در بازه (a, b) نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

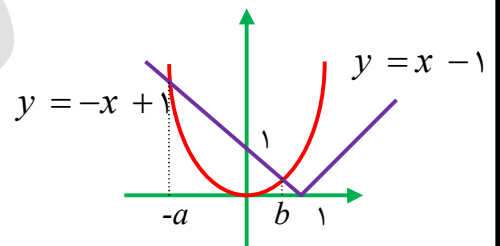
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$(x-1)^2 > 4x^4 \xrightarrow{\text{جذر می گیریم}} |x-1| > 2x^2$$

$$2x^2 = -x + 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b}$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow a \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow b \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

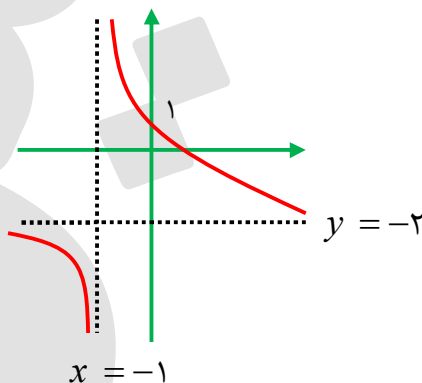


سؤال ۱۳۴: اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 1]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} f(x) = [x] - x \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0 \\ g(x) = \frac{1-2x}{x+1} \end{cases}$$



نمودار تابع $g(x)$:

برد تابع $f(x)$ $(-1, 0]$ است حال باید بینیم عرض تابع $g(x)$ در بازه $(-1, 0]$ چه تغییری می کند:

$$-1 < x \leq 0 \rightarrow \text{بر } g \circ f \in [1, +\infty)$$

سؤال ۱۳۵: فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1$$

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(3) = x \Rightarrow f^{-1}(3) = x \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$(\sqrt{x} + 1)^2 - 1 = 3$$

$$(\sqrt{x} + 1)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$g(15) = x \Rightarrow f^{-1}(15) = x \Rightarrow f(x) = 15 \Rightarrow x = 9$$

$$(\sqrt{x} + 1)^2 - 1 = 15$$

$$(\sqrt{x} + 1)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

سؤال ۱۳۶: تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه

دوم را با کدام طول قطع می کند؟

 $\frac{1}{2}$ (۴)

-۱ (۳)

 $-\frac{3}{4}$ (۲)

 $-\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

❖ راه اول: $f(x) = x - \frac{1}{2x}$, دامنه $(0, +\infty)$

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow x = f(-x) \Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

❖ راه دوم: فرض کنیم نمودار f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را در نقطه $(a, -a)$ قطع کند ($a < 0$)

$$\begin{cases} a \\ -a \end{cases} \in f^{-1} \Rightarrow \begin{cases} -a \\ a \end{cases} \in f \xrightarrow{a < 0} -a + \frac{1}{2a} = a \Rightarrow \frac{1}{2a} = 2a$$

$$4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{2}$$

سؤال ۱۳۷: اگر $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ باشد آنگاه $\log_{18} 8$ کدام است؟

 $\frac{3}{4}$ (۴)

 $\frac{8}{11}$ (۳)

 $\frac{5}{7}$ (۲)

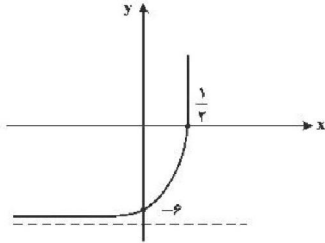
 $\frac{15}{22}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_3^2 = \frac{5}{8}$$

$$\log_{18}^8 = \frac{\log_3^8}{\log_3^{18}} = \frac{3 \log_3^2}{2 \log_3^3 + \log_3^2} = \frac{3 \times \frac{5}{8}}{2 + \frac{5}{8}} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

سؤال ۱۳۸: شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(2)$ کدام است؟



(۱) ۲۳۴

(۲) ۱۰۸

(۳) ۷۲

(۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۱

$$f(0) = -6 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^b = -6 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^b = 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$\Rightarrow f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax-1} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}ax-1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}ax-1} = 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{1}{2}ax - 1 = -2 \Rightarrow \frac{1}{2}ax = -1 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} = -9 + 3^{2x+1}$$

$$\Rightarrow f(2) = -9 + 3^5 = 243 - 9 = 234$$

سؤال ۱۳۹: تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

(۱) $\log_2(-1 + \sqrt{5})$ (۲) $\log_2(1 + \sqrt{5})$ (۳) $\log_2(2 + \sqrt{5})$ (۴) $\log_2(3 + \sqrt{5})$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = \frac{3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = \frac{3^x - 2^{-x}}{2}$$

$$f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2$$

$$\frac{3^x - 2^{-x}}{2} = 2 \Rightarrow 3^x - 2^{-x} = 4 \xrightarrow{\times 2^x} (3^x)^2 - 1 = 4(2^x)$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 4(3^x) = 1 \rightarrow \text{به طرفین ۴ و اهر اضافه میکنیم} \rightarrow (3^x)^2 - 4(3^x) + 4 = 5$$

$$(3^x - 2) = 5 \Rightarrow 3^x - 2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow 3^x = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow 3^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \log_3^{2+\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2}b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 3$$

سؤال ۱۴۰: حاصل عبارت $\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

(۱) $\sin^2(15^\circ)$ (۲) $\cos^2(15^\circ)$ (۳) $-\sin^2(15^\circ)$ (۴) $-\cos^2(15^\circ)$

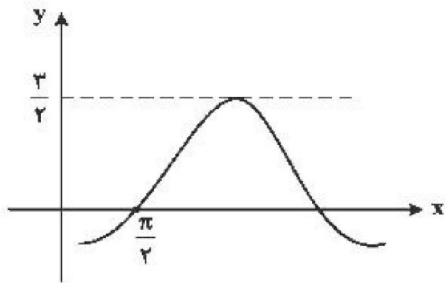
پاسخ: گزینه ۴

$$\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tan(270^\circ + 15^\circ)}_{\text{ناحیه چهارم}} \underbrace{(-\tan(180^\circ - 15^\circ))}_{\text{ناحیه دوم}} - \underbrace{\sin(1080^\circ + 15^\circ)}_{\text{ناحیه اول}} \underbrace{\cos(270^\circ - 15^\circ)}_{\text{ناحیه سوم}}$$

$$= (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - \sin(15^\circ)(-\sin 15^\circ) = -1 + \sin^2 15^\circ = -\cos^2 15^\circ$$

سؤال ۱۴۱: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. مقدار a کدام است؟



- (۱) -۱
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

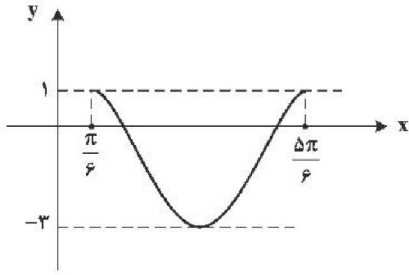
اگر نمودار را امتداد بدهیم متوجه می شویم که با شروع از محور y ها، نمودار رو به پائینی است یعنی: $b < 0$

$$\text{بیشترین مقدار تابع} = \frac{3}{2} \xrightarrow{b < 0} \boxed{a - b = \frac{3}{2}} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{a + \frac{b}{2} = 0} \Rightarrow \boxed{b = -2a} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a + 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow 3a = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

سؤال ۱۴۲: شکل زیر نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازه تناوب است. مقادیر b, c کدام اند؟



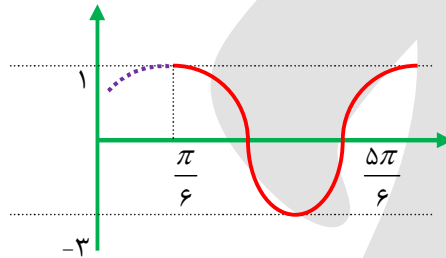
(۱) $b = 3, c = -1$

(۲) $b = 3, c = -2$

(۳) $b = \frac{3}{2}, c = -2$

(۴) $b = \frac{3}{2}, c = -1$

پاسخ: گزینه ۱



با شروع از محور y ها تابع رو به بالا است پس: $ab > 0$

با فرض $a > 0, b > 0$ جلو می رویم:

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \xrightarrow{b > 0} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

بیشترین مقدار تابع: $a + c = 1$

کمترین مقدار تابع: $-a + c = -3$

$\Rightarrow c = -1, a = -2$

$y = 2 \sin 3x - 1$

سؤال ۱۴۳: تعداد جواب های معادله مثلثاتی $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$ در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$\sin(3x) \cos(3x) = \frac{1}{4}$

$$\boxed{\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

$2 \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ 6x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{36}$$

پس معادله $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ در ۴ جواب دارد.

سؤال ۱۴۴: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{1 - \sin^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-(2\sin x + 1)}{1 + \sin x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = -\frac{2+1}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

شرط لازم و کافی برای پیوستگی $a = -\frac{3}{2}$

سؤال ۱۴۵: تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + ax^3 + 7x^2 - 2}{ax^3 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد آنگاه

کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$

گزینه ۴: $-\frac{6}{11}$ گزینه ۳: $-\frac{5}{12}$ گزینه ۲: $-\frac{6}{17}$ گزینه ۱: $-\frac{4}{17}$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + ax^3 + 7x^2 - 2}{ax^3 + 7x^2 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{4x^3}{ax^3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ n = 3 \\ \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{12x(x-1)}{2x(3x+7)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6(x-1)}{3x+7} = \frac{6\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}+7} = -\frac{6}{17}$$

سؤال ۱۴۶: خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ در

نقطه $x = 2$ مشترک اند. مقدار b کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} f(2) = g(2) \\ f'(2) = g'(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 4 \\ g(2) = 4a + 2b \end{cases} \Rightarrow 4a + 2b = 4 \Rightarrow \boxed{2a + b = 2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \\ g'(x) = 2ax + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = -3 \\ g'(2) = 4a + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{4a + b = -3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + b = -3 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{5}{2}}, \boxed{b = 7}$$

سؤال ۱۴۷: مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt[3]{u^2}}{\sqrt[3]{u}} \rightarrow \frac{2u'}{3\sqrt[3]{u}}}$$

$$f'(x) = \frac{2 \left(\frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2} \right)}{3 \sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}} \Rightarrow f'(-2) = \frac{2 \left(\frac{6 \times (-1) - 3(-4-4)}{(-1)^2} \right)}{3 \sqrt[3]{\frac{-4-4}{-1}}}$$

$$= \frac{2(-6+24)}{3 \sqrt[3]{8}} = \frac{2 \times 18}{3 \times 2} = 6$$

سؤال ۱۴۸: مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2+1}$ کدام است؟

۱ + \sqrt{3} (۴)

-1 + \sqrt{3} (۳)

1 + \sqrt{5} (۲)

-1 + \sqrt{5} (۱)

پاسخ: گزینه ۴

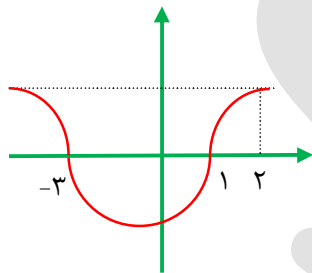
$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2+1}$$

تابع در نقاط ۱ و ۳- محور x ها را قطع می کند و مماس افقی تابع $y=1$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = x^2 + 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

یعنی تابع در $x=2$ مماس افقی محور را قطع کند.



$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) + 2x - 4}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x - 4}{x^2 + 1}$$

تابع را مساوی هویپیتال آن قرار می دهیم:

$$\frac{2x - 4}{x^2 + 1} \stackrel{HOP}{=} \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 - 4x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 4x = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5 \xrightarrow{x > 2} x - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{5}$$

$$f(x) = 1 + \frac{2x - 4}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2(2 + \sqrt{5}) - 4}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = 1 + \frac{4 + 2\sqrt{5} - 4}{4 + 4\sqrt{5} + 5 + 1}$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = 1 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} - 1$$

سؤال ۱۴۹: کوتاهترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x} + 7$ کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

۵ (۳)

$4/5$ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$A(5, 0)$

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x} + 7)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

$$= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 16} = \sqrt{(x-4)^2 + 16} = (x-4)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + 16 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + 16} \geq 4$$

سؤال ۱۵۰: به چند طریق می توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد. به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

۱۵۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

۱۲۵ (۲)

۱۰۵ (۱)

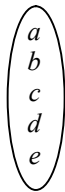
پاسخ: گزینه ۴

❖ راه اول

$$\binom{1}{3} \binom{2}{5} \binom{2}{4} \binom{2}{2} = 3 \times 5 \times 6 \times 1 = 90$$

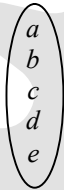
$$\binom{3}{3} \binom{1}{5} \binom{1}{2} \binom{1}{1} = 3 \times 10 \times 2 = 60$$

تعداد کل حالات = $90 + 60 = 150$



کل حالات = $243 = 3^5$ کل حالات

(۱) تمام جایزه ها فقط به دو نفر برسد



$$\binom{3}{2} [3^5 - 1 - 1] = 3 \times 30 = 90$$

(۲) تمام جایزه ها فقط به یک نفر برسد = ۳ حالت

تعداد کل حالات = $243 - 90 - 3 = 150$

سؤال ۱۵۱: ۱۰ نفر در یک صف ایستاده اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آنها در کنار هم نیستند؟

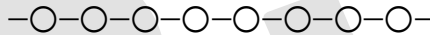
$\frac{9}{10}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\frac{8! \binom{9}{2} \times 20}{10!} = \frac{\binom{9}{2}}{\frac{10!}{8!2!}} = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

ابتدا هشت نفر دیگر را می نشانیم سپس آن دو نفر باید از ۹ جای باقیمانده در ۲ جا بنشینند.

سؤال ۱۵۲: داده های آماری ۱۰, ۱۰, ۸, ۸, ۸, ۷, ۵ مفروض اند. ضریب تغییرات داده ها کدام است؟

$\left(\sqrt{\frac{2}{7}} \cong 0.534 \right)$

۰/۳۰ (۴)

۰/۲۵ (۳)

۰/۲۰ (۲)

۰/۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$-3, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$$

از همه داده ها ۱ واحد کم می کنیم و چون مجموع اعداد درست آمده برابر صفر است پس: $\bar{x} = 1$

$$\sigma^2 = \frac{9+1+4+4}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{18}{7}}}{1} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

سؤال ۱۵۳: اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادله $y = 0, 2y - x = 2, y + 2x = 16$ هستند. اندازه میانه

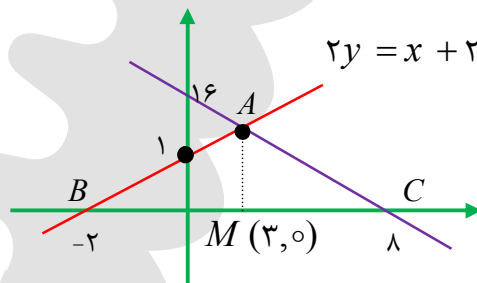
نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

$$y + 2x = 16 \quad 2y - x = 2 \quad y = 0$$

$$\frac{-2+16}{2} = 7$$

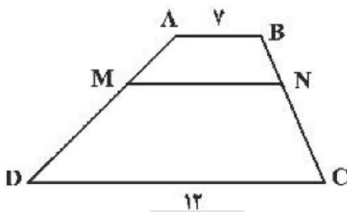


ابتدا A را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow M(6, 4)$$

$$AM = \sqrt{(6-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5$$

سؤال ۱۵۴: در دوزنقه ABCD پاره خط MN موازی قاعده ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است. اندازه MN کدام است؟

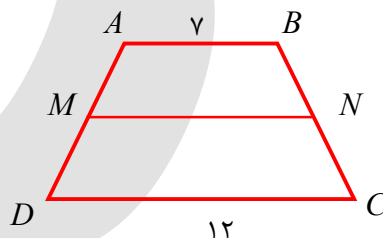


- (۱) ۸ (۲) $8/75$ (۳) ۹ (۴) $9/5$

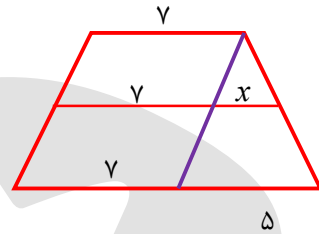
پاسخ: گزینه ۴

❖ راه اول

$$\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$$

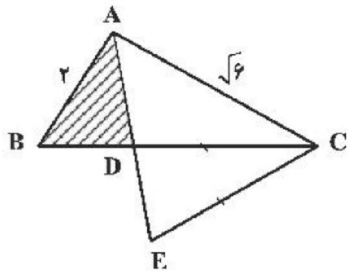


$$\frac{x}{5} = \frac{MA}{AD} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \boxed{MN = 7 + 2 = 9}$$



$$MN = \frac{2 \times 12 + 3 \times 7}{2 + 3} = \frac{24 + 21}{5} = \frac{45}{5} = 9 \quad \text{❖ راه دوم}$$

سؤال ۱۵۵: در شکل زیر AD نیمساز زاویه A و $CE=CD$ است. نسبت مساحت های دو مثلث ACE و ABD کدام است؟



$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$CE = CD$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}}$$

$$\begin{cases} CD = CE \Rightarrow E = D_1 = D_2 \\ \hat{B}AD = \hat{E}AC = \alpha \end{cases}$$

پس دو مثلث ACE و ABD دو حالت دو زاویه با هم متشابه هستند:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACE}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

