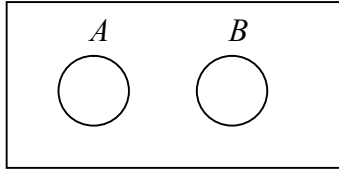


پاسخ تشریحی کنکور خارج از کشور ریاضی ۹۹

سؤال ۱: فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی و جدا از هم با یک مجموعه مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟

$$(A \cup B)' = \phi \quad (۴) \quad A \cap B' = A \quad (۳) \quad A - B' = \phi \quad (۲) \quad A \subset B' \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴



A و B جدا از هم هستند یعنی: $A \cap B = \phi$

گزینه ۱) با توجه به نمودار واضح است که $A \subset B'$

گزینه ۲) درست است $A - B' = A \cap B = \phi$

گزینه ۳) درست است $A \cap B' = A - B = A$

گزینه ۴) با توجه به شکل $A \cup B$ تماماً مجموعه مربع نمی شود پس $(A \cup B)' = \phi$ نادرست است.

سؤال ۲: مجموعه $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B'))$ با کدام مجموعه برابر است؟

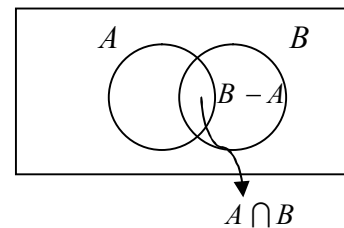
$$B' \quad (۴) \quad A' \quad (۳) \quad B \quad (۲) \quad A \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} (A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B')) &= A - (A \cap B') = A \cap (A \cap B')' \\ &= A \cap (A' \cup B) = \underbrace{(A \cap A')}_{\phi} \cup (A \cap B) = \underline{A \cap B} \end{aligned}$$

$$B \cap (A \cap B)' = B \cap (A' \cup B') = (B \cap A') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\phi} = \underline{B \cap A'} = \underline{B - A}$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup (B - A) = B$$



سؤال ۳: به ازای یک مقدار a چند جمله ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است.

در این حالت باقیمانده $P(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

$$-10 \quad (۱) \quad -8 \quad (۲) \quad 4 \quad (۳) \quad 6 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ بر } 2x - 1 \text{ بخش پذیر است پس:}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 8} a + 1 - 8 = 0 \Rightarrow \underline{a = 7}$$

پس $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ باقیمانده تقسیم بر $x + 2$ برابر است با: $P(-2)$

$$P(-2) = 2(-2)^4 + a(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

سؤال ۴: نمودارهای دو تابع $y = x + 7$, $y = |x - 2| + |x + 1|$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

$$10\sqrt{2} \quad (4)$$

$$13 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

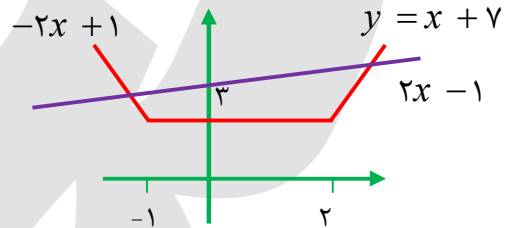
$$8\sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$2x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow A \begin{matrix} 8 \\ 15 \end{matrix}$$

$$-2x + 1 = x + 7 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow B \begin{matrix} -2 \\ 5 \end{matrix}$$

$$AB = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$



سؤال ۵: با فرض $f(x) = x^2 - 4x + 9; x \geq 2$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = x^2 - 4x + 9; x \geq 2 \Rightarrow (x - 2)^2 + 5; x \geq 2$$

$$g(x) = \frac{3-x}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$$

$$\begin{cases} -9 \xrightarrow{g^{-1}} [b] \xrightarrow{f^{-1}} a \\ a \xrightarrow{f} [b] \xrightarrow{g} -9 \end{cases}$$

$$g(b) = -9 \Rightarrow \frac{3-b}{2} = -9 \Rightarrow 3-b = -18 \Rightarrow b = 21$$

$$f(a) = 21$$

$$\Rightarrow (a - 2)^2 + 5 = 21 \Rightarrow (a - 2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 4 \Rightarrow a = 6 \\ a - 2 = -4 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a \geq 2} a = 6$$

سؤال ۶: ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده سپس منحنی حاصل را

۴ واحد به سمت بالا انتقال می دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

$$-2, 1 \quad (4)$$

$$-1, 2 \quad (3)$$

$$-1, 1 \quad (2)$$

$$0, 2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

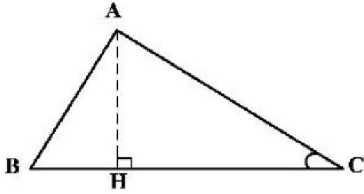
$$\begin{cases} x \longrightarrow -x \\ y \longrightarrow -y \end{cases} \quad \text{برای قرینه کردن یک نمودار نسبت به مبدأ}$$

$$y = (x - 1)^2 \rightarrow \text{قرینه نسبت به مبدأ} \rightarrow -y = (-x - 1)^2 \Rightarrow -y = (x + 1)^2$$

$$\Rightarrow y = -(x + 1)^2 \rightarrow \text{۴ واحد به سمت بالا} \rightarrow -(x + 1)^2 + 4 \Rightarrow (x - 1)^2 = -(x + 1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 + 2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

سؤال ۷: در شکل زیر $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$ اندازه ارتفاع AH کدام است؟



- ۴۸ (۱)
- ۵۶ (۲)
- ۶۴ (۳)
- ۷۲ (۴)

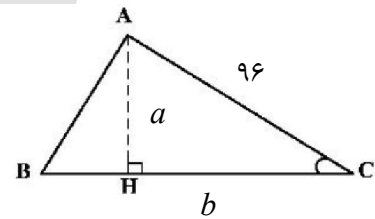
پاسخ: گزینه ۳

$$\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AC = 96$$

$$\cot C = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 96^2 \Rightarrow a^2 + \frac{5a^2}{4} = 96^2 \Rightarrow \frac{9a^2}{4} = 96^2 \Rightarrow \frac{3a}{2} = 96 \Rightarrow \frac{a}{2} = 32 \Rightarrow a = 64$$

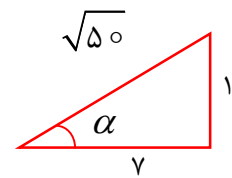


سؤال ۸: اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد مقدار $\sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right)$ کدام است؟

- $-\frac{4}{5}$ (۱)
- $-\frac{3}{5}$ (۲)
- $\frac{3}{5}$ (۳)
- $\frac{4}{5}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{در ناحیه اول } \alpha} \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$



$$\sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{12\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left(3\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$= -\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}}$$

سؤال ۹: جواب های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{3}, k \in Z \quad (۲)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in Z \quad (۱)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z \quad (۴)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

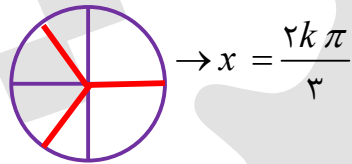
$$\Rightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \cos 2x$$

$$\cos x = \cos 2x$$

$$\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



سؤال ۱۰: اعداد طبیعی فرد را طوری دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد

یعنی $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$ در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

$$۱۶۵۱ \quad (۴)$$

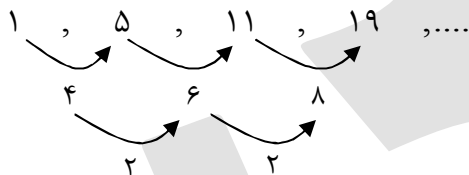
$$۱۶۳۹ \quad (۳)$$

$$۱۵۸۹ \quad (۲)$$

$$۱۵۶۳ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

دنباله جملات آخر را می نویسیم:



$$\begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ 3a + b = 4 \Rightarrow 3 + b = 4 \Rightarrow b = 1 \\ a + b + c = 1 \Rightarrow 1 + 1 + c = 1 \Rightarrow c = -1 \end{cases} \Rightarrow a_n = n^2 + n - 1$$

این اعداد تشکیل دنباله درجه دوم می دهند:

$$a_{40} = 40^2 + 40 - 1 = 1600 + 39 = 1639$$

سؤال ۱۱: در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرا درارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می

کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می شود؟ $(\log 2 = 0/3, \log 3 = 0/48)$

۳ (۴)

۳۰ (۳)

۲۴ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$100, 100 \left(1 - \frac{1}{25}\right), 100 \left(1 - \frac{1}{25}\right)^2, \dots \xrightarrow{\text{در مرحله } n \text{ ام}} 100 \left(1 - \frac{1}{25}\right)^n = \frac{1}{3} \times 100$$

$$\Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{3} \Rightarrow n = \log_{\frac{24}{25}} \frac{1}{3} = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{24}{25}} = \frac{-\log 3}{\log 24 - \log 25}$$

$$= \frac{-\log 3}{\log 2^3 \times 3 - \log \frac{100}{4}} = \frac{-\log 3}{3 \log 2 + \log 3 - (2 - 2 \log 2)} = \frac{-\log 3}{5 \log 2 + \log 3 - 2}$$

$$= \frac{-0/48}{5 \times 0/3 + 0/48 - 2} = \frac{-0/48}{1/5 + 0/48 - 2} = \frac{-0/48}{-0/52} = 24$$

سؤال ۱۲: فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

۰ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$+\infty$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۱۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$\boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\frac{-x}{\sqrt{2}}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$$

سؤال ۱۴: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x; |x| \leq 2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = [x] \sin \pi x \quad -2 \leq x \leq 2$$

تابع در نقاط صحیح ۲، ۱، ۰، -۱، -۲ می تواند ناپیوسته باشد زیرا $[x]$ در این نقاط ناپیوسته است. اما توجه کنید که $\sin \pi x$ در تمام این نقاط صفر می شود (عامل صفرشونده). پس تابع در تمام این نقاط پیوسته است یعنی نقطه ناپیوستگی ندارد. هواسمان باشد نقاط ابتدا و انتهای بازه یعنی ۲ و -۲ نقاط ناپیوستگی تابع می شود پس در ۲ نقطه ناپیوسته است.

سؤال ۱۵: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ فقط یک مجانب قائم $x = 2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد معادله مجانب افقی آن کدام است؟

- (۱) $y = -1$ (۲) $y = -\frac{1}{2}$ (۳) $y = \frac{1}{2}$ (۴) $y = \frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع فقط در $x = 2$ مجانب قائم دارد یعنی $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج است.

$$S = 2 + 2 = 4 = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -8 \quad P = 2 \times 2 = 4 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 8$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c} \quad f(3) = 6 \Rightarrow \frac{9a + 21}{2} = 6$$

$$\Rightarrow 9a + 21 = 12 \Rightarrow 9a = -9 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{مجانب افقی تابع}$$

سؤال ۱۶: اگر f یک تابع مشتق پذیر $g(x) = f\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (راه اول)

$$g(x) = f\left(\frac{-\sin x + 1}{\sin x + 1}\right) \quad g'(x) = \frac{-2 \cos x}{(\sin x + 1)^2} f'\left(\frac{-\sin x + 1}{\sin x + 1}\right)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} f'\left(\frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 1}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{9}{4}} f'\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

❖ راه دوم

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} + 1} \right)^2 = \left(\frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right)^2 = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$g(x) = f \left(\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right)$$

$$g'(x) = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$g' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -1 \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{6} \right) \left(\tan \frac{\pi}{6} \right) f' \left(\tan^2 \frac{\pi}{6} \right) f' \left(\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -1 \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) f' \left(\frac{1}{3} \right) \Rightarrow 1 = -\frac{4}{3} f' \left(\frac{1}{3} \right) \Rightarrow f' \left(\frac{1}{3} \right) = -\frac{3}{4}$$

سؤال ۱۷: فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$, $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \\ g(x) = x^2 + ax + b \end{cases}$$

طول نقطه مشترک $x = 4$ است:

$$f(4) = 4\sqrt{4} = 8 \Rightarrow (4, 8)$$

$$(4, 8) \in g \Rightarrow 16 + 4a + b = 8 \Rightarrow \boxed{4a + b = -8}$$

$$f'(4) = g'(4) \text{ در نقطه تماس}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ g'(x) = 2x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} = 3 \\ g'(4) = 8 + a \end{cases} \Rightarrow 8 + a = 3 \Rightarrow \boxed{a = -5} \quad 4(-5) + b = -8 \Rightarrow \boxed{b = 12}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4} \right] (x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

سؤال ۱۸: در تابع با ضابطه

است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

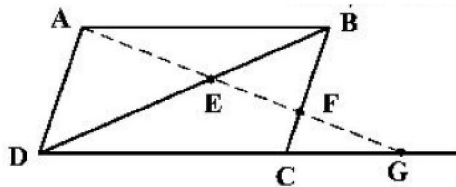
$$f'(2) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$f'(5) \rightarrow \text{در ضابطه پایین در هوالی } x = 5, \left[\frac{x}{4}\right] \text{ برابر ۱ است} \rightarrow f(x) = x^2 - 9x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

سؤال ۱۹: در شکل زیر چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. مقدار EG - EF کدام است؟



EA^۲ (۱)

ED^۲ (۲)

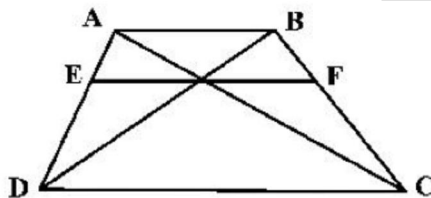
EB × ED (۳)

FB × FC (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} \triangle ABE \sim \triangle EGD &\Rightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{BE}{DE} \quad (1) \\ \triangle EBF \sim \triangle EAD &\Rightarrow \frac{EF}{AE} = \frac{BE}{ED} \quad (2) \\ &\xrightarrow{(1),(2)} \frac{AE}{EG} = \frac{EF}{AE} \Rightarrow AE^2 = EF \times EG \end{aligned}$$

سؤال ۲۰: در شکل زیر AB || DC و اندازه پاره های AB و DC به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازه پاره خط EF کدام است؟



45/6 (۲)

45/7 (۱)

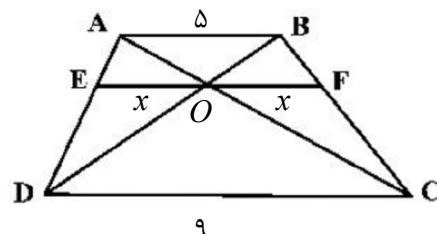
7 (۴)

3√5 (۳)

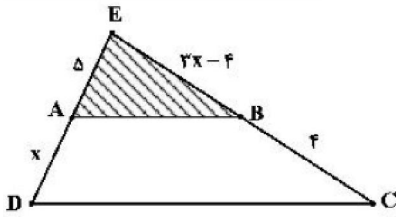
پاسخ: گزینه ۱

$$DE = OF = x \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{5 \times 9}{5 + 9} = \frac{45}{14}$$

$$\Rightarrow EF = 2x = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$



سؤال ۲۱: در شکل زیر مساحت دوزنقه ABCD چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



$$\frac{16}{9} \quad (2) \qquad \frac{9}{4} \quad (1)$$

$$\frac{36}{25} \quad (4) \qquad \frac{25}{16} \quad (3)$$

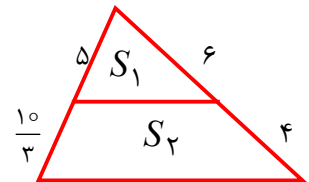
پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{5}{x} = \frac{2x-4}{4} \Rightarrow 3x^2 - 4x = 20 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$x^2 - 4x - 60 \Rightarrow (x-10)(x+6) \Rightarrow (3x-10)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\frac{S_1}{S_1 + S_2} = \left(\frac{6}{6+4}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{16}{9}$$



سؤال ۲۲: دایره ای به مرکز (۱, ۳) بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ و تری به طول $2\sqrt{21}$ جدا می کند. این

دایره بر روی محور xها و تری با کدام اندازه جدا می کند؟

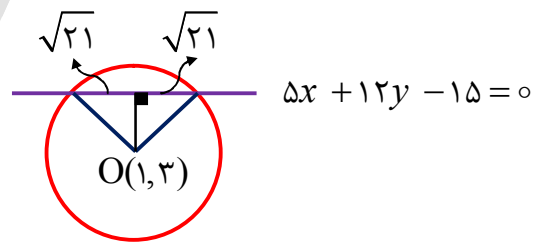
$$2\sqrt{6} \quad (1) \qquad 6 \quad (2) \qquad 2\sqrt{15} \quad (3) \qquad 8 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

فاصله $O(1, 3)$ از خط $5x + 12y - 15 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|5 + 36 - 15|}{13} = 2 \Rightarrow R = \sqrt{21 + 4} = 5$$

$$\text{معادله دایره: } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$



محل برخورد با محور xها: $y = 0$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ x-1 = -4 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

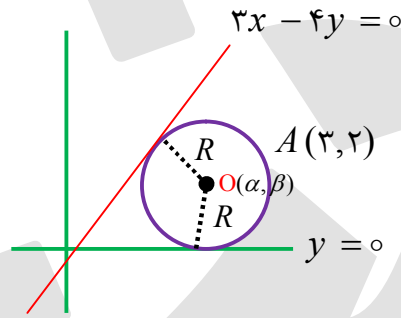
فاصله این دو نقطه ۸ است.

سؤال ۲۳: از میان دایره های گذرا از نقطه $A(3, 2)$ و مماس بر خطوط $3x - 4y = 0$ و $y = 0$ کوچکترین شعاع

دایره کدام است؟

$$\frac{13}{9} \quad (4) \qquad \frac{4}{3} \quad (3) \qquad \frac{3}{2} \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

فاصله نقطه $O(\alpha, \beta)$ از خط $3x - 4y = 0$ و خط $y = 0$ به یک فاصله است (R)

$$\frac{|3\alpha - 4\beta|}{5} = |\beta| \Rightarrow 3\alpha - 4\beta = 5\beta \Rightarrow 3\alpha = 9\beta \Rightarrow \alpha = 3\beta$$

$$O(3\beta, \beta) \Rightarrow O(3R, R)$$

$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(3R - 3)^2 + (R - 2)^2} = R \Rightarrow 9R^2 - 18R + 9 + R^2 - 4R + 4 = R^2$$

$$\Rightarrow 9R^2 - 22R + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = \frac{13}{9} \end{cases}$$

بزرگترین شعاع $\frac{13}{9}$ است.سؤال ۲۴: یک بیضی به قطرهای $AA' = 14$ و $BB' = 4\sqrt{6}$ و کانون F نزدیک به نقطه A مفروض است. خطعمود بر قطر AA' از نقطه F دایره به قطر AA' را در نقطه M قطع می کند. اندازه پاره خط AM کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2\sqrt{6} \quad (3)$$

$$2\sqrt{7} \quad (2)$$

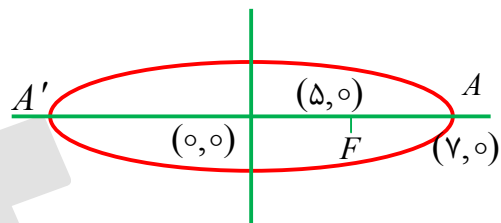
$$7 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ (راه اول)

$$AA' = 14 \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

$$BB' = 4\sqrt{6} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7^2 - 4 \times 6} = \sqrt{25} = 5$$

خط عمود بر AA' و گذرنده از F ، همان خط $x = 5$ است. معادله دایره به مرکز $(0,0)$ و قطر AA' برابر است با:

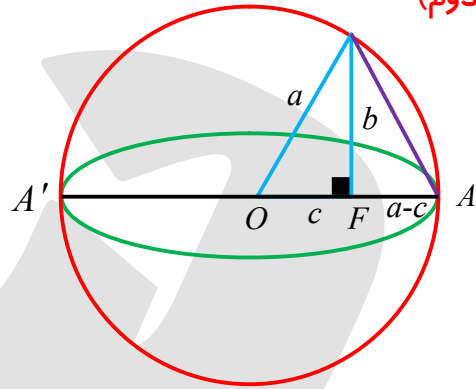
$$x^2 + y^2 = 49 \xrightarrow{x=5} 25 + y^2 = 49 \Rightarrow y^2 = 24 \Rightarrow y = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow MA^2 = (2\sqrt{6})^2 + 2^2 = 24 + 4 = 28 \Rightarrow MA = 2\sqrt{7}$$

❖ راه دوم

$$\Rightarrow MA^2 = b^2 + (a-c)^2 = (2\sqrt{6})^2 + (7-5)^2$$

$$\Rightarrow MA^2 = 24 + 4 = 28 \Rightarrow MA = 2\sqrt{7}$$



سؤال ۲۵: تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

۱۶۵۸ (۴)

۱۷۴۸ (۳)

۱۷۹۲ (۲)

۱۸۴۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ❖ راه اول

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} \text{ باشد} \\ \frac{7}{5} \text{ نباشد} \end{array} \right. \Rightarrow 9 \times 8 \times 7 + 8 \times 8 \times 7 \times 3$$

عدد ۵ می تواند یکان دهگان یا صدگان باشد.

$$= 8 \times 7(9 + 24) = 56 \times 33 = 1848$$

❖ راه دوم

تعداد کل اعداد چهار رقمی با ارقام متمایز بدون ۵ = تعداد کل اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری شامل ۵

$$\Rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7 - 8 \times 8 \times 7 \times 6$$

$$= 8 \times 7(9 \times 9 - 8 \times 6) = 56(81 - 48) = 56 \times 33 = 1848$$

سؤال ۲۶: یک تاس سالم را سه بار به طور متوالی پرتاب می کنیم، احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶ کدام است؟

$\frac{31}{72}$ (۴)

$\frac{91}{216}$ (۳)

$\frac{41}{108}$ (۲)

$\frac{13}{36}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

(هیچ بار ۶ ظاهر نشود) $1 - p =$ (حداقل یک بار رو شدن ۶) p

$$p = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

سؤال ۲۷: تاس همگنی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس های رو شده ۳ باشد کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \qquad \frac{3}{4} \quad (2) \qquad \frac{1}{3} \quad (3) \qquad \frac{15}{36} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه؟؟؟

❖ راه اول

P (مجموع اعداد رو شده فرد باشد | حداقل یک تاس ۳ ظاهر شود)

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(\text{مجموع اعداد رو شده فرد باشد و حداقل یک تاس ۳ ظاهر شود})}{n(\text{مجموع اعداد رو شده فرد باشد})}$$

$$n(B) = \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{\text{هر سه فرد}} + \underbrace{(3 \times 3 \times 3)}_{\text{دو تا زوج و یکی فرد}} \times \frac{3!}{2!} = 108$$

$$n(A \cap B) = \underbrace{\left(1 \times 3 \times 3 \times \frac{3!}{2!}\right)}_{\substack{\text{فقط یک عدد ۳ ظاهر شود} \\ \text{و مجموع دو تاس دیگر} \\ \text{زوج باشد (تاس دیگر زوج} \\ \text{باشند)}}} + \underbrace{\left(1 \times 2 \times 2 \times \frac{3!}{2!}\right)}_{\substack{\text{فقط یک عدد ۳ ظاهر شود} \\ \text{و مجموع دو عدد دیگر} \\ \text{زوج باشد. (هر دو تاس فرد} \\ \text{باشند)}}} + \underbrace{\left(1 \times 1 \times 2 \times \frac{3!}{2!}\right)}_{\substack{\text{دقیقاً دو بار عدد ۳ شاهر} \\ \text{شود (عدد دیگر فرد باشد} \\ \text{اما ۳ نباشد)}}} + \underbrace{(1 \times 1 \times 1)}_{\substack{\text{هر سه عدد ۳} \\ \text{ظاهر شود}}}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{46}{108}$$

❖ راه دوم) متمم این سوال می شود اصلاً ۳ ظاهر نشود و مجموع دو تاس فرد باشد.

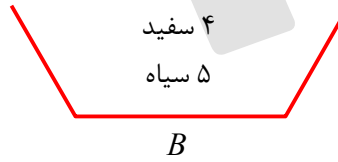
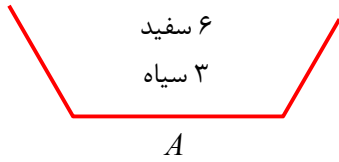
$$\underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{\substack{\text{هر سه عدد فرد باشند} \\ \text{(اما ۳ نباشند)}}} + \underbrace{\left(1 \times 3 \times 3 \times \frac{3!}{2!}\right)}_{\substack{\text{دو عدد زوج و یک عدد فرد} \\ \text{باشد.} \\ \text{(عدد فرد، ۳ نیست)}}} = 62$$

$$n(A \cap B) = 108 - 62 = 46 \Rightarrow P(A) = \frac{46}{108}$$

سؤال ۲۸: در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

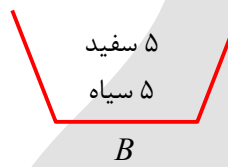
$$\frac{20}{27} \quad (1) \qquad \frac{34}{45} \quad (2) \qquad \frac{38}{45} \quad (3) \qquad \frac{23}{27} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱ ❖ (راه اول)



از جعبه اول سفید خارج شود

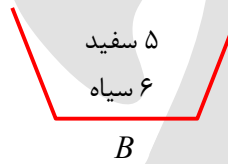
$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



$$\frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}$$

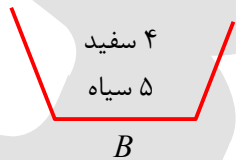
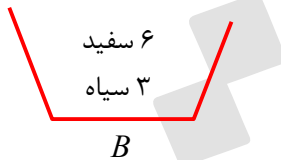
از جعبه اول سیاه خارج شود

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$



$$\frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{10+25}{45} + \frac{16+4 \times 6}{3 \times 45} = \frac{70+30}{3 \times 45} = \frac{100}{3 \times 5 \times 9} = \frac{20}{27}$$



❖ (راه دوم)

متمم اینکه حداقل یک مهره سفید باشد، این است که هر دو مهره سیاه باشند.

از جعبه اول سفید خارج شود

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$$

از جعبه اول سیاه خارج شود

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$



$$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{3} \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{3} \times \frac{10}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{15}{45} = \frac{7}{27}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{20}{27}$$

سؤال ۲۹: در دو پیشامد مستقل A و B اگر $P(A \cap B) = 0/1$ ، $P(A \cup B) = 0/6$ و با

فرض $P(B') > P(B)$ احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۲ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

A و B مستقل از هم هستند:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (۱)$$

$$P(A \cap B) = 0/1 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0/1 \quad (I)$$

$$P(A \cup B) = 0/6 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 = P(A) + P(B) - 0/1$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = 0/7$$

$$\begin{cases} S = P(A) + P(B) = 0/7 \\ P = P(A) \cdot P(B) = 0/1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 0/7x + 0/1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 0/2)(x - 0/5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0/2 \\ x = 0/5 \end{cases}$$

$$P(B') > P(B) \Rightarrow 1 - P(B) > P(B) \Rightarrow P(B) < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(B) = 0/2 \quad \checkmark \\ P(B) = 0/5 \quad \times \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

سؤال ۳۰: طول یک مستطیل ۲ واحد کمتر از ۱/۵ برابر عرض آن است اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد.

محیط آن کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۹)

۶۴ (۴)

۶۰ (۳)

۵۶ (۲)

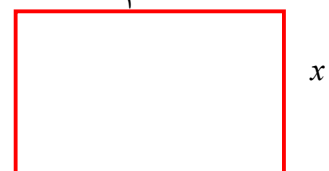
۵۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\left(\frac{3}{2}x - 2\right)x = 192 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - 2x = 192 \xrightarrow{\times 2}$$

$$3x^2 - 4x = 384 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 384 = 0$$

$$\frac{3}{2}x - 2$$



$$3x^2 - 4x - 384$$

$$x^2 - 4x - \frac{3 \times 6 \times 2}{3} \times \frac{32}{3}$$

$$(x - \frac{36}{3})(x + \frac{32}{3}) \Rightarrow x = 12$$

$$\text{طول مستطیل} = \frac{3}{2} \times 12 - 2 = 16$$

$$\text{مساحت} = 2(16 + 12) = 2(28) = 56$$

سؤال ۳۱: چند نقطه متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه مختصات می توان یافت که فاصله رأس C

از نقطه A و پاره خط AB به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۹)

۴ (۴)

۳ (۳)

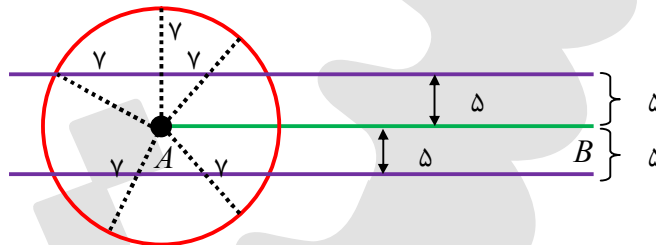
۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

وقتی می گوید فاصله نقطه C از نقطه A ، ۷ واحد است یعنی نقطه C روی دایره ای به ترکیب A و شعاع ۷ قرار دارد.

وقتی می گوید فاصله نقطه C از پاره خط AB ، ۵ واحد است یعنی دو خط به موازات AB و به فاصله ۵ از AB



دایره و خطوط در ۴ نقطه هم دیگر را قطع می کنند پس تعداد این نقاط ۴ است.

با تشکر از

استاد محمد گودرزی